Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия

АЛГЕБРА

И НАЧАЛА МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

10-11

БАЗОВЫЙ И УГЛУБЛЁННЫЙ УРОВНИ

Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия

АЛГЕБРА И НАЧАЛА МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

10–11 классы

Базовый и углублённый уровни

Учебник

Допущено Министерством просвещения Российской Федерации

12-е издание, стереотипное

Москва
«Просвещение»
2024

УДК 373.167.1:512+512(075.3)
ББК 22.14я721
М34

Авторы: *Ш. А. Алимов, Ю. М. Колягин, М. В. Ткачёва, Н. Е. Фёдорова, М. И. Шабунин*

На учебник получены **положительные** заключения **научной** (заключение РАО № 478 от 14.11.2016 г.), **педагогической** (заключение РАО № 167 от 09.11.2016 г.) и **общественной** (заключение РКС № 161-ОЭ от 22.12.2016 г.) экспертиз.

Условные обозначения

выделение основного материала

текст, который важно знать и полезно помнить

▶ ◁ решение задачи

● ○ обоснование утверждения или вывод формулы

обязательные задачи

дополнительные задачи

трудные задачи

✲ дополнительный более сложный материал

Математика: алгебра и начала математического анализа,
М34 **геометрия. Алгебра и начала математического анализа** : 10—11-е классы : базовый и углублённый уровни : учебник / Ш. А. Алимов, Ю. М. Колягин, М. В. Ткачёва [и др.]. — 12-е изд., стер. — Москва : Просвещение, 2024. — 463, [1] с. : ил.
ISBN 978-5-09-112136-0.

В данном учебнике завершается развитие основных идей курса алгебры 7—9 классов авторов Ю. М. Колягина и др. Элементарные функции изучаются в 10 классе классическими элементарными методами без привлечения производной; числовая линия и линия преобразований развиваются параллельно с функциональной; начала математического анализа рассматриваются в 11 классе. Система упражнений представлена тремя уровнями сложности. Задачи повышенной трудности в конце учебника содержат богатый материал для подготовки в вузы с повышенными требованиями по математике.

УДК 373.167.1:512+512(075.3)
ББК 22.14я721

ISBN 978-5-09-112136-0

I

глава

Действительные числа

Холодные числа, внешне сухие формулы математики полны внутренней красоты и жара сконцентрированной в них мысли.

А. Д. Александров

§ 1 Целые и рациональные числа

Изучение математики начинается со знакомства с натуральными числами, т. е. с числами 1, 2, 3, 4, 5, ... При сложении и умножении натуральных чисел всегда получаются натуральные числа. Однако разность и частное натуральных чисел могут не быть натуральными числами.

Дополнением натуральных чисел нулём и отрицательными числами (т. е. числами, противоположными натуральным) множество натуральных чисел расширяется до множества целых чисел, т. е. чисел 0, ±1, ±2, ±3, ... При сложении, вычитании и умножении целых чисел всегда получаются целые числа. Однако частное двух целых чисел может не быть целым числом.

Введение рациональных чисел, т. е. чисел вида $\frac{m}{n}$, где m — целое число, n — натуральное число, позволило находить частное любых двух целых чисел при условии, что делитель не равен нулю. Каждое целое число m также является рациональным, так как его можно представить в виде $\frac{m}{1}$.

При выполнении четырёх арифметических действий (кроме деления на нуль) над рациональными числами всегда получаются рациональные числа.

Если рациональное число можно представить в виде дроби $\frac{m}{10^k}$, где m — целое число, k — натуральное число, то его можно записать в виде конечной десятичной дроби. Например, число $\frac{327}{100}$ можно записать так: 3,27; число $-\frac{23}{10}$ можно записать так: –2,3; число $\frac{2}{5} = \frac{2 \cdot 2}{5 \cdot 2}$ можно записать так: $\frac{4}{10}$ или 0,4.

Существуют рациональные числа, которые нельзя записать в виде конечной десятичной дроби, например $\frac{1}{3}$, $-\frac{2}{9}$, $\frac{3}{7}$. Если, например, попытаться записать число $\frac{1}{3}$ в виде десятичной дроби, используя алгоритм деления уголком, то получится бесконечная десятичная дробь 0,3333..., которую называют *периодической*, повторяющуюся цифру 3 — её *периодом*. Периодическую дробь 0,333... коротко записывают так: 0,(3); читается: «Нуль целых и три в периоде».

Вообще, периодическая дробь — это бесконечная десятичная дробь, у которой, начиная с некоторого десятичного знака, повторяется одна и та же цифра или группа цифр — период дроби.

Например, десятичная дробь

$$23{,}14565656... = 23{,}14(56)$$

периодическая с периодом 56; читается «23 целых, 14 сотых и 56 в периоде».

Задача 1 Записать число $\frac{27}{11}$ в виде бесконечной десятичной дроби.

▶ Воспользуемся алгоритмом деления уголком:

$$\begin{array}{r|l} -27 & 11 \\ \underline{22} & 2{,}4545... \\ -50 & \\ \underline{44} & \\ -60 & \\ \underline{55} & \\ -50 & \\ \underline{44} & \\ 6... & \end{array}$$

Остатки повторяются, поэтому в частном повторяется одна и та же группа цифр: 45. Следовательно, $\frac{27}{11} = 2{,}4545... = 2{,}(45)$. ◁

Вообще, при делении целого числа m на натуральное число n на некотором шаге остаток может стать равным нулю или остатки начинают повторяться, так как каждый из остатков меньше n. Тогда начинают повторяться и цифры частного.

В первом случае в результате деления получается целое число или конечная десятичная дробь, во втором случае — бесконечная десятичная периодическая дробь. Например:

$$\frac{360}{15} = 24, \quad \frac{15}{4} = 3{,}75, \quad \frac{29}{9} = 3{,}222... = 3{,}(2).$$

Заметим, что каждое целое число или конечную десятичную дробь можно считать и бесконечной десятичной периодической дробью с периодом, равным нулю. Например:

$27 = 27{,}000... = 27{,}(0), \quad 3{,}74 = 3{,}74000... = 3{,}74(0).$

Итак, каждое рациональное число можно представить в виде бесконечной периодической десятичной дроби.

Справедливо и обратное утверждение: каждая бесконечная периодическая десятичная дробь является рациональным числом, так как может быть представлена в виде дроби $\frac{m}{n}$, где m — целое число, n — натуральное число.

Задача 2 Представить бесконечную периодическую десятичную дробь $0{,}2(18)$ в виде обыкновенной.

▶ Пусть $x = 0{,}2(18) = 0{,}2181818...$. Так как в записи этого числа до периода содержится только один десятичный знак, то, умножая на 10, получаем

$$10x = 2{,}181818... . \qquad (1)$$

Период этой дроби состоит из двух цифр. Поэтому, умножая обе части последнего равенства на $10^2 = 100$, находим

$$1000x = 218{,}181818... . \qquad (2)$$

Вычитая из равенства (2) равенство (1), получаем $990x = 216$. Отсюда $x = \frac{216}{990} = \frac{12}{55}$. ◁

Задача 3 Показать, что $2{,}999... = 3$.

▶ Пусть $x = 2{,}(9)$. Тогда $10x = 29{,}(9)$, откуда $9x = 27$, $x = 3$. ◁

Аналогично можно показать, что любую конечную десятичную дробь можно записать в виде бесконечной дроби двумя способами: с периодом 0 и с периодом 9. Например,

$$1{,}75 = 1{,}75000... = 1{,}74999...,$$
$$-0{,}2 = -0{,}2000... = -0{,}199999... .$$

Условимся в дальнейшем не использовать бесконечные десятичные дроби с периодом 9. Вместо таких дробей будем записывать конечные десятичные дроби или бесконечные десятичные дроби с периодом 0. Например,

$$5{,}2999... = 5{,}30000... = 5{,}3.$$

Упражнения

1 Записать в виде десятичной дроби:

1) $\frac{2}{3}$; 2) $\frac{8}{11}$; 3) $\frac{3}{5}$; 4) $-\frac{3}{4}$; 5) $-8\frac{2}{7}$; 6) $\frac{13}{99}$.

2 Выполнить действия и записать результат в виде десятичной дроби:

1) $\frac{2}{11}+\frac{1}{9}$; 2) $\frac{8}{13}+\frac{2}{3}$; 3) $\frac{1}{3}+1{,}25$;

4) $\frac{1}{6}+0{,}33$; 5) $\frac{3}{14}\cdot 1{,}05$; 6) $\frac{7}{9}\cdot 1{,}7$.

3 Записать в виде обыкновенной дроби бесконечную десятичную дробь:

1) $0{,}(6)$; 2) $1{,}(55)$; 3) $0{,}1(2)$;

4) $-0{,}(8)$; 5) $-3{,}(27)$; 6) $-2{,}3(82)$.

4 Вычислить:

1) $(20{,}88 : 18 + 45 : 0{,}36) : (19{,}59 + 11{,}95)$;

2) $\frac{7}{36}\cdot 9 + 8\cdot\frac{11}{32}+\frac{9}{10}\cdot\frac{5}{18}$.

5 Вычислить:

1) $\left(3\frac{4}{25}+0{,}24\right)2{,}15+\left(5{,}1625-2\frac{3}{16}\right)\frac{2}{5}$;

2) $0{,}364 : \frac{7}{25}+\frac{5}{16} : 0{,}125+2\frac{1}{2}\cdot 0{,}8$.

§ 2 Действительные числа

В § 1 было показано, что любое рациональное число можно записать в виде бесконечной десятичной периодической дроби и каждая бесконечная десятичная периодическая дробь является рациональным числом. Если же бесконечная десятичная дробь непериодическая, то она не является рациональным числом. Например, дробь 0,101001000100001..., в которой после первой цифры 1 стоит один нуль, после второй цифры 1 — два нуля и, вообще, после n-й цифры стоит n нулей, не является периодической. Поэтому написанная дробь не представляет никакого рационального числа. В этом случае говорят, что данная дробь является *иррациональным числом.*

Иррациональным числом называется бесконечная десятичная непериодическая дробь.

Иррациональные числа, как и рациональные, могут быть положительными и отрицательными. Например, число 0,123456..., в котором после запятой записаны подряд все натуральные числа, является положительным иррациональным числом. Число −5,246810..., в котором после запятой записаны подряд все чётные числа, является отрицательным иррациональным числом.

Числа $\sqrt{2}$, $\sqrt{7}$, $-\sqrt[3]{3}$, π также являются иррациональными, так как можно доказать, что они могут быть представлены в виде бесконечных десятичных непериодических дробей.

Рациональные и иррациональные числа образуют множество *действительных чисел.*

Действительным числом называется бесконечная десятичная дробь, т. е. дробь вида

$$+a_0,a_1a_2a_3\ldots \quad \text{или} \quad -a_0,a_1a_2a_3\ldots,$$

где a_0 — целое неотрицательное число, а каждая из букв a_1, a_2, ... — это одна из десяти цифр: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.

Например: 1) в записи действительного числа $\pi = 3,1415...$ число $a_0 = 3$, а первые четыре десятичных знака таковы: $a_1 = 1$, $a_2 = 4$, $a_3 = 1$, $a_4 = 5$; 2) в записи действительного числа $-\sqrt{234} = -15,297058...$ число $a_0 = 15$, а десятичные знаки таковы: $a_1 = 2$, $a_2 = 9$, $a_3 = 7$, $a_4 = 0$ и т. д.;
3) в записи действительного числа $37,19 = 37,19000...$ число $a_0 = 37$, а десятичные знаки таковы: $a_1 = 1$, $a_2 = 9$, $a_n = 0$ при $n \geq 3$. Заметим, что $37,1999... = 37,2000... = 37,2$.

Действительное число может быть положительным, отрицательным или равным нулю. Бесконечная десятичная дробь равна нулю, если все цифры в её записи — нули. Положительное действительное число — это десятичная дробь, не равная нулю, со знаком «+», а отрицательное — со знаком «−». Знак «+» перед дробью обычно опускается.

Вам известно, как выполняются действия над конечными десятичными дробями. Арифметические операции над действительными числами, т. е. бесконечными десятичными дробями, обычно заменяются операциями над их приближениями. Например, вычислим приближённые значения $\sqrt{2} + \sqrt{3}$. С помощью микрокалькулятора находим

$$\sqrt{2} = 1,4142135..., \quad \sqrt{3} = 1,7320508... .$$

Поэтому с точностью до единицы

$$\sqrt{2} + \sqrt{3} \approx 1,4 + 1,7 = 3,1 \approx 3,$$

с точностью до одной десятой

$$\sqrt{2} + \sqrt{3} \approx 1,41 + 1,73 = 3,14 \approx 3,1,$$

с точностью до одной сотой

$$\sqrt{2} + \sqrt{3} \approx 1,414 + 1,732 = 3,146 \approx 3,15 \text{ и т. д.}$$

Числа 3; 3,1; 3,15 и т. д. являются последовательными десятичными приближениями (первые два с недостатком, третье с избытком) значения суммы $\sqrt{2} + \sqrt{3}$. Итак, при отыскании суммы $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ числа $\sqrt{2}$ и $\sqrt{3}$ заменялись их приближениями — рациональными числами, и выполнялось сложение чисел по известным правилам.

Аналогично, вычисляя произведение $\sqrt{2} \cdot \sqrt{3}$, например, с точностью до 0,1, получаем

$$\sqrt{2} \cdot \sqrt{3} \approx 1,41 \cdot 1,73 = 2,4393 \approx 2,4.$$

Рис. 1

Вообще, пусть $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ — последовательные приближения действительного числа x с точностью до 1, до 0,1, до 0,01 и т. д. Тогда погрешность приближения $|x - x_n|$ как угодно близко приближается к нулю (стремится к нулю). В этом случае пишут

$$|x - x_n| \to 0 \text{ при } n \to \infty, \text{ или } \lim_{n \to \infty} |x - x_n| = 0$$

(читается: «$|x - x_n|$ стремится к нулю при n, стремящемся к бесконечности» или «предел $|x - x_n|$ при n, стремящемся к бесконечности, равен нулю»). Это означает, что x_n как угодно близко приближается к x, т. е.

$$x_n \to x \text{ при } n \to \infty, \text{ или } \lim_{n \to \infty} x_n = x.$$

Отметим, что все основные законы и правила действий над рациональными числами сохраняются и для действительных чисел (переместительный, сочетательный и распределительный законы, правила сравнения и т. д.).

Модуль действительного числа x обозначается $|x|$ и определяется так же, как и модуль рационального числа:

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{если } x \geqslant 0, \\ -x, & \text{если } x < 0. \end{cases}$$

Например, если $x = -0{,}1010010001\ldots$, то $|x| = -x = 0{,}1010010001\ldots$.

Геометрически действительные числа изображаются точками числовой прямой (рис. 1).

Покажем, например, как можно геометрически указать на числовой прямой точку с координатой $\sqrt{2}$. Построим квадрат со стороной 1 (рис. 2) и с помощью циркуля отложим диагональ OA на числовой оси.

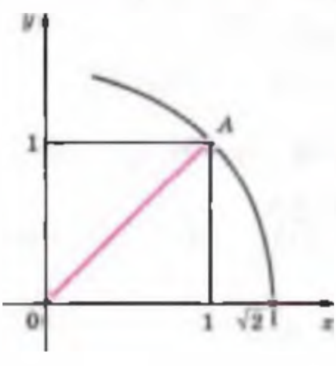


Рис. 2

Заметим, что если бы не было иррациональных чисел и соответствующих им точек числовой оси, то прямая оказалась бы с «дырками», в частности, не было бы на числовой оси точки с координатой $\sqrt{2}$.

Множество действительных чисел «заполняет» всю числовую прямую: каждому действительному числу соответствует единственная точка числовой прямой, и наоборот, каждой точке числовой прямой соответствует единственное действительное число. Точку, изображающую число a, также обозначают буквой a. Отметим, что если $a < b$, то точка a лежит левее точки b.

Множество всех действительных чисел обозначается R. Запись $x \in R$ (читается: «x принадлежит R») означает, что x является действительным числом.

Упражнения

6 (Устно.) Какие из данных десятичных дробей являются иррациональными числами:

1) 16,9; 2) 7,25(4);

3) 1,21221222... (после n-й единицы стоит n двоек);

4) 99,1357911... (после запятой записаны подряд все нечётные числа)?

7 Установить, какая из пар чисел 5,4 и 5,5 или 5,5 и 5,6 образует десятичные приближения числа $\sqrt{31}$ с недостатком и с избытком.

8 Какое из равенств $|x| = x$ или $|x| = -x$ является верным, если:

1) $x = 5 - \sqrt{7}$; 2) $x = 4 - 3\sqrt{3}$; 3) $x = 5 - \sqrt{10}$?

9 Выяснить, каким числом (рациональным или иррациональным) является числовое значение выражения:

1) $(\sqrt{8} - 3)(3 + 2\sqrt{2})$; 2) $(\sqrt{27} - 2)(2 - 3\sqrt{3})$;

3) $(\sqrt{50} + 4\sqrt{2})\sqrt{2}$; 4) $(5\sqrt{3} + \sqrt{27}) : \sqrt{3}$;

5) $(\sqrt{3} - 1)^2 + (\sqrt{3} + 1)^2$; 6) $(\sqrt{5} - 1)^2 - (2\sqrt{5} + 1)^2$.

10 Вычислить:

1) $\sqrt{63} \cdot \sqrt{28}$; 2) $\sqrt{20} \cdot \sqrt{5}$; 3) $\sqrt{50} : \sqrt{8}$; 4) $\sqrt{12} : \sqrt{27}$.

11 Сравнить числовые значения выражений:

1) $\sqrt{3,9} + \sqrt{8}$ и $\sqrt{1,1} + \sqrt{17}$; 2) $\sqrt{11} - \sqrt{2,1}$ и $\sqrt{10} - \sqrt{3,1}$.

12 Вычислить:

1) $\sqrt{(\sqrt{7 - 2\sqrt{10}} + \sqrt{2}) \cdot 2\sqrt{5}}$; 2) $\sqrt{(\sqrt{16 - 6\sqrt{7}} + \sqrt{7}) \cdot 3}$;

3) $\sqrt{(\sqrt{8 + 2\sqrt{15}} - \sqrt{8 - 2\sqrt{15}}) \cdot 2 + 7}$.

§ 3 Бесконечно убывающая геометрическая прогрессия

Напомним: геометрической прогрессией называется такая числовая последовательность $b_1, b_2, b_3, \ldots, b_n, \ldots$, где $b_1 \neq 0$, что для всех натуральных n выполняется равенство $b_{n+1} = b_n q$, где $q \neq 0$.

Например, таковы последовательности:

$1, 3, 9, 27, \ldots, 3^{n-1}, \ldots \quad (b_1 = 1,\ q = 3);$

$1, \frac{1}{5}, \frac{1}{25}, \frac{1}{125}, \ldots, \left(\frac{1}{5}\right)^{n-1}, \ldots \left(b_1 = 1,\ q = \frac{1}{5}\right);$

$2, -4, 8, -16, \ldots, -(-2)^n, \ldots \ (b_1 = 2,\ q = -2).$

По формуле $b_n = b_1 q^{n-1}$ вычисляется n-й член геометрической прогрессии.

По формуле $S_n = \frac{b_1(1-q^n)}{1-q}$ вычисляется сумма ее первых n членов, если $q \neq 1$, а если $q = 1$, то $S_n = b_1 n$.

Среди геометрических прогрессий особый интерес представляют так называемые *бесконечно убывающие геометрические прогрессии.*

Начнём с примера. Рассмотрим квадраты, изображённые на рисунке 3. Сторона первого квадрата равна 1, сторона второго равна $\frac{1}{2}$, сторона третьего — $\frac{1}{2^2}$ и т. д.

Рис. 3

Таким образом, стороны квадратов образуют геометрическую прогрессию со знаменателем $\frac{1}{2}$:

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2^2}, \frac{1}{2^3}, \ldots, \frac{1}{2^{n-1}}, \ldots. \qquad (1)$$

Площади этих квадратов образуют геометрическую прогрессию со знаменателем $\frac{1}{4}$:

$$1, \frac{1}{4}, \frac{1}{4^2}, \frac{1}{4^3}, \ldots, \frac{1}{4^{n-1}}, \ldots. \qquad (2)$$

Из рисунка 3 видно, что стороны квадратов и их площади с возрастанием номера n становятся всё меньше, приближаясь к нулю. Поэтому каждая из прогрессий (1) и (2) называется *бесконечно убывающей*.

Рассмотрим теперь геометрическую прогрессию

$$1,\ -\frac{1}{3},\ \frac{1}{3^2},\ -\frac{1}{3^3},\ \ldots,\ \frac{(-1)^{n-1}}{3^{n-1}},\ \ldots .$$

Знаменатель этой прогрессии $q = -\frac{1}{3}$, а её члены

$b_1 = 1$, $b_2 = -\frac{1}{3}$, $b_3 = \frac{1}{9}$, $b_4 = -\frac{1}{27}$ и т. д.

С возрастанием номера n члены этой прогрессии приближаются к нулю. Эту прогрессию также называют бесконечно убывающей. Отметим, что модуль её знаменателя меньше единицы: $|q| < 1$.

Геометрическая прогрессия называется бесконечно убывающей, если модуль её знаменателя меньше единицы.

Задача 1 Доказать, что геометрическая прогрессия, заданная формулой n-го члена $b_n = \frac{3}{5^n}$, является бесконечно убывающей.

▶ По условию $b_1 = \frac{3}{5}$, $b_2 = \frac{3}{5^2} = \frac{3}{25}$, откуда $q = \frac{b_2}{b_1} = \frac{1}{5}$.

Так как $|q| < 1$, то данная геометрическая прогрессия является бесконечно убывающей. ◁

На рисунке 4 изображён квадрат со стороной 1. Отметим штриховкой его половину, затем половину оставшейся части и т. д. Площади заштрихованных прямоугольников образуют бесконечно убывающую геометрическую прогрессию

$$\frac{1}{2},\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{8},\ \frac{1}{16},\ \frac{1}{32},\ \ldots .$$

Рис. 4

Если заштриховать все получающиеся таким образом прямоугольники, то штриховкой покроется весь квадрат. Естественно считать, что сумма площадей всех заштрихованных прямоугольников равна 1, т. е.

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \ldots = 1.$$

В левой части этого равенства стоит сумма бесконечного числа слагаемых. Рассмотрим сумму первых n слагаемых:

$$S_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots + \frac{1}{2^n}.$$

По формуле суммы n членов геометрической прогрессии имеем

$$S_n = \frac{1}{2} \cdot \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2^n}.$$

Если n неограниченно возрастает, то $\frac{1}{2^n}$ как угодно близко приближается к нулю, т. е.

$$\frac{1}{2^n} \to 0 \text{ при } n \to \infty, \text{ или } \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2^n} = 0.$$

Поэтому $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{2^n}\right) = 1$, т. е. $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = 1$.

Бесконечную сумму $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+\ldots$ считают равной 1.

Итак, сумма бесконечно убывающей геометрической прогрессии есть предел последовательности

$$S_1, S_2, S_3, \ldots, S_n, \ldots .$$

Например, для прогрессии

$$1, -\frac{1}{3}, \frac{1}{9}, -\frac{1}{27}, \ldots, \left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}, \ldots,$$

где $b_1 = 1$, $q = -\frac{1}{3}$, имеем

$$S_1 = 1,\ S_2 = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3},\ S_3 = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{9} = \frac{7}{9}, \ldots,$$

$$S_n = \frac{1\cdot\left(1-\left(-\frac{1}{3}\right)^n\right)}{1-\left(-\frac{1}{3}\right)} = \frac{3}{4} - \frac{3}{4}\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)^n, \ldots .$$

Так как $\lim\limits_{n\to\infty}\left(-\frac{1}{3}\right)^n = 0$, то $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \frac{3}{4}$.

Выведем *формулу суммы бесконечно убывающей геометрической прогрессии* с помощью формулы $S_n = \frac{b_1(1-q^n)}{1-q}$. Запишем её так:

$$S_n = \frac{b_1}{1-q} - \frac{b_1}{1-q} \cdot q^n. \qquad (3)$$

Так как $|q| < 1$, то $\lim\limits_{n \to \infty} q^n = 0$, $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{b_1}{1-q} q^n = 0$,

и поэтому $\lim\limits_{n \to \infty} S_n = \frac{b_1}{1-q}$.

Таким образом, сумма S бесконечно убывающей геометрической прогрессии вычисляется по формуле

$$S = \frac{b_1}{1-q}. \qquad (4)$$

Из формулы (4) при $b_1 = 1$ получаем $S = \frac{1}{1-q}$. Это равенство обычно записывают так:

$$1 + q + q^2 + \ldots + q^{n-1} + \ldots = \frac{1}{1-q}.$$

Подчеркнём, что это равенство справедливо при $|q| < 1$, в частности при $q = 0$.

Задача 2 Найти сумму бесконечно убывающей геометрической прогрессии

$$\frac{1}{2}, -\frac{1}{6}, \frac{1}{18}, -\frac{1}{54}, \ldots .$$

▶ Так как $b_1 = \frac{1}{2}$, $b_2 = -\frac{1}{6}$, то $q = \frac{b_2}{b_1} = -\frac{1}{3}$, и по формуле $S = \frac{b_1}{1-q}$ получим $S = \frac{\frac{1}{2}}{1-\left(-\frac{1}{3}\right)} = \frac{3}{8}$. ◁

Задача 3 Найти сумму бесконечно убывающей геометрической прогрессии, если $b_3 = -1$, $q = \frac{1}{7}$.

▶ Применяя формулу $b_n = b_1 q^{n-1}$, при $n = 3$ получаем

$$-1 = b_1 \cdot \left(\frac{1}{7}\right)^{3-1}, \quad -1 = b_1 \cdot \frac{1}{49},$$

откуда $b_1 = -49$. По формуле (4) находим $S = \frac{-49}{1-\frac{1}{7}} = -57\frac{1}{6}$. ◁

Задача 4 С помощью формулы суммы бесконечно убывающей геометрической прогрессии записать бесконечную периодическую десятичную дробь $a = 0,(15) = 0,151515...$ в виде обыкновенной дроби.

► Составим следующую последовательность приближённых значений данной бесконечной дроби:

$$a_1 = 0,15 = \frac{15}{100}, \quad a_2 = 0,1515 = \frac{15}{100} + \frac{15}{100^2},$$

$$a_3 = 0,151515 = \frac{15}{100} + \frac{15}{100^2} + \frac{15}{100^3}, \quad \dots .$$

Запись приближений показывает, что данную периодическую дробь можно представить в виде суммы бесконечно убывающей геометрической прогрессии: $a = \frac{15}{100} + \frac{15}{100^2} + \frac{15}{100^3} + \dots .$

По формуле (3) получаем $a = \dfrac{\frac{15}{100}}{1 - \frac{1}{100}} = \frac{15}{99} = \frac{5}{33}$. ◁

Упражнения

13 Выяснить, является ли геометрической прогрессией последовательность, заданная формулой n-го члена:

1) $b_n = -5^{2n}$; 2) $b_n = 2^{3n}$.

14 Найти сумму первых пяти членов геометрической прогрессии, если:

1) $b_4 = 88$, $q = 2$; 2) $b_1 = 11$, $b_4 = 88$.

15 Доказать, что геометрическая прогрессия является бесконечно убывающей:

1) $1, \frac{1}{5}, \frac{1}{25}, \dots$; 2) $\frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{27}, \dots$;

3) $-27, -9, -3, \dots$; 4) $-64, -32, -16, \dots$.

16 Выяснить, является ли геометрическая прогрессия бесконечно убывающей, если:

1) $b_1 = 40$, $b_2 = -20$; 2) $b_7 = 12$, $b_{11} = \frac{3}{4}$;

3) $b_7 = -30$, $b_6 = 15$; 4) $b_5 = 9$, $b_{10} = -\frac{1}{27}$.

17 Вычислить:

1) $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{1}{4^n}$; 2) $\lim\limits_{n \to \infty} (0,2)^n$;

3) $\lim\limits_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{7^n}\right)$; 4) $\lim\limits_{n \to \infty} \left(\left(\frac{3}{5}\right)^n - 2\right)$.

18 Найти сумму бесконечно убывающей геометрической прогрессии, если:

1) $q = -\frac{1}{2}$, $b_1 = \frac{1}{8}$; 2) $q = \frac{1}{3}$, $b_5 = \frac{1}{81}$;

3) $q = -\frac{1}{3}$, $b_1 = 9$; 4) $q = -\frac{1}{2}$, $b_4 = \frac{1}{8}$.

19 Найти сумму бесконечно убывающей геометрической прогрессии:

1) $6, 1, \frac{1}{6}, \ldots$; 2) $-25, -5, -1, \ldots$.

20 Записать бесконечную периодическую десятичную дробь в виде обыкновенной дроби:

1) 0,(5); 2) 0,(8); 3) 0,(32); 4) 0,2(5).

21 Выяснить, является ли последовательность бесконечно убывающей геометрической прогрессией, если она задана формулой n-го члена:

1) $b_n = 3 \cdot (-2)^n$; 2) $b_n = -5 \cdot 4^n$;

3) $b_n = 8 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}$; 4) $b_n = 3 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$.

22 Найти сумму бесконечно убывающей геометрической прогрессии, если:

1) $q = \frac{1}{2}$, $b_5 = \frac{\sqrt{2}}{16}$; 2) $q = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $b_1 = \frac{9}{8}$.

23 Сумма бесконечно убывающей геометрической прогрессии равна 30. Найти:

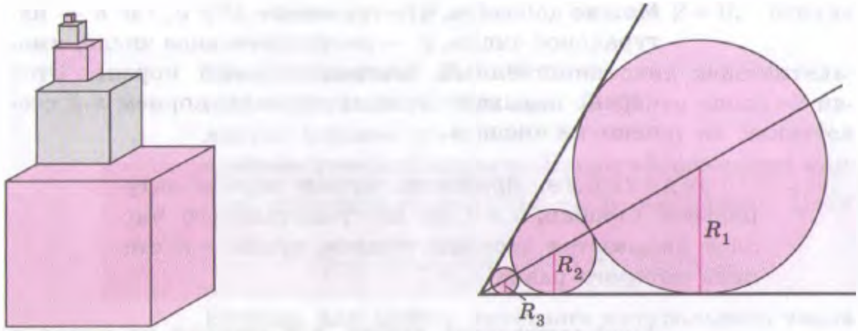
1) b_1, если $q = \frac{1}{5}$; 2) q, если $b_1 = 20$.

24 Вычислить:

1) $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{3 - 2^n}{2^n}$; 2) $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{3^{n+2} + 2}{3^n}$; 3) $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{(5^n + 1)^2}{5^{2n}}$.

25 На куб со стороной a поставили куб со стороной $\frac{a}{2}$, на него куб со стороной $\frac{a}{4}$, затем куб со стороной $\frac{a}{8}$ и т. д. (рис. 5, *а*). Найти высоту получившейся фигуры.

26 В угол, равный 60°, последовательно вписаны окружности, касающиеся друг друга (рис. 5, *б*). Радиус первой окружно-



а) б)

Рис. 5

сти равен R_1. Найти радиусы $R_2, R_3, \ldots, R_n, \ldots$ остальных окружностей и показать, что они образуют бесконечно убывающую геометрическую прогрессию. Доказать, что сумма $R_1 + 2(R_2 + R_3 + \ldots + R_n + \ldots)$ равна расстоянию от центра первой окружности до вершины угла.

§ 4 Арифметический корень натуральной степени

Задача 1 Решить уравнение $x^4 = 81$.

▶ Запишем уравнение в виде $x^4 - 81 = 0$, или $(x^2 - 9)(x^2 + 9) = 0$.

Так как $x^2 + 9 \neq 0$, то $x^2 - 9 = 0$, откуда $x_1 = 3$, $x_2 = -3$. ◁

Итак, уравнение $x^4 = 81$ имеет два действительных корня $x_1 = 3$, $x_2 = -3$. Их называют корнями четвёртой степени из числа 81, а положительный корень (число 3) называют арифметическим корнем четвёртой степени из числа 81 и обозначают $\sqrt[4]{81}$. Таким образом, $\sqrt[4]{81} = 3$.

Можно доказать, что уравнение $x^n = a$, где n — натуральное число, a — неотрицательное число, имеет единственный неотрицательный корень. Этот корень называют арифметическим корнем n-й степени из числа a.

Определение. ***Арифметическим корнем*** **натуральной степени $n \geqslant 2$ из неотрицательного числа a называется неотрицательное число, n-я степень которого равна a.**

Арифметический корень n-й степени из числа a обозначается так: $\sqrt[n]{a}$. Число a называется *подкоренным выражением*. Если $n = 2$, то вместо $\sqrt[2]{a}$ пишут $\sqrt{a}$.

Арифметический корень второй степени называют также *квадратным корнем*, а корень третьей степени — *кубическим корнем*.

В тех случаях, когда ясно, что речь идёт об арифметическом корне n-й степени, кратко говорят: «Корень n-й степени».

Чтобы, используя определение, доказать, что корень n-й степени $\sqrt[n]{a}$ $(a \geqslant 0)$ равен b, нужно показать, что: 1) $b \geqslant 0$; 2) $b^n = a$.

Например, $\sqrt[3]{64} = 4$, так как $4 \geqslant 0$ и $4^3 = 64$.

Из определения арифметического корня следует, что если $a \geqslant 0$, то $(\sqrt[n]{a})^n = a$, а также $\sqrt[n]{a^n} = a$.

Например, $(\sqrt[5]{7})^5 = 7$, $\sqrt[6]{13^6} = 13$.

Действие, посредством которого отыскивается корень n-й степени, называется *извлечением корня n-й степени*. Это действие является обратным действию возведения в n-ю степень.

Задача 2 Решить уравнение $x^3 = 8$.

▶ Запишем уравнение в виде $x^3 - 8 = 0$, или

$$(x-2)(x^2+2x+4) = 0, \quad (x-2)((x+1)^2+3) = 0.$$

Так как $(x+1)^2 + 3 \neq 0$, то $x - 2 = 0$, откуда $x = 2$. ◁

Итак, уравнение $x^3 = 8$ имеет один действительный корень $x = 2$. Так как $2 \geqslant 0$, то это число — арифметический корень из 8, т. е. $\sqrt[3]{8} = 2$.

Задача 3 Решить уравнение $x^3 = -8$.

▶ Запишем уравнение в виде $x^3 + 8 = 0$, или

$$(x+2)(x^2-2x+4) = 0, \quad (x+2)((x-1)^2+3) = 0.$$

Так как $(x-1)^2+3 \neq 0$, то $x+2=0$, откуда $x=-2$. ◁

Итак, уравнение $x^3=-8$ имеет один действительный корень $x=-2$. Так как $-2<0$, то число -2 является корнем из числа -8, но оно не является арифметическим корнем. Число -2 называют *корнем кубическим из числа* -8 и обозначают $\sqrt[3]{-8}$:

$$\sqrt[3]{-8}=-2 \quad \text{или} \quad \sqrt[3]{-8}=-\sqrt[3]{8}=-2.$$

Вообще, для любого нечётного натурального числа $2k+1$ уравнение $x^{2k+1}=a$ при $a<0$ имеет только один корень, причём отрицательный. Этот корень обозначается, как и арифметический корень, символом $\sqrt[2k+1]{a}$. Его называют *корнем нечетной степени из отрицательного числа.*

Например, $\sqrt[3]{-27}=-3$, $\sqrt[5]{-32}=-2$.

Корень нечётной степени из отрицательного числа a связан с арифметическим корнем из числа $-a=|a|$ следующим равенством:

$$\sqrt[2k+1]{a}=-\sqrt[2k+1]{-a}=-\sqrt[2k+1]{|a|}.$$

Например, $\sqrt[5]{-243}=-\sqrt[5]{243}=-3$.

Задача 4 Вычислить

$\sqrt[3]{-0{,}027}-\sqrt[4]{0{,}0016}-\sqrt[6]{729}-\sqrt[7]{-128}$.

▶ $\sqrt[3]{-0{,}027}-\sqrt[4]{0{,}0016}-\sqrt[6]{729}-\sqrt[7]{-128}=\sqrt[3]{-(0{,}3)^3}-$
$-\sqrt[4]{(0{,}2)^4}-\sqrt[6]{3^6}-\sqrt[7]{-2^7}=-0{,}3-0{,}2-3+2=-1{,}5$. ◁

Арифметический корень n-й степени обладает следующими свойствами: если $a \geqslant 0$, $b>0$, а n, m и k — натуральные числа, причем $n \geqslant 2$, $m \geqslant 2$, то

1. $\sqrt[n]{ab}=\sqrt[n]{a}\,\sqrt[n]{b}$.
2. $\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}=\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$.
3. $(\sqrt[n]{a})^m=\sqrt[n]{a^m}$.
4. $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}=\sqrt[mn]{a}$.
5. $\sqrt[kn]{a^{mk}}=\sqrt[n]{a^m}$.

Отметим, что в свойстве 1 число b может также быть равным 0; в свойстве 3 число m может быть любым целым, если $a>0$.

Докажем, например, что $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a}\,\sqrt[n]{b}$.

● Воспользуемся определением арифметического корня:

1) $\sqrt[n]{a}\,\sqrt[n]{b} \geq 0$, так как $a \geq 0$ и $b \geq 0$;

2) $(\sqrt[n]{a}\,\sqrt[n]{b})^n = ab$, так как $(\sqrt[n]{a}\,\sqrt[n]{b})^n =$
$= (\sqrt[n]{a})^n\,(\sqrt[n]{b})^n = ab$. ○

Аналогично доказываются и остальные свойства. Приведём примеры применения свойств арифметического корня.

1) $\sqrt[4]{27}\,\sqrt[4]{3} = \sqrt[4]{27 \cdot 3} = \sqrt[4]{81} = \sqrt[4]{3^4} = 3$;

2) $\sqrt[3]{\frac{256}{625}} : \sqrt[3]{\frac{4}{5}} = \sqrt[3]{\frac{256}{625} : \frac{4}{5}} = \frac{\sqrt[3]{64}}{\sqrt[3]{125}} = \frac{4}{5}$;

3) $\sqrt[7]{5^{21}} = \sqrt[7]{(5^3)^7} = 5^3 = 125$;

4) $\sqrt[3]{\sqrt[4]{4096}} = \sqrt[12]{4096} = \sqrt[12]{2^{12}} = 2$;

5) $(\sqrt[4]{9})^{-2} = \sqrt[4]{9^{-2}} = \sqrt[4]{\frac{1}{81}} = \frac{1}{3}$.

Задача 5 Упростить выражение $\dfrac{(\sqrt[4]{a^3b^2})^4}{\sqrt[3]{\sqrt{a^{12}b^6}}}$, где $a > 0$, $b > 0$.

► Используя свойства арифметического корня, получаем $\dfrac{(\sqrt[4]{a^3b^2})^4}{\sqrt[3]{\sqrt{a^{12}b^6}}} = \dfrac{a^3b^2}{\sqrt[6]{a^{12}b^6}} = \dfrac{a^3b^2}{a^2b} = ab$. ◁

Отметим ещё одно свойство арифметического корня чётной степени.

При любом значении a справедливо равенство

$\sqrt[2k]{a^{2k}} = |a|$, где k — натуральное число.

● Воспользуемся определением арифметического корня:

1) $|a| \geq 0$ по определению модуля;

2) $|a|^{2k} = a^{2k}$, так как $|a|^2 = a^2$. ○

Задача 6 Упростить выражение $\sqrt[4]{(x-5)^4} + \sqrt[6]{(x-3)^6}$, если $3 < x < 5$.

► $\sqrt[4]{(x-5)^4} + \sqrt[6]{(x-3)^6} = |x-5| + |x-3|$. Так как $3 < x < 5$, то $|x-5| = -(x-5) = 5-x$, $|x-3| = x-3$. Поэтому $\sqrt[4]{(x-5)^4} + \sqrt[6]{(x-3)^6} = 5 - x + x - 3 = 2$. ◁

Упражнения

27 (Устно.) 1) Найти арифметический квадратный корень из числа: 1; 0; 16; 0,81; 169; $\frac{1}{289}$.

2) Найти арифметический кубический корень из числа: 1; 0; 125; $\frac{1}{27}$; 0,027; 0,064.

3) Найти арифметический корень четвёртой степени из числа: 0; 1; 16; $\frac{16}{81}$; $\frac{256}{625}$; 0,0016.

Вычислить (28—30).

28 1) $\sqrt[6]{36^3}$; 2) $\sqrt[12]{64^2}$; 3) $\sqrt[4]{\left(\frac{1}{25}\right)^2}$; 4) $\sqrt[8]{225^4}$.

29 1) $\sqrt[3]{10^6}$; 2) $\sqrt[3]{3^{12}}$; 3) $\sqrt[4]{\left(\frac{1}{2}\right)^{12}}$; 4) $\sqrt[6]{\left(\frac{1}{3}\right)^{18}}$.

30 1) $\sqrt[3]{-8}$; 2) $\sqrt[15]{-1}$; 3) $\sqrt[3]{-\frac{1}{27}}$;

4) $\sqrt[5]{-1024}$; 5) $\sqrt[3]{-34^3}$; 6) $\sqrt[7]{-8^7}$.

31 Решить уравнение:

1) $x^4 = 256$; 2) $x^5 = -\frac{1}{32}$; 3) $5x^5 = -160$; 4) $2x^6 = 128$.

Вычислить (32—36).

32 1) $\sqrt[3]{-125} + \frac{1}{8}\sqrt[6]{64}$; 2) $\sqrt[5]{32} - 0,5\sqrt[3]{-216}$;

3) $-\frac{1}{3}\sqrt[4]{81} + \sqrt[4]{625}$; 4) $\sqrt[3]{-1000} - \frac{1}{4}\sqrt[4]{256}$;

5) $\sqrt[5]{\frac{1}{243}} + \sqrt[3]{-0,001} - \sqrt[4]{0,0016}$.

33 1) $\sqrt[3]{343 \cdot 0,125}$; 2) $\sqrt[3]{512 \cdot 216}$; 3) $\sqrt[5]{32 \cdot 100000}$.

34 1) $\sqrt[3]{5^3 \cdot 7^3}$; 2) $\sqrt[4]{11^4 \cdot 3^4}$; 3) $\sqrt[5]{(0,2)^5 \cdot 8^5}$; 4) $\sqrt[7]{\left(\frac{1}{3}\right)^7 \cdot 21^7}$.

35 1) $\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{500}$; 2) $\sqrt[3]{0,2} \cdot \sqrt[3]{0,04}$; 3) $\sqrt[4]{324} \cdot \sqrt[4]{4}$; 4) $\sqrt[5]{2} \cdot \sqrt[5]{16}$.

36 1) $\sqrt[5]{3^{10} \cdot 2^{15}}$; 2) $\sqrt[3]{2^3 \cdot 5^6}$;

3) $\sqrt[4]{3^{12}\left(\frac{1}{3}\right)^8}$; 4) $\sqrt[10]{4^{30} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{20}}$.

37[1] Извлечь корень:

1) $\sqrt[3]{64x^3z^6}$; 2) $\sqrt[4]{a^8b^{12}}$; 3) $\sqrt[5]{32x^{10}y^{20}}$; 4) $\sqrt[6]{a^{12}b^{18}}$.

38 Упростить выражение:

1) $\sqrt[3]{2ab^2}\cdot\sqrt[3]{4a^2b}$; 2) $\sqrt[4]{3a^2b^3}\cdot\sqrt[4]{27a^2b}$;

3) $\sqrt[4]{\frac{ab}{c}}\cdot\sqrt[4]{\frac{a^3c}{b}}$; 4) $\sqrt[3]{\frac{16a}{b^2}}\cdot\sqrt[3]{\frac{1}{2ab}}$.

Вычислить (39—40).

39 1) $\sqrt[3]{\frac{64}{125}}$; 2) $\sqrt[4]{\frac{16}{81}}$; 3) $\sqrt[3]{3\frac{3}{8}}$; 4) $\sqrt[5]{7\frac{19}{32}}$.

40 1) $\sqrt[4]{324}:\sqrt[4]{4}$; 2) $\sqrt[3]{128}:\sqrt[3]{2000}$; 3) $\frac{\sqrt[3]{16}}{\sqrt[3]{2}}$; 4) $\frac{\sqrt[5]{256}}{\sqrt[5]{8}}$;

5) $(\sqrt{25}-\sqrt{45}):\sqrt{5}$; 6) $(\sqrt[3]{625}-\sqrt[3]{5}):\sqrt[3]{5}$.

41 Упростить выражение:

1) $\sqrt[5]{a^6b^7}:\sqrt[5]{ab^2}$; 2) $\sqrt[3]{81x^4y}:\sqrt[3]{3xy}$;

3) $\sqrt[3]{\frac{3x}{y^2}}:\sqrt[3]{\frac{y}{9x^2}}$; 4) $\sqrt[4]{\frac{2b}{a^3}}:\sqrt[4]{\frac{a}{8b^3}}$.

Вычислить (42—43).

42 1) $(\sqrt[6]{7^3})^2$; 2) $(\sqrt[6]{9})^{-3}$; 3) $(\sqrt[10]{32})^2$; 4) $(\sqrt[8]{16})^{-4}$.

43 1) $\sqrt{\sqrt[3]{729}}$; 2) $\sqrt[5]{\sqrt{1024}}$; 3) $\sqrt[3]{\sqrt[3]{9}}\cdot\sqrt[9]{3^7}$; 4) $\sqrt[4]{\sqrt[3]{25}}\cdot\sqrt[6]{5^5}$.

44 Упростить выражение:

1) $(\sqrt[3]{x})^6$; 2) $(\sqrt[3]{y^2})^3$; 3) $(\sqrt{a}\cdot\sqrt[3]{b})^6$;

4) $(\sqrt[3]{a^2}\cdot\sqrt[4]{b^3})^{12}$; 5) $\left(\sqrt{\sqrt[3]{a^2b}}\right)^6$; 6) $\left(\sqrt[3]{\sqrt[4]{27a^3}}\right)^4$.

45 При каких значениях x имеет смысл выражение:

1) $\sqrt[6]{2x-3}$; 2) $\sqrt[6]{x+3}$; 3) $\sqrt[6]{2x^2-x-1}$; 4) $\sqrt[4]{\frac{2-3x}{2x-4}}$?

Вычислить (46—47).

46 1) $\sqrt{9+\sqrt{17}}\cdot\sqrt{9-\sqrt{17}}$; 2) $\left(\sqrt{3+\sqrt{5}}-\sqrt{3-\sqrt{5}}\right)^2$;

3) $\left(\sqrt{5+\sqrt{21}}+\sqrt{5-\sqrt{21}}\right)^2$.

[1] Здесь и далее буквами обозначены положительные числа, если нет дополнительных условий.

47 1) $\dfrac{\sqrt[3]{49}\cdot\sqrt[3]{112}}{\sqrt[3]{250}}$; 2) $\dfrac{\sqrt[4]{54}\cdot\sqrt[4]{120}}{\sqrt[4]{5}}$; 3) $\dfrac{\sqrt[4]{32}}{\sqrt[4]{2}}+\sqrt[6]{27^2}-\sqrt{\sqrt[3]{64}}$;

4) $\sqrt[3]{3\frac{3}{8}}+\sqrt[4]{18}\cdot\sqrt[4]{4\frac{1}{2}}-\sqrt{\sqrt{256}}$;

5) $\sqrt[3]{11-\sqrt{57}}\cdot\sqrt[3]{11+\sqrt{57}}$; 6) $\sqrt[4]{17-\sqrt{33}}\cdot\sqrt[4]{17+\sqrt{33}}$.

Упростить выражение (48—49).

48 1) $\sqrt[3]{2ab}\cdot\sqrt[3]{4a^2b}\cdot\sqrt[3]{27b}$; 2) $\sqrt[4]{abc}\cdot\sqrt[4]{a^3b^2c}\cdot\sqrt[4]{b^5c^2}$.

49 1) $\sqrt[3]{\sqrt[3]{a^{18}}}+\left(\sqrt{\sqrt[3]{a^6}}\right)^{3}$; 2) $\left(\sqrt{\sqrt[3]{x^2}}\right)^3+2\left(\sqrt[4]{\sqrt{x}}\right)^8$;

3) $\sqrt[3]{\sqrt{x^6y^{12}}}-\left(\sqrt[6]{xy^2}\right)^6$; 4) $\left(\left(\sqrt[5]{a\sqrt[5]{a}}\right)^5-\sqrt[5]{a}\right):\sqrt[10]{a^2}$.

50 Вычислить:

1) $\dfrac{\sqrt{3}\cdot\sqrt[3]{6}}{\sqrt[6]{3}}$; 2) $\dfrac{\sqrt[3]{7}\cdot\sqrt[4]{343}}{\sqrt[12]{7}}$; 3) $(\sqrt[3]{9}+\sqrt[3]{6}+\sqrt[3]{4})(\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{2})$.

51 Упростить:

1) $\sqrt[3]{(x-2)^3}$ при: а) $x\geqslant 2$; б) $x<2$;

2) $\sqrt{(3-x)^6}$ при: а) $x\leqslant 3$; б) $x>3$;

3) $\sqrt[4]{(x+6)^4}+\sqrt{(x-3)^2}$, если $-1<x<2$;

4) $\sqrt[6]{(2x+1)^6}-\sqrt[4]{(4+x)^4}$, если $-3<x<-1$.

52 Сравнить значения выражений:

1) $\sqrt{3}+\sqrt[3]{30}$ и $\sqrt[3]{63}$; 2) $\sqrt[3]{7}+\sqrt{15}$ и $\sqrt{10}+\sqrt[3]{28}$.

53 Доказать, что:

1) $\sqrt{4+2\sqrt{3}}-\sqrt{4-2\sqrt{3}}=2$;

2) $\sqrt[3]{9+\sqrt{80}}+\sqrt[3]{9-\sqrt{80}}=3$.

54 Упростить выражение:

1) $\dfrac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{\sqrt[4]{a}-\sqrt[4]{b}}-\dfrac{\sqrt{a}+\sqrt[4]{ab}}{\sqrt[4]{a}+\sqrt[4]{b}}$; 2) $\dfrac{a-b}{\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}}-\dfrac{a+b}{\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}}$;

3) $\left(\dfrac{a+b}{\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}}-\sqrt[3]{ab}\right):(\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b})^2$.

§ 5 Степень с рациональным и действительным показателями

1. Степень с рациональным показателем.

Задача 1 Вычислить $\sqrt[4]{5^{12}}$.

▶ Так как $5^{12} = (5^3)^4$, то $\sqrt[4]{5^{12}} = \sqrt[4]{(5^3)^4} = 5^3 = 125$. ◁

Таким образом, можно записать $\sqrt[4]{5^{12}} = 125 = 5^3$ или $\sqrt[4]{5^{12}} = 5^{\frac{12}{4}}$, так как $3 = \frac{12}{4}$.

Точно так же можно записать, что $\sqrt[5]{7^{-15}} = 7^{-\frac{15}{5}}$.

Если n — натуральное число, $n \geqslant 2$, m — целое число и частное $\frac{m}{n}$ является целым числом, то при $a > 0$ справедливо равенство

$$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}. \qquad (1)$$

● По условию $\frac{m}{n} = k$ — целое число, откуда $m = nk$. Применяя свойства степени и арифметического корня, получаем

$$\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[n]{a^{kn}} = \sqrt[n]{(a^k)^n} = a^k = a^{\frac{m}{n}}. \ ○$$

Если же частное $\frac{m}{n}$ не является целым числом, то степень $a^{\frac{m}{n}}$, где $a > 0$, определяют так, чтобы осталась верной формула (1), т. е. и в этом случае считают, что $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$.

Таким образом, формула (1) справедлива для любого целого числа m и любого натурального числа $n \geqslant 2$ и $a > 0$. Например:

$16^{\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{16^3} = \sqrt[4]{2^{12}} = 2^3 = 8$;

$7^{\frac{5}{4}} = \sqrt[4]{7^5} = \sqrt[4]{7^4 \cdot 7} = 7\sqrt[4]{7}$;

$27^{-\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{27^{-2}} = \sqrt[3]{3^{-6}} = \sqrt[3]{(3^{-2})^3} = 3^{-2} = \frac{1}{9}$.

Напомним, что рациональное число r — это число вида $\frac{m}{n}$, где m — целое, n — натуральное число.

Тогда по формуле (1) получаем $a^r = a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$.

Таким образом, степень определена для любого рационального показателя r и любого положительного основания a.

Если $r = \frac{m}{n} > 0$, то выражение $\sqrt[n]{a^m}$ имеет смысл не только при $a > 0$, но и при $a = 0$, причём $\sqrt[n]{0^m} = 0$. Поэтому считают, что при $r > 0$ выполняется равенство $0^r = 0$.

Пользуясь формулой (1), степень с рациональным показателем можно представить в виде корня и наоборот.

Так как $\frac{m}{n} = \frac{mk}{nk}$, где n и k — натуральные числа, m — целое число, то при любом $a > 0$

$$a^{\frac{m}{n}} = a^{\frac{mk}{nk}}. \qquad (2)$$

Например, $8^{\frac{5}{15}} = 8^{\frac{1}{3}} = 2$.

Можно показать, что все свойства степени с натуральным показателем верны для степени с любым рациональным показателем и положительным основанием.

А именно, для любых рациональных чисел p и q и любых $a > 0$ и $b > 0$ верны равенства:

1. $a^p a^q = a^{p+q}$.
2. $a^p : a^q = a^{p-q}$.
3. $(a^p)^q = a^{pq}$.
4. $(ab)^p = a^p b^p$.
5. $\left(\frac{a}{b}\right)^p = \frac{a^p}{b^p}$.

В основе доказательства этих свойств лежат свойства корней.

Докажем, например, свойство $a^p a^q = a^{p+q}$.

● Пусть $p = \frac{m}{n}$, $q = \frac{k}{l}$, где n и l — натуральные числа, m и k — целые числа. Нужно доказать, что

$$a^{\frac{m}{n}} a^{\frac{k}{l}} = a^{\frac{m}{n} + \frac{k}{l}}. \qquad (3)$$

Приведя дроби $\frac{m}{n}$ и $\frac{k}{l}$ к общему знаменателю, запишем левую часть равенства (3) в виде

$$a^{\frac{m}{n}} a^{\frac{k}{l}} = a^{\frac{ml}{nl}} a^{\frac{kn}{nl}}.$$

Используя определение степени с рациональным показателем, свойства корня и степени с целым показателем, получаем

$$a^{\frac{m}{n}} a^{\frac{k}{l}} = a^{\frac{ml}{nl}} a^{\frac{kn}{nl}} = \sqrt[nl]{a^{ml}} \cdot \sqrt[nl]{a^{kn}} = \sqrt[nl]{a^{ml} \cdot a^{kn}} =$$
$$= \sqrt[nl]{a^{ml+kn}} = a^{\frac{ml+kn}{nl}} = a^{\frac{m}{n}+\frac{k}{l}}. \ \bigcirc$$

Аналогично доказываются остальные свойства степени с рациональным показателем.

Приведём примеры применения свойств степени:

1) $7^{\frac{1}{4}} \cdot 7^{\frac{3}{4}} = 7^{\frac{1}{4}+\frac{3}{4}} = 7;$

2) $9^{\frac{2}{3}} : 9^{\frac{1}{6}} = 9^{\frac{2}{3}-\frac{1}{6}} = 9^{\frac{1}{2}} = \sqrt{9} = 3;$

3) $\left(16^{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{9}{4}} = 16^{\frac{1}{3}\cdot\frac{9}{4}} = 16^{\frac{3}{4}} = (2^4)^{\frac{3}{4}} = 2^{4\cdot\frac{3}{4}} = 2^3 = 8;$

4) $24^{\frac{2}{3}} = (2^3 \cdot 3)^{\frac{2}{3}} = 2^{3\cdot\frac{2}{3}} \cdot 3^{\frac{2}{3}} = 4\sqrt[3]{3^2} = 4\sqrt[3]{9};$

5) $\left(\frac{8}{27}\right)^{\frac{1}{3}} = \frac{8^{\frac{1}{3}}}{27^{\frac{1}{3}}} = \frac{(2^3)^{\frac{1}{3}}}{(3^3)^{\frac{1}{3}}} = \frac{2}{3}.$

Задача 2 Вычислить $25^{\frac{1}{5}} \cdot 125^{\frac{1}{5}}$.

▶ $25^{\frac{1}{5}} \cdot 125^{\frac{1}{5}} = (25 \cdot 125)^{\frac{1}{5}} = (5^5)^{\frac{1}{5}} = 5.$ ◁

Задача 3 Упростить выражение $\frac{a^{\frac{4}{3}}b + ab^{\frac{4}{3}}}{\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b}}$.

▶ $\frac{a^{\frac{4}{3}}b + ab^{\frac{4}{3}}}{\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b}} = \frac{ab\left(a^{\frac{1}{3}} + b^{\frac{1}{3}}\right)}{a^{\frac{1}{3}} + b^{\frac{1}{3}}} = ab.$ ◁

Задача 4 Упростить выражение

$$\frac{a^{\frac{1}{3}}-a^{\frac{7}{3}}}{a^{\frac{1}{3}}-a^{\frac{4}{3}}}-\frac{a^{-\frac{1}{3}}-a^{\frac{5}{3}}}{a^{\frac{2}{3}}+a^{-\frac{1}{3}}}.$$

▶ $$\frac{a^{\frac{1}{3}}-a^{\frac{7}{3}}}{a^{\frac{1}{3}}-a^{\frac{4}{3}}}-\frac{a^{-\frac{1}{3}}-a^{\frac{5}{3}}}{a^{\frac{2}{3}}+a^{-\frac{1}{3}}}=\frac{a^{\frac{1}{3}}(1-a^2)}{a^{\frac{1}{3}}(1-a)}-\frac{a^{-\frac{1}{3}}(1-a^2)}{a^{-\frac{1}{3}}(1+a)}=$$

$=1+a-(1-a)=2a.$ ◁

Задача 5* Вкладчик поместил в банк 10 000 р. Банк ежегодно начисляет вкладчику 3% от суммы вклада. Какую сумму денег получит вкладчик через 3 года и 5 месяцев?

▶ Искомая сумма вычисляется по формуле сложных процентов:

$$S=a\left(1+\frac{p}{100}\right)^t,$$

где a — первоначальная сумма денег, p — число процентов, начисляемых банком в год, t — число лет, в течение которых деньги находились в банке.

В данной задаче $a=10\,000$, $p=3$, $t=3\frac{5}{12}$.

По формуле сложных процентов находим $S=10\,000\cdot 1{,}03^{3\frac{5}{12}}$. Вычисления можно провести на микрокалькуляторе, имеющем клавишу $\boxed{y^x}$.

Ответ 11 062 р. 70 к. ◁

2. Степень с действительным показателем.

Покажем, как можно определить степень с иррациональным показателем, на примере $3^{\sqrt{2}}$.

Пусть $r_1, r_2, r_3, \ldots, r_n, \ldots$ — последовательность десятичных приближений числа $\sqrt{2}$ (например, с недостатком):

$$r_1=1{,}4,\ r_2=1{,}41,\ r_3=1{,}414,\ \ldots .$$

Эта последовательность стремится к числу $\sqrt{2}$, т. е. $\lim\limits_{n\to\infty} r_n=\sqrt{2}$.

Числа r_1, r_2, r_3, ... являются рациональными, и для них определены степени 3^{r_1}, 3^{r_2}, 3^{r_3}, ..., т. е. определена последовательность

$$3^{1.4},\ 3^{1.41},\ 3^{1.414},\ \ldots$$

Можно показать, что эта последовательность стремится к некоторому действительному числу, которое обозначают $3^{\sqrt{2}}$, т. е. $3^{\sqrt{2}} = \lim\limits_{n \to \infty} 3^{r_n}$.

Вообще, пусть $a > 0$ и x — произвольное иррациональное число. Рассмотрим последовательность x_1, x_2, ..., x_n, ... десятичных приближений числа x. Эта последовательность имеет предел $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = x$.

Можно показать, что последовательность a^{x_1}, a^{x_2}, a^{x_3}, ..., a^{x_n}, ... также имеет предел. Этот предел обозначают a^x и называют степенью числа a с показателем x (подробнее см. в Приложении).
Таким образом, степень a^x определена для любого $a > 0$ и любого действительного показателя x.

При любом $x \in R$ и любом $a > 0$ степень a^x является положительным действительным числом:

$$a^x > 0 \text{ при } x \in R,\ a > 0.$$

Если основание степени $a = 0$, то степень 0^x определяют только при $x > 0$ и считают, что $0^x = 0$ при $x > 0$. Например, $0^{\sqrt{2}} = 0$, $0^{0.1} = 0$. При $x \leq 0$ выражение 0^x не имеет смысла. Например, выражения 0^{-1}, $0^{-\sqrt{2}}$ смысла не имеют.
При таком определении степени с действительным показателем сохраняются все известные свойства степени с рациональным показателем. Доказательство этих свойств для степени с действительным показателем проводится в курсе высшей математики.

Задача 6 Упростить выражение $\dfrac{\left(a^{\sqrt{3}-1}\right)^{\sqrt{3}+1}}{a^{\sqrt{5}-3} \cdot a^{4-\sqrt{5}}}$.

▶ Применяя свойства степени с действительным показателем, получаем

$$\frac{\left(a^{\sqrt{3}-1}\right)^{\sqrt{3}+1}}{a^{\sqrt{5}-3} \cdot a^{4-\sqrt{5}}} = \frac{a^{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)}}{a^{\sqrt{5}-3+4-\sqrt{5}}} = \frac{a^2}{a} = a. \ ◁$$

Приведём ещё одно свойство степени, также доказываемое в курсе высшей математики с помощью теории пределов.

Для любого $a > 1$ и любого $x > 0$ число a^x больше 1, т. е. $a^x > 1$ при $a > 1$, $x > 0$. (1)

С помощью свойств степени с действительным показателем доказывается следующая теорема:

Теорема. Пусть $a > 1$ и $x_1 < x_2$. Тогда $a^{x_1} < a^{x_2}$.

● По условию $x_2 - x_1 > 0$. Поэтому по доказанному свойству (1) имеем $a^{x_2 - x_1} > 1$. Умножив обе части этого равенства на положительное число a^{x_1}, получим $a^{x_1} a^{x_2 - x_1} > a^{x_1}$.
Отсюда по свойству умножения степеней получаем $a^{x_2} > a^{x_1}$, т. е. $a^{x_1} < a^{x_2}$. ○

Следствие 1. Пусть $0 < a < 1$ и $x_1 < x_2$. Тогда $a^{x_1} > a^{x_2}$.

● Так как $0 < a < 1$, то $\frac{1}{a} > 1$. Поэтому из теоремы следует, что при $x_1 < x_2$

$$\left(\frac{1}{a}\right)^{x_1} < \left(\frac{1}{a}\right)^{x_2}.$$

По свойству деления степеней $\left(\frac{1}{a}\right)^x = \frac{1}{a^x}$. Следовательно, $\frac{1}{a^{x_1}} < \frac{1}{a^{x_2}}$, откуда $a^{x_1} > a^{x_2}$. ○

Следствие 2. Пусть $a > 0$, $a \neq 1$, $a^{x_1} = a^{x_2}$. Тогда $x_1 = x_2$.

● Предположим, что равенство $x_1 = x_2$ не выполняется. Пусть, например, $x_1 < x_2$. Тогда при $a > 1$ по теореме должно быть $a^{x_1} < a^{x_2}$, а при $0 < a < 1$ по следствию 1 должно быть $a^{x_1} > a^{x_2}$, что противоречит условию $a^{x_1} = a^{x_2}$. ○

Задача 7 Сравнить числа $5^{2\sqrt{3}}$ и $5^{3\sqrt{2}}$.

▶ Сравним показатели $2\sqrt{3}$ и $3\sqrt{2}$. Так как $2\sqrt{3} = \sqrt{12}$, $3\sqrt{2} = \sqrt{18}$ и $12 < 18$, то $2\sqrt{3} < 3\sqrt{2}$. Поэтому по теореме $5^{2\sqrt{3}} < 5^{3\sqrt{2}}$. ◁

Задача 8 Сравнить числа $\left(\frac{\pi}{4}\right)^{\sqrt{8}}$ и $\left(\frac{\pi}{4}\right)^{3}$.

▶ Так как $0 < \pi < 4$, то $0 < \frac{\pi}{4} < 1$. Сравним показатели: так как $8 < 9$, то $\sqrt{8} < \sqrt{9}$, т. е. $\sqrt{8} < 3$. Применяя следствие 1, получаем $\left(\frac{\pi}{4}\right)^{\sqrt{8}} > \left(\frac{\pi}{4}\right)^{3}$. ◁

Задача 9 Решить уравнение $4^x = 2^{4\sqrt{3}}$.

▶ По свойствам степени $4^x = (2^2)^x = 2^{2x}$. Поэтому уравнение можно записать так: $2^{2x} = 2^{4\sqrt{3}}$. Применяя следствие 2, получаем $2x = 4\sqrt{3}$, откуда $x = 2\sqrt{3}$. ◁

Следствие 3. Пусть $0 < x_1 < x_2$. Тогда если $p > 0$, то $x_1^p < x_2^p$, а если $p < 0$, то $x_1^p > x_2^p$.

● По условию $\frac{x_2}{x_1} > 1$.

1) Если $p > 0$, то по свойству (1) получаем $\left(\frac{x_2}{x_1}\right)^p > 1$. По свойству деления степеней $\frac{x_2^p}{x_1^p} > 1$, откуда $x_2^p > x_1^p$, т. е. $x_1^p < x_2^p$.

2) Если $p < 0$, то $-p > 0$, и по свойству (1) получаем $\left(\frac{x_2}{x_1}\right)^{-p} > 1$, откуда $\frac{x_1^p}{x_2^p} > 1$, $\frac{x_1^p}{x_2^p} > 1$, $x_1^p > x_2^p$. ○

Таким образом, при возведении неравенства с положительной левой и положительной правой частями в положительную степень знак неравенства не меняется, а при возведении в отрицательную степень знак неравенства меняется на противоположный.

Задача 10 Сравнить числа $\sqrt{2}$ и $\sqrt[3]{3}$.

▶ По свойствам степени получаем

$$(\sqrt{2})^6=\left(2^{\frac{1}{2}}\right)^6=2^3=8,\quad (\sqrt[3]{3})^6=\left(3^{\frac{1}{3}}\right)^6=3^2=9.$$

Так как $0<8<9$ и $\frac{1}{6}>0$, то $8^{\frac{1}{6}}<9^{\frac{1}{6}}$, т. е. $\sqrt{2}<\sqrt[3]{3}$. ◁

Упражнения

55 (Устно.) Представить в виде степени с рациональным показателем:

1) $\sqrt{x^3}$; 2) $\sqrt[3]{a^4}$; 3) $\sqrt[4]{b^3}$; 4) $\sqrt[5]{x^{-1}}$; 5) $\sqrt[6]{a}$; 6) $\sqrt[7]{b^{-3}}$.

56 (Устно.) Представить в виде корня из степени с целым показателем:

1) $x^{\frac{1}{4}}$; 2) $y^{\frac{2}{5}}$; 3) $a^{-\frac{5}{6}}$; 4) $b^{-\frac{1}{3}}$; 5) $(2x)^{\frac{1}{2}}$; 6) $(3b)^{-\frac{2}{3}}$.

Вычислить (57—60).

57 1) $64^{\frac{1}{2}}$; 2) $27^{\frac{1}{3}}$; 3) $8^{\frac{2}{3}}$; 4) $81^{\frac{3}{4}}$; 5) $16^{-0,75}$; 6) $9^{-1,5}$.

58 1) $2^{\frac{4}{5}}\cdot 2^{\frac{11}{5}}$; 2) $5^{\frac{2}{7}}\cdot 5^{\frac{5}{7}}$; 3) $9^{\frac{2}{3}}:9^{\frac{1}{6}}$; 4) $4^{\frac{1}{3}}:4^{\frac{5}{6}}$; 5) $\left(8^{\frac{1}{12}}\right)^{-4}$.

59 1) $9^{\frac{2}{5}}\cdot 27^{\frac{2}{5}}$; 2) $7^{\frac{2}{3}}\cdot 49^{\frac{2}{3}}$; 3) $144^{\frac{3}{4}}:9^{\frac{3}{4}}$; 4) $150^{\frac{3}{2}}:6^{\frac{3}{2}}$.

60 1) $\left(\frac{1}{16}\right)^{-0,75}+\left(\frac{1}{8}\right)^{-\frac{4}{3}}$; 2) $(0,04)^{-1,5}-(0,125)^{-\frac{2}{3}}$;

3) $8^{\frac{9}{7}}:8^{\frac{2}{7}}-3^{\frac{6}{5}}\cdot 3^{\frac{4}{5}}$; 4) $\left(5^{-\frac{2}{5}}\right)^{-5}+\left((0,2)^{\frac{3}{4}}\right)^{-4}$.

61 Найти значение выражения:

1) $\sqrt[3]{a}\cdot\sqrt[6]{a}$ при $a=0,09$; 2) $\sqrt{b}:\sqrt[6]{b}$ при $b=27$;

3) $\frac{\sqrt{b}\cdot\sqrt[3]{b^2}}{\sqrt[6]{b}}$ при $b=1,3$; 4) $\sqrt[3]{a}\cdot\sqrt[4]{a}\cdot\sqrt[12]{a^5}$ при $a=2,7$.

62 Представить в виде степени с рациональным показателем:

1) $a^{\frac{1}{3}}\cdot\sqrt{a}$; 2) $b^{\frac{1}{2}}\cdot b^{\frac{1}{3}}\cdot\sqrt[6]{b}$; 3) $\sqrt[3]{b}:b^{\frac{1}{6}}$;

4) $a^{\frac{4}{3}}:\sqrt[3]{a}$; 5) $x^{1,7}\cdot x^{2,8}:\sqrt{x^5}$; 6) $y^{3,8}:y^{-2,3}\cdot\sqrt[3]{y}$.

63 Вынести общий множитель за скобки:

1) $x^{\frac{1}{2}}+x$; 2) $(ab)^{\frac{1}{3}}+(ac)^{\frac{1}{3}}$; 3) $y^{\frac{3}{4}}-y^{\frac{1}{2}}$; 4) $12xy^{\frac{1}{2}}-3x^{\frac{1}{2}}y$.

64 Пользуясь тождеством $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$, разложить на множители:

1) $a^{\frac{1}{2}} - b^{\frac{1}{2}}$; 2) $y^{\frac{2}{3}} - 1$; 3) $a^{\frac{1}{3}} - b^{\frac{1}{3}}$;

4) $x - y$; 5) $4a^{\frac{1}{2}} - b^{\frac{1}{2}}$; 6) $0{,}01m^{\frac{1}{6}} - n^{\frac{1}{6}}$.

65 Разложить на множители, используя тождество $a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$ или $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$:

1) $a - x$; 2) $x^{\frac{3}{2}} - y^{\frac{3}{2}}$; 3) $a^{\frac{1}{2}} - b^{\frac{1}{2}}$; 4) $27a + c^{\frac{1}{2}}$.

66 Сократить дробь:

1) $\dfrac{\sqrt{a} - \sqrt{b}}{a^{\frac{1}{4}} - b^{\frac{1}{4}}}$; 2) $\dfrac{m^{\frac{1}{2}} + n^{\frac{1}{2}}}{m + 2\sqrt{mn} + n}$; 3) $\dfrac{c - 2c^{\frac{1}{2}} + 1}{\sqrt{c} - 1}$.

67 Упростить выражение $\dfrac{c^{\frac{3}{2}}}{c^{\frac{1}{2}} + b^{\frac{1}{2}}} - \dfrac{cb^{\frac{1}{2}}}{b^{\frac{1}{2}} - c^{\frac{1}{2}}} + \dfrac{2c^2 - 4cb}{c - b}$.

68 Вычислить:

1) $2^{\sqrt{5}} \cdot 2^{-\sqrt{5}}$; 2) $3^{2\sqrt{2}} : 9^{\sqrt{2}}$; 3) $(5^{\sqrt{3}})^{\sqrt{3}}$; 4) $((0{,}5)^{\sqrt{2}})^{\sqrt{8}}$.

Вычислить (69—71).

69 1) $2^{2-3\sqrt{5}} \cdot 8^{\sqrt{5}}$; 2) $3^{1+2\sqrt[3]{2}} : 9^{\sqrt[3]{2}}$;

3) $(5^{1+\sqrt{2}})^{1-\sqrt{2}}$; 4) $(5^{1-\sqrt{5}})^{1+\sqrt{5}} - (\sqrt{5})^0$.

70 1) $2^{1-2\sqrt{2}} \cdot 4^{\sqrt{2}}$; 2) $3^{2-3\sqrt{3}} \cdot 27^{\sqrt{3}}$;

3) $9^{1+\sqrt{3}} \cdot 3^{1-\sqrt{3}} \cdot 3^{-2-\sqrt{3}}$; 4) $4^{3+\sqrt{2}} \cdot 2^{1-\sqrt{2}} \cdot 2^{-4-\sqrt{2}}$.

71 1) $\dfrac{10^{2+\sqrt{7}}}{2^{2+\sqrt{7}} \cdot 5^{1+\sqrt{7}}}$; 2) $\dfrac{6^{3+\sqrt{5}}}{2^{2+\sqrt{5}} \cdot 3^{1+\sqrt{5}}}$;

3) $(25^{1+\sqrt{2}} - 5^{2\sqrt{2}}) \cdot 5^{-1-2\sqrt{2}}$; 4) $(2^{2\sqrt{3}} - 4^{\sqrt{3}-1}) \cdot 2^{-2\sqrt{3}}$.

72 Выяснить, какое из чисел больше:

1) $3^{\sqrt{71}}$ или $3^{\sqrt{69}}$; 2) $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{\sqrt{3}}$ или $\left(\dfrac{1}{3}\right)^{\sqrt{3}}$;

3) $4^{-\sqrt{3}}$ или $4^{-\sqrt{2}}$; 4) $2^{\sqrt{3}}$ или $2^{1,7}$;

5) $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{1,4}$ или $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{\sqrt{2}}$; 6) $\left(\dfrac{1}{9}\right)^{\pi}$ или $\left(\dfrac{1}{9}\right)^{3,14}$.

73 Сравнить число с единицей:

1) 2^{-2}; 2) $(0{,}013)^{-1}$; 3) $\left(\dfrac{2}{7}\right)^{5}$; 4) $27^{1,5}$;

5) $2^{-\sqrt{3}}$; 6) $\left(\dfrac{1}{3}\right)^{\sqrt{3}}$; 7) $\left(\dfrac{3}{4}\right)^{\sqrt{5}-2}$; 8) $\left(\dfrac{1}{3}\right)^{\sqrt{8}-3}$.

74 Упростить выражение:

1) $a^{\sqrt{2}}\cdot a^{1-\sqrt{2}}$; 2) $a^{\sqrt{3}-1}\cdot a^{\sqrt{3}+1}$; 3) $(b^{\sqrt{3}})^{\sqrt{3}}:b^2$.

75 Сравнить числа: 1) $\sqrt[3]{2}$ и $\sqrt[3]{3}$; 2) $\sqrt[4]{5}$ и $\sqrt[4]{7}$.

76 Вычислить:

1) $\left(\frac{1}{16}\right)^{-0,75}+810000^{0,25}-\left(7\frac{19}{32}\right)^{\frac{1}{5}}$; 2) $27^{\frac{2}{3}}-(-2)^{-2}+\left(3\frac{3}{8}\right)^{-\frac{1}{3}}$;

3) $(0,001)^{-\frac{1}{3}}-2^{-2}\cdot64^{\frac{2}{3}}-8^{-1\frac{1}{3}}$; 4) $(-0,5)^{-4}-625^{0,25}-\left(2\frac{1}{4}\right)^{-1\frac{1}{2}}$.

Упростить выражение (77—78).

77 1) $(a^4)^{-\frac{3}{4}}\cdot\left(b^{-\frac{2}{3}}\right)^{-6}$; 2) $\left[\left(\frac{a^6}{b^{-3}}\right)^4\right]^{\frac{1}{12}}$.

78 1) $\dfrac{a^{\frac{4}{3}}\left(a^{-\frac{1}{3}}+a^{\frac{2}{3}}\right)}{a^{\frac{1}{4}}\left(a^{\frac{3}{4}}+a^{-\frac{1}{4}}\right)}$; 2) $\dfrac{b^{\frac{1}{5}}\left(\sqrt[5]{b^4}-\sqrt[5]{b^{-1}}\right)}{b^{\frac{2}{3}}\left(\sqrt[3]{b}-\sqrt[3]{b^{-2}}\right)}$;

3) $\dfrac{a^{\frac{5}{3}}b^{-1}-a^{-\frac{1}{3}}}{\sqrt[3]{a^2}}$; 4) $\dfrac{a^{\frac{1}{3}}\sqrt{b}+b^{\frac{1}{3}}\sqrt{a}}{\sqrt[6]{a}+\sqrt[6]{b}}$.

79 Вычислить:

1) $\left(2^{\frac{5}{3}}\cdot3^{-\frac{1}{3}}-3^{\frac{5}{3}}\cdot2^{-\frac{1}{3}}\right)\sqrt[3]{6}$; 2) $\left(5^{\frac{1}{4}}:2^{\frac{3}{4}}-2^{\frac{1}{4}}:5^{\frac{3}{4}}\right)\sqrt[4]{1000}$.

Упростить выражение (80—83).

80 1) $a^{\frac{1}{9}}\sqrt[6]{a\sqrt[3]{a}}$; 2) $b^{\frac{1}{12}}\sqrt[3]{b\sqrt[4]{b}}$; 3) $\left(\sqrt[3]{ab^{-2}}+(ab)^{-\frac{1}{6}}\right)\sqrt[6]{ab^4}$;

4) $(\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b})\left(a^{\frac{2}{3}}+b^{\frac{2}{3}}-\sqrt[3]{ab}\right)$.

81 1) $\left(1-2\sqrt{\frac{b}{a}}+\frac{b}{a}\right):\left(a^{\frac{1}{2}}-b^{\frac{1}{2}}\right)^2$; 2) $\left(a^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{1}{3}}\right):\left(2+\sqrt[3]{\frac{a}{b}}+\sqrt[3]{\frac{b}{a}}\right)$;

3) $\dfrac{a^{\frac{1}{4}}-a^{\frac{9}{4}}}{a^{\frac{1}{4}}-a^{\frac{5}{4}}}-\dfrac{b^{-\frac{1}{2}}-b^{\frac{3}{2}}}{b^{\frac{1}{2}}+b^{-\frac{1}{2}}}$; 4) $\dfrac{\sqrt{a}-a^{-\frac{1}{2}}b}{1-\sqrt{a^{-1}b}}-\dfrac{\sqrt[3]{a^2}-a^{-\frac{1}{3}}b}{\sqrt[6]{a}+a^{-\frac{1}{3}}\sqrt{b}}$.

82 1) $\dfrac{m^{\sqrt{3}}\cdot n^{\sqrt{3}}}{(mn)^{2+\sqrt{3}}}$; 2) $\dfrac{x^{\sqrt{7}}\cdot y^{\sqrt{7}+1}}{(xy)^{\sqrt{7}}}$; 3) $(a^{\sqrt{2}}-b^{\sqrt{3}})(a^{\sqrt{2}}+b^{\sqrt{3}})$;

4) $\left(2a^{-0,5}-\frac{1}{3}b^{-\sqrt{3}}\right)\left(\frac{1}{3}b^{-\sqrt{3}}+2a^{-0,5}\right)$.

83 1) $(a^{1-\sqrt{2}})^{1+\sqrt{2}}$; 2) $\left(m^{\frac{1-\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}}}\right)^{-3}\cdot m^{\frac{3\sqrt{5}}{2}}$;

3) $(a^{\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{3}})^{\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{6}+\sqrt[3]{9}}$; 4) $(a^{\sqrt[3]{9}+\sqrt[3]{3}+1})^{1-\sqrt[3]{3}}$.

Решить уравнение (**84**—**85**).

84 1) $5^{2x}=5^4$; 2) $\left(\frac{1}{3}\right)^{2x}=\left(\frac{1}{3}\right)^{-1}$; 3) $9^x=3^{2\sqrt{2}}$; 4) $16^x=2^{8\pi}$.

85 1) $7^{x\sqrt{3}}=\sqrt{7}$; 2) $25^{x\sqrt{2}}=5\sqrt{5}$;

3) $(\sqrt{2})^x=2\sqrt{2}$; 4) $(\sqrt{3})^{3x}=3\sqrt{3}$.

86 Сравнить числа:

1) $\sqrt[3]{10}$ и $\sqrt[5]{20}$; 2) $\sqrt[4]{5}$ и $\sqrt[3]{7}$; 3) $\sqrt{17}$ и $\sqrt[3]{28}$; 4) $\sqrt[4]{13}$ и $\sqrt[5]{23}$.

Упростить выражение (**87**—**89**).

87 1) $\dfrac{a^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}-\dfrac{ab^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{b}-\sqrt{a}}-\dfrac{2a^2}{a-b}$;

2) $\dfrac{3xy-y^2}{x-y}-\dfrac{y\sqrt{y}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}-\dfrac{y\sqrt{x}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}$;

3) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}}-\dfrac{\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}}{a^{\frac{2}{3}}-\sqrt[3]{ab}+b^{\frac{2}{3}}}$; 4) $\dfrac{\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{b^2}}{\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}}-\dfrac{a-b}{a^{\frac{2}{3}}+\sqrt[3]{ab}+b^{\frac{2}{3}}}$.

88 1) $\dfrac{a-b}{\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}}-\dfrac{a+b}{a^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{1}{3}}}$; 2) $\dfrac{a+b}{a^{\frac{2}{3}}-a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{2}{3}}}-\dfrac{a-b}{a^{\frac{2}{3}}+a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{2}{3}}}$;

3) $\dfrac{a^{\frac{2}{3}}+b^{\frac{2}{3}}}{a-b}-\dfrac{1}{a^{\frac{1}{3}}-b^{\frac{1}{3}}}$; 4) $\dfrac{a^{\frac{1}{3}}-b^{\frac{1}{3}}}{a+b}-\dfrac{1}{a^{\frac{2}{3}}-a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{2}{3}}}$.

89 1) $\dfrac{x+y}{x^{\frac{2}{3}}-x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{3}}+y^{\frac{2}{3}}}+\dfrac{x-y}{x^{\frac{2}{3}}+x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{3}}+y^{\frac{2}{3}}}-\dfrac{x^{\frac{2}{3}}-y^{\frac{2}{3}}}{x^{\frac{1}{3}}-y^{\frac{1}{3}}}$;

2) $\dfrac{(a-b)^2}{a^{\frac{3}{2}}-b^{\frac{3}{2}}}+\dfrac{a^2-b^2}{\left(a^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{2}}\right)\left(a+a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}}+b\right)}$;

3) $\left(\dfrac{3x^{\frac{2}{3}}+5x^{\frac{1}{3}}}{x+1}+\dfrac{1}{x^{\frac{1}{3}}+1}\right):\left(4x^{\frac{1}{3}}+4+\dfrac{1}{x^{\frac{1}{3}}}\right)$.

90 Вкладчик вложил в банк 5000 р. под 2% годовых. Сколько денег получит вкладчик через 3 года?

91 Банк начисляет ежегодно 3% от суммы вклада. Сколько денег получит вкладчик через 2 года 7 месяцев, если первоначальная сумма вклада составляла 2000 р.?

Упражнения к главе I

92 Вычислить:

1) $\left(0{,}645 : 0{,}3 - 1\frac{107}{180}\right) \cdot \left(4 : 6{,}25 - 1 : 5 + \frac{1}{7} \cdot 1{,}96\right)$;

2) $\left(\frac{1}{2} - 0{,}375\right) : 0{,}125 + \left(\frac{5}{6} - \frac{7}{12}\right) : (0{,}358 - 0{,}108)$.

93 Представить в виде обыкновенной дроби:

1) 1,3(1); 2) 2,3(2); 3) 0,(248); 4) 0,(34).

94 Вычислить:

1) 48^0, 10^{-3}, $\left(\frac{2}{3}\right)^{-1}$, $(0{,}3)^{-3}$, $(-1{,}2)^{-2}$, $\left(2\frac{1}{4}\right)^{-2}$;

2) $\sqrt[3]{27}$, $\sqrt[4]{81}$, $\sqrt[5]{32}$, $\sqrt[6]{8^2}$, $\sqrt[8]{16^2}$, $\sqrt[3]{27^2}$;

3) $8^{\frac{1}{3}}$, $27^{\frac{2}{3}}$, $10000^{\frac{1}{4}}$, $32^{\frac{2}{5}}$, $32^{-\frac{3}{5}}$, $\left(\frac{27}{64}\right)^{\frac{2}{3}}$.

95 Вычислить:

1) $\sqrt[3]{5^3 \cdot 7^3}$, $\sqrt[4]{324} \cdot \sqrt[4]{4}$, $\sqrt[4]{15\frac{5}{8}} : \sqrt[4]{\frac{2}{5}}$;

2) $56^0 : 8^{-2}$, $16^{\frac{1}{4}} \cdot 25^{\frac{1}{2}}$, $\left(\frac{1}{15}\right)^{-1} : 9^{\frac{1}{2}}$, $8^{\frac{1}{3}}\left(\frac{1}{2}\right)^{4} : 16^{-1}$;

3) $\frac{5^{\frac{1}{4}} \cdot 5^{-\frac{1}{4}}}{5^2}$, $\frac{7^{\frac{7}{3}} \cdot 7^{-\frac{4}{3}}}{7^2}$, $\frac{0{,}3^{0{,}3} \cdot 0{,}3^{-1}}{0{,}3^{1{,}3}}$.

Вычислить (**96—97**).

96 1) $\frac{3}{4} - \left(\frac{2}{3}\right)^{-1}$; 2) $\left(\frac{1}{27} \cdot 125^{-1}\right)^{-\frac{1}{3}}$; 3) $27^{\frac{2}{3}} + 9^{-1}$;

4) $(0{,}01)^{-2} : 100^{-\frac{1}{2}}$; 5) $\left(\frac{64}{81}\right)^{-\frac{1}{2}}\left(\frac{8}{5}\right)^{-1}$; 6) $\left(2\frac{10}{27}\right)^{-\frac{2}{3}}\left(\frac{3}{4}\right)^{2}$.

97 1) $\sqrt[3]{\frac{3}{2}}\cdot\sqrt[3]{2\frac{1}{4}}$; 2) $\sqrt[4]{\frac{3}{4}}\cdot\sqrt[4]{6\frac{3}{4}}$; 3) $\sqrt[4]{15\frac{5}{8}}:\sqrt[4]{\frac{2}{5}}$;

4) $\sqrt[3]{11\frac{1}{4}}:\sqrt[3]{3\frac{1}{3}}$; 5) $\left(\sqrt[3]{\sqrt{27}}\right)^2$; 6) $\left(\sqrt{\sqrt[3]{16}}\right)^3$.

98 Расположить числа в порядке возрастания:

1) $1^{3,75}$, 2^{-1}, $\left(\frac{1}{2}\right)^{-2}$; 2) 98^0, $\left(\frac{3}{7}\right)^{-1}$, $32^{\frac{1}{5}}$.

99 Сравнить числа:

1) $0{,}88^{\frac{1}{6}}$ и $\left(\frac{6}{11}\right)^{-\frac{1}{6}}$; 2) $\left(\frac{5}{12}\right)^{-\frac{1}{4}}$ и $0{,}41^{-\frac{1}{4}}$;

3) $4{,}09^{3\sqrt{2}}$ и $\left(4\frac{3}{25}\right)^{3\sqrt{2}}$; 4) $\left(\frac{11}{12}\right)^{-\sqrt{5}}$ и $\left(\frac{12}{13}\right)^{-\sqrt{5}}$.

100 Упростить выражение, представив его в виде степени с основанием a:

1) $\frac{a^{1\frac{1}{3}}\cdot a^{-0,5}}{a^{\frac{2}{3}}}$; 2) $\frac{a^{-3}\cdot a^{\frac{7}{3}}}{a^{\frac{1}{3}}}$; 3) $(a^{2,5})^2\sqrt[5]{a}$; 4) $\sqrt[7]{a^2}\left(a^{\frac{1}{14}}\right)^2$.

101 Упростить выражение:

1) $x^{-2\sqrt{2}}\cdot\left(\frac{1}{x^{-\sqrt{2}-1}}\right)^{\sqrt{2}+1}$; 2) $\left(\frac{a^{\sqrt{3}}}{b^{\sqrt{3}-1}}\right)^{\sqrt{3}+1}\cdot\frac{a^{-1-\sqrt{3}}}{b^{-2}}$.

102 Сравнить числа:

1) $\sqrt[7]{\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)^2}$ и $\sqrt[7]{\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)^2}$;

2) $\sqrt[5]{\left(1\frac{1}{4}-1\frac{1}{5}\right)^3}$ и $\sqrt[5]{\left(1\frac{1}{6}-1\frac{1}{7}\right)^3}$.

103 Решить уравнение:

1) $6^{2x}=6^{\frac{1}{5}}$; 2) $3^x=27$; 3) $7^{3x}=7^{10}$;

4) $2^{2x+1}=32$; 5) $4^{2+x}=1$.

104 Сократить дробь:

1) $\frac{y-16y^{\frac{1}{2}}}{5y^{\frac{1}{4}}+20}$; 2) $\frac{a^{\frac{4}{5}}-b^{\frac{4}{5}}}{a^{\frac{2}{5}}-b^{\frac{2}{5}}}$.

105 Упростить:

1) $\frac{ab^{\frac{3}{2}}-b^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}}-1}$; 2) $\frac{b}{a-b}+\frac{b^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{2}}}$.

Проверь себя!

1 **Вычислить:**

1) $\dfrac{15^{\frac{2}{3}}\cdot 3^{\frac{7}{3}}}{5^{-\frac{1}{3}}}$; 2) $\left(\dfrac{1}{5}\right)^{-2}-\left(\dfrac{1}{27}\right)^{\frac{1}{3}}+4\cdot 379^{0}$; 3) $\left(\sqrt[3]{128}+\sqrt[3]{\dfrac{1}{4}}\right):\sqrt[3]{2}$.

2 **Упростить выражение:** 1) $\sqrt[3]{\dfrac{ab^{2}}{c}}\cdot\sqrt[3]{\dfrac{a^{5}b}{c^{2}}}$; 2) $\dfrac{a^{-3}\cdot a^{\frac{7}{3}}}{a^{\frac{1}{3}}}$.

3 **Сократить дробь** $\dfrac{a-9a^{\frac{1}{2}}}{7a^{\frac{1}{4}}+21}$.

4 **Сравнить числа** $\sqrt[5]{\left(\dfrac{2}{9}\right)^{3}}$ и $\sqrt[6]{\left(\dfrac{1}{4}\right)^{3}}$.

5 **Упростить выражение** $(\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b})^{2}-(\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b})^{2}$.

106 Показать, что геометрическая прогрессия является бесконечно убывающей, если:

1) $b_2=-81$, $S_2=162$; 2) $b_2=33$, $S_2=67$;
3) $b_1+b_2=130$, $b_1-b_3=120$; 4) $b_2+b_4=68$, $b_2-b_4=60$.

107 Записать бесконечную периодическую десятичную дробь в виде обыкновенной: 1) 1,10(209); 2) 0,108(32).

108 Найти сумму бесконечно убывающей геометрической прогрессии с положительными членами, если сумма первых трёх её членов равна 39, а сумма их обратных величин равна $\frac{13}{27}$.

109 Упростить выражение $\sqrt{43+30\sqrt{2}}+\sqrt{43-30\sqrt{2}}$.

110 Упростить выражение $a=(4-3\sqrt{2})^{2}+8\sqrt{34-24\sqrt{2}}-\sqrt{5}$.

Сравнить полученное число с нулём.

111 Сравнить числа a и b, если:

1) $a=\dfrac{2}{\sqrt{6}-\sqrt{3}}+\dfrac{5}{3+2\sqrt{2}}$, $b=\dfrac{2}{\sqrt{8}-\sqrt{5}}$;

2) $a=\sqrt{2}+\sqrt{3}$, $b=\sqrt{10}$;

3) $a=5-\sqrt{15}$, $b=\sqrt{17}-3$;

4) $a=\sqrt{13}-\sqrt{12}$, $b=\sqrt{12}-\sqrt{11}$.

112 Освободиться от иррациональности в знаменателе дроби:

1) $\dfrac{2}{\sqrt{2}-\sqrt{3}}$; 2) $\dfrac{\sqrt{5}}{5+\sqrt{10}}$; 3) $\dfrac{3}{\sqrt[3]{4}}$; 4) $\dfrac{2}{\sqrt[4]{27}}$; 5) $\dfrac{3}{\sqrt[4]{5}-\sqrt[4]{2}}$;

6) $\dfrac{11}{\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{2}}$; 7) $\dfrac{1}{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}}$; 8) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{6}+\sqrt[3]{9}}$.

113 Вычислить:

1) $(\sqrt[3]{7}-\sqrt[3]{4})(\sqrt[3]{49}+\sqrt[3]{28}+\sqrt[3]{16})$;

2) $(\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{10}+\sqrt[3]{25})(\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{5})$.

Упростить выражение (114—117).

114 1) $\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{\sqrt[4]{x}-\sqrt[4]{y}}-\dfrac{\sqrt{x}+\sqrt[4]{xy}}{\sqrt[4]{x}+\sqrt[4]{y}}$; 2) $\dfrac{x-y}{\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{y}}-\dfrac{x+y}{\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y}}$;

3) $\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt[3]{y^2}}{\sqrt[4]{x}+\sqrt[3]{y}}+\sqrt[3]{y}$; 4) $\dfrac{x\sqrt{x}-y\sqrt{y}}{x\sqrt{y}-y\sqrt{x}}-1$.

115 1) $\left(\dfrac{a^{\frac{4}{3}}b+ab^{\frac{4}{3}}}{a^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{1}{3}}}\cdot\dfrac{1}{a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}}}\right)^3$; 2) $\dfrac{a^{\frac{1}{3}}-b^{\frac{1}{3}}}{\sqrt[3]{ab}}\cdot\dfrac{ab^{\frac{1}{3}}-a^{\frac{1}{3}}b}{\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}}$;

3) $\dfrac{a^{\frac{2}{3}}-b^{\frac{2}{3}}}{a^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{1}{3}}}\cdot\dfrac{a^{\frac{2}{3}}+\sqrt[3]{ab}+b^{\frac{2}{3}}}{a-b}$; 4) $\dfrac{a^{\frac{4}{3}}-b^{\frac{4}{3}}}{\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}}\cdot\dfrac{a^{\frac{4}{3}}-\sqrt[3]{a^2b^2}+b^{\frac{4}{3}}}{\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}}$.

116 1) $\left(\dfrac{4a^2-9a^{-2}}{2a-3a^{-1}}+\dfrac{a^2-4+3a^{-2}}{a-a^{-1}}\right)^2$;

2) $\left(\dfrac{1}{(a+b)^{-2}}-\left(\dfrac{a-b}{a^3+b^3}\right)^{-1}\right)\cdot(ab)^{-1}$.

117 1) $\left(\dfrac{(\sqrt[4]{a}+\sqrt[4]{b})^2+(\sqrt[4]{a}-\sqrt[4]{b})^2}{a+\sqrt{ab}}\right)^5\cdot\sqrt[3]{a^{10}\cdot\sqrt{a}}$;

2) $\left(\dfrac{a-a^{-1}}{(\sqrt[3]{a^{-1}}+\sqrt[3]{a}+1)(\sqrt[3]{a^{-1}}-\sqrt[3]{a}+1)}+\sqrt[3]{a^{-1}}\right)^{-3}$;

3) $\left(\dfrac{a^{\frac{3}{2}}-b^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}-\sqrt{\dfrac{ab\sqrt[3]{a}+ab^{\frac{4}{3}}}{a^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{1}{3}}}}\right)\cdot\dfrac{1}{a+b}$.

118 Доказать, что $\sqrt[3]{7+5\sqrt{2}}+\sqrt[3]{7-5\sqrt{2}}=2$.

II
главы

Степенная функция

Как алгебраисты вместо АА, ААА, ... пишут A^2, A^3, ..., так я... вместо $\frac{1}{a}$, $\frac{1}{a^2}$, $\frac{1}{a^3}$, ... пишу a^{-1}, a^{-2}, a^{-3}, ...

И. Ньютон

§ 6 Степенная функция, её свойства и график

Вы знакомы с функциями $y = x$, $y = x^2$, $y = x^3$, $y = \frac{1}{x}$ и т. д. Все эти функции являются частными случаями *степенной функции*, т. е. функции $y = x^p$, где p — заданное действительное число.

Свойства степенной функции зависят от свойств степени с действительным показателем и, в частности, от того, при каких значениях x и p имеет смысл степень x^p.

Познакомимся с некоторыми свойствами функций, которыми обладают, в частности, отдельные степенные функции.

Функция $y = f(x)$, определённая на множестве X, называется *ограниченной снизу* на множестве X, если существует число C_1 такое, что для любого $x \in X$ выполняется неравенство $f(x) \geqslant C_1$.

Это означает, что все точки графика ограниченной снизу функции $y = f(x)$, $x \in X$ расположены выше прямой $y = C_1$ или на этой прямой (рис. 6, *а*).

Функция $y = f(x)$, определённая на множестве X, называется *ограниченной сверху* на множестве X, если существует число C_2 такое, что для любого $x \in X$ выполняется неравенство $f(x) \leqslant C_2$.

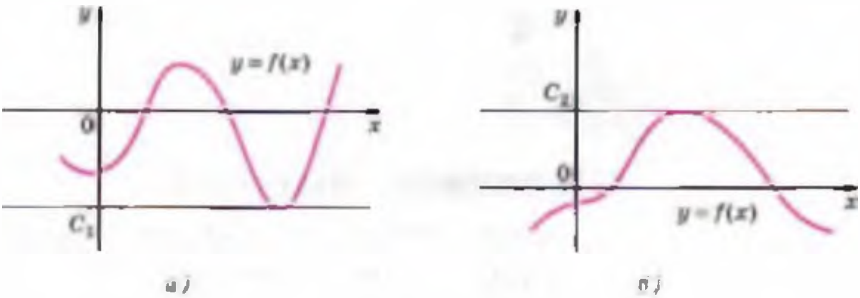


Рис. 6

В этом случае все точки графика функции $y = f(x)$, $x \in X$, лежат ниже прямой $y = C_2$ или на этой прямой (рис. 6, *б*).

Например: 1) функция $y = x^2 - 2x$ является ограниченной снизу, так как $x^2 - 2x = (x - 1)^2 - 1 \geqslant -1$ (рис. 7, *а*); 2) функция $y = -x^2 - 2x + 3$ ограничена сверху, так как $-x^2 - 2x + 3 = 4 - (x + 1)^2 \leqslant 4$ (рис. 7, *б*).

Функцию, ограниченную и сверху, и снизу на множестве X, называют *ограниченной* на этом множестве.

Функция $y = f(x)$ является ограниченной на множестве X тогда и только тогда, когда существует число $C > 0$ такое, что для любого $x \in X$ выполняется неравенство $|f(x)| \leqslant C$.

Если существует такое значение x_0 из области определения X функции $y = f(x)$, что для любого x из этой области справедливо неравенство $f(x) \geqslant f(x_0)$,

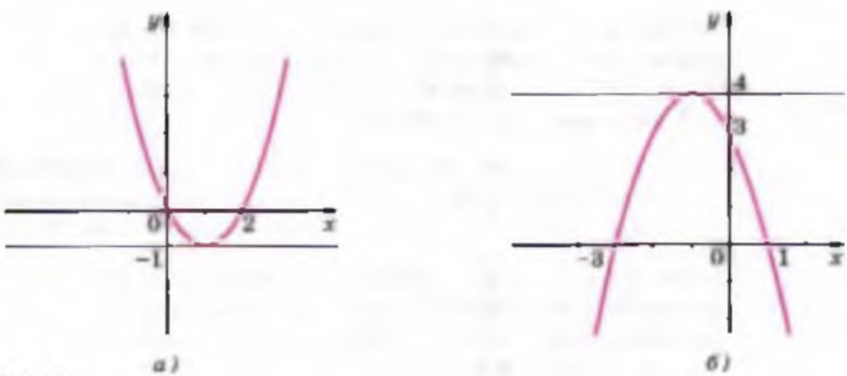


Рис. 7

то говорят, что функция $y = f(x)$ принимает наименьшее значение $y_0 = f(x_0)$ при $x = x_0$. Например, функция $y = x^2 - 2x$ принимает при $x = 1$ *наименьшее* значение, равное -1 (см. рис. 7, *а*).

Если существует такое значение x_0 из области определения X функции $y = f(x)$, что для любого $x \in X$ справедливо неравенство $f(x) \leqslant f(x_0)$, то говорят, что функция $y = f(x)$ принимает наибольшее значение $y_0 = f(x_0)$ при $x = x_0$.

Перейдём к подробному рассмотрению различных случаев в зависимости от показателя степени p.

1. Показатель $p = 2n$ — чётное натуральное число. В этом случае степенная функция $y = x^{2n}$, где n — натуральное число, обладает следующими свойствами:

— область определения — все действительные числа, т. е. множество $\boldsymbol{R}$;
— множество значений — неотрицательные числа, т. е. $y \geqslant 0$;
— функция $y = x^{2n}$ чётная, так как $(-x)^{2n} = x^{2n}$;
— функция является убывающей на промежутке $x \leqslant 0$ и возрастающей на промежутке $x \geqslant 0$;
— функция ограничена снизу;
— функция принимает наименьшее значение $y = 0$ при $x = 0$.

График функции $y = x^{2n}$ имеет такой же вид, как, например, график функции $y = x^4$ (рис. 8, *а*).

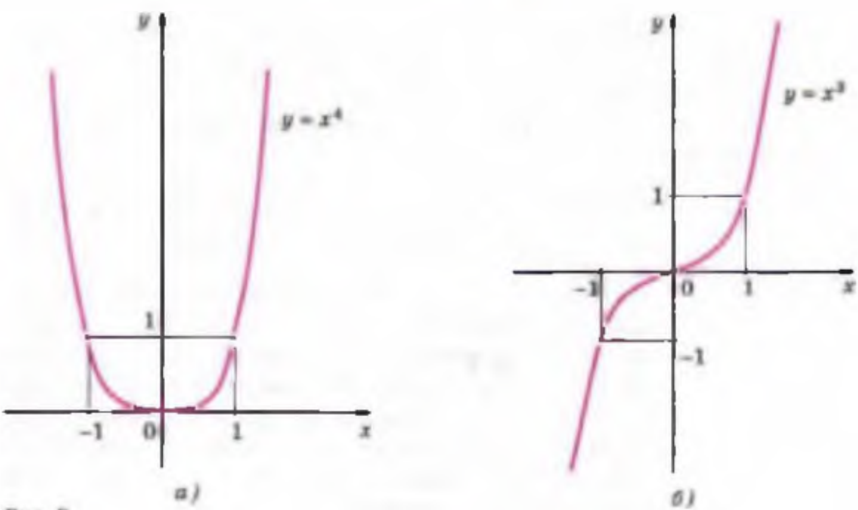


Рис. 8

2. Показатель $p = 2n - 1$ — нечётное натуральное число.

В этом случае степенная функция $y = x^{2n-1}$, где n — натуральное число, обладает следующими свойствами:

— область определения — множество $\boldsymbol{R}$;
— множество значений — множество $\boldsymbol{R}$;
— функция $y = x^{2n-1}$ нечётная, так как $(-x)^{2n-1} = -x^{2n-1}$;
— функция является возрастающей на всей действительной оси;
— функция не является ограниченной;
— функция не принимает ни наибольшего, ни наименьшего значения.

График функции $y = x^{2n-1}$ имеет такой же вид, как, например, график функции $y = x^3$ (рис. 8, *б*).

3. Показатель $p = -2n$, где n — натуральное число.

В этом случае степенная функция $y = x^{-2n} = \frac{1}{x^{2n}}$ обладает следующими свойствами:

— область определения — множество $\boldsymbol{R}$, кроме $x = 0$;
— множество значений — положительные числа $y > 0$;
— функция $y = \frac{1}{x^{2n}}$ чётная, так как $\frac{1}{(-x)^{2n}} = \frac{1}{x^{2n}}$;
— функция является возрастающей на промежутке $x < 0$ и убывающей на промежутке $x > 0$;
— функция ограничена снизу;
— функция не принимает ни наибольшего, ни наименьшего значения.

График функции имеет такой же вид, как, например, график функции $y = \frac{1}{x^2}$ (рис. 9).

Прямую $y = 0$ (ось абсцисс) называют *горизонтальной асимптотой* (от греч. *asymptotos* — несовпадающий) графика функции $y = x^{-2n}$, $n \in \boldsymbol{N}$. Прямую $x = 0$ (ось ординат) называют *вертикальной асимптотой* графика этой функции (при значениях x, приближающихся к нулю, расстояния от точек этого графика до прямой $x = 0$ становятся сколь угодно малыми).

4. Показатель $p = -(2n - 1)$, где n — натуральное число.

В этом случае степенная функция $y = x^{-(2n-1)} = \frac{1}{x^{2n-1}}$, где $n \in N$, обладает следующими свойствами:

— область определения — множество R, кроме $x = 0$;
— множество значений — множество R, кроме $y = 0$;
— функция $y = \frac{1}{x^{2n-1}}$ нечётная, так как $\frac{1}{(-x)^{2n-1}} = -\frac{1}{x^{2n-1}}$;
— функция является убывающей на промежутках $x < 0$ и $x > 0$;
— функция не принимает ни наибольшего, ни наименьшего значения.

График функции $y = \frac{1}{x^{2n-1}}$ имеет такой же вид, как, например, график функции $y = \frac{1}{x^3}$ (рис. 10).

Ось абсцисс является горизонтальной асимптотой, а ось ординат — вертикальной асимптотой графика функции.

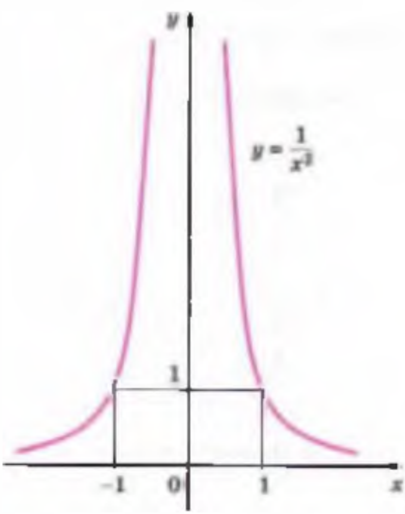


Рис. 9

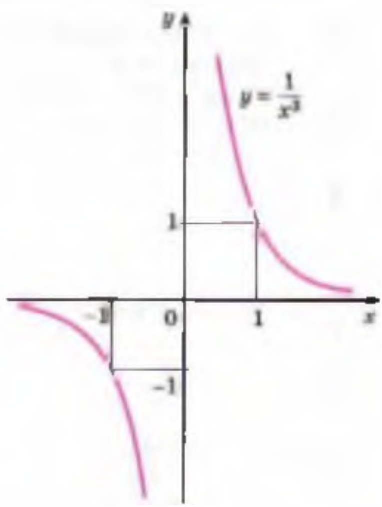


Рис. 10

5*. Показатель p — положительное действительное нецелое число.

В этом случае функция $y = x^p$ обладает следующими свойствами:

— область определения — множество неотрицательных чисел $x \geqslant 0$;
— множество значений — множество неотрицательных чисел $y \geqslant 0$;
— функция является возрастающей на промежутке $x \geqslant 0$;
— функция не является ни чётной, ни нечётной;
— функция ограничена снизу;
— функция принимает наименьшее значение $y = 0$ при $x = 0$.

График функции $y = x^p$, где p — положительное нецелое число, имеет такой же вид, как, например, график функции $y = x^{\frac{1}{3}}$ (при $0 < p < 1$) или как, например, график функции $y = x^{\frac{4}{3}}$ (при $p > 1$) (рис. 11, *а*, *б*).

6*. Показатель p — отрицательное действительное нецелое число.

В этом случае функция $y = x^p$ обладает следующими свойствами:

— область определения — множество положительных чисел $x > 0$;
— множество значений — множество положительных чисел $y > 0$;

Рис. 11

— функция является убывающей на промежутке $x > 0$;

— функция не является ни чётной, ни нечётной;

— функция ограничена снизу.

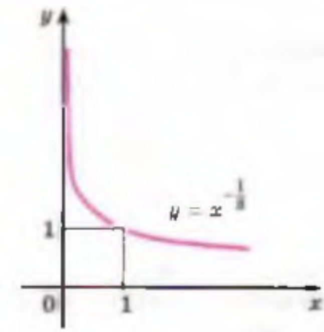


Рис. 12

График функции $y = x^p$, где p — отрицательное нецелое число, имеет такой же вид, как, например, график функции $y = x^{-\frac{1}{3}} = \frac{1}{x^{\frac{1}{3}}}$ (рис. 12).

Задача 1 Найти наибольшее и наименьшее значения функции $y = x^6$ на отрезке $\left[-2; \frac{1}{2}\right]$.

▶ Функция $y = x^6$ на отрезке $\left[-2; \frac{1}{2}\right]$ убывает при $x \in [-2; 0]$, возрастает при $x \in \left[0; \frac{1}{2}\right]$, следовательно, она принимает наименьшее значение, равное нулю, при $x = 0$. Наибольшее значение этой функции — наибольшее из чисел $y(-2)$ и $y\left(\frac{1}{2}\right)$. Так как

$y(-2) = (-2)^6 = 64$, $y\left(\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^6 = \frac{1}{64}$,

то $y(-2) > y\left(\frac{1}{2}\right)$ и наибольшее значение равно 64. ◁

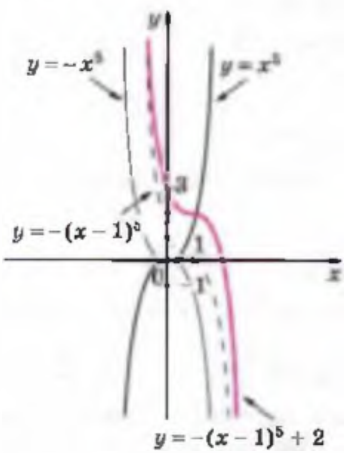


Рис. 13

Задача 2 Построить график функции $y = -(x-1)^5 + 2$.

▶ Областью определения функции является множество действительных чисел. Строим график функции $y = -x^5$, осуществляем сдвиг вдоль оси абсцисс на 1 единицу вправо и сдвиг вдоль оси ординат на 2 единицы вверх. График изображён на рисунке 13. ◁

Задача 3* Найти точки пересечения графиков функций

$$y = \sqrt[3]{x} \quad \text{и} \quad y = x^{\frac{4}{3}}.$$

▶ Для нахождения точек пересечения этих графиков решим уравнение $\sqrt[3]{x} = x^{\frac{4}{3}}$. Левая часть этого уравнения имеет смысл при всех x, а правая — только при $x \geqslant 0$.

При $x \geqslant 0$ функция $y = \sqrt[3]{x}$ совпадает с функцией $y = x^{\frac{1}{3}}$, поэтому уравнение можно записать так: $x^{\frac{1}{3}} = x^{\frac{4}{3}}$. Возводя это уравнение (при $x \geqslant 0$) в куб, получаем $x = x^4$, откуда $x(x^3 - 1) = 0$, $x_1 = 0$, $x_2 = 1$.

Ответ (0; 0), (1; 1). ◁

Упражнения

119 Изобразить схематически график функции и указать её область определения и множество значений; выяснить, является ли функция ограниченной сверху (снизу):

1) $y = x^6$; 2) $y = x^5$; 3) $y = x^7$;

4) $y = x^{-2}$; 5) $y = x^{-3}$; 6) $y = x^6$.

120 (Устно.) Выяснить, является ли функция $y = x^p$ возрастающей (убывающей) при $x > 0$, если:

1) $p = 7$; 2) $p = 16$; 3) $p = -3$;

4) $p = -7$; 5) $p = -4$; 6) $p = -10$?

121 Найти наибольшее и наименьшее значения функции на заданном отрезке:

1) $y = x^4$, $x \in [-1; 2]$; 2) $y = x^7$, $x \in [-2; 3]$;

3) $y = x^{-1}$, $x \in [-3; -1]$; 4) $y = x^{-2}$, $x \in [1; 4]$.

122 Пользуясь свойствами степенной функции, сравнить с единицей:

1) $4{,}1^{12}$; 2) $0{,}2^3$; 3) $0{,}7^9$; 4) $(\sqrt{3})^{22}$; 5) $1{,}3^{-2}$; 6) $0{,}8^{-1}$.

123 Построить график функции, указать её область определения и множество значений. Выяснить, является ли функция возрастающей (убывающей), является ли функция ограниченной, принимает ли она наибольшее (наименьшее) значение:

1) $y = -(x - 2)^3 - 1$; 2) $y = (x + 3)^4 + 2$.

124 Сравнить значения выражений:

1) $3{,}1^7$ и $4{,}3^7$; 2) $\left(\frac{10}{11}\right)^{\sqrt{3}}$ и $\left(\frac{12}{11}\right)^{\sqrt{3}}$;

3) $0{,}3^8$ и $0{,}2^8$; 4) $2{,}5^2$ и $2{,}6^2$;

5) $\left(\frac{7}{9}\right)^{-2}$ и $\left(\frac{8}{10}\right)^{-2}$; 6) $\left(\frac{14}{15}\right)^{-6}$ и $\left(\frac{15}{16}\right)^{-6}$;

7) $(4\sqrt{3})^{-3}$ и $(3\sqrt{4})^{-3}$; 8) $(2\sqrt[3]{6})^{-5}$ и $(6\sqrt[3]{2})^{-5}$.

125 В одной системе координат построить графики функций, находя сначала их области определения и множества значений:

1) $y = x^3$ и $y = x^{\frac{1}{3}}$; 2) $y = x^4$ и $y = x^{\frac{1}{4}}$;
3) $y = x^2$ и $y = x^{-2}$; 4) $y = x^5$ и $y = x^{-5}$.

126 Найти промежутки, на которых график функции:

1) $y = x^8$; 2) $y = x^{\frac{1}{3}}$ — лежит выше (ниже) графика функции $y = x$.

127 Изобразить схематически график функции и найти её область определения и множество значений; выяснить, является ли функция возрастающей (убывающей), ограниченной сверху (снизу):

1) $y = (x-2)^7$; 2) $y = (x+1)^6$; 3) $y = (x+2)^{-2}$; 4) $y = (x-1)^{-3}$.

128 Пользуясь рисунком 13 (с. 45), найти промежутки, на которых график функции: 1) $y = x^{\frac{1}{5}}$; 2) $y = x^{\frac{5}{3}}$ — лежит выше (ниже) графика функции $y = x$.

129 Построить график функции и указать её область определения, множество значений и промежутки возрастания и убывания; выяснить, является ли функция ограниченной сверху (снизу):

1) $y = |x|^{\frac{1}{3}}$; 2) $y = |x|^5$; 3) $y = |x|^3 + 1$;
4) $y = |x|^{\frac{1}{5}} - 2$; 5) $y = |x+2|^{\frac{1}{3}}$; 6) $y = |2x|^{-3}$.

130 Найти координаты точки пересечения графиков функций:

1) $y = \sqrt[5]{x}$ и $y = x^{-\frac{3}{5}}$; 2) $y = \sqrt[7]{x}$ и $y = x^{-\frac{5}{7}}$.

§ 7 Взаимно обратные функции

Если задана функция $y = f(x)$, то для каждого значения x из области определения функции можно найти соответствующее значение y. Нередко при ходится решать обратную задачу: по данному значению функции y находить соответствующее значение аргумента x.

Примером может служить функция $v(t) = v_0 - gt$, которая выражает зависимость скорости v движения тела, брошенного вверх с начальной скоростью v_0, от времени движения t. Из этой формулы можно найти обратную зависимость $t = t(v)$ — времени t от скорости v:

$$t = \frac{v_0 - v}{g}.$$

В рассмотренном примере каждому значению функции $v = v(t)$ соответствует одно значение аргумента. Для таких функций можно выразить обратную зависимость значений аргумента от значений функции. Такие функции называют *обратимыми*.

Если функция $y = f(x)$ принимает каждое своё значение только при одном значении x, то эту функцию называют *обратимой*.

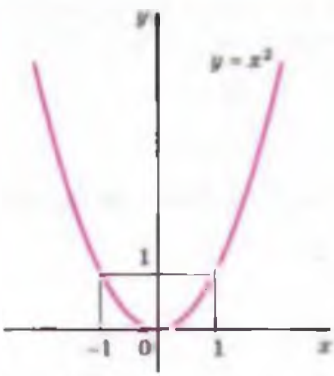


Рис. 14

Например, функция $y = 2x - 2$ обратима, так как каждое значение y принимается при единственном значении аргумента x. Это значение можно найти, решая уравнение $y = 2x - 2$ относительно x.

Функция $y = x^2$ не является обратимой, так как, например, значение $y = 1$ она принимает при $x = 1$ и при $x = -1$ (рис. 14). Пусть $y = f(x)$ — обратимая функция. Тогда каждому y из множества значений функции соответствует одно определённое число x из области её определения, такое, что $f(x) = y$. Это соответствие определяет функцию x от y, которую обозначим $x = g(y)$. В этой записи в соответствии с принятыми обозначениями поменяем местами x и y. Получим $y = g(x)$.

Функцию $y = g(x)$ называют *обратной* к функции $y = f(x)$.

Задача 1 Найти функцию, обратную к функции

$$y = 3x + 5. \qquad (1)$$

▶ Решая это уравнение относительно x, получаем $x = \frac{1}{3}(y - 5)$. В этой формуле поменяем местами x и y:

$$y = \frac{1}{3}(x - 5). \qquad (2)$$

Функция (2) обратна к функции (1). ◁

Вообще, если обратимая функция $y = f(x)$ задана формулой, то для нахождения обратной функции нужно решить уравнение $f(x) = y$ относительно x и затем поменять местами x и y.

Заметим, что рассмотренная в задаче функция $y = 3x + 5$ является обратной к найденной для неё обратной $y = \frac{1}{3}(x - 5)$ функции. Поэтому эти функции называют *взаимно обратными*.

Из определения обратной функции следует, что область определения обратной функции совпадает со множеством значений исходной функции, а множество значений обратной функции совпадает с областью определения исходной функции.

Задача 2 Найти функцию, обратную к функции $y = \frac{1}{x - 2}$.

▶ Решая это уравнение относительно x, получаем $x = 2 + \frac{1}{y}$. Заменив x на y и y на x, находим $y = 2 + \frac{1}{x}$. ◁

В этой задаче область определения функции $y = \frac{1}{x - 2}$ есть множество действительных чисел, не равных 2, а множество её значений — все действительные числа, не равные 0. График этой функции изображён на рисунке 15.

Для обратной функции $y = 2 + \frac{1}{x}$ область определения — множество действительных чисел, не равных 0, а множество значений — все действительные числа, не равные 2. График этой функции изображён на рисунке 16.

Возрастающие и убывающие функции иногда называют одним словом — *монотонные*.

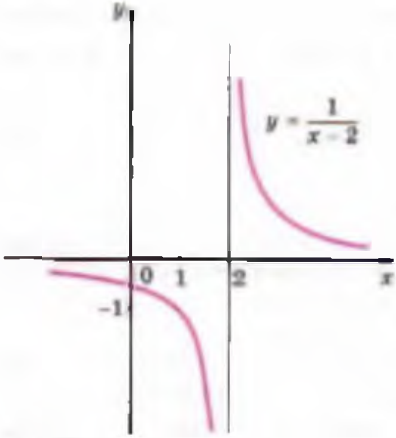


Рис. 15

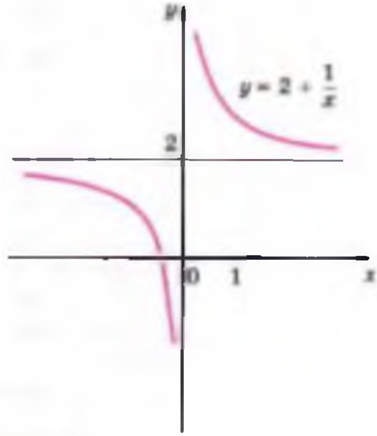


Рис. 16

Теорема 1. Монотонная функция является обратимой.

● Пусть функция $y = f(x)$ возрастает и пусть y_0 — её значение в некоторой точке x_0, т. е. $y_0 = f(x_0)$. Тогда если x принадлежит области определения функции, то при $x > x_0$ выполняется неравенство $f(x) > f(x_0) = y_0$, а при $x < x_0$ — неравенство $f(x) < f(x_0) = y_0$.

Следовательно, значение y_0 функция $f(x)$ принимает только в одной точке x_0 и поэтому является обратимой. Для убывающей функции доказательство проводится аналогично. ○

Рис. 17

Например, функция $y = x^3$ возрастает и поэтому является обратимой; обратной к ней является функция $y = \sqrt[3]{x}$ (рис. 17).

Если функция $y = f(x)$ возрастает, то с увеличением x значения y увеличиваются и, наоборот, с увеличением y увеличиваются x. Это означает, что обратная функция также возрастает. Аналогично если функция $y = f(x)$ убывает, то обратная к ней функция также убывает. Например, функция $f(x) = 1 - 2x$ убы-

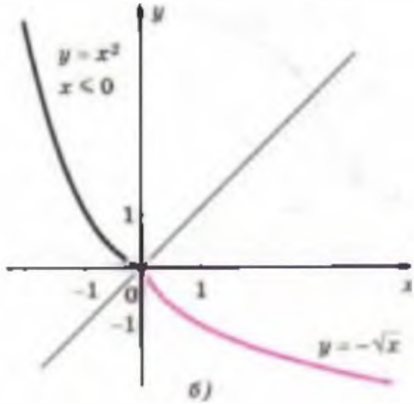


Рис. 18

вает и обратная к ней функция $g(x) = \frac{1-x}{2}$ также убывает.

Функция, не являющаяся монотонной, обратной может не иметь. Например, функция $y = x^2$, рассматриваемая на всей числовой оси, не имеет обратной.

Однако если функцию $y = x^2$ рассматривать только при $x \geqslant 0$, то на этом промежутке она возрастает и, следовательно, имеет обратную $y = \sqrt{x}$ (рис. 18, *а*).

Функция $y = x^2$, рассматриваемая при $x \leqslant 0$, убывает и также имеет обратную $y = -\sqrt{x}$ (рис. 18, *б*).

Теорема 2. Если функция имеет обратную, то график обратной функции симметричен графику данной функции относительно прямой $y = x$.

● Если точка $(x_0; y_0)$ принадлежит графику функции $y = f(x)$, то точка $(y_0; x_0)$ принадлежит графику обратной функции $y = g(x)$ (рис. 19), а точки $(x_0; y_0)$ и $(y_0; x_0)$ симметричны относительно прямой $y = x$ (рис. 20). ○

Рисунок 18 иллюстрирует эту теорему.

Отметим, что степенная функция $y = x^p$ с областью определения $x > 0$ и $p \neq 0$ обратима, так как она монотонна.

Обратной к степенной функции $y = x^p$ при $x > 0$ и $p \neq 0$ является функция $y = x^{\frac{1}{p}}$.

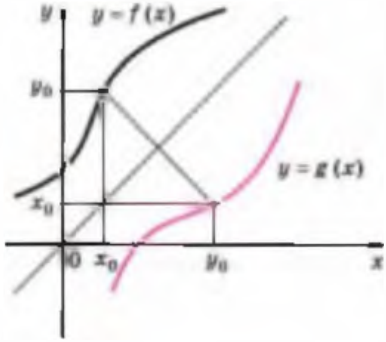


Рис. 19

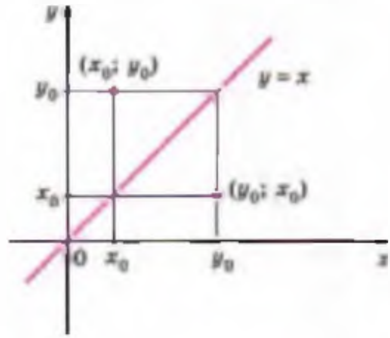


Рис. 20

Упражнения

131 (Устно.) Выяснить, является ли обратимой функция:

1) $y = 3x - 1$; 2) $y = x^2 + 7$; 3) $y = \frac{1}{x}$;

4) $y = \sqrt{x}$; 5) $y = x^4$; 6) $y = x^4$, $x < 0$.

132 Найти функцию, обратную к данной:

1) $y = 2x - 1$; 2) $y = -5x + 4$;

3) $y = \frac{1}{3}x - \frac{2}{3}$; 4) $y = \frac{3x-1}{2}$;

5) $y = x^3 + 1$; 6) $y = x^3 - 3$.

133 Найти область определения и множество значений функции, обратной к данной:

1) $y = -2x + 1$; 2) $y = \frac{1}{4}x - 7$;

3) $y = x^3 - 1$; 4) $y = (x-1)^3$;

5) $y = \frac{2}{x}$; 6) $y = \frac{3}{x-4}$.

134 Функция $y = f(x)$ задана графиком (рис. 21). Построить график функции, обратной к данной.

135 Являются ли взаимно обратными функции:

1) $y = -x^3$ и $y = -\sqrt[3]{x}$;

2) $y = -x^5$ и $y = \sqrt[5]{x}$;

3) $y = x^{-3}$ и $y = \frac{1}{\sqrt[3]{x}}$;

4) $y = \sqrt[5]{x^3}$ и $y = x\sqrt[3]{x^2}$?

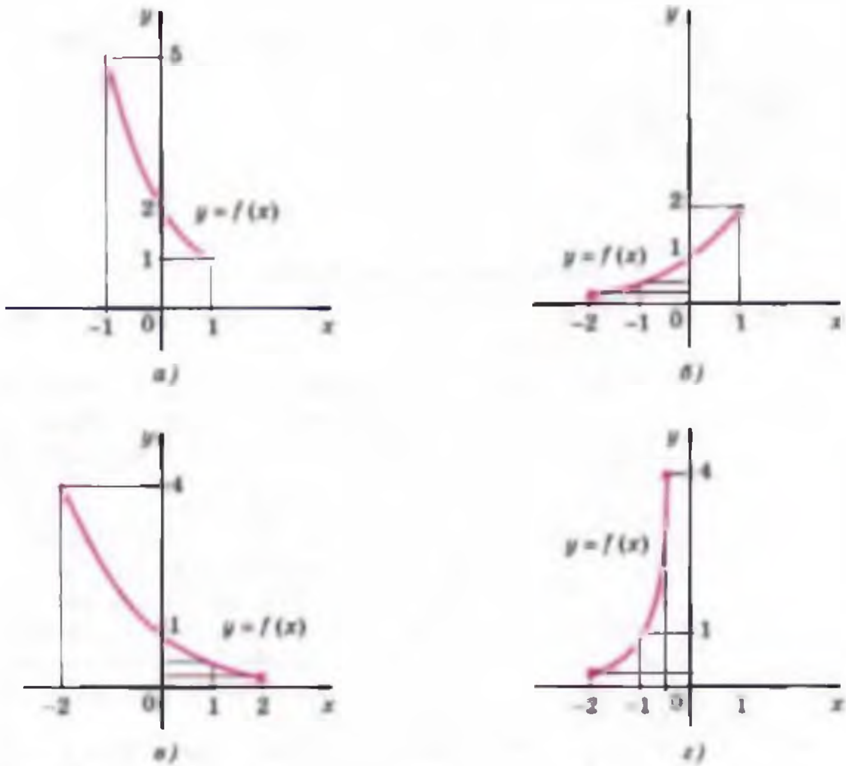


Рис. 21

136 Найти функцию, обратную к данной:

1) $y=-x^{\frac{1}{2}}$; 2) $y=-x^{\frac{1}{5}}$; 3) $y=x^{\frac{3}{2}}$; 4) $y=-x^{\frac{1}{3}}$.

137 На одном рисунке построить график данной функции и функции, обратной к данной; найти область определения и множество значений каждой из них:

1) $y=3x-1$; 2) $y=\frac{2x-1}{3}$;

3) $y=x^2-1$ при $x\geqslant 0$;

4) $y=(x-1)^2$ при $x\geqslant 1$;

5) $y=x^3-2$; 6) $y=(x-1)^3$;

7) $y=\sqrt{x-1}$; 8) $y=\sqrt{x}+1$.

§ 8 Равносильные уравнения и неравенства

1. Равносильные уравнения.

Задача 1 Найти точки пересечения графиков функций $y = 3\sqrt{x}$ и $y = x + 2$.

▶ Если $(x; y)$ — точка пересечения данных графиков, то $3\sqrt{x} = x + 2$. Следовательно, для нахождения абсцисс точек пересечения нужно решить уравнение

$$3\sqrt{x} = x + 2. \qquad (1)$$

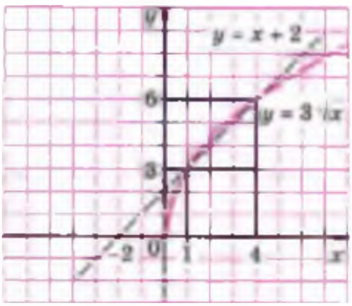


Рис. 22

Возводя обе части уравнения (1) в квадрат, получаем $9x = x^2 + 4x + 4$, откуда $x^2 - 5x + 4 = 0$. Корни полученного квадратного уравнения $x_1 = 1$, $x_2 = 4$. Проверка показывает, что оба корня являются также и корнями уравнения (1).

Теперь находим ординаты точек пересечения данных графиков $y_1 = 3\sqrt{x_1} = 3$, $y_2 = 3\sqrt{x_2} = 6$. Итак, данные графики пересекаются в двух точках (1; 3) и (4; 6) (рис. 22).

Ответ (1; 3), (4; 6). ◁

При решении задачи 1 исходное уравнение $3\sqrt{x} = x + 2$ заменялось уравнениями

$$9x = x^2 + 4x + 4, \quad x^2 - 5x + 4 = 0.$$

Все эти три уравнения имеют одни и те же корни $x_1 = 1$, $x_2 = 4$. Такие уравнения называют равносильными.

Уравнения, имеющие одно и то же множество корней, называются *равносильными*.
Уравнения, не имеющие корней, также являются равносильными.

Например, уравнения $4x - 3 = 2x + 3$ и $2x = 6$ равносильны, так как каждое из них имеет только один корень $x = 3$. Уравнения $(x - 2)(x + 5) = 0$ и $x^2 + 3x - 10 = 0$ также равносильны, так как они имеют одни и те же корни $x_1 = 2$, $x_2 = -5$. Уравнения $2x = 4$ и $3x^2 = 12$ не равносильны, так как первое имеет корень $x = 2$, а второе — корни $x_1 = 2$ и $x_2 = -2$. Из определения равносильности уравнений следует, что два уравнения равносильны, если каждый корень первого уравнения является корнем второго уравнения и, наоборот, каждый корень второго уравнения является корнем первого уравнения.

Из курса 7 класса вы знаете, что можно сделать следующие преобразования уравнений:

Любой член уравнения можно перенести из одной части в другую, изменив его знак на противоположный.

Обе части уравнения можно умножить или разделить на одно и то же число, не равное нулю.

При этих преобразованиях исходное уравнение заменяется на равносильное ему уравнение.

Заметим, что если некоторое выражение в левой или правой части уравнения заменить тождественно равным ему выражением, то получится уравнение, равносильное исходному. Однако не при любом преобразовании уравнение заменяется на равносильное.

Например, при возведении в квадрат обеих частей уравнения $\sqrt{x} = x - 2$ получается уравнение $x = (x - 2)^2$, не равносильное исходному: первое уравнение имеет только один корень $x = 4$, а второе — два корня $x_1 = 4$ и $x_2 = 1$. В этом случае второе уравнение называют *следствием* первого уравнения.

Если при переходе от одного уравнения к другому потери корней не происходит, то второе уравнение называют следствием первого уравнения. Иначе, если все корни первого уравнения являются корнями второго уравнения, то второе уравнение называется следствием первого уравнения.

Из этого определения и определения равносильности уравнений следует, что:

1) если два уравнения равносильны, то каждое из них является следствием другого;
2) если каждое из двух уравнений является следствием другого, то эти уравнения равносильны.

При решении уравнений главное — не потерять корни, а наличие посторонних корней можно установить проверкой. Поэтому важно следить за тем, чтобы при преобразовании уравнения каждое следующее уравнение было следствием предыдущего.

Задача 2 Решить уравнение

$$\frac{2x}{x-2} - \frac{x+1}{x-1} = \frac{4}{(x-1)(x-2)}. \qquad (2)$$

▶ Умножив обе части уравнения на общий знаменатель всех трёх дробей, т. е. на $(x-1)(x-2)$, получим

$$2x(x-1) - (x+1)(x-2) = 4, \qquad (3)$$

откуда $x^2 - x - 2 = 0$, $x_1 = 2$, $x_2 = -1$.

Проверка. 1) При $x = 2$ знаменатели двух дробей уравнения равны нулю. Поэтому $x = 2$ не является корнем данного уравнения.

2) При $x = -1$ левая часть уравнения равна

$$\frac{2(-1)}{-1-2} - \frac{-1+1}{-1-1} = \frac{2}{3},$$

правая часть равна

$$\frac{4}{(-1-1)(-1-2)} = \frac{2}{3}.$$

Ответ $x = -1$. ◁

Заметим, что для проверки корня $x = -1$ достаточно было убедиться в том, что знаменатели дробей уравнения при $x = -1$ не равны нулю (если, конечно, при решении уравнения не допущены ошибки в преобразованиях и вычислениях).

При решении задачи 2 из уравнения (2) получено уравнение (3), которое является следствием уравнения (2). Корень $x_1 = 2$ уравнения (3) не является корнем уравнения (2). Его называют *посторонним корнем*.

Посторонние корни могут получиться при умножении обеих частей уравнения на выражение, содержащее неизвестное.

Задача 3 Решить уравнение $x^2 - 4 = 7x - 14$.

▶ Преобразуем данное уравнение так:

$$(x+2)(x-2) = 7(x-2), \qquad (4)$$

откуда $(x + 2 - 7)(x - 2) = 0$, т. е. $(x - 5)(x - 2) = 0$, следовательно, $x_1 = 5$, $x_2 = 2$. ◁

Если обе части уравнения (4) разделить на $x - 2$, то получится уравнение $x + 2 = 7$, которое имеет только один корень $x = 5$, т. е. произойдёт потеря корня $x = 2$, и решение задачи будет неверным.

Потеря корней может произойти при делении обеих частей уравнения на выражение, содержащее неизвестное.

Итак, при решении уравнения можно делать только такие его преобразования, при которых не происходит потери корней. Если при этом получаются уравнения — следствия данного, то необходима проверка найденных корней.

2. Равносильные неравенства.

Равносильность неравенств с неизвестным определяется аналогично.

Неравенства, имеющие одно и то же множество решений, называют *равносильными*. Неравенства, не имеющие решений, также являются равносильными.

Например, неравенства $\frac{x-3}{x^2+1} < 0$ и $x - 3 < 0$ равносильны, так как имеют одно и то же множество решений $x < 3$. Неравенства $x^2 - 4x < x - 6$ и $x^2 - 5x + 6 < 0$ равносильны, так как имеют одно и то же множество решений $2 < x < 3$. Неравенства $\frac{2x}{x-1} > 1$ и $2x > x - 1$ не равносильны, так как решениями первого являются числа $x < -1$ и $x > 1$, а решениями второго — числа $x > -1$. При решении неравенств обычно данное неравенство преобразуется в ему равносильное.

Задача 4 Решить неравенство $\frac{5x-3}{x^2+1} > 1$.

▶ Так как $x^2 + 1 > 0$ при всех действительных значениях x, то, умножая неравенство на $x^2 + 1$, получаем неравенство $5x - 3 > x^2 + 1$, равносильное данному. Решая это неравенство, получаем

$$x^2 - 5x + 4 < 0, \quad (x - 1)(x - 4) < 0,$$

откуда $1 < x < 4$. ◁

Рис. 23

Рис. 24

Задача 5 Решить неравенство $\frac{3}{x-1} > \frac{2}{x+1}$.

▶ $\frac{3}{x-1} - \frac{2}{x+1} > 0$, $\frac{3x+3-2x+2}{(x-1)(x+1)} > 0$, $\frac{x+5}{(x-1)(x+1)} > 0$.

Решая последнее неравенство методом интервалов (рис. 23), получаем $-5 < x < -1$, $x > 1$.

Ответ $-5 < x < -1$, $x > 1$. ◁

Задача 6 Решить неравенство $x^6 < x^2$.

▶ $x^6 - x^2 < 0$, $x^2(x^4 - 1) < 0$,

$x^2(x-1)(x+1)(x^2+1) < 0$.

Решая последнее неравенство методом интервалов (рис. 24), получаем $-1 < x < 0$, $0 < x < 1$.

Ответ $-1 < x < 0$, $0 < x < 1$. ◁

Упражнения

138 Решить уравнение:

1) $(x+7)\cdot 3 = 2x + 14$;
2) $x^2 + \frac{1}{x^2-4} = 4 + \frac{1}{x^2-4}$;
3) $\frac{x-2}{x^2-1} = \frac{1-2x}{x^2-1}$;
4) $\frac{5x-15}{(x-3)(x+2)} = \frac{2}{x+2}$.

139 Равносильны ли следующие уравнения:

1) $3x - 7 = 5x + 5$ и $2x + 12 = 0$;
2) $\frac{1}{5}(2x-1) = 1$ и $\frac{3x-1}{8} = 1$;
3) $x^2 - 3x + 2 = 0$ и $x^2 + 3x + 2 = 0$;
4) $(x-5)^2 = 3(x-5)$ и $x - 5 = 3$;
5) $x^2 - 1 = 0$ и $2^{x+1} = 0$;
6) $|x-2| = -3$ и $3^x = (-1)^3$?

140 Равносильны ли следующие неравенства:

1) $2x - 1 \geqslant 2$ и $2(x-1) \geqslant 1$;
2) $(x-1)(x+2) < 0$ и $x^2 + x < 2$;
3) $(x-2)(x+1) < 3x + 3$ и $x - 2 < 3$;
4) $x(x+3) \geqslant 2x$ и $x^2(x+3) \geqslant 2x^2$?

141 Установить, какое из двух уравнений является следствием другого уравнения:

1) $x - 3 = 0$ и $x^2 - 5x + 6 = 0$;

2) $\frac{x^2 - 3x + 2}{x - 1} = 0$ и $x^2 - 3x + 2 = 0$.

142 Решить уравнение:

1) $\frac{x}{x+1} + \frac{2x}{x-1} = \frac{4x}{x^2-1}$; 2) $\frac{x-1}{x-2} - \frac{2}{x} = \frac{1}{x-2}$;

3) $(x - 3)(x - 5) = 3(x - 5)$; 4) $(x - 2)(x^2 + 1) = 2(x^2 + 1)$.

143 Решить неравенство:

1) $\frac{x+3}{2+x^2} < 3$; 2) $\frac{x-2}{5-x} > 1$.

Выяснить, равносильны ли уравнения **(144—145)**.

144 1) $|2x - 1| = 3$ и $2x - 1 = 3$;

2) $\frac{3x-2}{3} - \frac{4-x}{2} = \frac{3x-5}{6} = 2x - 2$ и $2x + 3 = \frac{10}{3}$.

145 1) $2x - 1 = 4 - 1{,}5x$ и $3{,}5x - 5 = 0$;

2) $x(x - 1) = 2x + 5$ и $x^2 - 3x - 5 = 0$;

3) $2^{3x+1} = 2^{-3}$ и $3x + 1 = -3$; 4) $\sqrt{x+2} = 3$ и $x + 2 = 9$.

146 Установить, какое из двух уравнений является следствием другого уравнения:

1) $|x| = \sqrt{5}$ и $\sqrt{x^2} = 5$;

2) $\frac{x-2}{x+3} = \frac{x-3}{x+2}$ и $(x - 2)(x + 2) = (x - 3)(x + 3)$.

147 Решить уравнение $\frac{1}{3x+1} - \frac{2}{3x-1} - \frac{5x}{9x^2-1} = \frac{3x^2}{1-9x^2}$.

148 Найти корни уравнения:

1) $\frac{3}{x-1} - \frac{4x-1}{x+1} = \frac{x^2+5}{x^2-1} - 5$;

2) $\frac{x+2}{x-2} - \frac{x(x-4)}{x^2-4} = \frac{x-2}{x+2} - \frac{4(3+x)}{4-x^2}$.

149 Решить неравенство:

1) $x^3 - 3x^2 + 2x - 6 > 2x^3 - x^2 + 4x - 2$;

2) $x^3 - 3x^2 - 4x + 12 > -3x^3 + x^2 + 12x - 4$.

150 Доказать, что если каждая из функций $f(x)$, $g(x)$ и $\varphi(x)$ определена на множестве X и $\varphi(x) \neq 0$ для всех $x \in X$, то уравнения

$$f(x) = g(x) \text{ и } f(x) \cdot \varphi(x) = g(x) \cdot \varphi(x)$$

равносильны.

§ 9 Иррациональные уравнения

В уравнениях $\sqrt{x+1} = x-1$, $\sqrt{5x-4} = 2+\sqrt{x}$ неизвестное x находится под знаком корня. Такие уравнения называют *иррациональными*. Приведём ещё примеры иррациональных уравнений:

$$\sqrt[4]{x+15} = x+1, \quad \sqrt[3]{x+6} = \sqrt{6-x}.$$

Иррациональные уравнения часто получаются при решении различных задач. Решение иррациональных уравнений основано на следующем свойстве:

При возведении обеих частей уравнения в натуральную степень получается уравнение-следствие данного.

● Пусть x_0 — корень уравнения $f(x) = g(x)$, т. е. $f(x_0) = g(x_0)$ — верное числовое равенство. Тогда по свойствам верных числовых равенств $f^n(x_0) = g^n(x_0)$, где n — натуральное число, также верное числовое равенство, т. е. x_0 — корень уравнения $f^n(x) = g^n(x)$. ○

При возведении обеих частей уравнения в чётную натуральную степень может получиться уравнение, не равносильное данному. Например, уравнение $\sqrt{6-x} = x$ имеет один корень $x = 2$, а уравнение $6 - x = x^2$ имеет два корня $x_1 = 2$, $x_2 = -3$.

Аналогично при возведении обеих частей уравнения $\sqrt{x^2+x-1} = \sqrt{x}$ в квадрат получается уравнение $x^2 + x - 1 = x$, т. е. $x^2 = 1$.

Это уравнение имеет два корня $x_1 = 1$, $x_2 = -1$. Второй корень является посторонним для исходного уравнения, так как подкоренные выражения при $x = -1$ отрицательны.

При возведении уравнения в натуральную степень могут появиться посторонние корни, поэтому проверка необходима.

Если обе части уравнения $f(x) = g(x)$ неотрицательны на множестве X, то уравнение $f(x) = g(x)$ равносильно уравнению $(f(x))^n = (g(x))^n$ при $n \in N$.

Задача 1 Решить уравнение $\sqrt{x+6} - \sqrt{x+1} = \sqrt{2x-5}$.

▶ Возводя обе части уравнения в квадрат, получаем

$$x+6-2\sqrt{(x+6)(x+1)}+x+1=2x-5,$$

откуда $\sqrt{(x+6)(x+1)} = 6$.

Возведём последнее уравнение в квадрат:

$$x^2+7x+6=36, \text{ или } x^2+7x-30=0.$$

Корни этого уравнения $x_1 = 3$, $x_2 = -10$.

Проверка показывает, что $x_2 = -10$ — посторонний корень.

Ответ $x = 3$. ◁

Задача 2 Решить уравнение

$$\sqrt[4]{x^2+12} = x. \qquad (1)$$

▶ Возведём уравнение в четвёртую степень:

$$x^2+12=x^4,$$

откуда $x^4 - x^2 - 12 = 0$. Решим это биквадратное уравнение

$x^2 = \frac{1 \pm \sqrt{1+48}}{2} = \frac{1 \pm 7}{2}$, т. е. $x^2 = 4$ или $x^2 = -3$.

Уравнение $x^2 = 4$ имеет два корня $x = \pm 2$. Уравнение $x^2 = -3$ не имеет действительных корней. Так как при возведении обеих частей уравнения (1) в четвёртую степень могли появиться посторонние корни, то нужно сделать проверку. При $x = 2$ обе части уравнения (1) равны 2, т. е. $x = 2$ — корень уравнения (1). При $x = -2$ левая часть уравнения (1) равна 2, а правая равна -2, т. е. -2 не является корнем уравнения.

Ответ $x = 2$. ◁

Задача 3 Решить уравнение

$$\sqrt[3]{x^3-19} = x-1. \qquad (2)$$

▶ Возводя обе части уравнения в куб, получаем

$$x^3-19=(x-1)^3,$$

откуда

$$x^3-19=x^3-3x^2+3x-1,$$
$$3x^2-3x-18=0, \quad x^2-x-6=0.$$

Корни этого уравнения $x_1 = 3$, $x_2 = -2$. Проверка показывает, что оба значения неизвестного являются корнями уравнения (2).

Ответ $x_1 = 3$, $x_2 = -2$. ◁

Иногда при решении иррационального уравнения полезно использовать графики функций.

Задача 4 Выяснить с помощью графиков, сколько корней имеет уравнение $\sqrt{x} = 1 - x^2$. Найти приближённые значения этих корней.

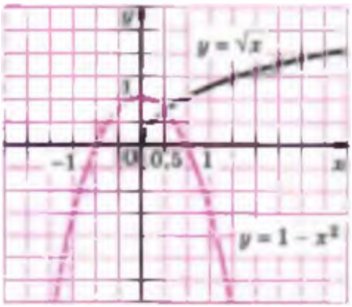


Рис. 25

▶ Построим на одном рисунке графики функций $y = \sqrt{x}$ и $y = 1 - x^2$ (рис. 25). Графики пересекаются в одной точке при $x \approx 0{,}5$.

Ответ $x \approx 0{,}5$. ◁

Упражнения

151 (Устно.) Решить уравнение:

1) $\sqrt{x} = 2$; 2) $\sqrt{x} = 7$; 3) $\sqrt[3]{x} = 2$; 4) $\sqrt[3]{x} = -3$;

5) $\sqrt[3]{1-3x} = 0$; 6) $\sqrt[4]{x} = 1$; 7) $\sqrt[4]{2-x} = 0$.

Решить уравнение (152—161).

152 1) $\sqrt{x+1} = 3$; 2) $\sqrt{x-2} = 5$; 3) $\sqrt{4+x} = \sqrt{2x-1}$.

153 1) $\sqrt[3]{2x+3} = 1$; 2) $\sqrt[3]{1-x} = 2$; 3) $\sqrt[3]{3x^2-3} = \sqrt[3]{8x}$.

154 1) $x + 1 = \sqrt{1-x}$; 2) $x = 1 + \sqrt{x+11}$;

3) $\sqrt{x+3} = \sqrt{5-x}$; 4) $\sqrt{x^2-x-3} = 3$.

155 1) $\sqrt{x} - x = -12$; 2) $x + \sqrt{x} = 2(x-1)$;

3) $\sqrt{x-1} = x - 3$; 4) $\sqrt{6+x-x^2} = 1 - x$.

156 1) $\sqrt{2x-34} = 1 + \sqrt{x}$; 2) $\sqrt{5x} + \sqrt{14-x} = 8$;

3) $\sqrt{15+x} + \sqrt{3+x} = 6$; 4) $\sqrt{3-2x} - \sqrt{1-x} = 1$.

157 1) $\sqrt{x^2+2} + \sqrt{x^3+x^2} = 0$; 2) $\sqrt[3]{1+x^4} = \sqrt[3]{1+x^2}$.

158 1) $\sqrt{5-x}-\sqrt{5+x}=2$; 2) $\sqrt{12+x}-\sqrt{1-x}=1$;

3) $\sqrt{x-2}+\sqrt{x+6}=0$; 4) $\sqrt{x+7}+\sqrt{x-2}=9$.

159 1) $\sqrt{1-2x}-\sqrt{13+x}=\sqrt{x+4}$;

2) $\sqrt{7x+1}-\sqrt{6-x}=\sqrt{15+2x}$.

160 1) $\sqrt[3]{x-2}=2$; 2) $\sqrt[3]{2x+7}=\sqrt[3]{3(x-1)}$;

3) $\sqrt[4]{25x^2-144}=x$; 4) $x^2=\sqrt{19x^2-34}$.

161 1) $\sqrt[3]{x^3-2}=x-2$; 2) $\sqrt[3]{x^3-5x^2+16x-5}=x-2$.

162 Выяснить с помощью графиков, сколько корней имеет уравнение:

1) $\sqrt{x-6}=-x^2$; 2) $\sqrt[3]{x}=(x-1)^2$;

3) $\sqrt{x+1}=x^2-7$; 4) $x^3-1=\sqrt{x+1}$.

163 Решить уравнение:

1) $\sqrt{4x+2\sqrt{3x^2+4}}=x+2$;

2) $3-x=\sqrt{9-\sqrt{36x^2-5x^4}}$;

3) $\sqrt{x^2+3x+12}-\sqrt{x^2+3x}=2$;

4) $\sqrt{x^2+5x+10}-\sqrt{x^2+5x+3}=1$.

164 Решить уравнение:

1) $\sqrt{x+\sqrt{6x-9}}+\sqrt{x-\sqrt{6x-9}}=\sqrt{6}$;

2) $\sqrt{x+\sqrt{x+11}}+\sqrt{x-\sqrt{x+11}}=4$.

§ 10* Иррациональные неравенства

Задача 1 Стрельба из спортивного пистолета по круглой мишени диаметром 1 м ведётся из точки прямой, перпендикулярной плоскости мишени и проходящей через её центр. На каком расстоянии от мишени должна быть точка выстрела, чтобы разность расстояний от неё до края мишени и до центра была не больше 2 см?

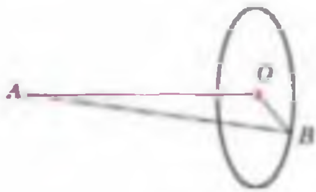


Рис. 26

Пусть A — точка выстрела, O — центр мишени, B — точка на окружности мишени (рис. 26). По условию $BO = 50$ см. Обозначим $AO = x$, тогда $AB = \sqrt{x^2 + 2500}$. По условию задачи $AB - AO \leqslant 2$, т. е. $\sqrt{x^2 + 2500} - x \leqslant 2$, или

$$\sqrt{x^2 + 2500} \leqslant x + 2. \qquad (1)$$

Так как по смыслу задачи $x > 0$, то левая и правая части неравенства (1) положительны. Следовательно, обе части неравенства (1) можно возвести в квадрат; при этом знак неравенства не изменится и получится неравенство, равносильное неравенству (1), т. е. $x^2 + 2500 \leqslant x^2 + 4x + 4$, откуда $4x \geqslant 2496$, $x \geqslant 624$ (см).

Ответ Не меньше 6,24 м. ◁

В этой задаче пришлось решать неравенство (1), содержащее неизвестное под знаком корня. Такие неравенства называют *иррациональными*.

Задача 2 Решить неравенство $\sqrt{5 - x} < 4$. **(2)**

▶ Найдём область определения неравенства (2), т. е. множество таких значений x, при которых имеют смысл обе части неравенства. Правая часть неравенства определена при всех значениях x, а левая — при $5 - x \geqslant 0$, т. е. при $x \leqslant 5$. Следовательно, область определения неравенства (2) — луч $(-\infty; 5]$. При $x \leqslant 5$ обе части неравенства (2) неотрицательны, и поэтому при возведении в квадрат обеих частей получается равносильное (на промежутке $(-\infty; 5]$) неравенство $5 - x < 16$.
Таким образом, неравенство (2) равносильно системе неравенств $\begin{cases} x \leqslant 5, \\ 5 - x < 16. \end{cases}$

Решая эту систему, получаем $-11 < x \leqslant 5$.

Ответ $-11 < x \leqslant 5$. ◁

Рассуждения, приведённые при решении задачи 2, можно провести устно и сразу записать, что неравенство (2) равносильно системе неравенств

$$\begin{cases} 5 - x \geqslant 0, \\ 5 - x < 16. \end{cases}$$

Задача 3 Решить неравенство

$$\sqrt{x^2-3x}<2. \qquad (3)$$

▶ Неравенство (3) равносильно системе

$$\begin{cases} x^2-3x\geqslant 0, \\ x^2-3x<4. \end{cases} \qquad (4)$$

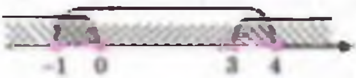


Рис. 27

Решая первое неравенство системы (4), получаем $x\leqslant 0$, $x\geqslant 3$. Решая второе неравенство системы (4), получаем $-1<x<4$. Оба неравенства системы (4) выполняются при $-1<x\leqslant 0$, а также при $3\leqslant x<4$ (рис. 27).

Ответ $-1<x\leqslant 0$, $3\leqslant x<4$. ◁

Задача 4 Решить неравенство

$$\sqrt{10+x-x^2}\geqslant 2. \qquad (5)$$

▶ Это неравенство равносильно системе

$$\begin{cases} 10+x-x^2\geqslant 0, \\ 10+x-x^2\geqslant 4. \end{cases} \qquad (6)$$

Так как каждое решение второго неравенства системы (6) является решением первого неравенства системы (6), то эта система равносильна одному второму неравенству

$$10+x-x^2\geqslant 4. \qquad (7)$$

Следовательно, неравенство (5) равносильно неравенству (7). Решая неравенство (7), получаем $-2\leqslant x\leqslant 3$.

Ответ $-2\leqslant x\leqslant 3$. ◁

Задача 5 Решить неравенство:

1) $\sqrt{3x-4}<-5$; 2) $\sqrt{2x^2+5x-3}\leqslant 0$.

▶ 1) При всех допустимых значениях x, т. е. при $x\geqslant\frac{4}{3}$, значения $\sqrt{3x-4}$ неотрицательны. Поэтому неравенство $\sqrt{3x-4}<-5$ решений не имеет.

2) Неравенство $\sqrt{2x^2+5x-3}\leqslant 0$ выполняется только тогда, когда $\sqrt{2x^2+5x-3}=0$, т. е. когда $2x^2+5x-3=0$, откуда $x_1=-3$, $x_2=\frac{1}{2}$. ◁

Задача 6 Решить неравенство

$$\sqrt{3x+1} \leqslant x+1. \qquad (8)$$

▶ Неравенство определено при $x \geqslant -\frac{1}{3}$. При этих значениях x обе части неравенства (8) неотрицательны. Следовательно, неравенство (8) равносильно системе

$$\begin{cases} 3x+1 \geqslant 0, \\ 3x+1 \leqslant (x+1)^2. \end{cases}$$

Решая эту систему, получаем $-\frac{1}{3} \leqslant x \leqslant 0$, $x \geqslant 1$.

Ответ $-\frac{1}{3} \leqslant x \leqslant 0$, $x \geqslant 1$. ◁

Задача 7 Решить неравенство

$$\sqrt{x+3} > x+1. \qquad (9)$$

▶ Область определения этого неравенства — промежуток $[-3; +\infty)$. При всех $x \geqslant -3$ левая часть этого неравенства неотрицательна. Правая часть этого неравенства отрицательна при $x < -1$. Поэтому все значения x из промежутка $[-3; -1)$ являются решениями неравенства (9).

Рассмотрим случай, когда $x \geqslant -1$. Тогда обе части неравенства (9) неотрицательны, и поэтому обе части этого неравенства можно возводить в квадрат: $x + 3 > (x + 1)^2$. Решением этого неравенства являются значения x из промежутка $(-2; 1)$. Отсюда, учитывая, что $x \geqslant -1$, получаем $-1 \leqslant x < 1$.

Итак, решениями неравенства (9) являются все значения x из промежутка $[-3; -1)$, а также из промежутка $[-1; 1)$, т. е. из промежутка $[-3; 1)$.

Ответ $-3 \leqslant x < 1$. ◁

Неравенство (9) проще решать с помощью графиков. На рисунке 28 построены графики функций $y = \sqrt{x+3}$ и $y = x + 1$. Из этого рисунка видно, что решениями неравенства (9) являются значения x из промежутка $-3 \leqslant x < 1$.

Задача 8 С помощью графиков решить неравенство $\sqrt{x} < 2 - x$.

▶ На одном рисунке построим графики функций $y = \sqrt{x}$ и $y = 2 - x$ (рис. 29) и выясним, при каких

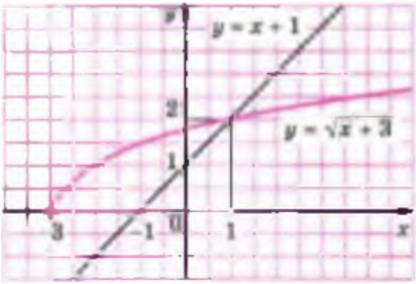


Рис. 28

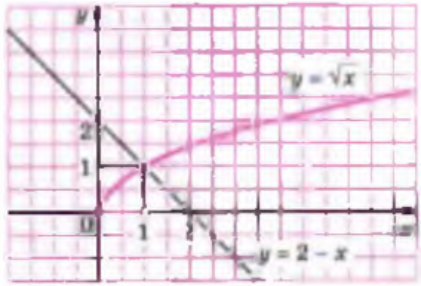


Рис. 29

значениях x точки графика функции $y = \sqrt{x}$ лежат ниже точек графика функции $y = 2 - x$.

Из рисунка видно, что эти графики пересекаются в одной точке, абсцисса которой является корнем уравнения $\sqrt{x} = 2 - x$. Этот корень $x = 1$. График функции $y = \sqrt{x}$ лежит ниже графика функции $y = 2 - x$ при $0 \leqslant x < 1$.

Ответ $0 \leqslant x < 1$. ◁

Задача 9* Решить неравенство

$$\sqrt{2x^2 - 5x - 3} > x - 1. \qquad (10)$$

▶ Найдём область определения этого неравенства, т. е. решим неравенство $2x^2 - 5x - 3 \geqslant 0$. Так как корнями уравнения $2x^2 - 5x - 3 = 0$ являются числа $x_1 = -\frac{1}{2}$, $x_2 = 3$, то неравенство выполняется при $x \leqslant -\frac{1}{2}$ и при $x \geqslant 3$ (рис. 30).

Таким образом, для решения неравенства (10) нужно выбирать только такие значения x, которые принадлежат его области определения.

1) Если $x - 1 < 0$, т. е. $x < 1$, то из этого промежутка области определения неравенства (10) удовлетворяют только числа $x \leqslant -\frac{1}{2}$ (рис. 31).

Рис. 30

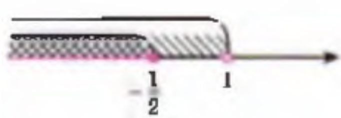


Рис. 31

Рис. 32

2) Если $x - 1 \geqslant 0$, т. е. $x \geqslant 1$, то, возводя обе части неравенства (10) в квадрат, получаем

$$2x^2 - 5x - 3 > x^2 - 2x + 1,$$

откуда $x^2 - 3x - 4 > 0$.

Так как корнями уравнения $x^2 - 3x - 4 = 0$ являются числа $x_1 = -1$, $x_2 = 4$, то неравенство $x^2 - 3x - 4 > 0$ выполняется при $x < -1$ и $x > 4$. Из этих двух промежутков области определения неравенства условию $x \geqslant 1$ удовлетворяют только числа $x > 4$ (рис. 32).

Ответ $x \leqslant -\frac{1}{2}$, $x > 4$. ◁

Упражнения

165 Решить систему неравенств:

1) $\begin{cases} 3 - x \leqslant 2, \\ 2x + 1 \leqslant 4; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x^2 - 1 \geqslant 0, \\ x > 2; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} 9 - x^2 \leqslant 0, \\ x + 5 < 0. \end{cases}$

Решить неравенство (166—171).

166 1) $\sqrt{x} > 2$; 2) $\sqrt{x} < 3$; 3) $\sqrt[3]{x} \geqslant 1$;

4) $\sqrt[3]{2x} < 3$; 5) $\sqrt{3x} > 1$; 6) $\sqrt{2x} \leqslant 2$.

167 1) $\sqrt{x - 2} > 3$; 2) $\sqrt{x - 2} < 1$;

3) $\sqrt{3 - x} < 5$; 4) $\sqrt{4 - x} > 3$;

5) $\sqrt{2x - 3} > 4$; 6) $\sqrt{x + 1} \geqslant \frac{2}{3}$;

7) $\sqrt{3x - 5} < 5$; 8) $\sqrt{4x + 5} \leqslant \frac{1}{2}$.

168 1) $\sqrt{x^2 - 1} > 1$; 2) $\sqrt{1 - x^2} < 1$;

3) $\sqrt{25 - x^2} > 4$; 4) $\sqrt{25 - x^2} < 4$.

169 1) $\sqrt{2x^2 + 3x - 2} > 0$; 2) $\sqrt{2 + x - x^2} > -1$;

3) $\sqrt{6x - x^2} < \sqrt{5}$; 4) $\sqrt{x^2 - x} > \sqrt{2}$;

5) $\sqrt{x^2 + 2x} > -3 - x^2$; 6) $\sqrt{4x - x^2} > -2 - 3x^2$.

170 1) $\sqrt{x + 2} > \sqrt{4 - x}$; 2) $\sqrt{3 + 2x} \geqslant \sqrt{x + 1}$;

3) $\sqrt{2x - 5} < \sqrt{5x + 4}$; 4) $\sqrt{3x - 2} > x - 2$;

5) $\sqrt{5x + 11} > x + 3$; 6) $\sqrt{3 - x} < \sqrt{3x - 5}$.

171 1) $\sqrt{x + 1} - \sqrt{x} < \sqrt{x - 1}$; 2) $\sqrt{x + 3} < \sqrt{7 - x} + \sqrt{10 - x}$.

Решить графически неравенство (172—173).

172 1) $\sqrt{x} \geqslant x$; 2) $\sqrt{x} < x$; 3) $\sqrt{x} > x - 2$; 4) $\sqrt{x} \leqslant x - 2$.

173 1) $\sqrt{x} \leqslant 2x$; 2) $\sqrt{x} > 0{,}5x$;

3) $\sqrt{x} \geqslant 2x - 1$; 4) $\sqrt{x} \geqslant x^2$.

174 Решить неравенство:

1) $\sqrt{x^2 - 3x + 2} > x + 3$; 2) $\sqrt{2x^2 - 7x - 4} > -x - \frac{1}{4}$.

Упражнения к главе II

175 Изобразить схематически график функции, указать её область определения и множество значений:

1) $y = x^6$; 2) $y = 7x^4$; 3) $y = \sqrt{x}$;

4) $y = \sqrt[3]{x}$; 5) $y = x^{-2}$; 6) $y = x^{-3}$.

176 На одном рисунке построить графики функций $y = x^2$ и $y = x^{\sqrt{x}}$. Сравнить значения этих функций при x, равном 0; $0{,}5$; 1; $\frac{3}{2}$; 2; 3; 4; 5.

177 Расположить числа в порядке возрастания:

1) $0{,}3^{\pi}, 0{,}3^{0{,}5}, 0{,}3^{\frac{2}{3}}, 0{,}3^{3{,}1415}$; 2) $\sqrt{2^{\pi}}, 1{,}9^{\pi}, \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{\pi}, \pi^{\pi}$;

3) $5^{-2}, 5^{-0{,}7}, 5^{\frac{1}{3}}, \left(\frac{1}{5}\right)^{2{,}1}$; 4) $0{,}5^{-\frac{2}{3}}, 1{,}3^{-\frac{2}{3}}, \pi^{-\frac{2}{3}}, (\sqrt{2})^{-\frac{2}{3}}$.

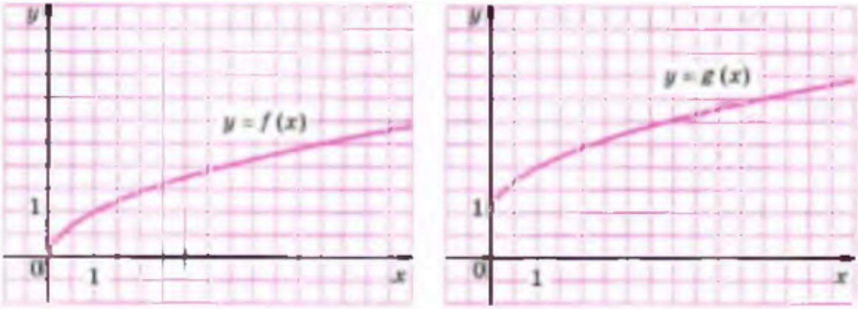
178 Решить уравнение с помощью графиков:

1) $\sqrt[3]{x} = x^2 + x - 1$; 2) $x^{-2} = 2 - x^2$.

179 Найти область определения функции:

1) $y = \sqrt[3]{1 - x}$; 2) $y = \sqrt[6]{2 - x^2}$;

3) $y = (3x^2 + 1)^{-2}$; 4) $y = \sqrt{x^2 - x - 2}$.



а) б)

Рис. 33

180 Найти функцию, обратную данной, её область определения и множество значений:

1) $y = 0{,}5x + 3$; 2) $y = \frac{2}{x-3}$;

3) $y = (x+2)^3$; 4) $y = x^3 - 1$.

181 Изобразить график функции, обратной к функции, график которой представлен на рисунке 33.

182 Являются ли равносильными уравнения:

1) $2^{x^2+3x} = 2^2$ и $x^2 + 3x = 2$;

2) $\sqrt{x^2+3x} = \sqrt{2}$ и $x^2 + 3x = 2$;

3) $\sqrt[3]{x+18} = \sqrt[3]{2-x}$ и $x + 18 = 2 - x$?

183 Решить уравнение:

1) $\sqrt{3-x} = 2$; 2) $\sqrt{3x+1} = 8$; 3) $\sqrt{3-4x} = 2x$;

4) $\sqrt{5x-1+3x^2} = 3x$; 5) $\sqrt[3]{x^2-17} = 2$; 6) $\sqrt[4]{x^2+17} = 3$.

Проверь себя!

1 Найти область определения функции:

1) $y = 3(x-1)^{-3}$; 2) $y = \sqrt[4]{x^2-3x-4}$.

2 Построить график функции:

1) $y = \sqrt[3]{x+1}$; 2) $y = 2x^{-2}$; 3) $y = \frac{x^4}{2}$.

Для каждой функции указать область определения и значения x, при которых $y > 0$.

3 Решить уравнение:

1) $\sqrt[3]{x-3} = 5$; 2) $\sqrt{3-x-x^2} = x$.

184 Изобразить схематически на одном рисунке графики функций:

1) $y = \sqrt{x^5}$, $y = x\sqrt{x}$; 2) $y = \sqrt[5]{x}$, $y = x^{-5}$.

185 Являются ли заданные функции взаимно обратными:

1) $y = \dfrac{10 - 3x}{x - 4}$ и $y = \dfrac{4x + 10}{x + 3}$;

2) $y = \dfrac{3x - 6}{3x - 1}$ и $y = \dfrac{6 - x}{3 - 3x}$;

3) $y = 5\,(1 - x)^{-1}$ и $y = (5 - x) \cdot x^{-1}$;

4) $y = \dfrac{2 - x}{2 + x}$ и $y = \dfrac{2(x - 1)}{1 + x}$?

186 Найти функцию, обратную к данной, её область определения и множество значений:

1) $y = 2 + \sqrt{x + 2}$; 2) $y = 2 - \sqrt{x + 4}$;

3) $y = \sqrt{3 - x} - 1$; 4) $y = \sqrt{1 - x} + 3$.

Решить уравнение (187—188).

187 1) $\sqrt{x - 4} = \sqrt{x - 3} - \sqrt{2x - 1}$;

2) $2\sqrt{x + 3} - \sqrt{2x + 7} = \sqrt{x}$;

3) $\sqrt{x - 3} = \sqrt{2x + 1} - \sqrt{x + 4}$;

4) $\sqrt{9 - 2x} = 2\sqrt{4 - x} - \sqrt{1 - x}$.

188 1) $\sqrt{x + 4} - 3\sqrt[4]{x + 4} + 2 = 0$; 2) $\sqrt{x - 3} = 3\sqrt[4]{x - 3} + 4$;

3) $\sqrt[6]{1 - x} - 5\sqrt[3]{1 - x} = -6$; 4) $x^2 + 3x + \sqrt{x^2 + 3x} = 2$;

5) $\dfrac{\sqrt{3 - x} + \sqrt{3 + x}}{\sqrt{3 - x} - \sqrt{3 + x}} = 2$;

6) $\sqrt{x + 6 - 4\sqrt{x + 2}} + \sqrt{11 + x - 6\sqrt{x + 2}} = 1$.

Решить неравенство (189—190).

189 1) $\sqrt{x + 1} < x - 1$; 2) $\sqrt{1 - x} > x + 1$;

3) $\sqrt{3x - 2} > x - 2$; 4) $\sqrt{2x + 1} \leqslant x + 1$.

190 1) $\dfrac{x^2 - 18x + 40}{\sqrt{19x - x^2 - 78}} \leqslant 0$; 2) $\dfrac{\sqrt{2x^2 + 7x - 4}}{x + 4} < \dfrac{1}{2}$;

3) $\sqrt{3 + x} > |x - 3|$; 4) $\sqrt{3 - x} < \sqrt{7 + x} + \sqrt{10 + x}$.

191 При различных значениях a решить неравенство:

1) $\sqrt{x - 2} + \sqrt{x - 6} < a$; 2) $2x + \sqrt{a^2 - x^2} > 0$.

III
глава

Показательная функция

Некоторые наиболее часто встречающиеся виды трансцендентных функций, прежде всего показательные, открывают доступ ко многим исследованиям.

Л. Эйлер

§ 11 Показательная функция, её свойства и график

В главе I рассматривалась степень с действительным показателем. Напомним основные *свойства степени*. Пусть $a > 0$, $b > 0$, x, x_1 и x_2 — любые действительные числа. Тогда

$$a^{x_1} a^{x_2} = a^{x_1 + x_2}, \quad (1) \qquad (ab)^x = a^x b^x, \quad (4)$$

$$\frac{a^{x_1}}{a^{x_2}} = a^{x_1 - x_2}, \quad (2) \qquad \left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x}, \quad (5)$$

$$(a^{x_1})^{x_2} = a^{x_1 x_2}, \quad (3) \qquad a^x > 0, \quad (6)$$

$$a^x > 1, \text{ если } a > 1, \ x > 0, \quad (7)$$

$$a^{x_1} < a^{x_2}, \text{ если } a > 1, \ x_1 < x_2, \quad (8)$$

$$a^{x_1} > a^{x_2}, \text{ если } 0 < a < 1, \ x_1 < x_2. \quad (9)$$

В практике часто используются функции $y = 2^x$, $y = 10^x$, $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$, $y = 0{,}1^x$ и т. д., т. е. функции вида $y = a^x$, где a — заданное положительное число, x — переменная. Такие функции называют *показательными*. Это название объясняется тем, что аргументом показательной функции является показатель степени, а основанием степени — заданное число.

Показательной функцией **называется функция вида $y = a^x$, где a — заданное число, $a > 0$, $a \neq 1$.**

Показательная функция обладает следующими свойствами:

1) Область определения показательной функции — множество R всех действительных чисел.

■ Это свойство следует из того, что степень a^x, где $a > 0$, определена для всех $x \in R$. ○

2) Множество значений показательной функции — множество всех положительных чисел.

■ Чтобы убедиться в этом, нужно показать, что уравнение $a^x = b$, где $a > 0$, $a \neq 1$, не имеет корней, если $b \leqslant 0$, и имеет корень при любом $b > 0$. По свойству степени (6) это уравнение не имеет корней, если $b \leqslant 0$. То, что это уравнение имеет корень при любом $b > 0$, доказывается в курсе высшей математики. Это означает, что любая прямая $y = b$, где $b > 0$, пересекается с графиком показательной функции. ○

3) Показательная функция $y = a^x$ является возрастающей на множестве всех действительных чисел, если $a > 1$, и убывающей, если $0 < a < 1$.

● Это следует из свойств степени (8) и (9). ○

Построим графики функций $y = 2^x$ и $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$, используя рассмотренные свойства и построив несколько точек, принадлежащих графикам (рис. 34). Отметим, что график функции $y = 2^x$ проходит через точку (0; 1) и расположен выше оси Ox. Если $x < 0$ и $|x|$ увеличивается, то график быстро приближается к оси Ox (но не пересекает её). Таким образом, ось Ox является горизонтальной асимптотой графика функции $y = 2^x$. Если $x > 0$ и $|x|$ увеличивается, то график быстро поднимается вверх. Такой же вид имеет график любой функции $y = a^x$, если $a > 1$ (рис. 35, a).

График функции $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ также проходит через точку (0; 1) и расположен выше оси Ox. Если $x > 0$ и увеличивается, то график быстро приближается к оси Ox (не пересекая её). Таким образом, ось Ox

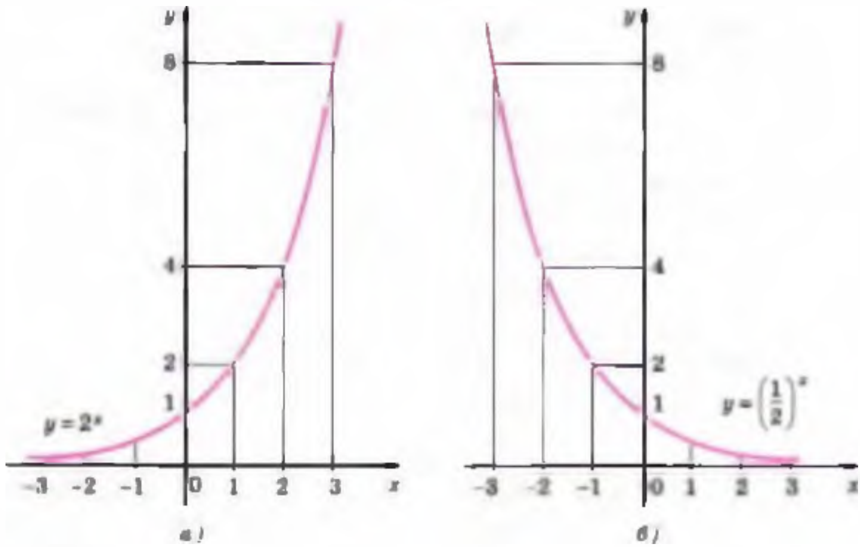


Рис. 34

является горизонтальной асимптотой графика функции $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$. Если $x < 0$ и $|x|$ увеличивается, то график быстро поднимается вверх. Такой же вид имеет график любой функции $y = a^x$, если $0 < a < 1$ (рис. 35, *б*).

Показательная функция часто используется при описании различных физических процессов. Так, радиоактивный распад описывается формулой

$$m(t) = m_0 \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{T}}, \qquad (10)$$

где $m(t)$ и m_0 — масса радиоактивного вещества соответственно в момент времени t и в начальный момент времени $t = 0$, T — период полураспада (промежуток времени, за который первоначальное количество вещества уменьшается вдвое).

С помощью показательной функции выражается зависимость давления воздуха от высоты подъёма, ток самоиндукции в катушке после включения постоянного напряжения и т. д.

Задача 1 Решить уравнение $3^x = 27$.

▶ По свойству (2) показательной функции данное уравнение имеет корень, так как $27 > 0$. Одним из корней является число $x = 3$, так как $3^3 = 27$.

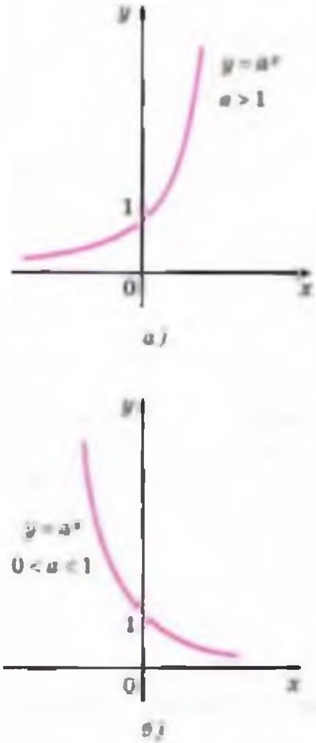


Рис. 35

Рис. 36

Других корней нет, так как функция $y = 3^x$ возрастает на всей числовой прямой, и поэтому $3^x > 27$ при $x > 3$ и $3^x < 27$ при $x < 3$ (рис. 36).

Ответ $x = 3$. ◁

Задача 2* Период полураспада плутония равен 140 суткам. Сколько плутония останется через 10 лет, если его начальная масса равна 8 г?

▶ Воспользуемся формулой (10). В данной задаче $t = 10 \cdot 365$ (считаем, что в году 365 дней), $T = 140$, $\frac{t}{T} = \frac{365}{14}$. Вычисления на микрокалькуляторе, имеющем ячейку памяти и клавишу $\boxed{y^x}$, показывают, что $m = 8\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{365}{14}} \approx 1{,}1345 \cdot 10^{-7}$.

Ответ Через 10 лет плутония останется примерно $1{,}13 \cdot 10^{-7}$ г. ◁

Упражнения

192 Построить график функции:

1) $y = 3^x$; 2) $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$.

193 С помощью графика функции $y = 3^x$ найти приближённое значение:

1) $\sqrt{3}$; 2) $3^{\frac{2}{3}}$; 3) $\frac{1}{\sqrt{3}}$; 4) $3^{-1,4}$.

194 Изобразить схематически график функции:

1) $y = 0,4^x$; 2) $y = (\sqrt{2})^x$; 3) $y = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^x$; 4) $y = (\sqrt{3})^x$.

195 (Устно.) Используя свойство возрастания или убывания показательной функции, сравнить числа:

1) $1,7^3$ и 1; 2) $0,3^2$ и 1; 3) $3,2^{1,5}$ и $3,2^{1,6}$;

4) $0,2^{-3}$ и $0,2^{-2}$; 5) $\left(\frac{1}{5}\right)^{\sqrt{2}}$ и $\left(\frac{1}{5}\right)^{1,4}$; 6) 3^π и $3^{3,14}$.

196 Сравнить с единицей число:

1) $(0,1)^{\sqrt{2}}$; 2) $(3,5)^{0,1}$; 3) $\pi^{-2,7}$; 4) $\left(\frac{\sqrt{5}}{5}\right)^{-1,2}$.

197 Найти координаты точки пересечения графиков функций:

1) $y = 2^x$ и $y = 8$; 2) $y = 3^x$ и $y = \frac{1}{3}$;

3) $y = \left(\frac{1}{4}\right)^x$ и $y = \frac{1}{16}$; 4) $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ и $y = 9$.

198 (Устно.) Решить уравнение:

1) $5^x = \frac{1}{5}$; 2) $7^x = 49$; 3) $\left(\frac{1}{3}\right)^x = \sqrt{3}$; 4) $\left(\frac{1}{7}\right)^x = \sqrt[3]{7}$.

199 (Устно.) Выяснить, является ли возрастающей или убывающей функция:

1) $y = 0,3^{-x}$; 2) $y = \left(\frac{1}{7}\right)^{-x}$; 3) $y = 1,3^{-2x}$; 4) $y = 0,7^{3x}$.

200 Решить графически неравенство:

1) $\left(\frac{1}{3}\right)^x > 1$; 2) $\left(\frac{1}{2}\right)^x < 1$; 3) $5^x > 5$; 4) $5^x < \frac{1}{5}$.

201 Построить график функции:

1) $y = 3^x - 2$; 2) $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x + 3$; 3) $y = 2^{x+1}$; 4) $y = 3^{x-2}$.

202 Доказать, что графики функций $y = 2^x$ и $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ симметричны относительно оси ординат.

203 Найти наибольшее и наименьшее значения функции $y = 2^x$ на отрезке $[-1; 2]$.

204 Найти наибольшее и наименьшее значения функции $y = 2^{|x|}$ на отрезке $[-1; 1]$.

205 Построить график функции:

1) $y = 2^{|x|}$; 2) $y = \left(\frac{1}{3}\right)^{|x|}$; 3) $y = |3^x - 2|$; 4) $y = 2 - 3^x$.

206 При радиоактивном распаде количество некоторого вещества уменьшается вдвое за сутки. Сколько вещества останется от 250 г через 1,5 суток? через 3,5 суток? Вычисления провести на микрокалькуляторе.

207 На некотором лесном участке можно заготовить $4 \cdot 10^5$ м^3 древесины. Ежегодный прирост деревьев равен 4%. Сколько можно заготовить древесины на этом участке через 5 лет? Вычисления провести на микрокалькуляторе.

§ 12 Показательные уравнения

Рассмотрим несколько примеров показательных уравнений, т. е. уравнений, в которых неизвестное содержится в показателе степени.

Решение показательных уравнений часто сводится к решению уравнения $a^x = a^b$, где $a > 0$, $a \neq 1$, x — неизвестное. Это уравнение решается с помощью свойства степени (см. сл. 2, § 5, гл. I): степени с одинаковым основанием $a > 0$, $a \neq 1$ равны тогда и только тогда, когда равны их показатели.

Задача 1 Решить уравнение $4 \cdot 2^x = 1$.

▶ Запишем уравнение в виде $2^{x+2} = 2^0$, откуда $x + 2 = 0$.

Ответ $x = -2$. ◁

Задача 2 Решить уравнение $2^{3x} \cdot 3^x = 576$.

▶ Так как $2^{3x} = (2^3)^x = 8^x$, $576 = 24^2$, то уравнение можно записать в виде $8^x \cdot 3^x = 24^2$, или в виде $24^x = 24^2$, откуда $x = 2$.

Ответ $x = 2$. ◁

Задача 3 Решить уравнение $3^{x+1} - 2 \cdot 3^{x-2} = 25$.

▶ Вынося в левой части за скобки общий множитель 3^{x-2}, получаем $3^{x-2}(3^3 - 2) = 25$, $3^{x-2} \cdot 25 = 25$, откуда $3^{x-2} = 1$, $x - 2 = 0$, $x = 2$.

Ответ $x = 2$. ◁

Задача 4 Решить уравнение $3^x = 7^x$.

▶ Так как $7^x \neq 0$, то уравнение можно записать в виде $\frac{3^x}{7^x} = 1$, откуда $\left(\frac{3}{7}\right)^x = 1$, $x = 0$.

Ответ $x = 0$. ◁

Задача 5 Решить уравнение $3 \cdot 2^{x+1} + 2 \cdot 5^{x-2} = 5^x + 2^{x-2}$.

▶ Запишем уравнение в виде $3 \cdot 2^{x+1} - 2^{x-2} = 5^x - 2 \cdot 5^{x-2}$, откуда $2^{x-2}(3 \cdot 2^3 - 1) = 5^{x-2}(5^2 - 2)$,

$2^{x-2} \cdot 23 = 5^{x-2} \cdot 23$, $\left(\frac{2}{5}\right)^{x-2} = 1$, $x - 2 = 0$.

Ответ $x = 2$. ◁

Задача 6 Решить уравнение $9^x - 4 \cdot 3^x - 45 = 0$.

▶ Заменой $3^x = t$ данное уравнение сводится к квадратному уравнению $t^2 - 4t - 45 = 0$. Решая это уравнение, находим его корни: $t_1 = 9$, $t_2 = -5$, откуда $3^x = 9$, $3^x = -5$. Уравнение $3^x = 9$ имеет корень $x = 2$, а уравнение $3^x = -5$ не имеет корней, так как показательная функция не может принимать отрицательные значения.

Ответ $x = 2$. ◁

Задача 7 Решить уравнение

$$5^{2x^2-5x} = 5^{x^2+2x-10}. \qquad (1)$$

▶ Так как $5 > 0$, $5 \neq 1$, то

$$2x^2 - 5x = x^2 + 2x - 10, \qquad (2)$$

откуда $x^2 - 7x + 10 = 0$, $x_1 = 5$, $x_2 = 2$.

Ответ $x_1 = 5$, $x_2 = 2$. ◁

Отметим, что при таком способе решения получается уравнение, равносильное исходному, например уравнение (2) равносильно уравнению (1). Поэтому после решения уравнения (2) проверка не нужна (если есть уверенность в том, что не допущены ошибки в преобразованиях и вычислениях).

Задача 8 Решить уравнение $3^{|x-1|} = 3^{|x+3|}$.

▶ Так как $3 > 0$, $3 \neq 1$, то исходное уравнение равносильно уравнению $|x - 1| = |x + 3|$.

Возводя это уравнение в квадрат, получаем его следствие $(x-1)^2=(x+3)^2$, откуда

$$x^2-2x+1=x^2+6x+9,\quad 8x=-8,\quad x=-1.$$

Проверка показывает, что $x=-1$ — корень исходного уравнения.

Ответ $x=-1$. ◁

Задача 9 Решить уравнение $\sqrt[x]{3}\cdot\sqrt[x]{5}=225$.

▶ Исходное уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} (3\cdot 5)^{\frac{1}{x}}=225, \\ x\in N,\ x>1. \end{cases}$$

Преобразовав уравнение системы к виду $15^{\frac{1}{x}}=15^2$, имеем $\frac{1}{x}=2$, откуда $x=\frac{1}{2}$. Но $x=\frac{1}{2}$ не удовлетворяет условию $x>1$, $x\in N$, т. е. уравнение не имеет корней. ◁

Упражнения

Решить уравнение (208—223).

208 1) $4^{x-1}=1$; 2) $0{,}3^{3x-2}=1$; 3) $2^{2x}=2^{4\sqrt{3}}$; 4) $\left(\frac{1}{3}\right)^{3x}=\left(\frac{1}{3}\right)^{-2}$.

209 1) $27^x=\frac{1}{3}$; 2) $400^x=\frac{1}{20}$; 3) $\left(\frac{1}{5}\right)^x=25$; 4) $\left(\frac{1}{3}\right)^x=\frac{1}{81}$.

210 1) $3\cdot 9^x=81$; 2) $2\cdot 4^x=64$;

3) $3^{x+\frac{1}{2}}\cdot 3^{x-2}=1$; 4) $0{,}5^{x+7}\cdot 0{,}5^{1-2x}=2$;

5) $0{,}6^x\cdot 0{,}6^3=\frac{0{,}6^{2x}}{0{,}6^5}$; 6) $6^{3x}\cdot\frac{1}{6}=6\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^{2x}$.

211 1) $3^{2x-1}+3^{2x}=108$; 2) $2^{3x+2}-2^{3x-2}=30$;

3) $2^{x+1}+2^{x-1}+2^x=28$; 4) $3^{x-1}-3^x+3^{x+1}=63$.

212 1) $5^x=8^x$; 2) $\left(\frac{1}{2}\right)^x=\left(\frac{1}{3}\right)^x$; 3) $3^x=5^{2x}$; 4) $4^x=3^{\frac{x}{2}}$.

213 1) $9^x-4\cdot 3^x+3=0$; 2) $16^x-17\cdot 4^x+16=0$;

3) $25^x-6\cdot 5^x+5=0$; 4) $64^x-8^x-56=0$.

214 1) $3^{x^2+x-12}=1$; 2) $2^{x^2-7x+10}=1$;

3) $2^{\frac{x-1}{x-2}}=4$; 4) $0{,}5^{\frac{1}{x}}=4^{\frac{1}{x+1}}$.

215 1) $0,3^{x^3-x^2+x-1}=1$; 2) $\left(2\frac{1}{3}\right)^{x^2-2x+3}=1$;

3) $5,1^{\frac{1}{2}(x-3)}=5,1\sqrt{5,1}$; 4) $100^{x^2-1}=10^{1-5x}$.

216 1) $10^x=\sqrt[3]{100}$; 2) $10^x=\sqrt[5]{10000}$; 3) $225^{2x^2-24}=15$;

4) $10^x=\frac{1}{\sqrt[4]{10000}}$; 5) $(\sqrt{10})^x=10^{x^2-x}$; 6) $100^{x^2-1}=10^{1-5x}$.

217 1) $2^{x^2}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{4}x}=\sqrt[4]{8}$; 2) $5^{0,1x}\cdot\left(\frac{1}{5}\right)^{-0,06}=5^{x^2}$;

3) $\left(\frac{1}{2}\right)^{\sqrt{1-x}}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{-1}=\left(\frac{1}{2}\right)^{2x}$; 4) $0,7^{\sqrt{x+12}}\cdot0,7^{-1}=0,7^{\sqrt{x}}$.

218 1) $7^x-7^{x-1}=6$; 2) $3^{2y-1}+3^{2y-2}-3^{2y-4}=315$;

3) $5^{3x}+3\cdot5^{3x-2}=140$; 4) $2^{x+1}+3\cdot2^{x-1}-5\cdot2^x+6=0$.

219 1) $7^{x-2}=3^{2-x}$; 2) $2^{x-3}=3^{3-x}$;

3) $3^{\frac{x+2}{4}}=5^{x+2}$; 4) $4^{\frac{x-3}{2}}=3^{2(x-3)}$.

220 1) $(0,5)^{x^2-4x+3}=(0,5)^{2x^2+x+3}$; 2) $(0,1)^{3+2x}=(0,1)^{2-x^2}$;

3) $3^{\sqrt{x-6}}=3^x$; 4) $\left(\frac{1}{3}\right)^x=\left(\frac{1}{3}\right)^{\sqrt{3-x}}$.

221 1) $2^{|x-2|}=2^{|x+4|}$; 2) $1,5^{|5-x|}=1,5^{|x-1|}$;

3) $3^{|x+1|}=3^{2-|x|}$; 4) $3^{|x|}=3^{|2-x|-1}$.

222 1) $3^{x+3}+3^x=7^{x+1}+5\cdot7^x$;

2) $3^{x+4}+3\cdot5^{x+3}=5^{x+4}+3^{x+3}$;

3) $2^{8-x}+7^{3-x}=7^{4-x}+2^{3-x}\cdot11$;

4) $2^{x+1}+2^{x-1}-3^{x-1}=3^{x-2}-2^{x-3}+2\cdot3^{x-3}$.

223 1) $8\cdot4^x-6\cdot2^x+1=0$; 2) $\left(\frac{1}{4}\right)^x+\left(\frac{1}{2}\right)^x-6=0$;

3) $13^{2x+1}-13^x-12=0$; 4) $3^{2x+1}-10\cdot3^x+3=0$;

5) $2^{3x}+8\cdot2^x-6\cdot2^{2x}=0$; 6) $5^{3x+1}+34\cdot5^{2x}-7\cdot5^x=0$.

224 При каких значениях x сумма чисел 2^{x-1}, 2^{x-4} и 2^{x-2} равна сумме бесконечно убывающей геометрической прогрессии 6,5; 3,25; 1,625; ...?

Решить уравнение (**225—226**).

225 1) $3^{2x+6}=2^{x+3}$; 2) $5^{x-2}=4^{2x-4}$;

3) $2^x\cdot3^x=36^{x^2}$; 4) $9^{-\sqrt{x-1}}=\frac{1}{27}$.

226 1) $4 \cdot 9^x - 13 \cdot 6^x + 9 \cdot 4^x = 0;$ 3) $\sqrt[x]{2} \cdot \sqrt[2x]{3} = 12;$

2) $16 \cdot 9^x - 25 \cdot 12^x + 9 \cdot 16^x = 0;$ 4) $\sqrt[x]{5} \cdot 5^x = 25.$

227 Доказать, что уравнение имеет только один корень $x = 1$:

1) $4^x + 25^x = 29;$ 2) $7^x + 18^x = 25.$

§ 13 Показательные неравенства

Решение показательных неравенств часто сводится к решению неравенств

$$a^x > a^b \text{ или } a^x < a^b.$$

Эти неравенства решаются с помощью свойства возрастания или убывания показательной функции: для возрастающей функции большему значению функции соответствует большее значение аргумента, а для убывающей функции большему значению функции соответствует меньшее значение аргумента.

Задача 1 Решить неравенство $3^x < 81$.

▶ Запишем неравенство в виде $3^x < 3^4$. Так как $3 > 1$, то функция $y = 3^x$ является возрастающей. Поэтому решениями неравенства $3^x < 81$ являются числа $x < 4$.

Ответ $x < 4$. ◁

Задача 2 Решить неравенство $\left(\frac{1}{2}\right)^x > \sqrt{8}$.

▶ Запишем неравенство в виде

$$\left(\frac{1}{2}\right)^x > 2^{\frac{3}{2}}, \text{ или } \left(\frac{1}{2}\right)^x > \left(\frac{1}{2}\right)^{-\frac{3}{2}}.$$

Так как $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ — убывающая функция, то $x < -\frac{3}{2}$.

Ответ $x < -\frac{3}{2}$. ◁

Задача 3 Решить неравенство $3^{x^2-x} < 9$.

► Запишем неравенство в виде $3^{x^2-x} < 3^2$. Так как $3 > 1$, то $x^2 - x < 2$, откуда $x^2 - x - 2 < 0$, $-1 < x < 2$.

Ответ $-1 < x < 2$. ◁

Задача 4 Решить неравенство $16^x + 4^x - 2 > 0$.

► Обозначим $4^x = t$, тогда получим квадратное неравенство $t^2 + t - 2 > 0$. Это неравенство выполняется при $t < -2$ и при $t > 1$. Так как $t = 4^x$, то получим два неравенства $4^x < -2$, $4^x > 1$. Первое неравенство не имеет решений, так как $4^x > 0$ при всех $x \in R$. Второе неравенство можно записать в виде $4^x > 4^0$, откуда $x > 0$.

Ответ $x > 0$. ◁

Задача 5 Решить графически уравнение $\left(\frac{1}{3}\right)^x = x - \frac{2}{3}$.

► В одной системе координат построим графики функций $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ и $y = x - \frac{2}{3}$ (рис. 37). Из рисунка видно, что графики этих функций пересекаются в точке с абсциссой $x \approx 1$. Проверка показывает, что $x = 1$ — корень данного уравнения:

$\left(\frac{1}{3}\right)^1 = \frac{1}{3}$ и $1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$.

Покажем, что других корней нет. Функция $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ убывающая, а функция $y = x - \frac{2}{3}$ возрастающая. Следовательно, при $x > 1$ значения первой функции меньше $\frac{1}{3}$, а второй больше $\frac{1}{3}$; при $x < 1$, наоборот, значения первой функции больше $\frac{1}{3}$, а второй меньше $\frac{1}{3}$. Геометрически (см. рис. 37) это означает, что графики этих функций при $x > 1$ и $x < 1$ «расходятся» и потому не могут иметь точек пересечения при $x \neq 1$.

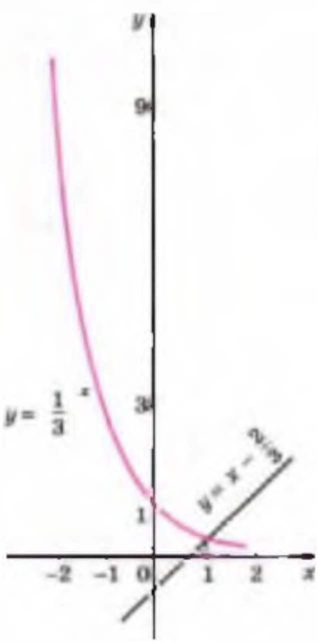


Рис. 37

Ответ $x = 1$. ◁

Заметим, что из решения этой задачи, в частности, следует, что неравенство $\left(\frac{1}{3}\right)^x > x - \frac{2}{3}$ выполняется при $x < 1$, а неравенство $\left(\frac{1}{3}\right)^x < x - \frac{2}{3}$ — при $x > 1$.

Задача 6* Решить неравенство $\left(\frac{2}{5}\right)^{\sqrt{2-x}} > \left(\frac{2}{5}\right)^x$.

▶ Так как $0 < \frac{2}{5} < 1$, то данное неравенство равносильно неравенству $\sqrt{2-x} < x$.

Рис. 38

Область определения этого неравенства $x \leqslant 2$. При $x \leqslant 0$ оно не имеет решений, так как $\sqrt{2-x} \geqslant 0$. Итак, решения неравенства содержатся в промежутке $(0; 2]$.

Возводя неравенство в квадрат, получаем $2 - x < x^2$, откуда $x^2 + x - 2 > 0$, $x < -2$ или $x > 1$ (рис. 38).

Ответ $1 < x \leqslant 2$. ◁

Упражнения

Решить неравенство (228—229).

228 1) $3^x > 9$; 2) $\left(\frac{1}{2}\right)^x > \frac{1}{4}$; 3) $\left(\frac{1}{4}\right)^x < 2$;

4) $4^x < \frac{1}{2}$; 5) $2^{3x} > \frac{1}{2}$; 6) $\left(\frac{1}{3}\right)^{x-1} \leqslant \frac{1}{9}$.

229 1) $5^{x-1} \leqslant \sqrt{5}$; 2) $3^{\frac{x}{2}} > 9$; 3) $3^{x^2-4} \geqslant 1$; 4) $5^{2x^2-18} < 1$.

230 Решить графически уравнение:

1) $\left(\frac{1}{3}\right)^x = x + 1$; 2) $\left(\frac{1}{2}\right)^x = x - \frac{1}{2}$;

3) $2^x = -x - \frac{7}{4}$; 4) $3^x = 11 - x$.

Решить неравенство (231—232).

231 1) $2^{-x^2+3x} < 4$; 2) $\left(\frac{7}{9}\right)^{2x^2-3x} \geqslant \frac{9}{7}$;

3) $\left(\frac{12}{11}\right)^{x^2-3x} < \frac{121}{169}$; 4) $\left(2\frac{2}{3}\right)^{6x^2+x} \leqslant 7\frac{1}{9}$.

232 1) $3^{x+2} + 3^{x-1} < 28$; 2) $2^{x-1} + 2^{x+3} > 17$;

3) $2^{2x-1} + 2^{2x-2} + 2^{2x-3} \geqslant 448$; 4) $5^{3x+1} - 5^{3x-3} \leqslant 624$.

233 Найти целые решения неравенства на отрезке $[-3; 3]$:

1) $9^x - 3^x - 6 > 0$; 2) $4^x - 2^x < 12$;

3) $5^{2x+1} + 4 \cdot 5^x - 1 > 0$; 4) $3 \cdot 9^x + 11 \cdot 3^x < 4$.

234 Найти область определения функции:

1) $y = \sqrt{25^x - 5^x}$; 2) $y = \sqrt{4^x - 1}$.

235 При каких значениях x значения функции $y = \left(\frac{1}{4}\right)^x$ больше значений функции $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x + 12$?

236 Решить графически неравенство:

1) $\left(\frac{1}{3}\right)^x \geqslant x + 1$; 2) $\left(\frac{1}{2}\right)^x < x - \frac{1}{2}$;

3) $2^x \leqslant 9 - \frac{1}{3}x$; 4) $3^x > -\frac{2}{3}x - \frac{1}{3}$.

237 Решить графически уравнение:

1) $2^x = 3 - 2x - x^2$; 2) $3^{-x} = \sqrt{x}$;

3) $\left(\frac{1}{3}\right)^x = -\frac{3}{x}$; 4) $\left(\frac{1}{2}\right)^x = x^3 - 1$.

238 Решить неравенство:

1) $11^{\sqrt{x+6}} > 11^x$; 2) $0{,}3^{\sqrt{30-x}} > 0{,}3^x$.

239 Решить неравенство:

1) $0{,}4^x - 2{,}5^{x+1} > 1{,}5$; 2) $25 \cdot 0{,}04^{2x} > 0{,}2^{x(3-x)}$;

3) $\frac{4^x}{4^x - 3^x} < 4$; 4) $\left(\frac{1}{4}\right)^x - 32 \cdot \left(\frac{1}{8}\right)^{x^2-1} < 0$.

§ 14 Системы показательных уравнений и неравенств

Рассмотрим несколько примеров решения систем показательных уравнений и неравенств.

Задача 1 Решить систему уравнений $\begin{cases} x + 2y = -1, \\ 4^{x+y^2} = 16. \end{cases}$

▶ Решим эту систему способом подстановки:

$$x = -2y - 1, \quad 4^{-2y-1+y^2} = 4^2,$$

откуда $-2y-1+y^2=2$, $y^2-2y-3=0$, $y_1=3$, $y_2=-1$. Найдём значения x:

$$x_1=-2\cdot3-1=-7,\quad x_2=-2\cdot(-1)-1=1.$$

Ответ $(-7;\ 3)$, $(1;\ -1)$. ◁

Задача 2 Решить систему уравнений $\begin{cases}3^{y+1}-2^x=5,\\ 4^x-6\cdot3^y+2=0.\end{cases}$

▶ Обозначим $2^x=u$, $3^y=v$. Тогда система запишется так:

$$\begin{cases}3v-u=5,\\ u^2-6v+2=0.\end{cases}$$

Решим эту систему способом подстановки:

$$u=3v-5,\ (3v-5)^2-6v+2=0,$$

$$9v^2-36v+27=0,\ v^2-4v+3=0,\ v_1=1,\ v_2=3.$$

Найдём значения u: $u_1=-2$, $u_2=4$. Возвратимся к принятым обозначениям:

1) $2^x=-2$, $3^y=1$. Так как первое из этих уравнений корней не имеет, то решений системы в этом случае нет.

2) $2^x=4$, $3^y=3$, откуда $x=2$, $y=1$.

Ответ $(2;\ 1)$. ◁

Задача 3* Решить систему уравнений $\begin{cases}2^x\cdot9^y=162,\\ 3^x\cdot4^y=48.\end{cases}$

▶ Перемножив уравнения данной системы, получим

$$6^x\cdot36^y=3^4\cdot2\cdot6\cdot2^3,\ \text{или}\ 6^{x+2y}=6^5,$$

откуда $x=5-2y$.

Тогда второе уравнение системы примет вид $3^{5-2y}4^y=48$, или $\left(\frac{4}{9}\right)^y=\frac{48}{3^5}$, $\left(\frac{4}{9}\right)^y=\left(\frac{4}{9}\right)^2$, откуда $y=2$, $x=1$.

Ответ $(1;\ 2)$. ◁

Задача 4 Решить систему $\begin{cases}3^{x-1}\leqslant\sqrt{3},\\ 0{,}2^{3x^2-2}=0{,}2^{2x^2+x+4}.\end{cases}$

▶ Решим неравенство $3^{x-1}\leqslant\sqrt{3}$, т. е. неравенство $3^{x-1}\leqslant3^{\frac{1}{2}}$. Решая, получаем $x-1\leqslant\frac{1}{2}$, $x\leqslant1{,}5$.

Теперь решим уравнение $0{,}2^{3x^2-2}=0{,}2^{2x^2+x+4}$,

$$3x^2-2=2x^2+x+4,$$
$$x^2-x-6=0,\quad x_1=-2,\quad x_2=3.$$

Так как $3>1{,}5$, $-2<1{,}5$, то $x=-2$.

Ответ $x=-2$. ◁

Задача 5* Решить систему $\begin{cases}3^{xy}=3^{10},\\4^x=4^{7-y},\\2^x<2^y.\end{cases}$

▶ Решим сначала систему уравнений $\begin{cases}3^{xy}=3^{10},\\4^x=4^{7-y}.\end{cases}$

Получаем $\begin{cases}xy=10,\\x=7-y,\end{cases}$ $\begin{cases}xy=10,\\x+y=7.\end{cases}$

По теореме, обратной теореме Виета, находим два решения $(2;\ 5)$, $(5;\ 2)$.

Теперь решим неравенство $2^x<2^y$. Так как $2>1$, то $x<y$.

Решение системы уравнений $(2;\ 5)$ удовлетворяет неравенству $x<y$, а решение $(5;\ 2)$ ему не удовлетворяет.

Ответ $(2;\ 5)$. ◁

Упражнения

Решить систему уравнений (240—243).

240 1) $\begin{cases}2x-y=1,\\5^{x+y}=25;\end{cases}$ 2) $\begin{cases}x-y=2,\\3^{x^2+y}=\dfrac{1}{9};\end{cases}$

3) $\begin{cases}x+y=1,\\2^{x-y}=8;\end{cases}$ 4) $\begin{cases}x+2y=3,\\3^{x-y}=81.\end{cases}$

241 1) $\begin{cases}4^x\cdot 2^y=32,\\3^{8x+1}=3^{3y};\end{cases}$ 2) $\begin{cases}3^{3x-2y}=81,\\3^{6x}\cdot 3^y=27.\end{cases}$

242 1) $\begin{cases}2^x+2^y=6,\\2^x-2^y=2;\end{cases}$ 2) $\begin{cases}3^x+5^y=8,\\3^x-5^y=-2.\end{cases}$

243 1) $\begin{cases}5^x-5^y=100,\\5^{x-1}+5^{y-1}=30;\end{cases}$ 2) $\begin{cases}2^x-9\cdot 3^y=7,\\2^x\cdot 3^y=\dfrac{8}{9};\end{cases}$

3) $\begin{cases} 16^y - 16^x = 24, \\ 16^{x+y} = 256; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} 3^x + 2^{x+y+1} = 5, \\ 3^{x+1} - 2^{x+y} = 1; \end{cases}$

5) $\begin{cases} 5^{x+1} \cdot 3^y = 75, \\ 3^x \cdot 5^{y-1} = 3; \end{cases}$ 6) $\begin{cases} 3^x \cdot 2^y = 4, \\ 3^y \cdot 2^x = 9. \end{cases}$

Решить систему (244—245).

244 1) $\begin{cases} 5^{2x+1} > 625, \\ 11^{6x^2-10x} = 11^{9x-15}; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 0{,}3^{10x^2-47x} = 0{,}3^{-10x-7}, \\ 3{,}7^{x^2} = 3{,}7^{0{,}04}. \end{cases}$

245 1) $\begin{cases} (5^x)^y = 5^{21}, \\ 5^x \cdot 5^y = 5^{10}, \\ 3^x > 3^y; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} (0{,}2^y)^x = 0{,}008, \\ 0{,}4^y = 0{,}4^{3{,}5-x}, \\ 2^x \cdot 0{,}5^y > 1. \end{cases}$

Упражнения к главе III

246 Сравнить числа:

1) $4^{-\sqrt{3}}$ и $4^{-\sqrt{2}}$; 2) $2^{\sqrt{3}}$ и $2^{1{,}7}$;

3) $\left(\frac{1}{2}\right)^{1{,}4}$ и $\left(\frac{1}{2}\right)^{\sqrt{2}}$; 4) $\left(\frac{1}{9}\right)^{\pi}$ и $\left(\frac{1}{9}\right)^{3{,}14}$.

247 Сравнить с единицей число:

1) $2^{-\sqrt{5}}$; 2) $\left(\frac{1}{2}\right)^{\sqrt{3}}$; 3) $\left(\frac{\pi}{4}\right)^{\sqrt{5}-2}$; 4) $\left(\frac{1}{3}\right)^{\sqrt{8}-3}$.

248 (Устно.) Является ли функция возрастающей или убывающей:

1) $y = 0{,}78^x$; 2) $y = 1{,}69^x$; 3) $y = \left(\frac{1}{2}\right)^{-x}$; 4) $y = 4^{-x}$?

249 В каком промежутке находятся значения функции при $x \in [-1; 2]$:

1) $y = 5^x$; 2) $y = 5^{-x}$?

Решить уравнение (250—252).

250 1) $1{,}5^{5x-7}=\left(\frac{2}{3}\right)^{x+1}$; 2) $0{,}75^{2x-3}=\left(1\frac{1}{3}\right)^{5-x}$;

3) $5^{x^2-5x-6}=1$; 4) $\left(\frac{1}{7}\right)^{x^2-2x-2}=\frac{1}{7}$.

251 1) $2^x+2^{x-3}=18$; 2) $3^x+4\cdot 3^{x+1}=13$;

3) $2\cdot 3^{x+1}-6\cdot 3^{x-1}-3^x=9$;

4) $5^{x+1}+3\cdot 5^{x-1}-6\cdot 5^x+10=0$.

252 1) $5^{2x}-5^x-600=0$; 2) $9^x-3^x-6=0$;

3) $3^x+9^{x-1}-810=0$; 4) $4^x+2^{x+1}-80=0$.

253 Решить неравенство:

1) $3^{x-2}>9$; 2) $5^{2x}<\frac{1}{25}$; 3) $0{,}7^{x^2+2x}<0{,}7^3$; 4) $\left(\frac{1}{3}\right)^{x^2}>\frac{1}{81}$.

254 Решить графически уравнение:

1) $2^{-x}=3x+10$; 2) $\left(\frac{1}{3}\right)^{-x}=2x+5$.

Проверь себя!

1 Построить схематически график функции:

1) $y=\left(\frac{1}{5}\right)^x$; 2) $y=5^x$.

2 Сравнить числа:

1) $\left(\frac{1}{5}\right)^{0,2}$ и $\left(\frac{1}{5}\right)^{1,2}$; 2) $5^{-0,2}$ и $5^{-1,2}$.

3 Решить уравнение:

1) $3^{x+1}=27^{x-1}$; 2) $0{,}2^{x^2+4x-5}=1$;

3) $2^{x+3}-2^{x+1}=12$; 4) $4\cdot 2^{2x}-5\cdot 2^x+1=0$.

4 Решить неравенство:

1) $7^{x-2}>49$; 2) $0{,}5^{x^2-2}\geqslant\frac{1}{4}$.

255 Доказать, что последовательность значений функции $y=2^x$ при натуральных значениях $x=1, 2, 3, \ldots$ является геометрической прогрессией.

256 За первый год работы предприятие имело a рублей прибыли. В дальнейшем каждый год прибыль увеличивалась на $p\%$. Какой станет прибыль предприятия за n-й год работы?

257 Построить график функции:

1) $y=3^x-1$; 2) $y=3^{x-1}$; 3) $y=2^{2-x}+3$.

Решить уравнение (258—260).

258 1) $0,6^x \cdot \left(\frac{25}{9}\right)^{x^2-12} = \left(\frac{27}{125}\right)^3$; 2) $16\sqrt{0,25^{5-\frac{x}{4}}} = 2^{\sqrt{x+1}}$.

259 1) $2 \cdot 3^{3x-1} + 27^{x-\frac{2}{3}} = 9^{x-1} + 2 \cdot 3^{2x-1}$;

2) $2^{\sqrt{x}+2} - 2^{\sqrt{x}+1} = 12 + 2^{\sqrt{x}-1}$;

3) $22 \cdot 9^{x-1} - \frac{1}{3} \cdot 3^{x+3} + \frac{1}{3} \cdot 3^{x+2} = 4$;

4) $5 \cdot 4^{x-1} - 16^x + 0,25 \cdot 2^{2x+2} + 7 = 0$.

260 1) $2^{x+4} + 2^{x+2} = 5^{x+1} + 3 \cdot 5^x$;

2) $5^{2x} - 7^x - 5^{2x} \cdot 17 + 7^x \cdot 17 = 0$;

3) $2^{x^2-1} - 3^{x^2} = 3^{x^2-1} - 2^{x^2+2}$;

4) $3 \cdot 4^x + \frac{1}{3} \cdot 9^{x+2} = 6 \cdot 4^{x+1} - \frac{1}{2} \cdot 9^{x+1}$.

261 Решить неравенство:

1) $8,4^{\frac{x-3}{x^2+1}} < 1$; 2) $2^{x^2} \cdot 5^{x^2} < 10^{-3}(10^{3-x})^2$;

3) $\frac{4^x - 2^{x+1} + 8}{2^{1-x}} < 8^x$; 4) $\frac{1}{3^x+5} \leqslant \frac{1}{3^{x+1}-1}$.

262 Решить систему уравнений:

1) $\begin{cases} 2^{x-y} = 128, \\ \left(\frac{1}{2}\right)^{x-2y+1} = \frac{1}{8}; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 2^x \cdot 5^y = 10, \\ 5^y - 2^x = 3. \end{cases}$

263 Построить график функции:

1) $y = 2^{x+|x|}$; 2) $y = |3^{|x|} - 3|$.

264 Решить уравнение:

1) $\frac{0,2^{x+0,5}}{\sqrt{5}} = 5 \cdot 0,04^x$; 2) $4 \cdot 3^x - 9 \cdot 2^x = 5 \cdot 3^{\frac{x}{2}} \cdot 2^{\frac{x}{2}}$;

3) $2 \cdot 4^x - 3 \cdot 10^x - 5 \cdot 25^x = 0$; 4) $4 \cdot 9^x + 12^x - 3 \cdot 16^x = 0$.

265 Решить неравенство:

1) $3^{|x-2|} < 9$; 2) $4^{|x+1|} > 16$;

3) $2^{|x-2|} > 4^{|x+1|}$; 4) $5^{|x+4|} < 25^{|x|}$.

IV
глава

Логарифмическая функция

Изобретение логарифмов, сократив работу астронома, продлило ему жизнь.
П. С. Лаплас

§ 15 Логарифмы

Задача 1 Найти положительный корень уравнения $x^4 = 81$.

▶ По определению арифметического корня имеем $x = \sqrt[4]{81} = 3$. ◁

Задача 2 Решить уравнение $3^x = 81$.

▶ Запишем данное уравнение так: $3^x = 3^4$, откуда $x = 4$. ◁

В задаче 1 неизвестным является основание степени, а в задаче 2 — показатель степени.

Способ решения задачи 2 состоял в том, что левую и правую части уравнения удалось представить в виде степени с одним и тем же основанием 3. Но уже, например, уравнение $3^x = 80$ таким способом решить не удаётся. Однако это уравнение имеет корень. Чтобы уметь решать такие уравнения, вводится понятие логарифма числа. В § 11 было сказано, что уравнение $a^x = b$, где $a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$, имеет единственный корень. Этот корень называют *логарифмом числа b по основанию a* и обозначают $\log_a b$. Например, корнем уравнения $3^x = 81$ является число 4, т. е. $\log_3 81 = 4$.

Логарифмом положительного числа b по основанию a, где $a > 0$, $a \neq 1$, называется показатель степени, в которую надо возвести число a, чтобы получить b.

Например, $\log_2 8 = 3$, так как $2^3 = 8$; $\log_3 \frac{1}{9} = -2$, так как $3^{-2} = \frac{1}{9}$; $\log_7 7 = 1$, так как $7^1 = 7$; $\log_4 1 = 0$, так как $4^0 = 1$.

Определение логарифма можно записать так:

$$a^{\log_a b} = b.$$

Это равенство справедливо при $b > 0$, $a > 0$, $a \neq 1$. Его обычно называют *основным логарифмическим тождеством.*

Например, $4^{\log_4 5} = 5$, $\left(\frac{1}{2}\right)^{\log_{\frac{1}{2}} 3} = 3$, $13^{\log_{13} \frac{3}{4}} = \frac{3}{4}$.

С помощью основного логарифмического тождества можно показать, например, что $x = \log_3 80$ является корнем уравнения $3^x = 80$. В самом деле, $3^{\log_3 80} = 80$.

Действие нахождения логарифма числа называют *логарифмированием*. Действие нахождения числа по его логарифму называют ***потенцированием***.

Задача 3 Вычислить $\log_{64} 128$.

▶ Обозначим $\log_{64} 128 = x$. По определению логарифма $64^x = 128$. Так как $64 = 2^6$, $128 = 2^7$, то $2^{6x} = 2^7$, откуда $6x = 7$, $x = \frac{7}{6}$.

Ответ $\log_{64} 128 = \frac{7}{6}$. ◁

Задача 4 Вычислить $3^{-2\log_3 5}$.

▶ Используя свойства степени и основное логарифмическое тождество, находим

$$3^{-2\log_3 5} = \left(3^{\log_3 5}\right)^{-2} = 5^{-2} = \frac{1}{25}. ◁$$

Задача 5 Решить уравнение $\log_3 (1 - x) = 2$.

▶ По определению логарифма $3^2 = 1 - x$, откуда $x = -8$. ◁

Задача 6 При каких значениях x существует $\log_5 \frac{x-1}{2-x}$?

▶ Так как основание логарифма $5 > 0$ и $5 \neq 1$, то данный логарифм существует только тогда, когда $\frac{x-1}{2-x} > 0$. Решая это неравенство, находим $1 < x < 2$. ◁

Упражнения

266 Найти логарифмы чисел по основанию 3:

$3,\ 9,\ 27,\ 81,\ 1,\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{9},\ \frac{1}{243},\ \sqrt[3]{3},\ \frac{1}{3\sqrt{3}},\ 9\sqrt[4]{3}$.

Вычислить (267—276).

267 1) $\log_2 16$; 2) $\log_2 64$; 3) $\log_2 2$; 4) $\log_2 1$.

268 1) $\log_2 \frac{1}{2}$; 2) $\log_2 \frac{1}{8}$; 3) $\log_2 \sqrt{2}$; 4) $\log_2 \frac{1}{\sqrt[4]{2}}$.

269 1) $\log_3 27$; 2) $\log_3 81$; 3) $\log_3 3$; 4) $\log_3 1$.

270 1) $\log_3 \frac{1}{9}$; 2) $\log_3 \frac{1}{3}$; 3) $\log_3 \sqrt[4]{3}$; 4) $\log_3 \frac{1}{\sqrt[4]{3}}$.

271 1) $\log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{32}$; 2) $\log_{\frac{1}{2}} 4$; 3) $\log_{0,5} 0{,}125$;

4) $\log_{0,5} \frac{1}{2}$; 5) $\log_{0,5} 1$; 6) $\log_{\frac{1}{2}} \sqrt[3]{2}$.

272 1) $\log_5 625$; 2) $\log_6 216$; 3) $\log_4 \frac{1}{16}$; 4) $\log_5 \frac{1}{125}$.

273 1) $\log_{\frac{1}{5}} 125$; 2) $\log_{\frac{1}{3}} 27$; 3) $\log_{\frac{1}{4}} \frac{1}{64}$; 4) $\log_{\frac{1}{6}} 36$.

274 1) $3^{\log_3 18}$; 2) $5^{\log_5 16}$; 3) $10^{\log_{10} 2}$; 4) $\left(\frac{1}{4}\right)^{\log_{\frac{1}{4}} 6}$.

275 1) $3^{5\log_3 2}$; 2) $\left(\frac{1}{2}\right)^{6\log_{\frac{1}{2}} 2}$; 3) $0{,}3^{2\log_{0,3} 6}$; 4) $7^{\frac{1}{2}\log_7 9}$.

276 1) $8^{\log_2 5}$; 2) $9^{\log_3 12}$; 3) $16^{\log_4 7}$; 4) $0{,}125^{\log_{0,5} 1}$.

277 Решить уравнение:

1) $\log_6 x = 3$; 2) $\log_5 x = 4$; 3) $\log_2 (5 - x) = 3$;

4) $\log_3 (x + 2) = 3$; 5) $\log_{\frac{1}{6}} (0{,}5 + x) = -1$.

278 Выяснить, при каких значениях x существует логарифм:

1) $\log_{\frac{1}{2}}(4-x)$; 2) $\log_{0,2}(7-x)$; 3) $\log_6 \frac{1}{1-2x}$;

4) $\log_8 \frac{5}{2x-1}$; 5) $\log_{\frac{1}{4}}(-x^2)$; 6) $\log_{0,7}(-2x^3)$.

Вычислить (279—281).

279 1) $\log_2 \sqrt[4]{2}$; 2) $\log_3 \frac{1}{3\sqrt{3}}$; 3) $\log_{0,5} \frac{1}{\sqrt{32}}$; 4) $\log_7 \frac{\sqrt[3]{7}}{49}$.

280 1) $9^{2\log_3 5}$; 2) $\left(\frac{1}{9}\right)^{\frac{1}{2}\log_3 4}$; 3) $\left(\frac{1}{4}\right)^{-5\log_2 3}$;

4) $27^{-4\log_{\frac{1}{3}} 5}$; 5) $10^{3-\log_{10} 5}$; 6) $\left(\frac{1}{7}\right)^{1+2\log_{\frac{1}{7}} 8}$.

281 1) $\log_2 \log_3 81$; 2) $\log_3 \log_2 8$; 3) $2\log_{27} \log_{10} 1000$;

4) $\frac{1}{3}\log_9 \log_2 8$; 5) $3\log_2 \log_4 16 + \log_{\frac{1}{2}} 2$.

282 Решить уравнение:

1) $\log_x 27 = 3$; 2) $\log_x \frac{1}{7} = -1$; 3) $\log_x \sqrt{5} = -4$.

Выяснить, при каких значениях x имеет смысл выражение (283—284).

283 1) $\log_6(49-x^2)$; 2) $\log_7(x^2+x-6)$; 3) $\log_{\frac{1}{5}}(x^2+2x+7)$.

284 1) $\log_3(1-x^3)$; 2) $\log_2(x^3+8)$;

3) $\log_{\frac{1}{4}}(x^3+x^2-6x)$; 4) $\log_{\frac{1}{3}}(x^3+x^2-2x)$.

Решить уравнение (285—287).

285 1) $2^x = 5$; 2) $1{,}2^x = 4$; 3) $4^{2x+3} = 5$; 4) $7^{1-2x} = 2$.

286 1) $7^{2x} + 7^x - 12 = 0$; 2) $9^x - 3^x - 12 = 0$;

3) $8^{x+1} - 8^{2x-1} = 30$; 4) $\left(\frac{1}{9}\right)^x - 5\left(\frac{1}{3}\right)^x + 6 = 0$.

287 1) $(3^x + 2^x)(3^x + 3\cdot 2^x) = 8\cdot 6^x$;

2) $(3\cdot 5^x + 2{,}5\cdot 3^x)(2\cdot 3^x - 2\cdot 5^x) = 8\cdot 15^x$.

288 При каких значениях x имеет смысл выражение:

1) $\log_x(2x-1)$; 2) $\log_{x-1}(x+1)$?

289 Решить относительно x уравнение

$$9^x + 9a(1-a)\cdot 3^{x-2} - a^3 = 0.$$

§ 16 Свойства логарифмов

При выполнении преобразований выражений, содержащих логарифмы, при вычислениях и при решении уравнений часто используются различные свойства логарифмов. Рассмотрим основные из них.

Пусть $a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$, $c > 0$, r — любое действительное число. Тогда справедливы формулы

$$\log_a (bc) = \log_a b + \log_a c, \qquad (1)$$

$$\log_a \frac{b}{c} = \log_a b - \log_a c, \qquad (2)$$

$$\log_a b^r = r \log_a b. \qquad (3)$$

По основному логарифмическому тождеству

$$a^{\log_a b} = b, \qquad (4)$$

$$a^{\log_a c} = c. \qquad (5)$$

1) Перемножая равенства (4) и (5), получаем

$$a^{\log_a b + \log_a c} = bc,$$

откуда по определению логарифма $\log_a b + \log_a c = \log_a (bc)$. Формула (1) доказана.

2) Разделив равенства (4) и (5), получим

$$a^{\log_a b - \log_a c} = \frac{b}{c},$$

откуда по определению логарифма следует формула (2).

3) Возводя основное логарифмическое тождество $a^{\log_a b} = b$ в степень с показателем r, получаем $a^{r \log_a b} = b^r$, откуда по определению логарифма следует формула (3).

Приведём примеры применения формул (1) — (3):

1) $\log_6 18 + \log_6 2 = \log_6 36 = 2$;

2) $\log_{12} 48 - \log_{12} 4 = \log_{12} 12 = 1$;

3) $\log_3 3^{\frac{1}{7}} = \frac{1}{7} \log_3 3 = \frac{1}{7}$.

Задача Вычислить $\log_5 \sqrt{3} - \frac{1}{2}\log_5 12 + \log_5 50$.

▶ Применяя формулы (1) — (3), находим

$$\log_5 \sqrt{3} - \frac{1}{2}\log_5 12 + \log_5 50 = \log_5 \frac{\sqrt{3}\cdot 50}{\sqrt{12}} =$$
$$= \log_5 25 = 2.$$ ◁

Упражнения

Вычислить (290—294).

290 1) $\log_{10} 5 + \log_{10} 2$; 2) $\log_{10} 8 + \log_{10} 125$;

3) $\log_{12} 2 + \log_{12} 72$; 4) $\log_3 6 + \log_3 \frac{3}{2}$.

291 1) $\log_2 15 - \log_2 \frac{15}{16}$; 2) $\log_5 75 - \log_5 3$;

3) $\log_{\frac{1}{3}} 54 - \log_{\frac{1}{3}} 2$; 4) $\log_8 \frac{1}{16} - \log_8 32$.

292 1) $\log_{13} \sqrt[5]{169}$; 2) $\log_{11} \sqrt[3]{121}$;

3) $\log_{\frac{1}{3}} \sqrt[4]{243}$; 4) $\log_2 \frac{1}{\sqrt[5]{128}}$.

293 1) $\log_8 12 - \log_8 15 + \log_8 20$;

2) $\log_9 15 + \log_9 18 - \log_9 10$;

3) $\frac{1}{2}\log_7 36 - \log_7 14 - 3\log_7 \sqrt[3]{21}$;

4) $2\log_{\frac{1}{3}} 6 - \frac{1}{2}\log_{\frac{1}{3}} 400 + 3\log_{\frac{1}{3}} \sqrt[3]{45}$.

294 1) $\frac{\log_2 8}{\log_2 16}$; 2) $\frac{\log_5 27}{\log_5 9}$; 3) $\frac{\log_5 36 - \log_5 12}{\log_5 9}$; 4) $\frac{\log_7 8}{\log_7 15 - \log_7 30}$.

295 Вычислить $\log_a x$, если $\log_a b = 3$, $\log_a c = -2$:

1) $x = a^3 b^2 \sqrt{c}$; 2) $x = \frac{a^4 \sqrt[3]{b}}{c^3}$.

296 Вычислить:

1) $\dfrac{\log_2 24 - \frac{1}{2}\log_2 72}{\log_3 18 - \frac{1}{3}\log_3 72}$; 2) $\dfrac{\log_7 14 - \frac{1}{3}\log_7 56}{\log_6 30 - \frac{1}{2}\log_6 150}$;

3) $\dfrac{\log_2 4 + \log_2 \sqrt{10}}{\log_2 20 + 3\log_2 2}$; 4) $\dfrac{3\log_7 2 - \frac{1}{2}\log_7 64}{4\log_5 2 + \frac{1}{3}\log_5 27}$.

297 Найти x по данному его логарифму ($a > 0$, $b > 0$):

1) $\log_3 x = 4 \log_3 a + 7 \log_3 b$;

2) $\log_5 x = 2 \log_5 a - 3 \log_5 b$;

3) $\log_{\frac{1}{2}} x = \frac{2}{3} \log_{\frac{1}{2}} a - \frac{1}{5} \log_{\frac{1}{2}} b$;

4) $\log_{\frac{2}{3}} x = \frac{1}{4} \log_{\frac{2}{3}} a + \frac{4}{7} \log_{\frac{2}{3}} b$.

298 Вычислить:

1) $36^{\log_6 5} + 10^{1 - \log_{10} 2} - 8^{\log_2 3}$;

2) $\left(81^{\frac{1}{4} - \frac{1}{2}\log_9 4} + 25^{\log_{125} 8}\right) \cdot 49^{\log_7 2}$;

3) $16^{1 + \log_4 5} + 4^{\frac{1}{2}\log_2 3 + 3\log_8 5}$;

4) $72 \cdot \left(49^{\frac{1}{2}\log_7 9 - \log_7 6} + 5^{-\log_{\sqrt{5}} 4}\right)$.

299 Доказать, что если $a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$, $p \neq 0$, то $\log_{a^p} b = \frac{1}{p} \log_a b$. Используя эту формулу, вычислить:

1) $\log_{36} 2 - \frac{1}{2} \log_{\frac{1}{6}} 3$; 2) $2 \log_{25} 30 + \log_{0,2} 6$.

300 Выразить через a и b:

1) $\log_{\sqrt{3}} 50$, если $\log_3 15 = a$, $\log_3 10 = b$;

2) $\log_4 1250$, если $\log_2 5 = a$.

§ 17 Десятичные и натуральные логарифмы

Для логарифмов чисел составлены специальные таблицы (таблицы логарифмов). Логарифмы вычисляют также с помощью микрокалькулятора. И в том и в другом случае находятся только десятичные или натуральные логарифмы.

Десятичным логарифмом числа называют логарифм этого числа по основанию 10 и пишут $\lg b$ вместо $\log_{10} b$.

Натуральным логарифмом числа называют логарифм этого числа по основанию e, где e — иррациональное число, приближённо равное 2,7. При этом пишут $\ln b$ вместо $\log_e b$.

Иррациональное число e играет важную роль в математике и её приложениях. Число e можно представить как сумму:

$$e = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \ldots + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n} + \ldots .$$

Приближённое значение числа e можно прочитать на табло микрокалькулятора после использования клавиши $\boxed{e^x}$:

$$e^x \approx \underline{2{,}7182818}.$$

Вычисления $\lg b$ и $\ln b$ проводятся на микрокалькуляторе с помощью клавиш $\boxed{\lg}$ и $\boxed{\ln}$.
Например, вычисляя $\lg 13$, получаем

$$\lg 13 \approx \underline{1{,}1139433};$$

вычисляя $\ln 13$, получаем

$$\ln 13 \approx \underline{2{,}5649493}.$$

Оказывается, что достаточно знать значения только десятичных или только натуральных логарифмов чисел, чтобы находить логарифмы чисел по любому основанию. Для этого используется *формула перехода от логарифма по одному основанию к логарифму по другому основанию*.

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}, \qquad (1)$$

где $b > 0$, $a > 0$, $a \neq 1$, $c > 0$, $c \neq 1$.
Докажем справедливость формулы (1).

Запишем основное логарифмическое тождество $a^{\log_a b} = b$. Возьмём от обеих его частей логарифмы по основанию c:

$$\log_c a^{\log_a b} = \log_c b.$$

Используя свойство логарифма степени, получаем $\log_a b \cdot \log_c a = \log_c b$; откуда $\log_a b = \dfrac{\log_c b}{\log_c a}$.

Из формулы (1) при $c = 10$ и $c = e$ получаются формулы перехода к десятичным и натуральным логарифмам:

$$\log_a b = \frac{\lg b}{\lg a}, \quad \log_a b = \frac{\ln b}{\ln a}. \qquad (2)$$

Из формулы (1) следует формула $\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$.

Задача 1 С помощью микрокалькулятора вычислить $\log_3 80$ с точностью до 0,01.

▶ 1) С помощью десятичных логарифмов по формуле (2) находим: $\log_3 80 = \frac{\lg 80}{\lg 3} \approx \underline{3,9886927}$.

2) С помощью натуральных логарифмов:

$$\log_3 80 = \frac{\ln 80}{\ln 3} \approx \underline{3,9886928}.$$

Ответ $\log_3 80 \approx 3,99$. ◁

Формула перехода от одного основания логарифма к другому иногда используется при решении уравнений.

Задача 2 Решить уравнение $\log_2 x + \log_4 x = \frac{3}{2}$.

▶ По формуле перехода $\log_4 x = \frac{\log_2 x}{\log_2 4} = \frac{\log_2 x}{2}$.

Поэтому уравнение принимает вид $\log_2 x + \frac{1}{2} \log_2 x = \frac{3}{2}$, откуда $\log_2 x = 1$, $x = 2$. ◁

Задача 3* Двухпроцентный вклад в сбербанк, равный a рублям, через n лет становится равным $a\,(1,02)^n$, а трёхпроцентный вклад становится равным $a\,(1,03)^n$. Через сколько лет каждый из вкладов удвоится?

▶ 1) Для первого вклада $2a = a\,(1,02)^n$, откуда $(1,02)^n = 2$, $n = \log_{1,02} 2$. Вычисления проведём на микрокалькуляторе:

$$\log_{1,02} 2 \approx \underline{35,002788}.$$

2) Для второго вклада $n = \log_{1,03} 2$ и вычисления на микрокалькуляторе показывают:

$$\log_{1,03} 2 \approx \underline{23,449772}.$$

Ответ По первому вкладу примерно через 35 лет, а по второму — через 23,5 года. ◁

Упражнения

Вычислить с помощью микрокалькулятора (301—302).

301 1) $\lg 23$; 2) $\lg 7$; 3) $\lg 0{,}37$; 4) $\lg \frac{2}{3}$.

302 1) $\ln 81$; 2) $\ln 2$; 3) $\ln 0{,}17$; 4) $\ln \frac{6}{7}$.

303 Выразить данный логарифм через десятичный и вычислить на микрокалькуляторе с точностью до 0,01:
1) $\log_7 25$; 2) $\log_5 8$; 3) $\log_9 0{,}75$; 4) $\log_{0{,}75} 1{,}13$.

304 Выразить данный логарифм через натуральный и вычислить на микрокалькуляторе с точностью до 0,01:
1) $\log_7 5$; 2) $\log_8 15$; 3) $\log_{0{,}7} 9$; 4) $\log_{1{,}1} 0{,}23$.

305 Выразить данный логарифм через логарифм с основанием 7:
1) $\log_5 3$; 2) $\lg 6$; 3) $\log_2 7$; 4) $\log_5 \frac{1}{3}$; 5) $\lg 7$; 6) $\log_3 7$.

306 Вычислить: 1) $5^{\frac{\lg 625}{\lg 25}}$; 2) $\log_{\frac{1}{4}}(\log_3 4 \cdot \log_2 3)$.

307 Решить уравнение:
1) $\log_5 x = 2\log_5 3 + 4\log_{25} 2$; 2) $\log_2 x - 2\log_{\frac{1}{2}} x = 9$;
3) $\log_3 x = 9\log_{27} 8 - 3\log_3 4$; 4) $\log_9 x^2 + \log_{\sqrt{3}} x = 3$;
5) $\log_2 x + \log_8 x = 8$; 6) $\log_4 x - \log_{16} x = \frac{1}{4}$.

308 Дано: $\log_7 2 = m$. Найти: $\log_{49} 28$.

309 Дано: $\lg 3 = m$, $\lg 5 = n$. Найти: $\log_{15} 30$.

310 Дано: $\log_6 2 = m$. Найти: $\log_{24} 72$.

311 Дано: $\log_{30} 8 = m$. Найти: $\log_{36} 9$.

312 Вычислить: 1) $\frac{\log_3 216}{\log_8 3} - \frac{\log_3 24}{\log_{72} 3}$; 2) $\frac{\log_2 192}{\log_{12} 2} - \frac{\log_2 24}{\log_{96} 2}$.

313 Решить уравнение:
1) $\log_2^2 x - 9\log_8 x = 4$;
2) $16\log_{16}^2 x + 3\log_4 x - 1 = 0$;
3) $\log_3^2 x + 5\log_9 x - 1{,}5 = 0$;
4) $\log_3^2 x - 15\log_{27} x + 6 = 0$.

314 Вычислить (не используя микрокалькулятор):
1) $\frac{\log_5 2}{\log_5 6} + \frac{\log_4 3}{\log_4 6}$; 2) $\left(\log_7 2 + \frac{1}{\log_5 7}\right)\lg 7$; 3) $\frac{2\log_2 3}{\log_4 9}$.

315 Число жителей города-новостройки увеличивается ежегодно на 8%. Через сколько лет число жителей удвоится?

316 При одном качании поршневого насоса из сосуда удаляется 1,2% имеющегося в нём воздуха. Через сколько качаний насоса в сосуде останется $\frac{1}{10^{16}}$ часть первоначальной массы воздуха?

317 Вычислить на микрокалькуляторе приближённое значение числа e по формуле $e \approx 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \ldots + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot n}$ при: 1) $n = 7$; 2) $n = 8$; 3) $n = 9$; 4) $n = 10$.

§ 18 Логарифмическая функция, её свойства и график

В математике и её приложениях часто встречается *логарифмическая функция*

$$y = \log_a x,$$

где a — заданное число, $a > 0$, $a \neq 1$.

Логарифмическая функция обладает свойствами:

1) Область определения логарифмической функции — множество всех положительных чисел.

Это следует из определения логарифма, так как выражение $\log_a x$ имеет смысл только при $x > 0$.

2) Множество значений логарифмической функции — множество R всех действительных чисел.

Это следует из того, что для любого действительного числа b есть такое положительное число x, что $\log_a x = b$, т. е. уравнение $\log_a x = b$ имеет корень. Такой корень существует и равен $x = a^b$, так как $\log_a a^b = b$.

3) Логарифмическая функция не является ограниченной.

Это следует из свойства (2).

4) Логарифмическая функция $y = \log_a x$ является возрастающей на промежутке $(0; +\infty)$, если $a > 1$, и убывающей, если $0 < a < 1$.

Пусть $a > 1$. Докажем, что если $0 < x_1 < x_2$, то $y(x_1) < y(x_2)$, т. е. $\log_a x_1 < \log_a x_2$. Пользуясь основным логарифмическим тождеством, условие $x_1 < x_2$ можно записать так: $a^{\log_a x_1} < a^{\log_a x_2}$. Из этого неравенства по свойству степени с основанием $a > 1$ следует, что $\log_a x_1 < \log_a x_2$.

Пусть $0 < a < 1$. Докажем, что если $0 < x_1 < x_2$, то $\log_a x_1 > \log_a x_2$. Записав условие $x_1 < x_2$ в виде $a^{\log_a x_1} < a^{\log_a x_2}$, получим $\log_a x_1 > \log_a x_2$, так как $0 < a < 1$.

Отметим, что справедливы и следующие два утверждения: если $a > 1$ и $\log_a x_1 < \log_a x_2$, где $x_1 > 0$, $x_2 > 0$, то $x_1 < x_2$; если $0 < a < 1$ и $\log_a x_1 < \log_a x_2$, где $x_1 > 0$, $x_2 > 0$, то $x_1 > x_2$.

5) Если $a > 1$, то функция $y = \log_a x$ принимает положительные значения при $x > 1$, отрицательные при $0 < x < 1$. Если $0 < a < 1$, то функция $y = \log_a x$ принимает положительные значения при $0 < x < 1$, отрицательные при $x > 1$.

Это следует из того, что функция $y = \log_a x$ принимает значение, равное нулю, при $x = 1$ и является возрастающей на промежутке $x > 0$, если $a > 1$, и убывающей, если $0 < a < 1$.

Из рассмотренных свойств логарифмической функции $y = \log_a x$ следует, что её график расположен правее оси Oy и имеет вид, указанный на рисунке 39, *а*, если $a > 1$, и на рисунке 39, *б*, если $0 < a < 1$. На рисунке 40 изображён график функции $y = \log_3 x$, а на рисунке 41 — график функции $y = \log_{\frac{1}{3}} x$.

Ось Oy является вертикальной асимптотой графика функции $y = \log_a x$.

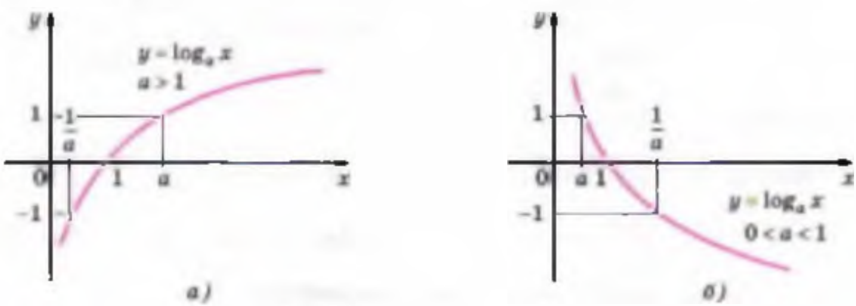


Рис. 39

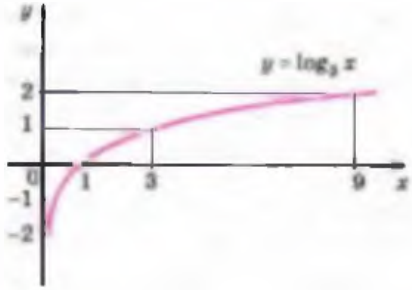


Рис. 40

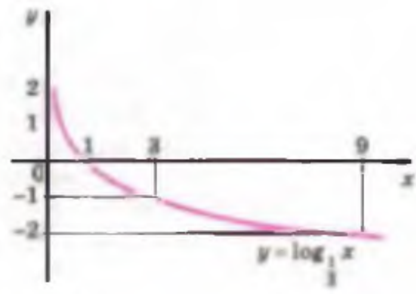


Рис. 41

Отметим, что график любой логарифмической функции $y = \log_a x$ проходит через точку (1; 0). При решении уравнений часто используется следующая теорема:

Теорема. Если $\log_a x_1 = \log_a x_2$, где $a > 0$, $a \neq 1$, $x_1 > 0$, $x_2 > 0$, то $x_1 = x_2$.

● Предположим, что $x_1 \neq x_2$, например $x_1 < x_2$. Если $a > 1$, то из неравенства $x_1 < x_2$ следует, что $\log_a x_1 < \log_a x_2$; если $0 < a < 1$, то из неравенства $x_1 < x_2$ следует, что $\log_a x_1 > \log_a x_2$. В обоих случаях получилось противоречие с условием $\log_a x_1 = \log_a x_2$. Следовательно, $x_1 = x_2$. ○

Задача 1 Решить уравнение $\log_5 (3x - 2) = \log_5 7$.

▶ Используя доказанную теорему, получаем $3x - 2 = 7$, откуда $3x = 9$, $x = 3$. ◁

Задача 2 Решить неравенство $\log_2 x < 3$.

▶ Пользуясь тем, что $3 = \log_2 2^3 = \log_2 8$, запишем данное неравенство так: $\log_2 x < \log_2 8$. Так как функция $y = \log_2 x$ определена при $x > 0$ и возрастает, то неравенство $\log_2 x < \log_2 8$ выполняется при $x > 0$ и $x < 8$.

Ответ $0 < x < 8$. ◁

Задача 3 Решить неравенство $\log_{\frac{1}{3}} x \leqslant -2$.

▶ Запишем данное неравенство так: $\log_{\frac{1}{3}} x \leqslant \log_{\frac{1}{3}} 9$.

Функция $y = \log_{\frac{1}{3}} x$ определена при $x > 0$ и убы-

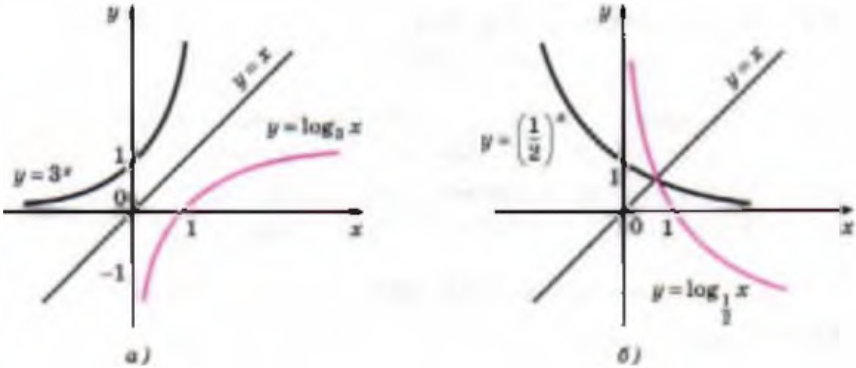


Рис. 42

вает, поэтому неравенство выполняется при $x > 0$ и $x \geqslant 9$.

Ответ $x \geqslant 9$. ◁

Логарифмическая функция $y = \log_a x$ и показательная функция $y = a^x$, где $a > 0$, $a \neq 1$, взаимно обратны.

● Решая уравнение $y = \log_a x$ относительно x, получаем $x = a^y$; меняя местами x и y, имеем $y = a^x$. ○

Графики этих функций при $a = 3$ и $a = \frac{1}{2}$ показаны на рисунке 42.

Упражнения

318 Сравнить числа:

1) $\log_3 \frac{6}{5}$ и $\log_3 \frac{5}{6}$; 2) $\log_{\frac{1}{3}} 9$ и $\log_{\frac{1}{3}} 17$;

3) $\log_{\frac{1}{2}} e$ и $\log_{\frac{1}{2}} \pi$; 4) $\log_2 \frac{\sqrt{5}}{2}$ и $\log_2 \frac{\sqrt{3}}{2}$.

319 Выяснить, является ли положительным или отрицательным число:

1) $\log_3 4{,}5$; 2) $\log_3 0{,}45$; 3) $\log_5 25{,}3$; 4) $\log_{0{,}5} 9{,}6$.

320 Сравнить с единицей число x, если:

1) $\log_3 x = -0{,}3$; 2) $\log_{\frac{1}{3}} x = 1{,}7$; 3) $\log_2 x = 1{,}3$.

321 Выяснить, является ли возрастающей или убывающей функция:

1) $y = \log_{0{,}075} x$; 2) $y = \log_{\frac{\sqrt{3}}{2}} x$; 3) $y = \lg x$; 4) $y = \ln x$.

322 Построить график функции:

1) $y = \log_2 x$; 2) $y = \log_{\frac{1}{2}} x$.

323 По графику функции $y = \log_2 x$ найти приближённо

$$\log_2 3, \quad \log_2 0{,}3, \quad \log_2 5, \quad \log_2 0{,}7.$$

324 Изобразить схематически график функции:

1) $y = \lg x$; 2) $y = \ln x$; 3) $y = \log_{0,4} x$; 4) $y = \log_{\frac{1}{5}} x$.

Решить неравенство (325—326).

325 1) $\log_5 x > \log_5 3$; 2) $\log_{\frac{1}{5}} x < \log_{\frac{1}{5}} \frac{1}{8}$;

3) $\lg x < \lg 4$; 4) $\ln x > \ln 0{,}5$.

326 1) $\log_3 x < 2$; 2) $\log_{0,4} x > 2$; 3) $\log_{\frac{1}{2}} x \geqslant 16$; 4) $\log_{0,4} x \leqslant 2$.

327 Решить уравнение:

1) $\log_3 (5x - 1) = 2$; 2) $\log_5 (3x + 1) = 2$;

3) $\log_4 (2x - 3) = 1$; 4) $\log_7 (x + 3) = 2$;

5) $\lg (3x - 1) = 0$; 6) $\lg (2 - 5x) = 1$.

328 Найти область определения функции:

1) $y = \log_4 (x - 1)$; 2) $y = \log_{0,8} (1 + x)$;

3) $y = \log_3 (x^2 + 2x)$; 4) $y = \log_{\sqrt{2}} (4 - x^2)$.

329 Доказать, что функция $y = \log_2 (x^2 - 1)$ возрастает на промежутке $(1; +\infty)$.

330 Сравнить значения выражений:

1) $\frac{1}{2} + \lg 3$ и $\lg 19 - \lg 2$; 2) $\frac{\lg 5 + \lg \sqrt{7}}{2}$ и $\lg \frac{5 + \sqrt{7}}{2}$;

3) $3 (\lg 7 - \lg 5)$ и $\lg 9 - \frac{2}{3} \lg 8$; 4) $\lg \lg \lg 50$ и $\lg^3 50$.

331 Найти область определения функции:

1) $y = \log_8 (x^2 - 3x - 4)$; 2) $y = \log_{\sqrt{3}} (-x^2 + 5x + 6)$;

3) $y = \log_{0,7} \frac{x^2 - 9}{x + 5}$; 4) $y = \log_{\frac{1}{3}} \frac{x - 4}{x^2 + 4}$;

5) $y = \log_4 (2^x - 2)$; 6) $y = \log_3 (3^{x-1} - 9)$.

332 Построить график функции, найти её область определения и множество значений:

1) $y = \log_3 (x - 1)$; 2) $y = \log_{\frac{1}{3}} (x + 1)$; 3) $y = 1 + \log_3 x$;

4) $y = \log_{\frac{1}{3}} x - 1$; 5) $y = 1 + \log_3 (x - 1)$.

333 Решить графически уравнение:

1) $\log_2 x = -x + 1$; 2) $\log_{\frac{1}{2}} x = 2x - 5$;

3) $\lg x = \sqrt{x}$; 4) $\lg x = 2^{-x}$.

334 Построить график функции, найти её область определения и множество значений, указать промежутки монотонности:

1) $y = |\log_3 x|$; 2) $y = \log_3 |x|$;

3) $y = \log_2 |3 - x|$; 4) $y = |1 - \log_2 x|$.

335 Найти область определения функции:

1) $y = \log_2 |3 - x| - \log_2 |x^3 - 8|$;

2) $y = \log_{0,3} \sqrt{x+1} + \log_{0,4} (1 - 8x^3)$.

§ 19 Логарифмические уравнения

Задача 1 Решить уравнение

$$\log_2 (x + 1) + \log_2 (x + 3) = 3. \qquad (1)$$

▶ Предположим, что x — такое число, при котором равенство (1) является верным, т. е. x — корень уравнения (1).

Тогда по свойству логарифма верно равенство

$$\log_2 ((x + 1) (x + 3)) = 3. \qquad (2)$$

Из этого равенства по определению логарифма получаем

$$(x + 1) (x + 3) = 8, \qquad (3)$$

$x^2 + 4x + 3 = 8$, т. е. $x^2 + 4x - 5 = 0$, откуда $x_1 = 1$, $x_2 = -5$.

Так как уравнение (3) является следствием исходного уравнения, то необходима проверка. Проверим, являются ли числа 1 и -5 корнями уравнения (1). Подставляя в левую часть исходного уравнения $x = 1$, получаем $\log_2 (1 + 1) + \log_2 (1 + 3) = \log_2 2 + \log_2 4 = 1 + 2 = 3$, т. е. $x = 1$ — корень уравнения (1).

При $x = -5$ числа $x + 1$ и $x + 3$ отрицательны, и поэтому левая часть уравнения (1) не имеет смысла, т. е. $x = -5$ не является корнем этого уравнения.

Ответ $x = 1$. ◁

Замечание. Решение уравнения (1) можно заменить решением равносильной ему системы

$$\begin{cases} x + 1 > 0, \\ x + 3 > 0, \\ \log_2((x+1)(x+3)) = 3. \end{cases}$$

Задача 2 Решить уравнение $\log_2(1 - x) = 3 - \log_2(3 - x)$.

▶ Перенесём логарифм из правой части в левую:

$$\log_2(1 - x) + \log_2(3 - x) = 3,$$

откуда

$$\log_2((1 - x)(3 - x)) = 3,$$
$$(1 - x)(3 - x) = 8.$$

Решая это уравнение, получаем $x_1 = 5$, $x_2 = -1$. Число $x_1 = 5$ не является корнем исходного уравнения, так как при $x = 5$ левая и правая части уравнения теряют смысл. Проверка показывает, что число $x = -1$ является корнем исходного уравнения.

Ответ $x = -1$. ◁

Задача 3 Решить уравнение

$$\lg(2x^2 - 4x + 12) = \lg x + \lg(x + 3).$$

▶ По свойству логарифмов

$$\lg(2x^2 - 4x + 12) = \lg(x^2 + 3x),$$

откуда (по теореме § 18) $2x^2 - 4x + 12 = x^2 + 3x$, $x^2 - 7x + 12 = 0$, $x_1 = 3$, $x_2 = 4$. Проверка показывает, что оба значения x являются корнями исходного уравнения.

Ответ $x_1 = 3$, $x_2 = 4$. ◁

Задача 4 Решить уравнение $\log_7(3x + 4) = \log_7(5x + 8)$.

▶ Приравнивая выражения, стоящие под знаком логарифма, получаем $3x + 4 = 5x + 8$, откуда $x = -2$. Выполняя проверку, убеждаемся, что при $x = -2$ левая и правая части исходного уравнения не имеют смысла.

Ответ Корней нет. ◁

Задача 5 Решить уравнение

$$\log_4(2x-1)\cdot\log_4 x = 2\log_4(2x-1).$$

▶ Преобразуем данное уравнение:

$$\log_4(2x-1)\cdot\log_4 x - 2\log_4(2x-1) = 0,$$
$$\log_4(2x-1)\cdot(\log_4 x - 2) = 0.$$

Приравнивая каждый из множителей левой части уравнения к нулю, получаем:

1) $\log_4(2x-1) = 0$, откуда $2x-1=1$, $x_1 = 1$;

2) $\log_4 x - 2 = 0$, откуда $\log_4 x = 2$, $x_2 = 16$.

Проверка показывает, что оба значения x являются корнями исходного уравнения.

Ответ $x_1 = 1$, $x_2 = 16$. ◁

Задача 6 Решить уравнение $\log_3 x + \log_x 3 = \frac{5}{2}$.

▶ Уравнение имеет смысл, если

$$x > 0,\ x \neq 1. \qquad (4)$$

Пусть $t = \log_3 x$, тогда $\log_x 3 = \frac{1}{t}$ и уравнение примет вид $t + \frac{1}{t} = \frac{5}{2}$, или $2t^2 - 5t + 2 = 0$, откуда $t_1 = 2$, $t_2 = \frac{1}{2}$. Если $t = 2$, то $\log_3 x = 2$, $x = 9$. Если $t = \frac{1}{2}$, то $\log_3 x = \frac{1}{2}$, $x = \sqrt{3}$.

Найденные значения x удовлетворяют условиям (4) и являются корнями данного уравнения.

Ответ $x_1 = 9$, $x_2 = \sqrt{3}$. ◁

Задача 7 Решить систему уравнений $\begin{cases}\log_2 x - \log_2 y = 1,\\ 4y^2 + x - 12 = 0.\end{cases}$

▶ Из первого уравнения выразим x через y: $\log_2 \frac{x}{y} = \log_2 2$, $\frac{x}{y} = 2$, $x = 2y$. Подставив $x = 2y$ во второе уравнение системы, получим $4y^2 + 2y - 12 = 0$, откуда $y_1 = \frac{3}{2}$, $y_2 = -2$. Найдём значения x: $x_1 = 3$, $x_2 = -4$. Проверкой убеждаемся, что $\left(3; \frac{3}{2}\right)$ — решение системы, а $(-4; -2)$ не является её решением.

Ответ $\left(3; \frac{3}{2}\right)$. ◁

Упражнения

336 Установить, какое из данных двух уравнений является следствием другого уравнения:

1) $x - 3 = 0$ и $x^2 - 5x + 6 = 0$; 2) $|x| = 5$ и $\sqrt{x^2} = 5$;

3) $\frac{x^2 - 3x + 2}{x - 1} = 0$ и $x^2 - 3x + 2 = 0$;

4) $\log_8 x + \log_8 (x - 2) = 1$ и $\log_8 (x(x - 2)) = 1$.

Решить уравнение (337—341).

337 1) $\log_2 (x - 5) + \log_2 (x + 2) = 3$;

2) $\log_3 (x - 2) + \log_3 (x + 6) = 2$;

3) $\lg (x + \sqrt{3}) + \lg (x - \sqrt{3}) = 0$;

4) $\lg (x - 1) + \lg (x + 1) = 0$.

338 1) $\lg (x - 1) - \lg (2x - 11) = \lg 2$;

2) $\lg (3x - 1) - \lg (x + 5) = \lg 5$;

3) $\log_3 (x^3 - x) - \log_3 x = \log_3 3$.

339 1) $\frac{1}{2} \lg (x^2 + x - 5) = \lg (5x) + \lg \frac{1}{5x}$;

2) $\frac{1}{2} \lg (x^2 - 4x - 1) = \lg (8x) - \lg (4x)$.

340 1) $\log_3 (5x + 3) = \log_3 (7x + 5)$;

2) $\log_{\frac{1}{2}} (3x - 1) = \log_{\frac{1}{2}} (6x + 8)$.

341 1) $\log_7 (x - 1) \log_7 x = \log_7 x$;

2) $\log_{\frac{1}{3}} x \log_{\frac{1}{3}} (3x - 2) = \log_{\frac{1}{3}} (3x - 2)$;

3) $\log_2 (3x + 1) \log_3 x = 2 \log_2 (3x + 1)$;

4) $\log_{\sqrt{3}} (x - 2) \log_5 x = 2 \log_3 (x - 2)$.

342 Решить систему уравнений:

1) $\begin{cases} \lg x - \lg y = 2, \\ x - 10y = 900; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \log_3 x + \log_3 y = 2, \\ x^2 y - 2y + 9 = 0. \end{cases}$

Решить уравнение (343—345).

343 1) $\log_5 x^2 = 0$; 2) $\log_4 x^2 = 3$; 3) $\log_3 x^3 = 0$; 4) $\log_4 x^3 = 6$;

5) $\lg x^4 + \lg (4x) = 2 + \lg x^3$; 6) $\lg x + \lg x^2 = \lg (9x)$.

344 1) $\log_4 ((x + 2)(x + 3)) + \log_4 \frac{x - 2}{x + 3} = 2$;

2) $\log_2 \frac{x - 1}{x + 4} + \log_2 ((x - 1)(x + 4)) = 2$;

3) $\log_3 x^2 - \log_3 \frac{x}{x + 6} = 3$; 4) $\log_2 \frac{x + 4}{x} + \log_2 x^2 = 5$.

345 1) $2^{3\lg x} \cdot 5^{\lg x} = 1600$; 2) $2^{\log_3 x^2} \cdot 5^{\log_3 x} = 400$;

3) $\dfrac{1}{4+\lg x} + \dfrac{2}{2-\lg x} = 1$; 4) $\dfrac{1}{5-\lg x} + \dfrac{2}{1+\lg x} = 1$.

346 Не решая уравнений, выяснить, равносильны ли они:

1) $2^{3x+1} = 2^{-3}$ и $3x+1=-3$;

2) $\log_3 (x-1) = 2$ и $x-1=9$.

347 Решить систему уравнений:

1) $\begin{cases} \lg x - \lg y = 7, \\ \lg x + \lg y = 5; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \log_2 x + \frac{1}{2}\log_2 \frac{1}{y} = 4, \\ xy = 2. \end{cases}$

Решить уравнение (348—352).

348 1) $\log_2 x - 2\log_x 2 = -1$; 2) $\log_2 x + \log_x 2 = 2{,}5$;

3) $\log_3 x + 2\log_x 3 = 3$; 4) $\log_3 x - 6\log_x 3 = 1$.

349 1) $\log_{x^2} 9 + \log_{\sqrt{x}} 4 = 2$; 2) $\log_{x^2} 16 - \log_{2x} 7 = 2$.

350 1) $\lg (6 \cdot 5^x - 25 \cdot 20^x) - \lg 25 = x$;

2) $\lg (2^x + x + 4) = x - x\lg 5$.

351 1) $\lg^2 (x+1) = \lg (x+1) \cdot \lg (x-1) + 2\lg^2 (x-1)$;

2) $2\log_5 (4-x) \cdot \log_{2x} (4-x) = 3\log_5 (4-x) - \log_5 (2x)$.

352 1) $\sqrt{\log_x 25 + 3} = \dfrac{1}{\log_5 x}$;

2) $\sqrt{2\log_2^2 x + 3\log_2 x - 5} = \log_2 (2x)$.

353 Найти все значения параметра a, при которых уравнение $5\log_5 x + \log_a x - 4\log_{25} x = a$ имеет корни.

§ 20 Логарифмические неравенства

При изучении логарифмической функции рассматривались неравенства вида $\log_a x < b$ и $\log_a x \geqslant b$. Приведём примеры решения более сложных логарифмических неравенств. Обычный способ решения таких неравенств заключается в переходе от них к более простому неравенству или системе неравенств, имеющей то же самое множество решений, т. е. к равносильному неравенству или к равносильной системе неравенств.

Задача 1 Решить неравенство

$$\lg (x + 1) \leqslant 2. \qquad (1)$$

▶ Правая часть данного неравенства имеет смысл при всех значениях x, а левая часть — при $x + 1 > 0$, откуда $x > -1$, т. е. $x > -1$ — область определения неравенства (1).

Исходное неравенство запишем так:

$$\lg (x + 1) \leqslant \lg 100. \qquad (2)$$

Так как $10 > 1$, то $x + 1 \leqslant 100$, откуда $x \leqslant 99$. Учитывая область определения исходного неравенства, получаем $-1 < x \leqslant 99$. ◁

Задача 2 Решить неравенство

$$\log_2 (x - 3) + \log_2 (x - 2) \leqslant 1. \qquad (3)$$

▶ Логарифмическая функция определена при положительных значениях аргумента, поэтому левая часть неравенства имеет смысл при $x - 3 > 0$ и $x - 2 > 0$.

Следовательно, областью определения этого неравенства является промежуток $(3; +\infty)$. По свойствам логарифма неравенство (3) при $x > 3$ равносильно неравенству

$$\log_2 (x - 3)(x - 2) \leqslant \log_2 2. \qquad (4)$$

Логарифмическая функция с основанием 2 возрастающая. Поэтому при $x > 3$ неравенство (4) выполняется, если $(x - 3)(x - 2) \leqslant 2$.

Таким образом, исходное неравенство (3) равносильно системе неравенств

$$\begin{cases} (x-3)(x-2) \leqslant 2, \\ x > 3. \end{cases}$$

Рис. 43

Решая первое неравенство этой системы, получаем $x^2 - 5x + 4 \leqslant 0$, откуда $1 \leqslant x \leqslant 4$. Совмещая отрезок $[1; 4]$ с промежутком $(3; +\infty)$, получаем $3 < x \leqslant 4$ (рис. 43). ◁

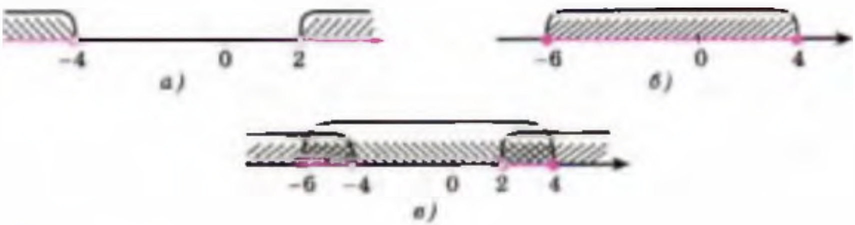


Рис. 44

Задача 3* Решить неравенство

$$\log_{\frac{1}{2}}(x^2+2x-8) \geqslant -4. \qquad (5)$$

▶ Область определения неравенства находится из условия $x^2+2x-8>0$. Неравенство (5) можно записать в следующем виде:

$$\log_{\frac{1}{2}}(x^2+2x-8) \geqslant \log_{\frac{1}{2}} 16.$$

Так как логарифмическая функция с основанием $\frac{1}{2}$ является убывающей, то для всех x из области определения неравенства получаем $x^2+2x-8 \leqslant 16$. Таким образом, исходное неравенство (5) равносильно системе неравенств

$$\begin{cases} x^2+2x-8>0, \\ x^2+2x-8 \leqslant 16. \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x^2+2x-8>0, \\ x^2+2x-24 \leqslant 0. \end{cases}$$

Решая первое квадратное неравенство, получаем $x<-4$, $x>2$ (рис. 44, *а*). Решая второе квадратное неравенство, получаем $-6 \leqslant x \leqslant 4$ (рис. 44, *б*). Следовательно, оба неравенства системы выполняются одновременно при $-6 \leqslant x < -4$ и при $2 < x \leqslant 4$ (рис. 44, *в*).

Ответ $-6 \leqslant x < -4$, $2 < x \leqslant 4$. ◁

Упражнения

354 Найти область определения функции:

1) $y=\lg(3x-2)$; 2) $y=\log_2(7-5x)$;

3) $y=\log_{\frac{1}{2}}(x^2-2)$; 4) $y=\log_7(4-x^2)$.

Решить неравенство (355—357).

355 1) $\log_3(x+2)<3$; 2) $\log_8(4-2x) \geqslant 2$;

3) $\log_3 (x+1) < -2$; 4) $\log_{\frac{1}{3}} (x-1) \geqslant -2$;

5) $\log_{\frac{1}{5}} (4-3x) \geqslant -1$; 6) $\log_{\frac{1}{2}} (2-5x) < -2$.

356 1) $\lg x > \lg 8 + 1$; 2) $\lg x > 2 - \lg 4$;

3) $\log_2 (x-4) < 1$; 4) $\log_{\frac{1}{5}} (3x-5) > \log_{\frac{1}{5}} (x+1)$.

357 1) $\log_{15} (x-3) + \log_{15} (x-5) < 1$;

2) $\log_{\frac{1}{3}} (x-2) + \log_{\frac{1}{3}} (12-x) \geqslant -2$.

358 Найти область определения функции:

1) $y = \log_8 (x^2 - 4x + 3)$; 2) $y = \log_6 \frac{3x+2}{1-x}$;

3) $y = \sqrt{\lg x + \lg (x+2)}$; 4) $y = \sqrt{\lg (x-1) + \lg (x+1)}$.

Решить неравенство (359—367).

359 1) $\log_5 \frac{3x-2}{x^2+1} > 0$; 2) $\log_{\frac{1}{2}} \frac{2x^2+3}{x-7} < 0$;

3) $\lg (3x-4) < \lg (2x+1)$;

4) $\log_{\frac{1}{2}} (2x+3) > \log_{\frac{1}{2}} (x+1)$.

360 1) $\log_8 (x^2 - 4x + 3) < 1$; 2) $\log_6 (x^2 - 3x + 2) \geqslant 1$;

3) $\log_3 (x^2 + 2x) > 1$; 4) $\log_{\frac{2}{3}} (x^2 - 2{,}5x) < -1$.

361 1) $\lg (x^2 - 8x + 13) > 0$; 2) $\log_{\frac{1}{5}} (x^2 - 5x + 7) < 0$;

3) $\log_2 (x^2 + 2x) < 3$; 4) $\log_{\frac{1}{2}} (x^2 - 5x - 6) \geqslant -3$.

362 1) $\log_{\frac{1}{3}} \log_2 x^2 > 0$; 2) $\log_3 \log_{\frac{1}{2}} (x^2 - 1) < 1$.

363 1) $\log_{0,2} x - \log_5 (x-2) < \log_{0,2} 3$;

2) $\lg x - \log_{0,1} (x-1) > \log_{0,1} 0{,}5$.

364 1) $\log_{0,2}^2 x - 5 \log_{0,2} x < -6$; 2) $\log_{0,1}^2 x + 3 \log_{0,1} x > 4$.

365 1) $\frac{1}{5 - \lg x} + \frac{2}{1 + \lg x} < 1$; 2) $\log_3 (2 - 3^{-x}) < x + 1 - \log_3 4$;

3) $\log_{x^2-3} (4x+7) > 0$; 4) $\log_{\frac{x-1}{3x-8}} (\sqrt{6} - 2x) < 0$.

366 $\frac{2}{3^x - 1} < \frac{7}{9^x - 2}$.

367 $4^x (\sqrt{16^{1-x} - 1} + 2) < 4 |4^x - 1|$.

Упражнения к главе IV

Вычислить (368—372).

368 1) $\log_{15} 225$; 2) $\log_4 256$; 3) $\log_3 \frac{1}{243}$; 4) $\log_7 \frac{1}{343}$.

369 1) $\log_{\frac{1}{4}} 64$; 2) $\log_{\frac{1}{3}} 81$; 3) $\log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{27}$; 4) $\log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{64}$.

370 1) $\log_{11} 1$; 2) $\log_7 7$; 3) $\log_{16} 64$; 4) $\log_{27} 9$.

371 1) $(0{,}1)^{-\lg 0{,}3}$; 2) $10^{-\lg 4}$; 3) $5^{-\log_5 3}$; 4) $\left(\frac{1}{6}\right)^{-\log_6 4}$.

372 1) $4\log_{\frac{1}{2}} 3 - \frac{2}{3}\log_{\frac{1}{2}} 27 - 2\log_{\frac{1}{2}} 6$;

2) $\frac{2}{3}\lg 0{,}001 + \lg\sqrt[3]{1000} - \frac{3}{5}\lg\sqrt{10000}$.

373 Вычислить с помощью микрокалькулятора:

1) $\log_8 7$; 2) $\log_3 12$; 3) $\log_{1,3} 0{,}17$; 4) $\log_{0,3} 8{,}1$.

374 Построить график функции:

1) $y = \log_4 x$; 2) $y = \log_{\frac{1}{4}} x$.

Какая из данных функций является возрастающей? убывающей? При каких значениях x каждая функция принимает положительные значения? отрицательные значения? значения, равные нулю?

375 Выяснить, является ли возрастающей или убывающей функция:

1) $y = \log_{0,2} x$; 2) $y = \log_{\sqrt{5}} x$; 3) $y = \log_{\frac{1}{e}} x$; 4) $y = \log_{\frac{\sqrt{3}}{2}} x$.

376 Решить графически уравнение:

1) $\log_3 x = 5 - x$; 2) $\log_{\frac{1}{3}} x = 3x$.

377 Найти область определения функции:

1) $y = \log_7 (5 - 2x)$; 2) $y = \log_2 (x^2 - 2x)$.

Решить уравнение (378—380).

378 1) $\log_{\frac{1}{2}} (7 - 8x) = -2$; 2) $\lg (x^2 - 2) = \lg x$.

379 1) $\lg(x^2 - 2x) = \lg 30 - 1$;

2) $\log_3(2x^2 + x) = \log_3 6 - \log_3 2$;

3) $\lg^2 x - 3\lg x = 4$; 4) $\log_2^2 x - 5\log_2 x + 6 = 0$.

380 1) $\log_2(x - 2) + \log_2(x - 3) = 1$;

2) $\log_3(5 - x) + \log_3(-1 - x) = 3$;

3) $\lg(x - 2) + \lg x = \lg 3$;

4) $\log_{\sqrt{6}}(x - 1) + \log_{\sqrt{6}}(x + 4) = \log_{\sqrt{6}} 6$.

Решить неравенство (381—383).

381 1) $\log_2(x - 5) \leqslant 2$; 2) $\log_3(7 - x) > 1$;

3) $\log_{\frac{1}{2}}(2x + 1) > -2$; 4) $\log_{\frac{1}{2}}(3 - 5x) < -3$.

382 1) $\log_3(5 - 4x) < \log_3(x - 1)$;

2) $\log_{0,3}(2x + 5) \geqslant \log_{0,3}(x + 1)$.

383 1) $\lg(x^2 + 2x + 2) < 1$; 2) $\log_3(x^2 + 7x - 5) > 1$.

Проверь себя!

1 Вычислить:

1) $\log_5 125$; 2) $\lg 0,01$; 3) $2^{\log_2 3}$; 4) $3^{2\log_3 7}$;

5) $\log_2 68 - \log_2 17$.

2 Построить схематически график функции:

1) $y = \log_{0,2} x$; 2) $y = \log_2 x$.

3 Сравнить числа:

1) $\log_{0,2} 3$ и $\log_{0,2} 2,5$; 2) $\log_2 0,7$ и $\log_2 1,2$.

4 Решить уравнение:

1) $\log_5(3x + 1) = 2$; 2) $\log_3(x + 2) + \log_3 x = 1$;

3) $\ln(x^2 - 6x + 9) = \ln 3 + \ln(x + 3)$.

5 Решить систему уравнений $\begin{cases} \ln x - \ln y = \ln 3, \\ x - 2y = 5. \end{cases}$

6 Решить неравенство:

1) $\log_3(x - 1) \leqslant 2$; 2) $\log_{\frac{1}{5}}(2 - x) > -1$.

384 Вычислить:

1) $\log_{\sqrt{3}} \frac{1}{3\sqrt[3]{3}}$; 2) $\log_{\sqrt{5}} \frac{1}{25\sqrt[4]{5}}$;

3) $2^{2 - \log_2 5}$; 4) $3,6^{\log_{3,6} 10 + 1}$;

5) $2\log_5 \sqrt{5} + 3\log_2 8$; 6) $\log_2 \log_2 \log_2 2^{16}$.

385 Сравнить числа:

1) $\log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{3}$ и $\log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{2}$; 2) $2^{2\log_2 5 + \log_{\frac{1}{2}} 9}$ и $\sqrt{8}$.

386 Вычислить $\log_{30} 64$ с точностью до 0,001, зная, что $\lg 3 \approx 0{,}4771$, $\lg 5 \approx 0{,}6990$.

387 Вычислить $\log_{36} 15$ с точностью до 0,001, зная, что $\lg 3 \approx 0{,}4771$, $\lg 5 \approx 0{,}6990$.

388 При каких значениях x справедливо неравенство:

1) $\log_x 8 < \log_x 10$; 2) $\log_x \frac{3}{4} < \log_x \frac{1}{2}$?

389 Решить графически уравнение:

1) $\log_3 x = \frac{3}{x}$; 2) $2^x = \log_{\frac{1}{2}} x$.

Решить уравнение (390—395).

390 1) $3^{4x} = 10$; 2) $2^{3x} = 3$; 3) $1{,}3^{3x-2} = 3$; 4) $\left(\frac{1}{3}\right)^{5+4x} = 1{,}5$;

5) $16^x - 4^{x+1} - 14 = 0$; 6) $25^x + 2 \cdot 5^x - 15 = 0$.

391 1) $\log_3 x + \log_9 x + \log_{27} x = \frac{11}{12}$;

2) $\log_3 x + \log_{\sqrt{3}} x + \log_{\frac{1}{3}} x = 6$;

3) $\log_3 x \cdot \log_2 x = 4 \log_3 2$;

4) $\log_5 x \cdot \log_3 x = 9 \log_5 3$.

392 1) $\log_3 (2 - x^2) - \log_3 (-x) = 0$;

2) $\log_5 (x^2 - 12) - \log_5 (-x) = 0$;

3) $\log_2 \sqrt{x-3} + \log_2 \sqrt{3x-7} = 2$;

4) $\lg (x+6) - \lg \sqrt{2x-3} = \lg 4$.

393 1) $\log_{\sqrt{2}} x + 4 \log_4 x + \log_8 x = 13$;

2) $\log_{0,5} (x+2) - \log_2 (x-3) = \frac{1}{2} \log_{\frac{1}{\sqrt{2}}} (-4x-8)$.

394 1) $\log_{\frac{1}{x}} 5 + \log_{\frac{1}{x^2}} 12 + \frac{1}{2} \log_x 3 = 1$;

2) $\frac{1}{2} \log_x 7 - \log_{\frac{1}{\sqrt{x}}} 3 - \log_{x^2} 28 = 1$.

395 1) $\log_2 \frac{2}{x-1} = \log_2 x$; 2) $\log_{\frac{1}{2}} \frac{10}{7-x} = \log_{\frac{1}{2}} x$;

3) $\lg \frac{x+8}{x-1} = \lg x$; 4) $\lg \frac{x-4}{x-2} = \lg x$.

Решить неравенство (396—397).

396 1) $\log_{\sqrt6}(x-4)+\log_{\sqrt6}(x+1) \leqslant 2$;

2) $\log_{3\sqrt2}(x-5)+\log_{3\sqrt2}(x+12) \leqslant 2$;

3) $\log_3(8x^2+x) > 2+\log_3 x^2+\log_3 x$;

4) $\log_2 x+\log_2(x-3) > \log_2 4$;

5) $\log_{\frac15}(x-10)-\log_{\frac15}(x+2) \geqslant -1$;

6) $\log_{\frac{1}{\sqrt7}}(x+10)+\log_{\frac{1}{\sqrt7}}(x+4) > -2$.

397 1) $4\log_4 x - 33\log_x 4 \leqslant 1$; 2) $\log_x 3 \leqslant 4\left(1+\log_{\frac13} x\right)$.

398 Доказать, что если последовательность положительных чисел является геометрической прогрессией, то их логарифмы по одному и тому же основанию образуют арифметическую прогрессию.

399 Найти три последовательных члена геометрической прогрессии, если их сумма равна 62, а сумма их десятичных логарифмов равна 3.

400 Построить график функции:

1) $y=\dfrac{1}{\log_2 x}$; 2) $y=\dfrac{1}{\ln x}$.

Решить уравнение (401—403).

401 1) $x^{\lg 9}+9^{\lg x}=6$; 2) $x^{3\lg^3 x-\frac23\lg x}=100\sqrt[3]{10}$.

402 1) $3+2\log_{x+1}3=2\log_3(x+1)$;

2) $1+2\log_{x+2}5=\log_5(x+2)$.

403 1) $\log_2(2^x-5)-\log_2(2^x-2)=2-x$;

2) $\log_{1-x}(3-x)=\log_{3-x}(1-x)$;

3) $\log_2(2^x+1)\cdot\log_2(2^{x+1}+2)=2$;

4) $\log_{3x+7}(5x+3)=2-\log_{5x+3}(3x+7)$.

404 Решить неравенство:

1) $\log_{\frac13}(2^{x+2}-4^x) \geqslant -2$; 2) $\log_{\frac{1}{\sqrt5}}(6^{x+1}-36^x) \geqslant -2$.

405 Решить уравнение

$$\log_2 x\cdot\log_2(x-3)+1=\log_2(x^2-3x).$$

406 Решить неравенство

$$\frac{1}{\log_a x-1}+\frac{1}{\log_a x^2+1}<-\frac32.$$

V
глава

Тригонометрические формулы

Математика есть такая наука, которая показывает, как из знаемых количеств находить другие, нам ещё неизвестные.

Д. С. Аничков

§ 21 Радианная мера угла

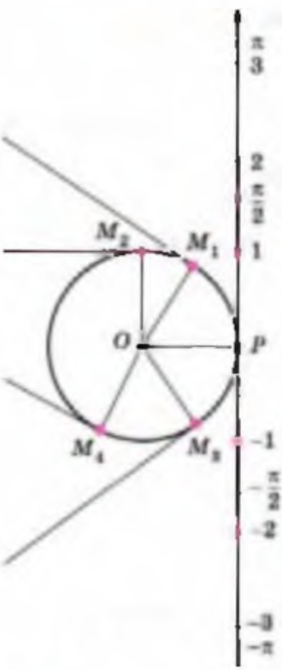


Рис. 45

Пусть вертикальная прямая касается в точке P окружности радиуса 1 с центром O (рис. 45). Будем считать эту прямую числовой осью с началом в точке P, а положительным направлением на прямой направление вверх. За единицу длины на числовой оси возьмём радиус окружности. Отметим на прямой несколько точек ± 1, $\pm\frac{\pi}{2}$, ± 3, $\pm\pi$, где $\pi \approx 3{,}14$ — иррациональное число. Вообразив эту прямую в виде нерастяжимой нити, закреплённой на окружности в точке P, будем мысленно наматывать её на окружность. При этом точки числовой прямой с координатами, например, 1, $\frac{\pi}{2}$, –1, –2 перейдут соответственно в точки окружности M_1, M_2, M_3, M_4, такие, что длина дуги PM_1, равна 1, длина дуги PM_2 равна $\frac{\pi}{2}$ и т. д.

Таким образом, *каждой точке прямой ставится в соответствие некоторая точка окружности.*

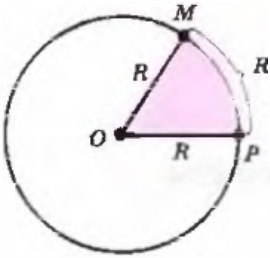


Рис. 46

Так как точке прямой с координатой 1 ставится в соответствие точка M_1, то естественно считать угол POM_1 единичным и мерой этого угла измерять другие углы. Например, угол POM_2 следует считать равным $\frac{\pi}{2}$. Такой способ измерения углов широко используется в математике и физике. В этом случае говорят, что углы измеряются в радианной мере, а угол POM_1 называют углом в один радиан (1 рад). Длина дуги окружности PM_1 равна радиусу.

Рассмотрим окружность радиуса R и отметим на ней дугу PM длины R и угол POM (рис. 46).

Центральный угол, опирающийся на дугу, длина которой равна радиусу окружности, называется углом в один радиан.

Найдём градусную меру угла в 1 рад. Из курса геометрии известно, что дуге длиной πR (полуокружность) соответствует центральный угол в 180°, тогда дуге длиной R соответствует угол, в π раз меньший, т. е.

$$1 \text{ рад} = \left(\frac{180}{\pi}\right)^\circ.$$

Так как $\pi \approx 3{,}14$, то 1 рад $\approx 57{,}3°$.

Если угол содержит α рад, то его градусная мера равна

$$\alpha \text{ рад} = \left(\frac{180}{\pi}\alpha\right)^\circ. \qquad (1)$$

Задача 1 Найти градусную меру угла, равного:

1) π рад; 2) $\frac{\pi}{2}$ рад; 3) $\frac{3\pi}{4}$ рад.

▶ По формуле (1) находим:

1) π рад $= 180°$; 2) $\frac{\pi}{2}$ рад $= 90°$;

3) $\frac{3\pi}{4}$ рад $= \left(\frac{180}{\pi}\cdot\frac{3\pi}{4}\right)^\circ = 135°$. ◁

Найдём радианную меру угла в 1°. Так как угол 180° равен π рад, то

$$1° = \frac{\pi}{180} \text{ рад}.$$

Если угол содержит α градусов, то его радианная мера равна

$$\alpha° = \frac{\pi}{180}\alpha \text{ рад}. \qquad (2)$$

Задача 2 Найти радианную меру угла, равного:
1) 45°; 2) 15°.

▶ По формуле (2) находим:

1) $45° = \frac{\pi}{180} \cdot 45$ рад $= \frac{\pi}{4}$ рад;

2) $15° = \frac{\pi}{180} \cdot 15$ рад $= \frac{\pi}{12}$ рад. ◁

Приведём таблицу наиболее часто встречающихся углов в градусной и радианной мере.

Градусы	0	30	45	60	90	180
Радианы	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π

Обычно при обозначении меры угла в радианах наименование «рад» опускают.

Радианная мера угла удобна для вычисления длины дуги окружности. Так как угол в 1 рад стягивает дугу, длина которой равна радиусу R, то угол в α рад стягивает дугу длиной

$$l = \alpha R. \qquad (3)$$

Задача 3 Конец минутной стрелки кремлёвских курантов движется по окружности радиуса $R \approx 3{,}06$ м. Какой путь l проходит конец стрелки за 15 мин?

▶ За 15 мин стрелка поворачивается на угол, равный $\frac{\pi}{2}$ рад. По формуле (3) при $\alpha = \frac{\pi}{2}$ находим

$$l = \frac{\pi}{2} R \approx \frac{3{,}14}{2} \cdot 3{,}06 \text{ м} \approx 4{,}8 \text{ м}.$$

Ответ $l \approx 4{,}8$ м. ◁

Особенно простой вид формула (3) имеет в случае, когда радиус окружности $R = 1$. Тогда длина дуги равна величине центрального угла, стягиваемого этой дугой, в радианах, т. е. $l = \alpha$. Этим объясняется удобство применения радианной меры в математике, физике, механике и т. д.

Задача 4 Доказать, что площадь кругового сектора радиуса R, образованного углом в α рад, равна

$$S = \frac{R^2}{2} \alpha, \text{ где } 0 < \alpha < \pi.$$

▶ Площадь кругового сектора в π рад (полукруга) равна $\frac{\pi R^2}{2}$. Поэтому площадь сектора в 1 рад в π раз меньше, т. е. равна $\frac{\pi R^2}{2} : \pi$. Следовательно, площадь сектора в α рад равна $\frac{R^2}{2}\alpha$. ◁

Упражнения

407 Найти радианную меру угла, выраженного в градусах: 1) 40°; 2) 120°; 3) 150°; 4) 75°; 5) 32°; 6) 140°.

408 Найти градусную меру угла, выраженного в радианах: 1) $\frac{\pi}{6}$; 2) $\frac{\pi}{9}$; 3) $\frac{3}{4}\pi$; 4) 2; 5) 3; 6) 0,36.

409 (Устно.) Определить градусную и радианную меру углов: а) равностороннего треугольника; б) равнобедренного прямоугольного треугольника; в) квадрата; г) правильного шестиугольника.

410 Вычислить радиус окружности, если дуге длиной 0,36 м соответствует центральный угол в 0,9 рад.

411 Найти радианную меру угла, который соответствует дуге окружности длиной 3 см, если радиус окружности равен 1,5 см.

412 Дуге кругового сектора соответствует угол в $\frac{3\pi}{4}$ рад. Найти площадь сектора, если радиус круга равен 1 см.

413 Радиус круга равен 2,5 см, а площадь кругового сектора равна 6,25 см^2. Найти угол, который соответствует дуге этого кругового сектора.

Заполнить таблицу **(414—415).**

414

Градусы	0,5	36	150	108				
Радианы					$\frac{5}{6}\pi$	$\frac{3}{10}\pi$	2,5	1,8

415

Угол, °	30					
Угол, рад		$\frac{\pi}{5}$			2	
Радиус, см	2		10	5		
Длина дуги, см		2	6			10
Площадь сектора, см^2				50	25	50

§ 22 Поворот точки вокруг начала координат

В предыдущем параграфе использовался наглядный способ установления соответствия между точками числовой прямой и точками окружности. Покажем теперь, как можно установить соответствие между действительными числами и точками окружности с помощью поворота точки окружности.

Рассмотрим на координатной плоскости окружность радиуса 1 с центром в начале координат. Её называют *единичной окружностью*. Введём понятие поворота точки единичной окружности вокруг начала координат на угол α рад, где α — любое действительное число.

1. Пусть $\alpha > 0$. Предположим, что точка, двигаясь по единичной окружности от точки $P\ (1;\ 0)$ против часовой стрелки, прошла путь длиной α (рис. 47). Конечную точку пути обозначим M.

В этом случае будем говорить, что точка M получена из точки P поворотом вокруг начала координат на угол α рад.

2. Пусть $\alpha < 0$. В этом случае поворот на угол α рад означает, что движение совершалось по часовой стрелке и точка прошла путь длиной $|\alpha|$ (рис. 48).

Поворот на 0 рад означает, что точка остаётся на месте.

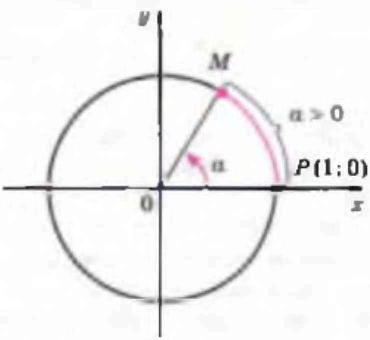


Рис. 47

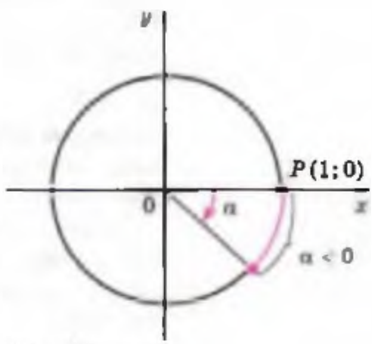


Рис. 48

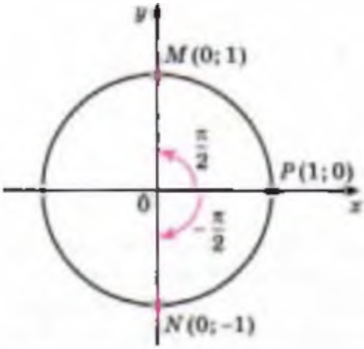


Рис. 49

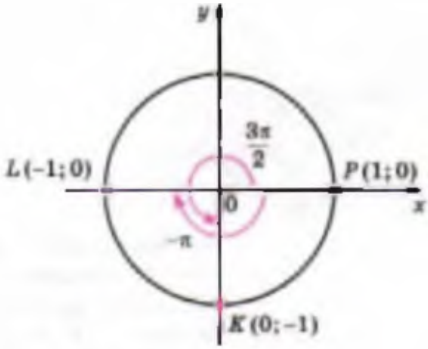


Рис. 50

Примеры.

1) При повороте точки $P\,(1; 0)$ на угол $\frac{\pi}{2}$ рад (рис. 49) получается точка $M\,(0; 1)$.

2) При повороте точки $P\,(1; 0)$ на угол $-\frac{\pi}{2}$ рад (рис. 49) получается точка $N\,(0; -1)$.

3) При повороте точки $P\,(1; 0)$ на угол $\frac{3\pi}{2}$ рад (рис. 50) получается точка $K\,(0; -1)$.

4) При повороте точки $P\,(1; 0)$ на угол $-\pi$ рад (рис. 50) получается точка $L\,(-1; 0)$.

В курсе геометрии рассматривались углы от 0° до 180°. Используя поворот точки единичной окружности вокруг начала координат, можно рассматривать углы, большие 180°, а также отрицательные углы. Угол поворота можно задавать как в градусах, так и в радианах. Например, поворот точки $P\,(1; 0)$ на угол $\frac{3\pi}{2}$ означает то же самое, что и поворот на 270°; поворот на $-\frac{\pi}{2}$ — это поворот на −90°.

Приведём таблицу поворотов на некоторые углы, выраженные в радианной и градусной мере (рис. 51)

Отметим, что при повороте точки $P\,(1; 0)$ на 2π, т. е. на 360°, точка возвращается в первоначальное положение (см. рис. 51). При повороте этой точки на -2π, т. е. на −360°, она также возвращается в первоначальное положение.

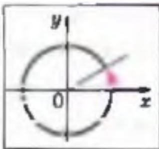
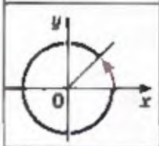
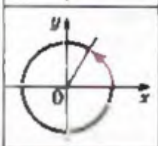
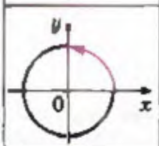
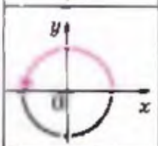
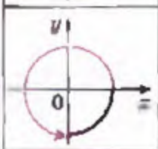
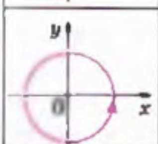
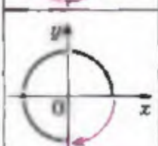
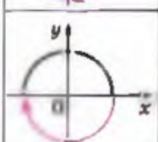
	$\frac{\pi}{6}$	30°
	$\frac{\pi}{4}$	45°
	$\frac{\pi}{3}$	60°
	$\frac{\pi}{2}$	90°
	π	180°
	$\frac{3\pi}{2}$	270°
	2π	360°
	$-\frac{\pi}{2}$	−90°
	$-\pi$	−180°

Рис. 51

Рис. 52

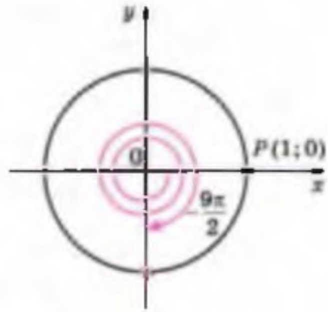


Рис. 53

Теперь рассмотрим примеры поворотов точки на угол, больший 2π, и на угол, меньший -2π. Так, при повороте на угол $\frac{9\pi}{2} = 2 \cdot 2\pi + \frac{\pi}{2}$ точка совершает два полных оборота против часовой стрелки и ещё проходит путь $\frac{\pi}{2}$ (рис. 52). При повороте на угол $-\frac{9\pi}{2} = -2 \cdot 2\pi - \frac{\pi}{2}$ точка совершает два полных оборота по часовой стрелке и ещё проходит путь $\frac{\pi}{2}$ в том же направлении (рис. 53).

Заметим, что при повороте точки $P\ (1;\ 0)$ на угол $\frac{9\pi}{2}$ получается та же самая точка, что и при повороте на угол $\frac{\pi}{2}$ (рис. 52). При повороте на угол $-\frac{9\pi}{2}$ получается та же самая точка, что и при повороте на угол $-\frac{\pi}{2}$ (рис. 53).

Вообще, если $\alpha = \alpha_0 + 2\pi k$, где k — целое число, то при повороте на угол α получается та же самая точка, что и при повороте на угол α_0.

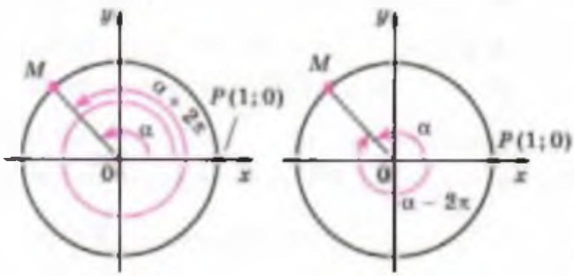
Итак, каждому действительному числу α соответствует единственная точка единичной окружности, получаемая поворотом точки $P(1; 0)$ на угол α рад.
Однако одной и той же точке M единичной окружности соответствует бесконечное множество действительных чисел $\alpha + 2\pi k$, где k — целое число, задающих поворот точки $P(1; 0)$ в точку M (рис. 54).

Задача 1 Найти координаты точки, полученной поворотом точки $P(1; 0)$ на угол: 1) 7π; 2) $-\frac{5\pi}{2}$.

▸ 1) Так как $7\pi = \pi + 2\pi \cdot 3$, то при повороте на 7π получается та же самая точка, что и при повороте на π, т. е. получается точка с координатами $(-1; 0)$.
2) Так как $-\frac{5\pi}{2} = -\frac{\pi}{2} - 2\pi$, то при повороте на $-\frac{5\pi}{2}$ получается та же самая точка, что и при повороте на $-\frac{\pi}{2}$, т. е. получается точка с координатами $(0; -1)$. ◁

Задача 2 Записать все углы, на которые нужно повернуть точку $(1; 0)$, чтобы получить точку $M\left(\frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{1}{2}\right)$.

▸ Из прямоугольного треугольника AOM (рис. 55) следует, что угол AOM равен $\frac{\pi}{6}$, т. е. один из возможных углов поворота равен $\frac{\pi}{6}$. Следовательно,



а) б)
Рис. 54

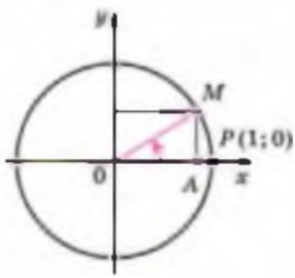


Рис. 55

все углы, на которые нужно повернуть точку (1; 0), чтобы получить точку $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{1}{2}\right)$, выражаются так: $\frac{\pi}{6} + 2\pi k$, где k — любое целое число. ◁

Упражнения

416 Найти координаты точки единичной окружности, полученной поворотом точки (1; 0) на угол:

1) 4π; 2) $-\frac{3}{2}\pi$; 3) $-6{,}5\pi$; 4) $\frac{\pi}{4}$; 5) $\frac{\pi}{3}$; 6) $-45°$.

На единичной окружности построить точку, полученную поворотом точки (1; 0) на заданный угол (**417—419**).

417 1) $\frac{\pi}{4}$; 2) $-\frac{\pi}{3}$; 3) $-\frac{3}{4}\pi$; 4) $\frac{4\pi}{3}$; 5) $-\frac{5}{4}\pi$; 6) $-225°$.

418 1) $\frac{\pi}{4} \pm 2\pi$; 2) $-\frac{\pi}{3} \pm 2\pi$; 3) $\frac{2\pi}{3} \pm 6\pi$; 4) $-\frac{3\pi}{4} \pm 8\pi$.

419 1) $\frac{3\pi}{2} + 2\pi k$, k — целое число; 2) $-\frac{1}{2}\pi + 2\pi k$, k — целое число; 3) $-\pi + 2\pi k$, k — целое число; 4) $-\frac{\pi}{4} + 2\pi k$, k — целое число.

420 Найти координаты точки, полученной поворотом точки P (1; 0) на угол:

1) 3π; 2) $-\frac{7}{2}\pi$; 3) $-\frac{15}{2}\pi$; 4) 5π; 5) $540°$; 6) $810°$.

421 Найти координаты точки, полученной поворотом точки P (1; 0) на угол (k — целое число):

1) $-\frac{\pi}{2} + 2\pi k$; 2) $\frac{\pi}{2} + 2\pi k$; 3) $\frac{3\pi}{2} + 2\pi k$; 4) $-\frac{3\pi}{2} + 2\pi k$.

422 Найти координаты точки, полученной поворотом точки P (1; 0) на угол (k — целое число):

1) $\frac{\pi}{2} \pm \pi$; 2) $\frac{\pi}{4} \pm \pi$; 3) $-\frac{3\pi}{2} + \pi k$; 4) $-\pi + \pi k$.

423 Найти все углы, на которые нужно повернуть точку P (1; 0), чтобы получить точку с координатами:

1) (1; 0); 2) (–1; 0); 3) (0; 1); 4) (0; –1).

424 Определить четверть, в которой расположена точка, полученная поворотом точки P (1; 0) на угол:

1) 1; 2) 2,75; 3) 3,16; 4) 4,95.

425 Найти число x, где $0 \leqslant x < 2\pi$, и натуральное число k, такие, чтобы выполнялось равенство $a = x + 2\pi k$, если:

1) $a = 9{,}8\pi$; 2) $a = 7\frac{1}{3}\pi$; 3) $a = \frac{11}{2}\pi$; 4) $a = \frac{17}{3}\pi$.

426 На единичной окружности построить точку, полученную поворотом точки $P\ (1;\ 0)$ на угол:

1) $4{,}5\pi$; 2) $5{,}5\pi$; 3) -6π; 4) -7π.

427 Найти координаты точки, полученной поворотом точки $P\ (1;\ 0)$ на угол (k — целое число):

1) $-\frac{3\pi}{2}+2\pi k$; 2) $\frac{5\pi}{2}+2\pi k$; 3) $\frac{7\pi}{2}+2\pi k$; 4) $-\frac{9\pi}{2}+2\pi k$.

428 Записать все углы, на которые нужно повернуть точку $P\ (1;\ 0)$, чтобы получить точку с координатами:

1) $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}; -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$; 2) $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}; -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$; 3) $\left(-\frac{1}{2}; -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$; 4) $\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}; -\frac{1}{2}\right)$.

§ 23 Определение синуса, косинуса и тангенса угла

В курсе геометрии были введены синус, косинус и тангенс угла, выраженного в градусах. Этот угол рассматривался в промежутке от 0° до 180°. Синус и косинус произвольного угла определяются следующим образом (рис. 56):

Определение 1. ***Синусом угла*** α **называется ордината точки, полученной поворотом точки (1; 0) вокруг начала координат на угол** α **(обозначается** $\sin\alpha$**).**

Определение 2. ***Косинусом угла*** α **называется абсцисса точки, полученной поворотом точки (1; 0) вокруг начала координат на угол** α **(обозначается** $\cos\alpha$**).**

В этих определениях угол α может выражаться как в градусах, так и в радианах.

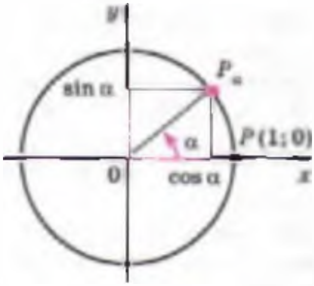


Рис. 56

Например, при повороте точки (1; 0) на угол $\frac{\pi}{2}$, т. е. угол 90°, получается точка (0; 1). Ордината точки (0; 1) равна 1, поэтому $\sin\frac{\pi}{2} = \sin 90° = 1$; абсцисса этой точки равна 0, поэтому $\cos\frac{\pi}{2} = \cos 90° = 0$.

Заметим, что приведённые определения синуса и косинуса в случае, когда угол заключён в промежутке от 0° до 180°, совпадают с определениями синуса и косинуса, известными из курса геометрии. Например,

$$\sin\frac{\pi}{6} = \sin 30° = \frac{1}{2}, \quad \cos\pi = \cos 180° = -1.$$

Задача 1 Найти $\sin(-\pi)$ и $\cos(-\pi)$.

▶ Точка (1; 0) при повороте на угол $-\pi$ перейдёт в точку (−1; 0) (рис. 57). Следовательно, $\sin(-\pi) = 0$, $\cos(-\pi) = -1$. ◁

Задача 2 Найти $\sin 270°$ и $\cos 270°$.

▶ Точка (1; 0) при повороте на угол 270° перейдёт в точку (0; −1) (рис. 58). Следовательно, $\cos 270° = 0$, $\sin 270° = -1$. ◁

Напомним, что меру угла α (в радианах) можно рассматривать как действительное число. Поэтому $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$ можно рассматривать как числовое выражение. Например, в уравнении $\sin x = a$, где a — заданное число, считается, что x — неизвестное число.

Задача 3 Решить уравнение $\sin x = 0$.

▶ Решить уравнение $\sin x = 0$ — это значит найти все углы, синус которых равен нулю. Ординату,

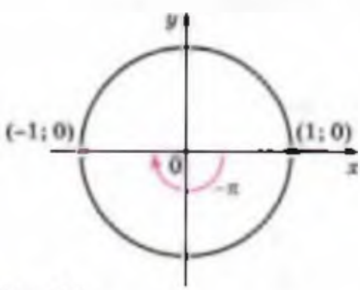


Рис. 57

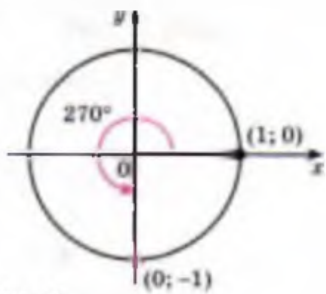


Рис. 58

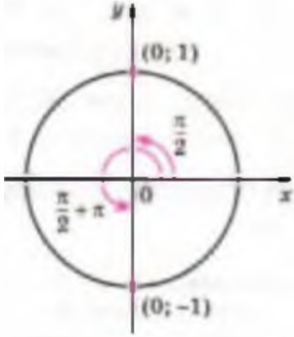


Рис. 59

равную нулю, имеют две точки единичной окружности (1; 0) и (−1; 0) (рис. 57). Эти точки получаются из точки (1; 0) поворотом на углы 0, π, 2π, 3π и т. д., а также на углы $-\pi$, -2π, -3π и т. д. Следовательно, $\sin x = 0$ при $x = \pi k$, где k — любое целое число. ◁

Множество целых чисел обозначается буквой $\boldsymbol{Z}$. Для обозначения того, что число k принадлежит $\boldsymbol{Z}$, используют запись $k \in \boldsymbol{Z}$ (читается: «k принадлежит $\boldsymbol{Z}$»). Ответ к задаче 3 можно записать так:

$$x = \pi k, \quad k \in \boldsymbol{Z}.$$

Задача 4 Решить уравнение $\cos x = 0$.

▶ Абсциссу, равную нулю, имеют две точки единичной окружности (0; 1) и (0; −1) (рис. 59). Эти точки получаются из точки (1; 0) поворотом на углы $\frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{2}+\pi$, $\frac{\pi}{2}+2\pi$ и т. д., а также на углы $\frac{\pi}{2}-\pi$, $\frac{\pi}{2}-2\pi$ и т. д., т. е. на углы $\frac{\pi}{2}+\pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$.

Ответ $x = \frac{\pi}{2}+\pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$. ◁

Задача 5 Решить уравнение: 1) $\sin x = 1$; 2) $\cos x = 1$.

▶ 1) Ординату, равную единице, имеет точка (0; 1) единичной окружности. Эта точка получается из точки (1; 0) поворотом на углы $\frac{\pi}{2}+2\pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$.

2) Абсциссу, равную единице, имеет точка, полученная из точки (1; 0) поворотом на углы $2\pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$.

Ответ 1) $x = \frac{\pi}{2}+2\pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$; 2) $x = 2\pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$. ◁

Определение 3. *Тангенсом угла* α называется отношение синуса угла α к его косинусу (обозначается $\operatorname{tg}\alpha$).

Таким образом,

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}.$$

Например,

$$\operatorname{tg}0^\circ = \frac{\sin 0^\circ}{\cos 0^\circ} = \frac{0}{1} = 0, \quad \operatorname{tg}\frac{\pi}{4} = \frac{\sin\frac{\pi}{4}}{\cos\frac{\pi}{4}} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = 1.$$

Иногда используется котангенс угла α (обозначается $\operatorname{ctg}\alpha$), который определяется формулой

$$\operatorname{ctg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}.$$

Например,

$$\operatorname{ctg} 270^\circ = \frac{\cos 270^\circ}{\sin 270^\circ} = \frac{0}{-1} = 0, \quad \operatorname{ctg}\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{1} = 1.$$

Отметим, что $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$ определены для любого угла, а их значения заключены от -1 до 1; $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ определён лишь для тех углов, для которых $\cos\alpha \neq 0$, т. е. для любых углов, кроме $\alpha = \frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in Z$; $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$ определён лишь для тех углов, для которых $\sin\alpha \neq 0$, т. е. для любых углов, кроме $\alpha = \pi k$, $k \in Z$.

Приведём таблицу часто встречающихся значений синуса, косинуса, тангенса и котангенса.

α	0 (0°)	$\frac{\pi}{6}$ (30°)	$\frac{\pi}{4}$ (45°)	$\frac{\pi}{3}$ (60°)	$\frac{\pi}{2}$ (90°)	π (180°)	$\frac{3}{2}\pi$ (270°)	2π (360°)
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1	0
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0	1
$\operatorname{tg}\alpha$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	Не существует	0	Не существует	0
$\operatorname{ctg}\alpha$	Не существует	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	Не существует	0	Не существует

Задача 6 Вычислить $4\sin\frac{\pi}{6} + \sqrt{3}\cos\frac{\pi}{6} - \operatorname{tg}\frac{\pi}{4}$.

▶ Используя таблицу, получаем

$$4\sin\frac{\pi}{6} + \sqrt{3}\cos\frac{\pi}{6} - \operatorname{tg}\frac{\pi}{4} = 4\cdot\frac{1}{2} + \sqrt{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} - 1 = 2{,}5.$$ ◁

Значения синуса, косинуса, тангенса и котангенса для углов, не вошедших в эту таблицу, можно найти по четырёхзначным математическим таблицам В. М. Брадиса, а также с помощью инженерного микрокалькулятора.

Задача 7 Вычислить на микрокалькуляторе с точностью до 0,01:

1) $\sin 25°$; 2) $\cos \frac{\pi}{5}$; 3) $\mathrm{tg}\, 5$.

▶ На любом микрокалькуляторе вычисления проводятся с помощью клавиш $\boxed{\sin}$, $\boxed{\cos}$, $\boxed{\mathrm{tg}}$, но перед их нажатием нужно нажимать клавишу $\boxed{F}$. Перед вычислением нужно установить переключатель Р — Г (радиан — градус) в нужном положении. Требуемое приближённое значение можно прочитать на табло микрокалькулятора.

1) $\sin 25° \approx \underline{0{,}42261825}$;

2) $\cos \frac{\pi}{5} \approx \underline{0{,}80901703}$;

3) $\mathrm{tg}\, 5 \approx \underline{-3{,}380514}$.

Ответ 1) 0,42; 2) 0,81; 3) −3,38. ◀

Упражнения

429 Отметить на единичной окружности точки, соответствующие числу α, если:

1) $\sin\alpha = 1$; 2) $\sin\alpha = 0$; 3) $\cos\alpha = -1$; 4) $\cos\alpha = 0$;

5) $\sin\alpha = -0{,}6$; 6) $\sin\alpha = 0{,}5$; 7) $\cos\alpha = \frac{1}{3}$.

430 Вычислить:

1) $\sin\frac{\pi}{2} + \sin\frac{3\pi}{2}$; 2) $\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) + \cos\frac{\pi}{2}$;

3) $\sin\pi - \cos\pi$; 4) $\sin 0 - \cos 2\pi$;

5) $\sin\pi + \sin 1{,}5\pi$; 6) $\sin 0 + \cos 2\pi$.

431 Найти значения синуса и косинуса числа β, если:

1) $\beta = 3\pi$; 2) $\beta = 4\pi$; 3) $\beta = 3{,}5\pi$;

4) $\beta = \frac{5}{2}\pi$; 5) $\beta = \pi k,\ k \in \mathbf{Z}$; 6) $\beta = (2k+1)\pi,\ k \in \mathbf{Z}$.

Вычислить **(432—433)**.

432 1) $\sin 3\pi - \cos\frac{3\pi}{2}$;

2) $\cos 0 - \cos 3\pi + \cos 3{,}5\pi$;

3) $\sin \pi k + \cos 2\pi k$, $k \in Z$;

4) $\cos \frac{(2k+1)\pi}{2} - \sin \frac{(4k+1)\pi}{2}$, $k \in Z$.

433 1) $\operatorname{tg} \pi + \cos \pi$; 2) $\operatorname{tg} 0^\circ - \operatorname{tg} 180^\circ$;

3) $\operatorname{tg} \pi + \sin \pi$; 4) $\cos \pi - \operatorname{tg} 2\pi$.

434 Найти значение выражения:

1) $3 \sin \frac{\pi}{6} + 2 \cos \frac{\pi}{6} - \operatorname{tg} \frac{\pi}{3}$;

2) $5 \sin \frac{\pi}{4} + 3 \operatorname{tg} \frac{\pi}{4} - 5 \cos \frac{\pi}{4} - 10 \operatorname{ctg} \frac{\pi}{4}$;

3) $\left(2 \operatorname{tg} \frac{\pi}{6} - \operatorname{tg} \frac{\pi}{3}\right) : \cos \frac{\pi}{6}$;

4) $\sin \frac{\pi}{3} \cdot \cos \frac{\pi}{6} - \operatorname{tg} \frac{\pi}{4}$.

435 Решить уравнение:

1) $2 \sin x = 0$; 2) $\frac{1}{2} \cos x = 0$;

3) $\cos x - 1 = 0$; 4) $1 - \sin x = 0$.

436 Может ли $\sin \alpha$ или $\cos \alpha$ быть равным:

1) 0,049; 2) $-0{,}875$; 3) $-\sqrt{2}$; 4) $2 + \sqrt{2}$?

437 Найти значение выражения:

1) $2 \sin \alpha + \sqrt{2} \cos \alpha$ при $\alpha = \frac{\pi}{4}$;

2) $0{,}5 \cos \alpha - \sqrt{3} \sin \alpha$ при $\alpha = 60^\circ$;

3) $\sin 3\alpha - \cos 2\alpha$ при $\alpha = \frac{\pi}{6}$;

4) $\cos \frac{\alpha}{2} + \sin \frac{\alpha}{3}$ при $\alpha = \frac{\pi}{2}$.

438 Найти значение выражения:

1) $\sin \frac{\pi}{4} \cos \frac{\pi}{4} - \sin \frac{\pi}{3} \cos \frac{\pi}{6}$;

2) $2 \operatorname{tg}^2 \frac{\pi}{3} - \operatorname{ctg}^2 \frac{\pi}{6} - \sin \frac{\pi}{6} \cos \frac{\pi}{3}$;

3) $\left(\operatorname{tg} \frac{\pi}{4} - \operatorname{ctg} \frac{\pi}{3}\right)\left(\operatorname{ctg} \frac{\pi}{4} + \operatorname{tg} \frac{\pi}{6}\right)$;

4) $2 \cos^2 \frac{\pi}{6} - \sin^2 \frac{\pi}{3} + \operatorname{tg} \frac{\pi}{6} \operatorname{ctg} \frac{\pi}{3}$.

439 Решить уравнение:

1) $\sin x = -1$; 2) $\cos x = -1$;

3) $\sin 3x = 0$; 4) $\cos 0{,}5x = 0$;

5) $\sin \left(\frac{x}{2} + \frac{2\pi}{3}\right) = 1$; 6) $\cos \left(5x + \frac{4\pi}{5}\right) = 1$.

440 Используя микрокалькулятор, проверить равенство:

1) $\sin 60^\circ \approx 0{,}866$; 2) $\cos 45^\circ \sim 0{,}707$;

3) $\cos \frac{\pi}{5} \sim 0{,}996$; 4) $\sin \frac{\pi}{13} \sim 0{,}225$.

441 Вычислить с точностью до 0,01, используя микрокалькулятор:

1) $\sin 1{,}5$; 2) $\cos 4{,}81$; 3) $\sin 38^\circ$; 4) $\cos 45^\circ 12'$;

5) $\sin \frac{\pi}{5}$; 6) $\cos \frac{10}{7}\pi$; 7) $\mathrm{tg}\, 12^\circ$; 8) $\sin \frac{19}{9}\pi$.

§ 24 Знаки синуса, косинуса и тангенса

1. Знаки синуса и косинуса.

Пусть точка (1; 0) совершает поворот против часовой стрелки. Для точек, находящихся в первой четверти (квадранте), ординаты и абсциссы положительны. Поэтому $\sin \alpha > 0$ и $\cos \alpha > 0$, если $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ (рис. 60, 61).

Для точек, расположенных во второй четверти, ординаты положительны, а абсциссы отрицательны. Следовательно, $\sin \alpha > 0$, $\cos \alpha < 0$, если $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ (рис. 60, 61). Аналогично в третьей четверти $\sin \alpha < 0$, $\cos \alpha < 0$, а в четвёртой четверти $\sin \alpha < 0$, $\cos \alpha > 0$ (рис. 60, 61).

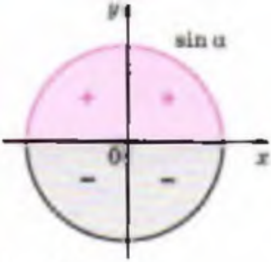


Рис. 60

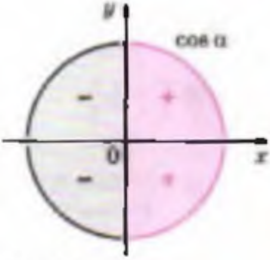


Рис. 61

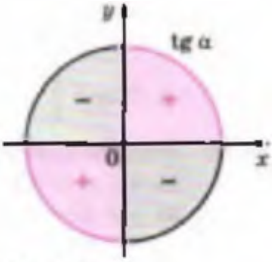


Рис. 62

При повороте точки по часовой стрелке на угол, больший 2π, а также при повороте точки на любой угол по часовой стрелке знаки синуса и косинуса определяются тем, в какой четверти окажется точка. Это показано на рисунках 60, 61.

Задача 1 Выяснить знаки синуса и косинуса угла:

1) $\frac{3\pi}{4}$; 2) $745°$; 3) $-\frac{5\pi}{7}$.

▶ 1) Углу $\frac{3\pi}{4}$ соответствует точка единичной окружности, расположенная во второй четверти. Поэтому $\sin\frac{3\pi}{4} > 0$, $\cos\frac{3\pi}{4} < 0$.

2) Так как $745° = 2 \cdot 360° + 25°$, то повороту точки $(1; 0)$ на угол $745°$ соответствует точка, расположенная в первой четверти. Поэтому $\sin 745° > 0$, $\cos 745° > 0$.

3) Так как $-\pi < -\frac{5\pi}{7} < -\frac{\pi}{2}$, то при повороте точки $(1; 0)$ на угол $-\frac{5\pi}{7}$ получается точка третьей четверти. Поэтому $\sin\left(-\frac{5\pi}{7}\right) < 0$, $\cos\left(-\frac{5\pi}{7}\right) < 0$. ◀

2. Знаки тангенса.

По определению $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$. Поэтому $\operatorname{tg}\alpha > 0$, если $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$ имеют одинаковые знаки, и $\operatorname{tg}\alpha < 0$, если $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$ имеют противоположные знаки. Знаки тангенса в различных четвертях показаны на рисунке 62.

Задача 2 Выяснить знак тангенса угла: 1) $260°$; 2) 3.

▶ 1) Так как $180° < 260° < 270°$, то $\operatorname{tg} 260° > 0$.

2) Так как $\frac{\pi}{2} < 3 < \pi$, то $\operatorname{tg} 3 < 0$. ◀

Упражнения

442 В какой четверти находится точка, полученная поворотом точки $P(1; 0)$ на угол α, если:

1) $\alpha = \frac{\pi}{6}$; 2) $\alpha = \frac{3\pi}{4}$; 3) $\alpha = -\frac{3\pi}{4}$; 4) $\alpha = \frac{7\pi}{6}$; 5) $\alpha = -\frac{7\pi}{6}$; 6) $\alpha = 4{,}8$; 7) $\alpha = -1{,}31$; 8) $\alpha = -2{,}7$?

443 Пусть $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$. В какой четверти находится точка, полученная поворотом точки $P(1; 0)$ на угол:

1) $\frac{\pi}{2} - \alpha$; 2) $\alpha - \pi$; 3) $\frac{3\pi}{2} - \alpha$;

4) $\frac{\pi}{2} + \alpha$; 5) $\alpha - \frac{\pi}{2}$; 6) $\pi - \alpha$?

444 Определить знак числа $\sin \alpha$, если:

1) $\alpha = \frac{5\pi}{4}$; 2) $\alpha = -\frac{33\pi}{7}$; 3) $\alpha = -\frac{4}{3}\pi$;

4) $\alpha = -0{,}1\pi$; 5) $\alpha = 5{,}1$; 6) $\alpha = -470°$.

445 Определить знак числа $\cos \alpha$, если:

1) $\alpha = \frac{2}{3}\pi$; 2) $\alpha = \frac{7}{6}\pi$; 3) $\alpha = -\frac{2}{5}\pi$;

4) $\alpha = 4{,}6$; 5) $\alpha = -5{,}3$; 6) $\alpha = -150°$.

446 Определить знак числа $\operatorname{tg} \alpha$, если:

1) $\alpha = \frac{5}{6}\pi$; 2) $\alpha = \frac{12}{5}\pi$; 3) $\alpha = -\frac{5}{4}\pi$;

4) $\alpha = 3{,}7$; 5) $\alpha = -1{,}3$; 6) $\alpha = 283°$.

447 Определить знаки чисел $\sin \alpha$, $\cos \alpha$, $\operatorname{tg} \alpha$, если:

1) $\pi < \alpha < \frac{3}{2}\pi$; 2) $\frac{3}{2}\pi < \alpha < \frac{7\pi}{4}$;

3) $\frac{7\pi}{4} < \alpha < 2\pi$; 4) $2\pi < \alpha < 2{,}5\pi$.

448 Определить знаки чисел $\sin \alpha$, $\cos \alpha$, $\operatorname{tg} \alpha$, если:

1) $\alpha = 1$; 2) $\alpha = 3$; 3) $\alpha = -3{,}4$; 4) $\alpha = -1{,}3$.

449 Пусть $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$. Определить знак числа:

1) $\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$; 2) $\cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)$; 3) $\cos(\alpha - \pi)$;

4) $\operatorname{tg}\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right)$; 5) $\operatorname{tg}\left(\frac{3}{2}\pi - \alpha\right)$; 6) $\sin(\pi - \alpha)$.

450 Каковы знаки чисел $\sin \alpha$, $\cos \alpha$, $\operatorname{tg} \alpha$, $\operatorname{ctg} \alpha$, если:

1) $3\pi < \alpha < \frac{10\pi}{3}$; 2) $\frac{5\pi}{2} < \alpha < \frac{11\pi}{4}$?

451 Найти значения углов α, заключённых в промежутке от 0 до 2π, знаки синуса и косинуса которых совпадают; различны.

452 Определить знак числа:

1) $\sin\frac{2\pi}{3}\sin\frac{3\pi}{4}$; 2) $\cos\frac{2\pi}{3}\cos\frac{\pi}{6}$; 3) $\operatorname{tg}\frac{5\pi}{4} + \sin\frac{\pi}{4}$.

453 Сравнить значения выражений:

1) $\sin 0{,}7$ и $\sin 4$; 2) $\cos 1{,}3$ и $\cos 2{,}3$.

454 Решить уравнение:

1) $\sin(5\pi + x) = 1$; 2) $\cos(x + 3\pi) = 0$;

3) $\cos\left(\frac{5}{2}\pi + x\right) = -1$; 4) $\sin\left(\frac{9}{2}\pi + x\right) = -1$.

455 В какой четверти находится точка, соответствующая числу α, если:

1) $\sin\alpha + \cos\alpha = -1{,}4$; 2) $\sin\alpha - \cos\alpha = 1{,}4$?

§ 25 Зависимость между синусом, косинусом и тангенсом одного и того же угла

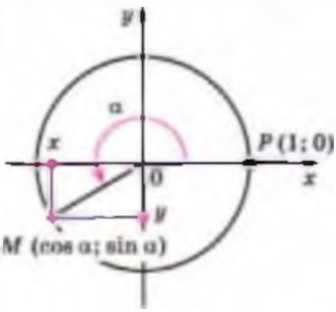


Рис. 63

Выясним *зависимость между синусом и косинусом*.

Пусть точка $M(x; y)$ единичной окружности получена поворотом точки $(1; 0)$ на угол α (рис. 63). Тогда по определению синуса и косинуса

$$x = \cos\alpha, \quad y = \sin\alpha.$$

Точка M принадлежит единичной окружности, поэтому её координаты $(x; y)$ удовлетворяют уравнению $x^2 + y^2 = 1$. Следовательно,

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1. \qquad (1)$$

Равенство (1) выполняется при любых значениях α и называется *основным тригонометрическим тождеством*.

Из равенства (1) можно выразить $\sin\alpha$ через $\cos\alpha$ и $\cos\alpha$ через $\sin\alpha$:

$$\sin\alpha = \pm\sqrt{1 - \cos^2\alpha}, \qquad (2)$$

$$\cos\alpha = \pm\sqrt{1 - \sin^2\alpha}. \qquad (3)$$

В этих формулах знак перед корнем определяется знаком выражения, стоящего в левой части формулы.

Задача 1 Вычислить $\sin\alpha$, если $\cos\alpha = -\frac{3}{5}$ и $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$.

▶ Воспользуемся формулой (2). Так как $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$, то $\sin\alpha < 0$, т. е. в формуле (2) перед корнем нужно поставить знак «−»:

$$\sin\alpha = -\sqrt{1-\cos^2\alpha} = -\sqrt{1-\frac{9}{25}} = -\frac{4}{5}. \ \triangleleft$$

Задача 2 Вычислить $\cos\alpha$, если $\sin\alpha = -\frac{1}{3}$ и $-\frac{\pi}{2} < \alpha < 0$.

▶ Так как $-\frac{\pi}{2} < \alpha < 0$, то $\cos\alpha > 0$, поэтому в формуле (3) перед корнем нужно поставить знак «+»:

$$\cos\alpha = \sqrt{1-\sin^2\alpha} = \sqrt{1-\frac{1}{9}} = \frac{2\sqrt{2}}{3}. \ \triangleleft$$

Выясним теперь ***зависимость между тангенсом и котангенсом***. По определению тангенса и котангенса $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$, $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$.

Перемножая почленно эти равенства, получаем

$$\operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{ctg}\alpha = 1. \qquad (4)$$

Из равенства (4) можно выразить $\operatorname{tg}\alpha$ через $\operatorname{ctg}\alpha$ и наоборот:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{\operatorname{ctg}\alpha}, \qquad (5)$$

$$\operatorname{ctg}\alpha = \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}. \qquad (6)$$

Равенства (4) — (6) справедливы при $\alpha \neq \frac{\pi}{2}k$, $k \in \boldsymbol{Z}$.

Задача 3 Вычислить $\operatorname{ctg}\alpha$, если $\operatorname{tg}\alpha = 13$.

▶ По формуле (6) находим $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha} = \frac{1}{13}$. $\triangleleft$

Задача 4 Вычислить $\operatorname{tg}\alpha$, если $\sin\alpha = 0{,}8$ и $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$.

▶ По формуле (3) находим $\cos\alpha$. Так как $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$, то $\cos\alpha < 0$. Поэтому

$$\cos\alpha = -\sqrt{1-\sin^2\alpha} = -\sqrt{1-0{,}64} = -0{,}6.$$

Следовательно, $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{0{,}8}{-0{,}6} = -\frac{4}{3}$. $\triangleleft$

Используя основное тригонометрическое тождество и определение тангенса, найдём *зависимость между тангенсом и косинусом.*

Разделим обе части равенства $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ на $\cos^2\alpha$, предполагая, что $\cos\alpha \neq 0$. Получим равенство $\frac{\cos^2\alpha + \sin^2\alpha}{\cos^2\alpha} = \frac{1}{\cos^2\alpha}$, откуда

$$1 + \operatorname{tg}^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}. \qquad (7)$$

Эта формула верна, если $\cos\alpha \neq 0$, т. е. при $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in Z$. Из неё можно выразить тангенс через косинус и косинус через тангенс.

Задача 5 Вычислить $\operatorname{tg}\alpha$, если $\cos\alpha = -\frac{3}{5}$ и $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$.

▶ Из формулы (7) получаем

$$\operatorname{tg}^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha} - 1 = \frac{1}{\left(-\frac{3}{5}\right)^2} - 1 = \frac{16}{9}.$$

Тангенс во второй четверти отрицателен, поэтому $\operatorname{tg}\alpha = -\frac{4}{3}$. ◁

Задача 6 Вычислить $\cos\alpha$, если $\operatorname{tg}\alpha = 3$ и $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$.

▶ Из формулы (7) находим

$$\cos^2\alpha = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2\alpha} = \frac{1}{10}.$$

Так как $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$, то $\cos\alpha < 0$, и поэтому $\cos\alpha = -\sqrt{0,1}$. ◁

Упражнения

456 Может ли синус (косинус) принимать значения:

$$0{,}03, \quad \frac{2}{3}, \quad \frac{5}{3}, \quad \frac{11}{13}, \quad -\frac{13}{11}, \quad \sqrt{2}?$$

457 Могут ли одновременно выполняться равенства:

1) $\sin\alpha = \frac{\sqrt{2}}{3}$ и $\cos\alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}$;

2) $\sin\alpha = -\frac{4}{5}$ и $\cos\alpha = -\frac{3}{5}$;

3) $\sin\alpha = -\frac{\sqrt{2}}{5}$ и $\cos\alpha = \frac{\sqrt{23}}{5}$;

4) $\sin\alpha = 0{,}2$ и $\cos\alpha = 0{,}8$?

458 Вычислить:

1) $\sin\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$ и $\operatorname{ctg}\alpha$, если $\cos\alpha = -\frac{3}{5}$ и $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$;

2) $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$ и $\operatorname{ctg}\alpha$, если $\sin\alpha = -\frac{2}{5}$ и $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$.

459 По значению одной из тригонометрических функций ($\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$, $\operatorname{ctg}\alpha$) найти значения остальных трёх:

1) $\cos\alpha = \frac{5}{13}$ и $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$;

2) $\sin\alpha = 0{,}8$ и $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$;

3) $\operatorname{tg}\alpha = \frac{15}{8}$ и $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$;

4) $\operatorname{ctg}\alpha = -3$ и $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$;

5) $\cos\alpha = 0{,}8$ и $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$;

6) $\sin\alpha = -\frac{5}{13}$ и $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$;

7) $\operatorname{tg}\alpha = -2{,}4$ и $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$;

8) $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{7}{24}$ и $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$.

460 Какие значения может принимать:

1) $\cos\alpha$, если $\sin\alpha = \frac{2\sqrt{3}}{5}$;

2) $\sin\alpha$, если $\cos\alpha = -\frac{1}{\sqrt{5}}$;

3) $\sin\alpha$, если $\cos\alpha = \frac{2}{3}$;

4) $\cos\alpha$, если $\sin\alpha = -\frac{1}{\sqrt{3}}$?

461 Могут ли одновременно выполняться равенства:

1) $\sin\alpha = \frac{1}{5}$ и $\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{\sqrt{24}}$;

2) $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{\sqrt{7}}{3}$ и $\cos\alpha = \frac{3}{4}$?

462 Пусть α — один из углов прямоугольного треугольника. Найти $\cos\alpha$ и $\operatorname{tg}\alpha$, если $\sin\alpha = \frac{2\sqrt{10}}{11}$.

463 Известно, что $\operatorname{tg}\alpha = 2$. Найти значение выражения:

1) $\frac{\operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{ctg}\alpha - \operatorname{tg}\alpha}$;

2) $\frac{\sin\alpha - \cos\alpha}{\sin\alpha + \cos\alpha}$;

3) $\frac{2\sin\alpha + 3\cos\alpha}{3\sin\alpha - 5\cos\alpha}$;

4) $\frac{\sin^2\alpha + 2\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha - \cos^2\alpha}$.

464 Известно, что $\sin\alpha + \cos\alpha = \frac{1}{2}$. Найти:

1) $\sin\alpha \cdot \cos\alpha$;

2) $\sin^3\alpha + \cos^3\alpha$.

§ 26 Тригонометрические тождества

Задача 1 Доказать, что при $\alpha \neq \pi k$, $k \in \mathbf{Z}$, справедливо равенство

$$1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha}. \qquad (1)$$

▶ По определению $\operatorname{ctg} \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$, и поэтому

$$1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha = 1 + \frac{\cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha} = \frac{\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha} = \frac{1}{\sin^2 \alpha}.$$

Эти преобразования верны, так как $\sin \alpha \neq 0$ при $\alpha \neq \pi k$, $k \in \mathbf{Z}$. ◁

Равенство (1), справедливое при всех допустимых значениях входящих в него букв (т. е. таких, при которых его левая и правая части имеют смысл), называют *тождеством*, а задачи на доказательство таких равенств называют задачами на доказательство тождеств.

Обычно при доказательстве тригонометрических тождеств или при упрощении выражений допустимые значения углов не устанавливают, если это не требуется в условии задачи.

Задача 2 Доказать тождество

$$\cos^2 \alpha = (1 - \sin \alpha)(1 + \sin \alpha).$$

▶ $(1 - \sin \alpha)(1 + \sin \alpha) = 1 - \sin^2 \alpha = \cos^2 \alpha$. ◁

Задача 3 Доказать тождество $\frac{\cos \alpha}{1 - \sin \alpha} = \frac{1 + \sin \alpha}{\cos \alpha}$.

▶ Чтобы доказать это тождество, покажем, что разность между его левой и правой частями равна нулю:

$$\frac{\cos \alpha}{1 - \sin \alpha} - \frac{1 + \sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\cos^2 \alpha - (1 - \sin^2 \alpha)}{\cos \alpha (1 - \sin \alpha)} =$$

$$= \frac{\cos^2 \alpha - \cos^2 \alpha}{\cos \alpha (1 - \sin \alpha)} = 0. \ ◁$$

При решении задач 1—3 использовались следующие *способы доказательства тождеств*: преобразование левой части к правой; преобразование правой части к левой; установление того, что разность между левой и правой частями равна нулю. Иногда удобно доказательство тождества провести преобразованием его левой и правой частей к одному и тому же выражению.

Задача 4 Доказать тождество $\frac{1-\operatorname{tg}^2\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\alpha}=\cos^4\alpha-\sin^4\alpha$.

$$\frac{1-\operatorname{tg}^2\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\alpha}=\frac{1-\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}}{1+\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}}=\frac{\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha+\sin^2\alpha}=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha,$$

$\cos^4\alpha-\sin^4\alpha=(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha)(\cos^2\alpha+\sin^2\alpha)=$
$=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha$.

Тождество доказано, так как его левая и правая части равны $\cos^2\alpha-\sin^2\alpha$. ◁

Задача 5 Упростить выражение $\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{ctg}\alpha}$.

$$\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{ctg}\alpha}=\frac{1}{\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}+\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}}=\frac{\sin\alpha\cos\alpha}{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}=$$

$=\sin\alpha\cos\alpha$. ◁

Упражнения

465 Доказать тождество:

1) $(1-\cos\alpha)(1+\cos\alpha)=\sin^2\alpha$;
2) $(1-\sin\alpha)(1+\sin\alpha)=\cos^2\alpha$;
3) $\frac{\sin^2\alpha}{1-\sin^2\alpha}=\operatorname{tg}^2\alpha$;
4) $\frac{\cos^2\alpha}{1-\cos^2\alpha}=\operatorname{ctg}^2\alpha$;
5) $\frac{1}{1+\operatorname{tg}^2\alpha}+\sin^2\alpha=1$;
6) $\frac{1}{1+\operatorname{ctg}^2\alpha}+\cos^2\alpha=1$.

466 Упростить выражение:

1) $\cos\alpha\cdot\operatorname{tg}\alpha-2\sin\alpha$;
2) $\cos\alpha-\sin\alpha\cdot\operatorname{ctg}\alpha$;
3) $\frac{\sin^2\alpha}{1+\cos\alpha}$;
4) $\frac{\cos^2\alpha}{1-\sin\alpha}$.

467 Упростить выражение и найти его значение:

1) $\frac{\sin^2\alpha - 1}{1-\cos^2\alpha}$ при $\alpha = \frac{\pi}{4}$;

2) $\cos^2\alpha + \operatorname{ctg}^2\alpha + \sin^2\alpha$ при $\alpha = \frac{\pi}{6}$;

3) $\frac{1}{\cos^2\alpha} - 1$ при $\alpha = \frac{\pi}{3}$;

4) $\cos^2\alpha + \operatorname{tg}^2\alpha\operatorname{ctg}^2\alpha + \sin^2\alpha$ при $\alpha = \frac{\pi}{3}$.

468 Доказать тождество:

1) $(1 - \sin^2\alpha)(1 + \operatorname{tg}^2\alpha) = 1$;

2) $\sin^2\alpha(1 + \operatorname{ctg}^2\alpha) - \cos^2\alpha = \sin^2\alpha$.

469 Упростить выражение:

1) $(1 + \operatorname{tg}^2\alpha)\cos^2\alpha - 1$;
2) $1 - \sin^2\alpha(1 + \operatorname{ctg}^2\alpha)$;

3) $1 + \operatorname{tg}^2\alpha + \frac{1}{\sin^2\alpha}$;
4) $\frac{1+\operatorname{tg}^2\alpha}{1+\operatorname{ctg}^2\alpha}$.

470 Доказать тождество:

1) $(1 - \cos 2\alpha)(1 + \cos 2\alpha) = \sin^2 2\alpha$;

2) $\frac{\sin\alpha - 1}{\cos^2\alpha} = -\frac{1}{1+\sin\alpha}$;

3) $\cos^4\alpha - \sin^4\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$;

4) $(\sin^2\alpha - \cos^2\alpha)^2 + 2\cos^2\alpha\sin^2\alpha = \sin^4\alpha + \cos^4\alpha$;

5) $\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha} + \frac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{2}{\sin\alpha}$;

6) $\frac{\sin\alpha}{1-\cos\alpha} = \frac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha}$;

7) $\frac{1}{1+\operatorname{tg}^2\alpha} + \frac{1}{1+\operatorname{ctg}^2\alpha} = 1$;

8) $\operatorname{tg}^2\alpha - \sin^2\alpha = \operatorname{tg}^2\alpha\sin^2\alpha$.

471 Найти значение выражения $\sin\alpha\cos\alpha$, если $\sin\alpha - \cos\alpha = 0{,}6$.

472 Найти значение выражения $\cos^3\alpha - \sin^3\alpha$, если $\cos\alpha - \sin\alpha = 0{,}2$.

473 Известно, что $\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{ctg}\alpha = 3$. Найти $\operatorname{tg}^2\alpha + \operatorname{ctg}^2\alpha$.

474 Решить уравнение:

1) $2\sin x + \sin^2 x + \cos^2 x = 1$;

2) $2\sin^2 x + 3\cos^2 x - 2 = 0$;

3) $3\cos^2 x - 2\sin x = 3 - 3\sin^2 x$;

4) $\cos^2 x - \sin^2 x = 2\sin x - 1 - 2\sin^2 x$.

§ 27 Синус, косинус и тангенс углов α и $-\alpha$

Пусть точки M_1 и M_2 единичной окружности получены поворотом точки P (1; 0) на углы α и $-\alpha$ соответственно (рис. 64). Тогда ось Ox делит угол M_1OM_2 пополам, и поэтому точки M_1 и M_2 симметричны относительно оси Ox.

Абсциссы этих точек совпадают, а ординаты отличаются только знаками. Точка M_1 имеет координаты ($\cos\alpha$; $\sin\alpha$), точка M_2 имеет координаты ($\cos(-\alpha)$; $\sin(-\alpha)$). Следовательно,

$$\sin(-\alpha) = -\sin\alpha, \qquad (1)$$

$$\cos(-\alpha) = \cos\alpha. \qquad (2)$$

Используя определение тангенса, получаем

$$\operatorname{tg}(-\alpha) = \frac{\sin(-\alpha)}{\cos(-\alpha)} = \frac{-\sin\alpha}{\cos\alpha} = -\operatorname{tg}\alpha.$$

Таким образом,

$$\operatorname{tg}(-\alpha) = -\operatorname{tg}\alpha. \qquad (3)$$

Формулы (1) — (2) справедливы при любых α, а формула (3) — при $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in \mathbf{Z}$.

Можно показать, что если $\alpha \neq \pi k$, $k \in \mathbf{Z}$, то

$$\operatorname{ctg}(-\alpha) = -\operatorname{ctg}\alpha.$$

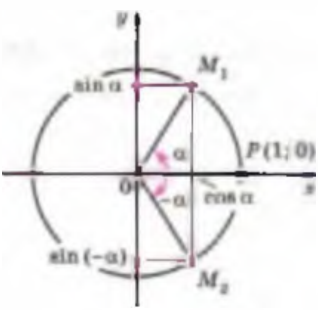


Рис. 64

Формулы (1) — (3) позволяют сводить вычисление значений синуса, косинуса и тангенса отрицательных углов к вычислению их значений для положительных углов. Например,

$$\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) = -\sin\frac{\pi}{6} = -\frac{1}{2},$$

$$\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{3}\right) = -\operatorname{tg}\frac{\pi}{3} = -\sqrt{3}.$$

Упражнения

475 Вычислить:

1) $\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)+\mathrm{tg}\left(-\frac{\pi}{4}\right)$; 2) $\dfrac{1+\mathrm{tg}^2\left(-\frac{\pi}{6}\right)}{1+\mathrm{ctg}^2\left(-\frac{\pi}{6}\right)}$;

3) $2\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)+\mathrm{tg}\left(-\frac{\pi}{3}\right)+\sin^2\left(-\frac{\pi}{4}\right)$;

4) $\cos(-\pi)+\mathrm{ctg}\left(-\frac{\pi}{2}\right)-\sin\left(-\frac{3}{2}\pi\right)+\mathrm{ctg}\left(-\frac{\pi}{4}\right)$;

5) $\dfrac{3-\sin^2\left(-\frac{\pi}{3}\right)-\cos^2\left(-\frac{\pi}{3}\right)}{2\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)}$;

6) $2\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)+3+7{,}5\,\mathrm{tg}(-\pi)+\frac{1}{8}\cos\frac{3}{2}\pi$.

476 Упростить выражение:

1) $\mathrm{tg}(-\alpha)\cos\alpha+\sin\alpha$; 2) $\cos\alpha-\mathrm{ctg}\,\alpha\,(-\sin\alpha)$;

3) $\dfrac{\cos(-\alpha)+\sin(-\alpha)}{\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}$;

4) $\mathrm{tg}(-\alpha)\,\mathrm{ctg}(-\alpha)+\cos^2(-\alpha)+\sin^2\alpha$.

477 Вычислить:

1) $\dfrac{2-\sin^2\left(-\frac{\pi}{6}\right)+\cos^2\left(-\frac{\pi}{3}\right)}{2\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)+\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)}$;

2) $\sqrt{3}\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)-2\,\mathrm{ctg}\left(-\frac{\pi}{4}\right)+4\cos\left(-\frac{3}{2}\pi\right)$.

478 Упростить выражение:

1) $\dfrac{\sin^3(-\alpha)+\cos^3(-\alpha)}{1-\sin(-\alpha)\cos(-\alpha)}$; 2) $\dfrac{1-(\sin\alpha+\cos(-\alpha))^2}{-\sin(-\alpha)}$.

479 Доказать тождество:

1) $\cos\alpha\sin(6\pi-\alpha)\cdot(1+\mathrm{ctg}^2(-\alpha))=\mathrm{ctg}(-\alpha)$;

2) $\dfrac{1-\sin^2(-\alpha)}{\cos(4\pi-\alpha)}\cdot\dfrac{\sin(\alpha-2\pi)}{1-\cos^2(-\alpha)}=\mathrm{ctg}\,\alpha$.

480 Решить уравнение:

1) $\sin(-x)=1$; 2) $\cos(-2x)=0$;

3) $\cos(-2x)=1$; 4) $\sin(-2x)=0$;

5) $\cos^2(-x)+\sin(-x)=2-\sin^2 x$;

6) $1-\sin^2(-x)+\cos(4\pi-x)=\cos(x-2\pi)$.

§ 28 Формулы сложения

Формулами сложения называют формулы, выражающие $\cos(\alpha \pm \beta)$ и $\sin(\alpha \pm \beta)$ через синусы и косинусы углов α и β.

Теорема. Для любых α и β справедливо равенство

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta. \qquad (1)$$

● Пусть точки M_α, $M_{-\beta}$ и $M_{\alpha+\beta}$ получены поворотом точки $M_0(1; 0)$ на углы α, $-\beta$ и $\alpha + \beta$ рад соответственно (рис. 65).

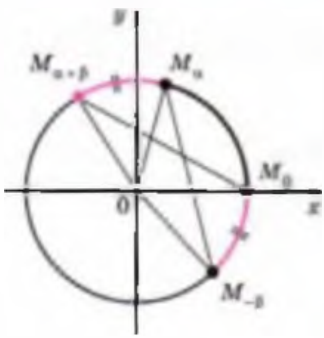


Рис. 65

По определению синуса и косинуса эти точки имеют следующие координаты:

$$M_\alpha(\cos\alpha; \sin\alpha),$$
$$M_{-\beta}(\cos(-\beta); \sin(-\beta)),$$
$$M_{\alpha+\beta}(\cos(\alpha+\beta); \sin(\alpha+\beta)).$$

Так как $\angle M_0OM_{\alpha+\beta} = \angle M_{-\beta}OM_\alpha$, то равнобедренные треугольники $M_0OM_{\alpha+\beta}$ и $M_{-\beta}OM_\alpha$ равны и, значит, равны их основания $M_0M_{\alpha+\beta}$ и $M_{-\beta}M_\alpha$. Следовательно, $(M_0M_{\alpha+\beta})^2 = (M_{-\beta}M_\alpha)^2$.

Используя формулу расстояния между двумя точками, получаем

$$(1 - \cos(\alpha+\beta))^2 + (-\sin(\alpha+\beta))^2 =$$
$$= (\cos(-\beta) - \cos\alpha)^2 + (\sin(-\beta) - \sin\alpha)^2.$$

Преобразуем это равенство, используя формулы (1) и (2) из § 27:

$$1 - 2\cos(\alpha+\beta) + \cos^2(\alpha+\beta) + \sin^2(\alpha+\beta) =$$
$$= \cos^2\beta - 2\cos\beta\cos\alpha + \cos^2\alpha + \sin^2\beta +$$
$$+ 2\sin\beta\sin\alpha + \sin^2\alpha.$$

Используя основное тригонометрическое тождество, получаем

$2 - 2\cos(\alpha+\beta) = 2 - 2\cos\alpha\cos\beta + 2\sin\alpha\sin\beta$, откуда $\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$. ○

Задача 1 Вычислить $\cos 75°$.

▶ По формуле (1) находим
$\cos 75° = \cos(45° + 30°) = \cos 45° \cos 30° -$
$- \sin 45° \sin 30° = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$. ◁

Заменив в формуле (1) β на $-\beta$, получим

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha \cos(-\beta) - \sin\alpha \sin(-\beta),$$

откуда

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha \cos\beta + \sin\alpha \sin\beta. \qquad (2)$$

Задача 2 Вычислить $\cos 15°$.

▶ По формуле (2) получаем
$\cos 15° = \cos(45° - 30°) = \cos 45° \cos 30° +$
$+ \sin 45° \sin 30° = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$. ◁

Задача 3 Доказать формулы

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin\alpha, \quad \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos\alpha. \qquad (3)$$

▶ При $\alpha = \frac{\pi}{2}$ по формуле (2) получаем

$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right) = \cos\frac{\pi}{2} \cos\beta + \sin\frac{\pi}{2} \sin\beta = \sin\beta$, т. е.

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right) = \sin\beta. \qquad (4)$$

Заменив в этой формуле β на α, получим $\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin\alpha$. Полагая в формуле (4) $\beta = \frac{\pi}{2} - \alpha$, имеем $\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos\alpha$. ◁

Используя формулы (1) — (4), выведем формулы сложения для синуса:

$$\sin(\alpha + \beta) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - (\alpha + \beta)\right) = \cos\left(\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) - \beta\right) =$$

$$= \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) \cos\beta + \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) \sin\beta =$$

$$= \sin\alpha \cos\beta + \cos\alpha \sin\beta.$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha \cos\beta + \cos\alpha \sin\beta. \qquad (5)$$

Заменяя в формуле (5) β на $-\beta$, получаем

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha \cos(-\beta) + \cos\alpha \sin(-\beta).$$

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha \cos\beta - \cos\alpha \sin\beta. \qquad (6)$$

Задача 4 Вычислить $\sin 210^\circ$.

▶ $\sin 210^\circ = \sin(180^\circ + 30^\circ) = \sin 180^\circ \cos 30^\circ + \cos 180^\circ \sin 30^\circ = 0 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + (-1)\cdot\frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$. ◁

Задача 5 Вычислить $\sin\frac{8\pi}{7}\cos\frac{\pi}{7} - \sin\frac{\pi}{7}\cos\frac{8\pi}{7}$.

▶ $\sin\frac{8\pi}{7}\cos\frac{\pi}{7} - \sin\frac{\pi}{7}\cos\frac{8\pi}{7} = \sin\left(\frac{8\pi}{7} - \frac{\pi}{7}\right) = \sin\pi = 0$. ◁

Задача 6* Доказать равенство

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{1 - \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}. \qquad (7)$$

▶ $\operatorname{tg}(\alpha+\beta) = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)} = \frac{\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta}$.

Разделив числитель и знаменатель последней дроби на произведение $\cos\alpha\cos\beta$, получим формулу (7). ◁

Формула (7) может быть полезна при вычислениях. Например, по этой формуле находим

$\operatorname{tg} 225^\circ = \operatorname{tg}(180^\circ + 45^\circ) = \frac{\operatorname{tg}180^\circ + \operatorname{tg}45^\circ}{1 - \operatorname{tg}180^\circ\operatorname{tg}45^\circ} = 1$.

Упражнения

481 С помощью формул сложения вычислить:

1) $\cos 135^\circ$; 2) $\cos 120^\circ$; 3) $\cos 150^\circ$; 4) $\cos 240^\circ$.

482 Вычислить, не пользуясь таблицами:

1) $\cos 57^\circ30' \cos 27^\circ30' + \sin 57^\circ30' \sin 27^\circ30'$;
2) $\cos 19^\circ30' \cos 25^\circ30' - \sin 19^\circ30' \sin 25^\circ30'$;
3) $\cos\frac{7\pi}{9}\cos\frac{11\pi}{9} - \sin\frac{7\pi}{9}\sin\frac{11\pi}{9}$;
4) $\cos\frac{8\pi}{7}\cos\frac{\pi}{7} + \sin\frac{8\pi}{7}\sin\frac{\pi}{7}$.

483 Вычислить:

1) $\cos\left(\frac{\pi}{3}+\alpha\right)$, если $\sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}$ и $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$;
2) $\cos\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right)$, если $\cos\alpha = -\frac{1}{3}$ и $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$.

484 Упростить выражение:

1) $\cos 3\alpha \cos\alpha - \sin\alpha \sin 3\alpha$;
2) $\cos 5\beta \cos 2\beta + \sin 5\beta \sin 2\beta$;

3) $\cos\left(\frac{\pi}{7}+\alpha\right)\cos\left(\frac{5\pi}{14}-\alpha\right)-\sin\left(\frac{\pi}{7}+\alpha\right)\sin\left(\frac{5\pi}{14}-\alpha\right)$;

4) $\cos\left(\frac{7\pi}{5}+\alpha\right)\cos\left(\frac{2\pi}{5}+\alpha\right)+\sin\left(\frac{7\pi}{5}+\alpha\right)\sin\left(\frac{2\pi}{5}+\alpha\right)$.

485 Найти значение выражения:

1) $\sin 73^\circ \cos 17^\circ + \cos 73^\circ \sin 17^\circ$;

2) $\sin 73^\circ \cos 13^\circ - \cos 73^\circ \sin 13^\circ$;

3) $\sin\frac{5\pi}{12}\cos\frac{\pi}{12}+\sin\frac{\pi}{12}\cos\frac{5\pi}{12}$;

4) $\sin\frac{7\pi}{12}\cos\frac{\pi}{12}-\sin\frac{\pi}{12}\cos\frac{7\pi}{12}$.

486 Вычислить:

1) $\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)$, если $\cos\alpha=-\frac{3}{5}$ и $\pi<\alpha<\frac{3\pi}{2}$;

2) $\sin\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)$, если $\sin\alpha=\frac{\sqrt{2}}{3}$ и $\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$.

487 Упростить выражение:

1) $\sin(\alpha+\beta)+\sin(-\alpha)\cos(-\beta)$;

2) $\cos(-\alpha)\sin(-\beta)-\sin(\alpha-\beta)$;

3) $\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\sin\left(\frac{\pi}{2}-\beta\right)-\sin(\alpha-\beta)$;

4) $\sin(\alpha+\beta)+\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\sin(-\beta)$.

488 Вычислить $\cos(\alpha+\beta)$ и $\cos(\alpha-\beta)$, если $\sin\alpha=-\frac{3}{5}$, $\frac{3}{2}\pi<\alpha<2\pi$, и $\sin\beta=\frac{8}{17}$, $0<\beta<\frac{\pi}{2}$.

489 Вычислить $\sin(\alpha-\beta)$, если $\cos\alpha=-0{,}8$, $\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$, и $\sin\beta=-\frac{12}{13}$, $\pi<\beta<\frac{3\pi}{2}$.

490 Вычислить $\operatorname{tg}(\alpha+\beta)$, если $\sin\alpha=\frac{4}{5}$, $\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$, и $\cos\beta=\frac{8}{17}$, $\frac{3}{2}\pi<\beta<2\pi$.

491 Упростить выражение:

1) $\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)$;

2) $\cos\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)+\frac{1}{2}\sin^2\alpha$;

3) $\cos 3\alpha+\sin\alpha\sin 2\alpha$;

4) $\cos 2\alpha-\cos\alpha\cos 3\alpha$.

492 Доказать тождество:

1) $\dfrac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin(\alpha-\beta)}=\dfrac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta}$;

2) $\dfrac{\cos(\alpha-\beta)}{\cos(\alpha+\beta)}=\dfrac{\operatorname{ctg}\alpha\cdot\operatorname{ctg}\beta+1}{\operatorname{ctg}\alpha\cdot\operatorname{ctg}\beta-1}$;

3) $\cos\left(\dfrac{\pi}{4}+\alpha\right)=\dfrac{\sqrt{2}}{2}(\cos\alpha-\sin\alpha)$;

4) $\dfrac{\cos(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\sin\beta}=\operatorname{ctg}\beta-\operatorname{tg}\alpha$;

5) $\cos\alpha\cos\beta=\dfrac{1}{2}(\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta))$;

6) $\sin\alpha\sin\beta=\dfrac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta))$.

493 Вычислить:

1) $\dfrac{\operatorname{tg}29^\circ+\operatorname{tg}31^\circ}{1-\operatorname{tg}29^\circ\operatorname{tg}31^\circ}$;

2) $\dfrac{\operatorname{tg}\dfrac{7\pi}{16}-\operatorname{tg}\dfrac{3\pi}{16}}{1+\operatorname{tg}\dfrac{7\pi}{16}\operatorname{tg}\dfrac{3\pi}{16}}$;

3) $\dfrac{1+\operatorname{tg}10^\circ\operatorname{tg}55^\circ}{\operatorname{tg}55^\circ-\operatorname{tg}10^\circ}$;

4) $\dfrac{1-\operatorname{tg}13^\circ\operatorname{tg}17^\circ}{\operatorname{tg}17^\circ+\operatorname{tg}13^\circ}$.

494 Вычислить:

1) $\operatorname{tg}(\alpha+\beta)$, если $\operatorname{tg}\alpha=-\dfrac{3}{4}$ и $\operatorname{tg}\beta=2{,}4$;

2) $\operatorname{ctg}(\alpha-\beta)$, если $\operatorname{ctg}\alpha=\dfrac{4}{3}$ и $\operatorname{ctg}\beta=-1$.

495 Упростить выражение $\dfrac{\sin\left(\dfrac{\pi}{6}+\alpha\right)-\cos\left(\dfrac{\pi}{3}+\alpha\right)}{\sin\left(\dfrac{\pi}{6}+\alpha\right)+\cos\left(\dfrac{\pi}{3}+\alpha\right)}$.

496 Упростить выражение:

1) $\sin\alpha\cos2\alpha+\sin2\alpha\cos\alpha$;

2) $\sin5\beta\cos3\beta-\sin3\beta\cos5\beta$.

497 Решить уравнение:

1) $\cos6x\cos5x+\sin6x\sin5x=-1$;

2) $\sin3x\cos5x-\sin5x\cos3x=-1$;

3) $\sqrt{2}\cos\left(\dfrac{\pi}{4}+x\right)-\cos x=1$;

4) $\sqrt{2}\sin\left(\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{x}{2}\right)+\sin\dfrac{x}{2}=1$.

§ 29

Синус, косинус и тангенс двойного угла

Выведем формулы синуса и косинуса двойного угла, используя формулы сложения.

1. $\sin 2\alpha = \sin(\alpha + \alpha) = \sin\alpha\cos\alpha + \sin\alpha\cos\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$. Итак,

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha. \qquad (1)$$

Задача 1 Вычислить $\sin 2\alpha$, если $\sin\alpha = -0{,}6$ и $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$.

▶ По формуле (1) находим
$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha = 2\cdot(-0{,}6)\cdot\cos\alpha = -1{,}2\cos\alpha$.
Так как $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$, то $\cos\alpha < 0$, и поэтому

$$\cos\alpha = -\sqrt{1-\sin^2\alpha} = -\sqrt{1-0{,}36} = -0{,}8.$$

Следовательно, $\sin 2\alpha = -1{,}2\cdot(-0{,}8) = 0{,}96$. ◁

2. $\cos 2\alpha = \cos(\alpha + \alpha) = \cos\alpha\cos\alpha - \sin\alpha\sin\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$. Итак,

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha. \qquad (2)$$

Задача 2 Вычислить $\cos 2\alpha$, если $\cos\alpha = 0{,}3$.

▶ Используя формулу (2) и основное тригонометрическое тождество, получаем
$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = \cos^2\alpha - (1-\cos^2\alpha) = 2\cos^2\alpha - 1 = 2\cdot(0{,}3)^2 - 1 = -0{,}82$. ◁

Задача 3 Упростить выражение $\dfrac{\sin\alpha\cos\alpha}{1-2\sin^2\alpha}$.

▶ $$\frac{\sin\alpha\cos\alpha}{1-2\sin^2\alpha} = \frac{2\sin\alpha\cos\alpha}{2(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha-2\sin^2\alpha)} = \frac{\sin 2\alpha}{2(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha)} = \frac{\sin 2\alpha}{2\cos 2\alpha} = \frac{1}{2}\operatorname{tg} 2\alpha.$$ ◁

Задача 4 Вычислить $\operatorname{tg} 2\alpha$, если $\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{2}$.

▶ Полагая в формуле $\operatorname{tg}(\alpha+\beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{1 - \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta}$ (см. § 28) $\beta = \alpha$, получаем

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2 \operatorname{tg}\alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}. \qquad (3)$$

Если $\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{2}$, то по формуле (3) находим

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2 \cdot \frac{1}{2}}{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{4}{3}. \ \triangleleft$$

Задача 5* Вычислить $\sin 3\alpha$, если $\sin \alpha = \frac{1}{4}$.

▶ $\sin 3\alpha = \sin(\alpha + 2\alpha) = \sin\alpha \cos 2\alpha + \cos\alpha \sin 2\alpha =$
$= \sin\alpha (\cos^2\alpha - \sin^2\alpha) + \cos\alpha \, 2\sin\alpha\cos\alpha =$
$= \sin\alpha\cos^2\alpha - \sin^3\alpha + 2\sin\alpha\cos^2\alpha =$
$= 3\sin\alpha\cos^2\alpha - \sin^3\alpha = 3\sin\alpha(1 - \sin^2\alpha) -$
$- \sin^3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha = \sin\alpha(3 - 4\sin^2\alpha)$.

При $\sin\alpha = \frac{1}{4}$ получаем $\sin 3\alpha = \frac{1}{4}\left(3 - \frac{1}{4}\right) = \frac{11}{16}$. $\triangleleft$

Упражнения

Выразить синус, косинус или тангенс, используя формулы двойного угла (498—499).

498 1) $\sin 48°$; 2) $\cos 164°$; 3) $\operatorname{tg} 92°$; 4) $\sin \frac{4\pi}{3}$; 5) $\cos \frac{5\pi}{3}$.

499 1) $\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)$; 2) $\sin\left(\frac{\pi}{4}+\beta\right)$; 3) $\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$;

4) $\cos\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)$; 5) $\sin\alpha$; 6) $\cos\alpha$.

Вычислить, не используя калькулятор (500—502).

500 1) $2\sin 15° \cdot \cos 15°$; 2) $\cos^2 15° - \sin^2 15°$;

3) $\frac{2\operatorname{tg} 15°}{1 - \operatorname{tg}^2 15°}$; 4) $(\cos 75° - \sin 75°)^2$.

501 1) $2\sin\frac{\pi}{8}\cos\frac{\pi}{8}$; 2) $\cos^2\frac{\pi}{8} - \sin^2\frac{\pi}{8}$;

3) $\frac{2\operatorname{tg}\frac{\pi}{8}}{1 - \operatorname{tg}^2\frac{\pi}{8}}$; 4) $\frac{\sqrt{2}}{2} - \left(\cos\frac{\pi}{8} + \sin\frac{\pi}{8}\right)^2$.

502 1) $2\sin 75^\circ \cdot \cos 75^\circ$; 2) $\cos^2 75^\circ - \sin^2 75^\circ$;

3) $\dfrac{6\,\mathrm{tg}\,75^\circ}{1-\mathrm{tg}^2\,75^\circ}$; 4) $\dfrac{\mathrm{tg}^2\,22^\circ 30' - 1}{\mathrm{tg}\,22^\circ 30'}$.

503 Вычислить $\sin 2\alpha$, если:

1) $\sin\alpha = \frac{3}{5}$ и $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$; 2) $\cos\alpha = -\frac{4}{5}$ и $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$.

504 Вычислить $\cos 2\alpha$, если:

1) $\cos\alpha = \frac{4}{5}$; 2) $\sin\alpha = -\frac{3}{5}$.

505 Вычислить $\mathrm{tg}\,2\alpha$, если $\mathrm{tg}\,\alpha = 0{,}5$.

Упростить выражение (506—507).

506 1) $2\cos 40^\circ \cdot \cos 50^\circ$; 2) $2\sin 25^\circ \cdot \sin 65^\circ$;

3) $\sin 2\alpha + (\sin\alpha - \cos\alpha)^2$; 4) $\cos 4\alpha + \sin^2 2\alpha$.

507 1) $\dfrac{\sin 2\alpha}{(\sin\alpha + \cos\alpha)^2 - 1}$; 2) $\dfrac{1+\cos 2\alpha}{1-\cos 2\alpha}$.

508 Доказать тождество:

1) $\sin 2\alpha = (\sin\alpha + \cos\alpha)^2 - 1$;

2) $(\sin\alpha - \cos\alpha)^2 = 1 - \sin 2\alpha$;

3) $\cos^4\alpha - \sin^4\alpha = \cos 2\alpha$; 4) $2\cos^2\alpha - \cos 2\alpha = 1$.

509 Вычислить $\sin 2\alpha$, если:

1) $\sin\alpha + \cos\alpha = \frac{1}{2}$; 2) $\sin\alpha - \cos\alpha = -\frac{1}{3}$.

510 Доказать тождество:

1) $\dfrac{\cos 2\alpha}{\sin\alpha\cos\alpha + \sin^2\alpha} = \mathrm{ctg}\,\alpha - 1$; 2) $\dfrac{\sin 2\alpha - 2\cos\alpha}{\sin\alpha - \sin^2\alpha} = -2\,\mathrm{ctg}\,\alpha$;

3) $\mathrm{tg}\,\alpha\,(1+\cos 2\alpha) = \sin 2\alpha$; 4) $\dfrac{1-\cos 2\alpha + \sin 2\alpha}{1+\cos 2\alpha + \sin 2\alpha} \cdot \mathrm{ctg}\,\alpha = 1$;

5) $\dfrac{(1-2\cos^2\alpha)(2\sin^2\alpha - 1)}{4\sin^2\alpha\cos^2\alpha} = \mathrm{ctg}^2\,2\alpha$;

6) $1 - 2\sin^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right) = \sin\alpha$; 7) $\dfrac{\sin\alpha + \sin 2\alpha}{1+\cos\alpha+\cos 2\alpha} = \mathrm{tg}\,\alpha$.

511 Доказать тождество

$$\frac{\sin^2\alpha}{\cos\alpha\,(1+\mathrm{ctg}\,\alpha)} - \frac{\cos^2\alpha}{\sin\alpha\,(1+\mathrm{tg}\,\alpha)} = \frac{2\sqrt{2}\sin\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right)}{\sin 2\alpha}.$$

512 Решить уравнение:

1) $\sin 2x - 2\cos x = 0$; 2) $\cos 2x + \sin^2 x = 1$;

3) $4\cos x = \sin 2x$; 4) $\sin^2 x = -\cos 2x$;

5) $\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} + \frac{1}{2} = 0$; 6) $\cos^2\frac{x}{2} = \sin^2\frac{x}{2}$.

§ 30* Синус, косинус и тангенс половинного угла

По известным значениям $\sin \alpha$ и $\cos \alpha$ можно найти значения $\sin \frac{\alpha}{2}$, $\cos \frac{\alpha}{2}$ и $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$, если известно, в какой четверти лежит угол α.

Из формулы $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$ при $x = \frac{\alpha}{2}$ получаем

$$\cos \alpha = \cos^2 \frac{\alpha}{2} - \sin^2 \frac{\alpha}{2}. \qquad (1)$$

Запишем основное тригонометрическое тождество в виде

$$1 = \cos^2 \frac{\alpha}{2} + \sin^2 \frac{\alpha}{2}. \qquad (2)$$

Складывая равенства (1) и (2) и вычитая из равенства (2) равенство (1), получаем

$$1 + \cos \alpha = 2\cos^2 \frac{\alpha}{2}, \qquad (3)$$

$$1 - \cos \alpha = 2\sin^2 \frac{\alpha}{2}. \qquad (4)$$

Формулы (3) и (4) можно записать так:

$$\cos^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 + \cos \alpha}{2}, \qquad (5)$$

$$\sin^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \cos \alpha}{2}. \qquad (6)$$

Формулы (5) и (6) называют формулами синуса и косинуса половинного угла. Иногда их называют также формулами понижения степени.

Если известен $\cos \alpha$, то из формул (5) и (6) можно найти $\left|\sin \frac{\alpha}{2}\right|$ и $\left|\cos \frac{\alpha}{2}\right|$. Знаки $\sin \frac{\alpha}{2}$ и $\cos \frac{\alpha}{2}$ могут быть определены, если известно, в какой четверти лежит угол $\frac{\alpha}{2}$.

Задача 1 Вычислить $\cos\frac{\alpha}{2}$, если $\cos\alpha = -0{,}02$ и $0 < \alpha < \pi$.

▶ По формуле (5) $\cos^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1+\cos\alpha}{2} = \frac{1-0{,}02}{2} = 0{,}49$.

Так как $0 < \alpha < \pi$, то $0 < \frac{\alpha}{2} < \frac{\pi}{2}$, и поэтому $\cos\frac{\alpha}{2} > 0$. Следовательно, $\cos\frac{\alpha}{2} = \sqrt{0{,}49} = 0{,}7$. ◁

Разделив равенство (6) на равенство (5), получим формулу тангенса половинного угла

$$\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}. \tag{7}$$

Задача 2 Вычислить $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$, если $\cos\alpha = 0{,}8$ и $\pi < \alpha < 2\pi$.

▶ По формуле (7) имеем

$$\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha} = \frac{1-0{,}8}{1+0{,}8} = \frac{0{,}2}{1{,}8} = \frac{1}{9}.$$

По условию $\pi < \alpha < 2\pi$, поэтому $\frac{\pi}{2} < \frac{\alpha}{2} < \pi$ и $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} < 0$.

Следовательно, $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = -\sqrt{\frac{1}{9}} = -\frac{1}{3}$. ◁

Задача 3 Упростить выражение $\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}\cdot\operatorname{ctg}^2\frac{\alpha}{2} - \frac{1+\cos\alpha}{2}$.

▶ $$\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}\cdot\operatorname{ctg}^2\frac{\alpha}{2} - \frac{1+\cos\alpha}{2} = \frac{2\sin^2\frac{\alpha}{2}}{2\cos^2\frac{\alpha}{2}}\operatorname{ctg}^2\frac{\alpha}{2} - \cos^2\frac{\alpha}{2} =$$

$$= \operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}\cdot\operatorname{ctg}^2\frac{\alpha}{2} - \cos^2\frac{\alpha}{2} = 1 - \cos^2\frac{\alpha}{2} = \sin^2\frac{\alpha}{2}.$$ ◁

Задача 4 Решить уравнение $1 + \cos 2x = 2\cos x$.

▶ Так как $1 + \cos 2x = 2\cos^2 x$, то данное уравнение примет вид $2\cos^2 x = 2\cos x$, откуда

$$\cos x\,(\cos x - 1) = 0.$$

1) $\cos x = 0$, $x = \frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$.

2) $\cos x = 1$, $x = 2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

Итак, исходное уравнение имеет две серии корней $x = \frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$, и $x = 2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$. В ответе можно записывать обе серии с одной буквой (k или n).

Ответ $x = \frac{\pi}{2} + \pi k$, $x = 2\pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$. ◁

Задача 5 Выразить $\sin\alpha$, $\cos\alpha$ и $\operatorname{tg}\alpha$ через $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$.

▶ 1) $\sin\alpha = \sin\left(2\cdot\frac{\alpha}{2}\right) = 2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2} =$

$$= \frac{2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}{1} = \frac{2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}{\sin^2\frac{\alpha}{2}+\cos^2\frac{\alpha}{2}} = \frac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}.$$

Итак,

$$\sin\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}. \qquad (8)$$

2) $\cos\alpha = \cos\left(2\cdot\frac{\alpha}{2}\right) = \cos^2\frac{\alpha}{2} - \sin^2\frac{\alpha}{2} =$

$$= \frac{\cos^2\frac{\alpha}{2}-\sin^2\frac{\alpha}{2}}{1} = \frac{\cos^2\frac{\alpha}{2}-\sin^2\frac{\alpha}{2}}{\cos^2\frac{\alpha}{2}+\sin^2\frac{\alpha}{2}} = \frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}.$$

Итак,

$$\cos\alpha = \frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}. \qquad (9)$$

3) $\operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg}\left(2\cdot\frac{\alpha}{2}\right) = \dfrac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}.$

Итак,

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}. \qquad (10)$$

Эту формулу можно также получить почленным делением равенств (8) и (9). ◁

Итак, по формулам (8) — (10) можно находить синус, косинус и тангенс угла α, зная тангенс угла $\frac{\alpha}{2}$.

Упражнения

513 Выразить квадрат синуса (косинуса) заданного угла через косинус угла, в два раза большего:

1) $\sin^2 15°$; 2) $\cos^2\frac{1}{4}$; 3) $\cos^2\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)$; 4) $\sin^2\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)$.

514 Найти числовое значение выражения:

1) $2\cos^2\frac{\pi}{8}-1$; 2) $1-2\sin^2\frac{\pi}{12}$;

3) $\frac{\sqrt{3}}{2}+2\sin^2 15°$; 4) $-\frac{\sqrt{3}}{2}+2\cos^2 15°$.

515 Пусть $\cos\alpha=0{,}6$ и $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$. Вычислить:

1) $\sin\frac{\alpha}{2}$; 2) $\cos\frac{\alpha}{2}$; 3) $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$; 4) $\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}$.

516 Пусть $\sin\alpha=\frac{3}{5}$ и $\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$. Вычислить:

1) $\sin\frac{\alpha}{2}$; 2) $\cos\frac{\alpha}{2}$; 3) $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$; 4) $\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}$.

517 Вычислить:

1) $\sin 15°$; 2) $\cos 15°$; 3) $\operatorname{tg} 22°30'$; 4) $\operatorname{ctg} 22°30'$.

518 Упростить выражение:

1) $\frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}$; 2) $\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}$; 3) $\frac{1-\cos 2\alpha+\sin 2\alpha}{1+\cos 2\alpha+\sin 2\alpha}$;

4) $\frac{1+\cos 4\alpha}{\sin 4\alpha}$; 5) $\frac{1+\cos 2\alpha+\sin 2\alpha}{\sin\alpha+\cos\alpha}$;

6) $(1-\cos 2\alpha)\operatorname{ctg}\alpha$.

Доказать тождество (519—520).

519 1) $2\cos^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)=1+\sin\alpha$; 2) $2\sin^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)=1-\sin\alpha$;

3) $\frac{3-4\cos 2\alpha+\cos 4\alpha}{3+4\cos 2\alpha+\cos 4\alpha}=\operatorname{tg}^4\alpha$; 4) $\frac{1+\sin 2\alpha+\cos 2\alpha}{1+\sin 2\alpha-\cos 2\alpha}=\operatorname{ctg}\alpha$.

520 1) $\frac{1-\cos 2\alpha}{\sin 2\alpha}\cdot\operatorname{ctg}\alpha=1$; 2) $\frac{\sin 2\alpha}{1+\cos 2\alpha}=\operatorname{tg}\alpha$;

3) $\frac{1-2\sin^2\alpha}{1+\sin 2\alpha}=\frac{1-\operatorname{tg}\alpha}{1+\operatorname{tg}\alpha}$; 4) $\frac{1+\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha}=\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)$.

521 Доказать, что если $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$, то $\sqrt{1+\sin\alpha}-\sqrt{1-\sin\alpha}=2\sin\frac{\alpha}{2}$.

522 Упростить выражение $\frac{\operatorname{tg} 2\alpha}{\operatorname{tg} 4\alpha-\operatorname{tg} 2\alpha}$.

523 Решить уравнение:

1) $1-\cos x=2\sin\frac{x}{2}$; 2) $1+\cos x=2\cos\frac{x}{2}$;

3) $1+\cos\frac{x}{2}=2\sin\left(\frac{x}{4}-\frac{3\pi}{2}\right)$; 4) $1+\cos 8x=2\cos 4x$;

5) $2\sin^2\frac{x}{2}+\frac{1}{2}\sin 2x=1$; 6) $2\cos^2 x-\frac{1}{2}\sin 4x=1$.

§ 31 Формулы приведения

Таблицы значений синуса, косинуса, тангенса и котангенса составляются для углов от $0°$ до $90°$ (или от 0 до $\frac{\pi}{2}$). Это объясняется тем, что их значения для остальных углов сводятся к значениям для острых углов.

Задача Вычислить $\sin 870°$ и $\cos 870°$.

▶ Заметим, что $870° = 2 \cdot 360° + 150°$. Следовательно, при повороте точки $P(1; 0)$ вокруг начала координат на $870°$ точка совершит два полных оборота и ещё повернётся на угол $150°$, т. е. получится та же самая точка M, что и при повороте на $150°$ (рис. 66). Поэтому $\sin 870° = \sin 150°$, $\cos 870° = \cos 150°$.

Построим точку M_1, симметричную точке M относительно оси OY (рис. 67). Ординаты точек M и M_1 одинаковы, а абсциссы различаются только знаком. Поэтому $\sin 150° = \sin 30° = \frac{1}{2}$, $\cos 150° = -\cos 30° = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Ответ $\sin 870° = \frac{1}{2}$, $\cos 870° = -\frac{\sqrt{3}}{2}$. ◁

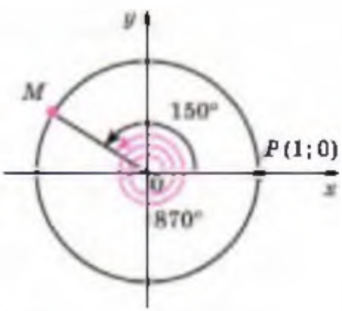


Рис. 66

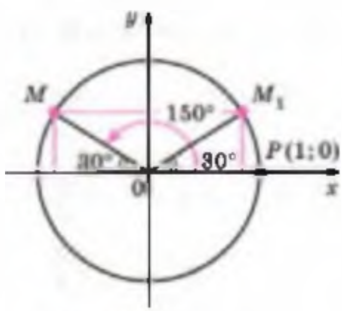


Рис. 67

При решении задачи 1 использовались равенства

$$\begin{aligned} \sin(2\cdot 360^\circ + 150^\circ) &= \sin 150^\circ,\\ \cos(2\cdot 360^\circ + 150^\circ) &= \cos 150^\circ, \end{aligned} \qquad (1)$$

$$\begin{aligned} \sin(180^\circ - 30^\circ) &= \sin 30^\circ,\\ \cos(180^\circ - 30^\circ) &= -\cos 30^\circ. \end{aligned} \qquad (2)$$

Равенства (1) верны, так как при повороте точки $P(1; 0)$ на угол $\alpha + 2\pi k$, $k \in Z$, получается та же самая точка, что и при повороте на угол α.
Следовательно, верны формулы

$$\begin{aligned} \sin(\alpha + 2\pi k) &= \sin\alpha,\\ \cos(\alpha + 2\pi k) &= \cos\alpha,\ k \in Z. \end{aligned} \qquad (3)$$

Равенства (2) являются частными случаями формул

$$\sin(\pi - \alpha) = \sin\alpha,\ \cos(\pi - \alpha) = -\cos\alpha. \qquad (4)$$

Докажем формулу $\sin(\pi - \alpha) = \sin\alpha$.

● Применяя формулу сложения для синуса, получаем $\sin(\pi - \alpha) = \sin\pi\cos\alpha - \cos\pi\sin\alpha = 0\cdot\cos\alpha - (-1)\cdot\sin\alpha = \sin\alpha$. ○

Аналогично доказывается и вторая из формул (4), которые называются *формулами приведения*. Вообще, формулами приведения для синуса называют следующие шесть формул:

$$\begin{aligned} &\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos\alpha, && \sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \cos\alpha,\\ &\sin(\pi - \alpha) = \sin\alpha, && \sin(\pi + \alpha) = -\sin\alpha,\\ &\sin\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) = -\cos\alpha, && \sin\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right) = -\cos\alpha. \end{aligned} \qquad (5)$$

Следующие шесть формул называют формулами приведения для косинуса:

$$\begin{aligned} &\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin\alpha, && \cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\sin\alpha,\\ &\cos(\pi - \alpha) = -\cos\alpha, && \cos(\pi + \alpha) = -\cos\alpha,\\ &\cos\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) = -\sin\alpha, && \cos\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right) = \sin\alpha. \end{aligned} \qquad (6)$$

Формулы (5) и (6) справедливы при любых значениях α.

Задача 2 Вычислить $\sin 930^\circ$.

► Используя первую из формул (3), получаем

$$\sin 930^\circ = \sin(3\cdot 360^\circ - 150^\circ) = \sin(-150^\circ).$$

По формуле $\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$ получим $\sin(-150°) = -\sin 150°$. По формуле (4) находим

$$-\sin 150° = -\sin(180° - 30°) = -\sin 30° = -\frac{1}{2}.$$

Ответ $\sin 930° = -\frac{1}{2}$. ◁

Задача 3 Вычислить $\cos\frac{15\pi}{4}$.

▶ $\cos\frac{15\pi}{4} = \cos\left(4\pi - \frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$. ◁

Покажем теперь, как можно свести вычисление тангенса любого угла к вычислению тангенса острого угла.

Заметим, что из формул (3) и определения тангенса следует равенство $\operatorname{tg}(\alpha + 2\pi k) = \operatorname{tg}\alpha$, $k \in \boldsymbol{Z}$. Используя это равенство и формулы (4), получаем

$$\operatorname{tg}(\alpha + \pi) = \operatorname{tg}(\alpha + \pi - 2\pi) = \operatorname{tg}(\alpha - \pi) =$$
$$= -\operatorname{tg}(\pi - \alpha) = -\frac{\sin(\pi - \alpha)}{\cos(\pi - \alpha)} = -\frac{\sin\alpha}{-\cos\alpha} = \operatorname{tg}\alpha$$

Следовательно, справедлива формула

$$\operatorname{tg}(\alpha + \pi k) = \operatorname{tg}\alpha, \quad k \in \boldsymbol{Z}. \qquad (7)$$

Аналогично доказывается формула

$$\operatorname{ctg}(\alpha + \pi k) = \operatorname{ctg}\alpha, \quad k \in \boldsymbol{Z}. \qquad (8)$$

Следующие четыре формулы называют формулами приведения для тангенса и котангенса:

$$\begin{aligned} &\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\operatorname{ctg}\alpha, && \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \operatorname{ctg}\alpha, \\ &\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\operatorname{tg}\alpha, && \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \operatorname{tg}\alpha. \end{aligned} \qquad (9)$$

Формулы (9) справедливы при всех допустимых значениях α.

Задача 4 Вычислить: 1) $\operatorname{tg}\frac{11\pi}{3}$; 2) $\operatorname{tg}\frac{13\pi}{4}$.

▶ 1) $\operatorname{tg}\frac{11\pi}{3} = \operatorname{tg}\left(4\pi - \frac{\pi}{3}\right) = \operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{3}\right) = -\operatorname{tg}\frac{\pi}{3} = -\sqrt{3}$.

2) $\operatorname{tg}\frac{13\pi}{4} = \operatorname{tg}\left(3\pi + \frac{\pi}{4}\right) = \operatorname{tg}\frac{\pi}{4} = 1$. ◁

Формулы приведения для синуса и косинуса доказываются с помощью формул сложения аналогично тому, как доказана первая из формул (4). Формулы (9) можно получить из формул (5) и (6), зная, что $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$.

Формулы приведения запоминать необязательно. Для того чтобы записать любую из них, можно руководствоваться следующими правилами:

1) В правой части формулы ставится тот знак, который имеет левая часть при условии $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$.

2) Если в левой части угол равен $\frac{\pi}{2} \pm \alpha$ или $\frac{3\pi}{2} \pm \alpha$, то синус заменяется на косинус, косинус — на синус, тангенс — на котангенс, котангенс — на тангенс. Если угол равен $\pi \pm \alpha$, то замены не происходит.

Например, покажем, как с помощью этих правил можно получить формулу приведения для $\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)$. По первому правилу в правой части формулы нужно поставить знак «−», так как если $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, то $\frac{\pi}{2} < \frac{\pi}{2}+\alpha < \pi$, а косинус во второй четверти отрицателен. По второму правилу косинус нужно заменить на синус, следовательно, $\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right) = -\sin\alpha$.

Итак, формулы (3), (7) и формулы приведения позволяют свести вычисление синуса, косинуса, тангенса и котангенса любого угла к вычислению их значений для острого угла.

Упражнения

524 Найти значение острого угла α, если:

1) $\cos 75^\circ = \cos(90^\circ - \alpha)$;
2) $\sin 150^\circ = \sin(90^\circ + \alpha)$;
3) $\sin 150^\circ = \sin(180^\circ - \alpha)$;
4) $\cos 310^\circ = \cos(270^\circ + \alpha)$;
5) $\sin\frac{5}{4}\pi = \sin(\pi+\alpha)$;
6) $\operatorname{tg}\frac{\pi}{5} = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$;
7) $\cos\frac{7\pi}{4} = \cos\left(\frac{3}{2}\pi+\alpha\right)$;
8) $\operatorname{ctg}\frac{11}{6}\pi = \operatorname{ctg}(2\pi-\alpha)$.

Вычислить с помощью формулы приведения (525—526).

525 1) $\cos 150^\circ$; 2) $\sin 135^\circ$; 3) $\operatorname{ctg} 135^\circ$; 4) $\cos 120^\circ$; 5) $\cos 225^\circ$; 6) $\sin 210^\circ$; 7) $\operatorname{ctg} 240^\circ$; 8) $\sin 315^\circ$.

526 1) $\operatorname{tg}\frac{5\pi}{4}$; 2) $\sin\frac{7\pi}{6}$; 3) $\cos\frac{5\pi}{3}$; 4) $\operatorname{ctg}\frac{5\pi}{3}$; 5) $\sin\left(-\frac{13\pi}{6}\right)$; 6) $\cos\left(-\frac{7\pi}{3}\right)$; 7) $\operatorname{tg}\left(-\frac{2\pi}{3}\right)$; 8) $\operatorname{ctg}\left(-\frac{7\pi}{4}\right)$.

Упростить выражение (527—528).

527 1) $\dfrac{\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)-\operatorname{tg}(\pi+\alpha)+\sin\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)}{\cos(\pi+\alpha)}$;

2) $\dfrac{\sin(\pi-\alpha)+\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)+\operatorname{ctg}(\pi-\alpha)}{\operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)}$.

528 1) $\dfrac{\sin\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)}{\operatorname{ctg}(2\pi-\alpha)}\cdot\dfrac{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)}{\sin(\pi+\alpha)}$;

2) $\dfrac{\sin^2(\pi+\alpha)+\sin^2\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)}{\cos\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)}\cdot\operatorname{ctg}\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)$.

529 **Вычислить:**

1) $\cos 750^\circ$; 2) $\sin 1140^\circ$; 3) $\operatorname{tg} 405^\circ$; 4) $\cos 840^\circ$;

5) $\sin\frac{17\pi}{6}$; 6) $\operatorname{tg}\frac{25\pi}{4}$; 7) $\operatorname{ctg}\frac{27\pi}{4}$; 8) $\cos\frac{21\pi}{4}$.

530 **Найти значение выражения:**

1) $\cos 630^\circ - \sin 1470^\circ - \operatorname{ctg} 1125^\circ$;

2) $\operatorname{tg} 1800^\circ - \sin 495^\circ + \cos 945^\circ$;

3) $3\cos 3660^\circ + \sin(-1560^\circ) + \cos(-450^\circ)$;

4) $\cos 4455^\circ - \cos(-945^\circ) + \operatorname{tg} 1035^\circ - \operatorname{ctg}(-1500^\circ)$.

531 **Вычислить:**

1) $\cos\frac{23\pi}{4} - \sin\frac{15\pi}{4} - \operatorname{ctg}\left(-\frac{11\pi}{2}\right)$;

2) $\sin\frac{25\pi}{3} - \cos\left(-\frac{17\pi}{2}\right) - \operatorname{tg}\frac{10\pi}{3}$;

3) $\sin(-7\pi) - 2\cos\frac{31\pi}{3} - \operatorname{tg}\frac{7\pi}{4}$;

4) $\cos(-9\pi) + 2\sin\left(-\frac{49\pi}{6}\right) - \operatorname{ctg}\left(-\frac{21\pi}{4}\right)$.

Доказать тождество (532—533).

532 1) $\sin\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right) - \cos\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right) = 0$;

2) $\cos\left(\frac{\pi}{6}-\alpha\right) - \sin\left(\frac{\pi}{3}+\alpha\right) = 0$;

3) $\dfrac{\sin\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)}{\operatorname{tg}(\pi+\alpha)}\cdot\dfrac{\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)}{\operatorname{tg}\left(\alpha-\frac{3\pi}{2}\right)} = -\sin\alpha$.

533 1) $\sin\left(\frac{7\pi}{6}+\alpha\right)=-\sin\left(\frac{\pi}{6}+\alpha\right)$;

2) $\sin\left(\frac{5\pi}{4}+\alpha\right)=-\sin\left(\frac{3\pi}{4}-\alpha\right)$;

3) $\cos\left(\alpha-\frac{2\pi}{3}\right)=-\cos\left(\frac{\pi}{3}+\alpha\right)$;

4) $\cos\left(\alpha-\frac{2\pi}{3}\right)=\cos\left(\alpha+\frac{4\pi}{3}\right)$.

534 Доказать, что синус суммы двух внутренних углов треугольника равен синусу его третьего угла.

535 Решить уравнение:

1) $\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=1$; 2) $\sin\left(\frac{3\pi}{2}+x\right)=1$;

3) $\cos(x-\pi)=0$; 4) $\sin\left(x-\frac{\pi}{2}\right)=1$;

5) $\sin(2x+3\pi)\sin\left(3x+\frac{3\pi}{2}\right)-\sin 3x\cos 2x=-1$;

6) $\sin\left(5x-\frac{3\pi}{2}\right)\cos(2x+4\pi)-\sin(5x+\pi)\sin 2x=0$.

536 Доказать, что вычисление значений синуса, косинуса и тангенса любого угла можно свести к вычислению их значений для угла, заключённого в промежутке от 0 до $\frac{\pi}{4}$.

§ 32 Сумма и разность синусов. Сумма и разность косинусов

Задача 1 Упростить выражение

$$\left(\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{12}\right)+\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{12}\right)\right)\sin\frac{\pi}{12}.$$

▶ Используя формулу сложения и формулу синуса двойного угла, получаем

$$\left(\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{12}\right)+\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{12}\right)\right)\sin\frac{\pi}{12}=\left(\sin\alpha\cos\frac{\pi}{12}+\right.$$

$$\left.+\cos\alpha\sin\frac{\pi}{12}+\sin\alpha\cos\frac{\pi}{12}-\cos\alpha\sin\frac{\pi}{12}\right)\sin\frac{\pi}{12}=$$

$$=2\sin\alpha\cos\frac{\pi}{12}\sin\frac{\pi}{12}=\sin\alpha\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}\sin\alpha. \triangleleft$$

Эту задачу можно решить проще, если использовать формулу суммы синусов:

$$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}. \qquad (1)$$

С помощью этой формулы получаем

$$\left(\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{12}\right)+\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{12}\right)\right)\sin\frac{\pi}{12}=$$
$$=2\sin\alpha\cos\frac{\pi}{12}\sin\frac{\pi}{12}=\frac{1}{2}\sin\alpha.$$

Докажем теперь справедливость формулы (1).

Обозначим $\frac{\alpha+\beta}{2}=x$, $\frac{\alpha-\beta}{2}=y$. Тогда $x+y=\alpha$, $x-y=\beta$, и поэтому $\sin\alpha+\sin\beta=\sin(x+y)+\sin(x-y)=\sin x\cos y+\cos x\sin y+\sin x\cos y-\cos x\sin y=2\sin x\cos y=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$. ◻

Наряду с формулой (1) используется формула разности синусов, а также формулы суммы и разности косинусов:

$$\sin\alpha-\sin\beta=2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}, \qquad (2)$$

$$\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}, \qquad (3)$$

$$\cos\alpha-\cos\beta=-2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}. \qquad (4)$$

Формулы (3) и (4) доказываются так же, как и формула (1); формула (2) получается из формулы (1) заменой β на $-\beta$. (Докажите самостоятельно.)

Задача 2 Вычислить $\sin 75° + \cos 75°$.

▶ $\sin 75° + \cos 75° = \sin 75° + \sin 15° =$
$= 2\sin\frac{75°+15°}{2}\cos\frac{75°-15°}{2} = 2\sin 45°\cos 30° =$
$= 2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{6}}{2}$. ◁

Задача 3 Преобразовать в произведение $2\sin\alpha+\sqrt{3}$.

▶ $2\sin\alpha+\sqrt{3}=2\left(\sin\alpha+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=2\left(\sin\alpha+\sin\frac{\pi}{3}\right)=$
$=4\sin\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\pi}{6}\right)\cos\left(\frac{\alpha}{2}-\frac{\pi}{6}\right)$. ◁

Задача 4* Доказать, что наименьшее значение выражения $\sin\alpha + \cos\alpha$ равно $-\sqrt{2}$, а наибольшее равно $\sqrt{2}$.

▶ Преобразуем данное выражение в произведение:

$$\sin\alpha + \cos\alpha = \sin\alpha + \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) =$$

$$= 2\sin\frac{\pi}{4}\cos\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\cos\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right).$$

Так как наименьшее значение косинуса равно -1, а наибольшее равно 1, то наименьшее значение данного выражения равно $\sqrt{2}\cdot(-1) = -\sqrt{2}$, а наибольшее равно $\sqrt{2}\cdot 1 = \sqrt{2}$. ◁

В преобразованиях тригонометрических выражений, а также при решении некоторых уравнений используются формулы преобразования произведения в сумму или разность:

$$\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}(\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta)),$$

$$\sin\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)),$$

$$\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta)).$$

Задача 5* Доказать тождество

$$\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}(\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta)).$$

▶ Приведём правую часть равенства с помощью формулы сложения к виду левой:

$$\frac{1}{2}(\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta)) = \frac{1}{2}(\sin\alpha\cos\beta +$$

$$+ \cos\alpha\sin\beta + \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta) =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot 2\sin\alpha\cos\beta = \sin\alpha\cos\beta.$$

Упражнения

537 Упростить выражение:

1) $\sin\left(\frac{\pi}{3} + \alpha\right) + \sin\left(\frac{\pi}{3} - \alpha\right)$; 2) $\cos\left(\frac{\pi}{4} - \beta\right) - \cos\left(\frac{\pi}{4} + \beta\right)$;

3) $\sin^2\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right) - \sin^2\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right)$; 4) $\cos^2\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right) - \cos^2\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right)$.

538 Вычислить:

1) $\cos 105° + \cos 75°$; 2) $\sin 105° - \sin 75°$;

3) $\cos\frac{11\pi}{12} + \cos\frac{5\pi}{12}$; 4) $\cos\frac{11\pi}{12} - \cos\frac{5\pi}{12}$;

5) $\sin\frac{7\pi}{12} - \sin\frac{\pi}{12}$; 6) $\sin 105° + \sin 165°$.

539 Преобразовать в произведение:

1) $1 + 2\sin\alpha$; 2) $1 - 2\sin\alpha$; 3) $1 + 2\cos\alpha$; 4) $1 + \sin\alpha$.

540 Доказать тождество:

1) $\dfrac{\sin\alpha + \sin 3\alpha}{\cos\alpha + \cos 3\alpha} = \operatorname{tg} 2\alpha$; 2) $\dfrac{\sin 2\alpha + \sin 4\alpha}{\cos 2\alpha - \cos 4\alpha} = \operatorname{ctg}\alpha$.

541 Упростить выражение:

1) $\dfrac{2(\cos\alpha + \cos 3\alpha)}{2\sin 2\alpha + \sin 4\alpha}$; 2) $\dfrac{1 + \sin\alpha - \cos 2\alpha - \sin 3\alpha}{2\sin^2\alpha + \sin\alpha - 1}$.

542 Доказать тождество:

1) $\cos^4\alpha - \sin^4\alpha + \sin 2\alpha = \sqrt{2}\cos\left(2\alpha - \dfrac{\pi}{4}\right)$;

2) $\cos\alpha + \cos\left(\dfrac{2\pi}{3} + \alpha\right) + \cos\left(\dfrac{2\pi}{3} - \alpha\right) = 0$;

3) $\dfrac{\sin 2\alpha + \sin 5\alpha - \sin 3\alpha}{\cos\alpha + 1 - 2\sin^2 2\alpha} = 2\sin\alpha$.

543 Записать в виде произведения:

1) $\cos 22^\circ + \cos 24^\circ + \cos 26^\circ + \cos 28^\circ$;

2) $\cos\dfrac{\pi}{12} + \cos\dfrac{\pi}{4} + \cos\dfrac{5\pi}{6}$.

544 Доказать тождество $\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta = \dfrac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}$ и вычислить:

1) $\operatorname{tg} 267^\circ + \operatorname{tg} 93^\circ$; 2) $\operatorname{tg}\dfrac{5\pi}{12} + \operatorname{tg}\dfrac{7\pi}{12}$.

545 Разложить на множители:

1) $1 - \cos\alpha + \sin\alpha$; 2) $1 - 2\cos\alpha + \cos 2\alpha$;

3) $1 + \sin\alpha - \cos\alpha - \operatorname{tg}\alpha$; 4) $1 + \sin\alpha + \cos\alpha + \operatorname{tg}\alpha$.

Упражнения к главе V

546 Найти:

1) $\cos\alpha$, если $\sin\alpha = \dfrac{\sqrt{5}}{3}$ и $\dfrac{\pi}{2} < \alpha < \pi$;

2) $\operatorname{tg}\alpha$, если $\cos\alpha = -\dfrac{\sqrt{5}}{3}$ и $\pi < \alpha < \dfrac{3\pi}{2}$;

3) $\sin\alpha$, если $\operatorname{tg}\alpha = 2\sqrt{2}$ и $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$;

4) $\cos\alpha$, если $\operatorname{ctg}\alpha = \sqrt{2}$ и $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$.

547 Упростить выражение:

1) $2\sin(\pi-\alpha)\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)+3\sin^2\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)-2$;

2) $\dfrac{\sin(\pi+\alpha)\cos\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)\operatorname{tg}\left(\alpha-\frac{\pi}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)\cos\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)\operatorname{tg}(\pi+\alpha)}$.

Вычислить (548—549).

548 1) $\sin\frac{47\pi}{6}$; 2) $\operatorname{tg}\frac{25\pi}{4}$; 3) $\operatorname{ctg}\frac{27\pi}{4}$; 4) $\cos\frac{21\pi}{4}$.

549 1) $\cos\frac{23\pi}{4}-\sin\frac{15\pi}{4}$; 2) $\sin\frac{25\pi}{3}-\operatorname{tg}\frac{10\pi}{3}$;

3) $3\cos 3660^\circ+\sin(-1560^\circ)$; 4) $\cos(-945^\circ)+\operatorname{tg}1035^\circ$.

Упростить выражение (550—551).

550 1) $\left(\frac{1+\cos^2\alpha}{\sin\alpha}-\sin\alpha\right)\frac{1}{2}\operatorname{tg}\alpha$; 2) $\operatorname{ctg}\alpha\left(\frac{1+\sin^2\alpha}{\cos\alpha}-\cos\alpha\right)$.

551 1) $\dfrac{\sin\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)-\cos\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)+\cos\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)}$; 2) $\dfrac{\sin\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)+\cos\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)-\cos\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)}$.

552 Доказать тождество:

1) $1+\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta=\dfrac{\cos(\alpha-\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}$; 2) $\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta=\dfrac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}$.

Вычислить (553—554).

553 1) $2\sin 6\alpha\cos^2\left(\frac{\pi}{4}+3\alpha\right)-\sin 6\alpha$ при $\alpha=\frac{5\pi}{24}$;

2) $\cos 3\alpha+2\cos(\pi-3\alpha)\sin^2\left(\frac{\pi}{4}-1{,}5\alpha\right)$ при $\alpha=\frac{5\pi}{36}$.

554 1) $\dfrac{\sqrt{3}(\cos 75^\circ-\cos 15^\circ)}{1-2\sin^2 15^\circ}$; 2) $\dfrac{2\cos^2\frac{\pi}{8}-1}{1+8\sin^2\frac{\pi}{8}\cos^2\frac{\pi}{8}}$.

555 Доказать тождество:

1) $\dfrac{2\sin 2\alpha-\sin 4\alpha}{2\sin 2\alpha+\sin 4\alpha}=\operatorname{tg}^2\alpha$; 2) $\dfrac{2\cos 2\alpha-\sin 4\alpha}{2\cos 2\alpha+\sin 4\alpha}=\operatorname{tg}^2\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)$.

556 Показать, что:

1) $\sin 35^\circ+\sin 25^\circ=\cos 5^\circ$; 2) $\cos 12^\circ-\cos 48^\circ=\sin 18^\circ$.

Проверь себя!

1 Вычислить $\sin\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$, $\cos 2\alpha$, если $\cos\alpha = -\frac{4}{5}$ и $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$.

2 Найти значение выражения:

1) $\cos 135°$; 2) $\sin\frac{5\pi}{3}$; 3) $\operatorname{tg}\frac{7\pi}{3}$; 4) $\cos^2\frac{\pi}{8} - \sin^2\frac{\pi}{8}$.

3 Доказать тождество:

1) $3\cos 2\alpha + \sin^2\alpha - \cos^2\alpha = 2\cos 2\alpha$;

2) $\frac{\sin 5\alpha - \sin 3\alpha}{2\cos 4\alpha} = \sin\alpha$.

4 Упростить выражение:

1) $\sin(\alpha-\beta) - \sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\cdot\sin(-\beta)$;

2) $\cos^2(\pi-\alpha) - \cos^2\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$;

3) $2\sin\alpha\sin\beta + \cos(\alpha+\beta)$.

557 Упростить выражение $\left(\frac{\cos\beta}{\sin\alpha} + \frac{\sin\beta}{\cos\alpha}\right)\cdot\frac{1-\cos 4\alpha}{\cos(\pi-\beta+\alpha)}$.

Доказать тождество (558—559).

558 1) $$\frac{\sin(2\alpha-3\pi) + 2\cos\left(\frac{7\pi}{6}+2\alpha\right)}{2\cos\left(\frac{\pi}{6}-2\alpha\right) + \sqrt{3}\cos(2\alpha-3\pi)} = -\sqrt{3}\operatorname{ctg} 2\alpha;$$

2) $$\frac{2\cos\left(\frac{\pi}{6}-2\alpha\right) - \sqrt{3}\sin(2{,}5\pi-2\alpha)}{\cos(4{,}5\pi-2\alpha) + 2\cos\left(\frac{\pi}{6}+2\alpha\right)} = \frac{\operatorname{tg} 2\alpha}{\sqrt{3}}.$$

559 1) $\frac{1-\cos\alpha+\cos 2\alpha}{\sin 2\alpha - \sin\alpha} = \operatorname{ctg}\alpha$; 2) $\frac{\sin\alpha + \sin\frac{\alpha}{2}}{1+\cos\alpha+\cos\frac{\alpha}{2}} = \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$.

560 Вычислить $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$, если $\cos\alpha = -\frac{3}{5}$ и $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$.

561 Вычислить значение выражения

$\frac{\sin^2\alpha}{\cos\alpha} - \frac{\cos^2\alpha}{\sin\alpha}$, если $\sin\alpha - \cos\alpha = \frac{1}{2}$.

562 Вычислить значение выражения

$\frac{4\sin 2\alpha + 5\cos 2\alpha}{2\sin 2\alpha - 3\cos 2\alpha}$, если $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{1}{3}$.

Доказать тождество (563—564).

563 1) $\sin^2(\alpha+\beta)=\sin^2\alpha+\sin^2\beta+2\sin\alpha\sin\beta\cos(\alpha+\beta)$;

2) $\sin\alpha+2\sin 3\alpha+\sin 5\alpha=4\sin 3\alpha\cos^2\alpha$.

564 $\dfrac{\sin\alpha+\sin 3\alpha+\sin 5\alpha}{\cos\alpha+\cos 3\alpha+\cos 5\alpha}=\operatorname{tg} 3\alpha$.

565 Найти значение выражения $\dfrac{\sin\alpha}{\sin^3\alpha+3\cos^3\alpha}$, если $\operatorname{tg}\alpha=2$.

Доказать тождество (566—567).

566 $\sin^2\alpha+\cos\left(\dfrac{\pi}{3}-\alpha\right)\cos\left(\dfrac{\pi}{3}+\alpha\right)=\dfrac{1}{4}$.

567 1) $\sin^6\alpha+\cos^6\alpha=\dfrac{1}{8}(5+3\cos 4\alpha)$;

2) $\sin^8\alpha+\cos^8\alpha=\dfrac{1}{32}(\cos^2 4\alpha+14\cos 4\alpha+17)$.

VI
глава

Тригонометрические уравнения

Уравнение есть равенство, которое ещё не является истинным, но которое стремятся сделать истинным, не будучи уверенным, что этого можно достичь.

А. Фуше

§ 33 Уравнение $\cos x = a$

Из определения косинуса следует, что $-1 \leqslant \cos \alpha \leqslant 1$. Поэтому если $|a| > 1$, то уравнение $\cos x = a$ не имеет корней. Например, уравнение $\cos x = -1{,}5$ не имеет корней.

Задача 1 Решить уравнение $\cos x = \frac{1}{2}$.

▶ Напомним, что $\cos x$ — абсцисса точки единичной окружности, полученной поворотом точки $P(1; 0)$ вокруг начала координат на угол x. Абсциссу, равную $\frac{1}{2}$, имеют две точки окружности M_1 и M_2 (рис. 68). Так как $\frac{1}{2} = \cos \frac{\pi}{3}$, то точка M_1 получается из точки $P(1; 0)$ поворотом на угол $x_1 = \frac{\pi}{3}$, а также на углы $x = \frac{\pi}{3} + 2\pi k$, где $k = \pm 1, \pm 2, \ldots$. Точка M_2 получается из точки $P(1; 0)$ поворотом на угол $x_2 = -\frac{\pi}{3}$, а также на углы $-\frac{\pi}{3} + 2\pi k$, где $k = \pm 1, \pm 2, \ldots$. Итак, все

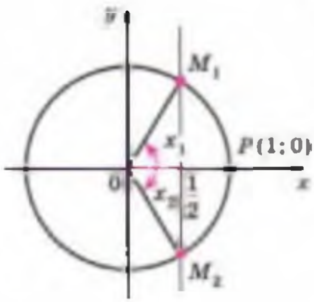


Рис. 68

корни уравнения $\cos x = \frac{1}{2}$ можно найти по формулам $x = \frac{\pi}{3} + 2\pi k$, $x = -\frac{\pi}{3} + 2\pi k$, $k \in \mathbf{Z}$. Вместо этих двух формул обычно пользуются одной:

$$x = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi k,\ k \in \mathbf{Z}. \triangleleft$$

Задача 2 Решить уравнение $\cos x = -\frac{1}{2}$.

▶ Абсциссу, равную $-\frac{1}{2}$, имеют две точки окружности M_1 и M_2 (рис. 69). Так как $-\frac{1}{2} = \cos\frac{2\pi}{3}$, то угол $x_1 = \frac{2\pi}{3}$, а потому угол $x_2 = -\frac{2\pi}{3}$.

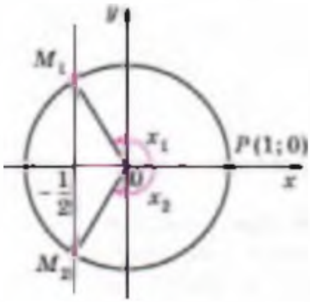


Рис. 69

Следовательно, все корни уравнения $\cos x = -\frac{1}{2}$ можно найти по формуле $x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi k$, $k \in \mathbf{Z}$. $\triangleleft$

Таким образом, каждое из уравнений $\cos x = \frac{1}{2}$ и $\cos x = -\frac{1}{2}$ имеет бесконечное множество корней. На отрезке $[0; \pi]$ каждое из этих уравнений имеет только один корень: $x_1 = \frac{\pi}{3}$ — корень уравнения $\cos x = \frac{1}{2}$ и $x_1 = \frac{2\pi}{3}$ — корень уравнения $\cos x = -\frac{1}{2}$. Число $\frac{\pi}{3}$ называют арккосинусом числа $\frac{1}{2}$ и записывают $\arccos\frac{1}{2} = \frac{\pi}{3}$; число $\frac{2\pi}{3}$ называют арккосинусом числа $\left(-\frac{1}{2}\right)$ и записывают $\arccos\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{2\pi}{3}$. Вообще, уравнение $\cos x = a$, где $-1 \leqslant a \leqslant 1$, имеет на отрезке $0 \leqslant x \leqslant \pi$ только один корень. Если $a \geqslant 0$, то корень заключён в промежутке $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$; если $a < 0$, то в промежутке $\left(\frac{\pi}{2}; \pi\right]$. Этот корень называют *арккосинусом числа* a и обозначают $\arccos a$ (рис. 70).

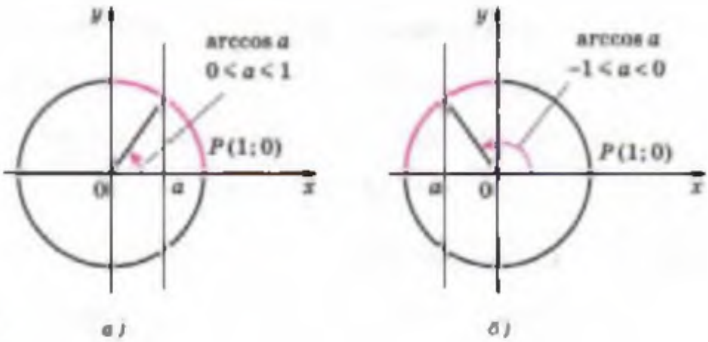


Рис. 70 а) б)

Арккосинусом числа $a \in [-1; 1]$ называется такое число $\alpha \in [0; \pi]$, косинус которого равен a:

$$\arccos a = \alpha, \text{ если } \cos\alpha = a \text{ и } 0 \leqslant \alpha \leqslant \pi. \qquad (1)$$

Например, $\arccos\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi}{6}$, так как $\cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ и $0 \leqslant \frac{\pi}{6} \leqslant \pi$; $\arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{5\pi}{6}$, так как $\cos\frac{5\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ и $0 \leqslant \frac{5\pi}{6} \leqslant \pi$.

Аналогично тому, как это сделано при решении задач 1 и 2, можно показать, что все корни уравнения $\cos x = a$, где $|a| \leqslant 1$, можно находить по формуле

$$x = \pm\arccos a + 2\pi n, \ n \in \mathbf{Z}. \qquad (2)$$

Задача 3 Решить уравнение $\cos x = -0{,}75$.

▶ По формуле (2) находим

$$x = \pm\arccos(-0{,}75) + 2\pi n, \ n \in \mathbf{Z}. ◁$$

Значение $\arccos(-0{,}75)$ можно приближённо найти по рисунку 71, измеряя угол POM транспортиром, или с помощью микрокалькулятора:

$$\arccos(-0{,}75) \approx 2{,}42.$$

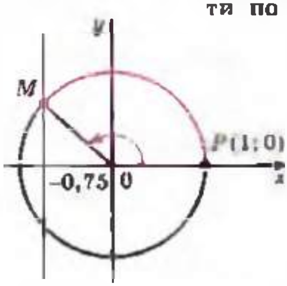


Рис. 71

Задача 4* Решить уравнение

$$(4\cos x - 1)(2\cos 2x + 1) = 0.$$

▶ 1) $4\cos x - 1 = 0$, $\cos x = \frac{1}{4}$,

$$x = \pm\arccos\frac{1}{4} + 2\pi n, \ n \in \mathbf{Z}.$$

2) $2\cos 2x + 1 = 0$, $\cos 2x = -\frac{1}{2}$, $2x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi n$,

$x = \pm\frac{\pi}{3} + \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

Ответ $x = \pm\arccos\frac{1}{4} + 2\pi n$, $x = \pm\frac{\pi}{3} + \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$. ◁

Можно доказать, что для любого $a \in [-1; 1]$ справедлива формула

$$\arccos(-a) = \pi - \arccos a. \tag{3}$$

Эта формула позволяет находить значения арккосинусов отрицательных чисел через значения арккосинусов положительных чисел. Например:

$$\arccos\left(-\frac{1}{2}\right) = \pi - \arccos\frac{1}{2} = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3},$$

$$\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \pi - \arccos\frac{\sqrt{2}}{2} = \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}.$$

Из формулы (2) следует, что корни уравнения $\cos x = a$ при $a = 0$, $a = 1$, $a = -1$ можно находить по более простым формулам:

$$\cos x = 0, \quad x = \frac{\pi}{2} + \pi n, \quad n \in \boldsymbol{Z}, \tag{4}$$

$$\cos x = 1, \quad x = 2\pi n, \quad n \in \boldsymbol{Z}, \tag{5}$$

$$\cos x = -1, \quad x = \pi + 2\pi n, \quad n \in \boldsymbol{Z}. \tag{6}$$

Задача 5 Решить уравнение $\cos\frac{x}{3} = -1$.

▶ По формуле (6) получаем $\frac{x}{3} = \pi + 2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$, откуда $x = 3\pi + 6\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$. ◁

Упражнения

Вычислить (568—569).

568 1) $\arccos 0$; 2) $\arccos 1$; 3) $\arccos\frac{\sqrt{2}}{2}$;

4) $\arccos\frac{1}{2}$; 5) $\arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$; 6) $\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

569 1) $2\arccos 0 + 3\arccos 1$; 2) $3\arccos(-1) - 2\arccos 0$;

3) $12\arccos\frac{\sqrt{3}}{2} - 3\arccos\left(-\frac{1}{2}\right)$;

4) $4\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + 6\arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

570 Сравнить числа:

1) $\arccos\frac{\sqrt{3}}{2}$ и $\arccos\frac{1}{2}$; 2) $\arccos\left(-\frac{3}{4}\right)$ и $\arccos(-1)$;

3) $\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ и $\arccos\left(-\frac{1}{2}\right)$.

Решить уравнение (**571—573**).

571 1) $\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$; 2) $\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$; 3) $\cos x = -\frac{1}{\sqrt{2}}$.

572 1) $\cos x = \frac{3}{4}$; 2) $\cos x = -0{,}3$; 3) $\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$.

573 1) $\cos 4x = 1$; 2) $\cos 2x = -1$; 3) $\sqrt{2}\cos\frac{x}{4} = -1$;

4) $2\cos\frac{x}{3} = \sqrt{3}$; 5) $\cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = 0$; 6) $\cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = 0$.

574 1) $\cos x \cos 3x = \sin 3x \sin x$;
2) $\cos 2x \cos x + \sin 2x \sin x = 0$.

575 Выяснить, имеет ли смысл выражение:
1) $\arccos(\sqrt{6} - 3)$; 2) $\arccos(\sqrt{7} - 2)$; 3) $\arccos(2 - \sqrt{10})$;

4) $\arccos(1 - \sqrt{5})$; 5) $\operatorname{tg}\left(3\arccos\frac{1}{2}\right)$.

576 Решить уравнение:
1) $\cos^2 2x = 1 + \sin^2 2x$; 2) $4\cos^2 x = 3$;
3) $2\cos^2 x = 1 + 2\sin^2 x$; 4) $2\sqrt{2}\cos^2 x = 1 + \sqrt{2}$;
5) $(1 + \cos x)(3 - 2\cos x) = 0$;
6) $(1 - \cos x)(4 + 3\cos 2x) = 0$;
7) $(1 + 2\cos x)(1 - 3\cos x) = 0$;
8) $(1 - 2\cos x)(2 + 3\cos x) = 0$.

577 Найти все корни уравнения $\cos 2x = -\frac{1}{2}$ на отрезке $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{5\pi}{2}\right]$.

578 Найти все корни уравнения $\cos 4x = \frac{\sqrt{2}}{2}$, удовлетворяющие неравенству $|x| < \frac{\pi}{4}$.

579 Решить уравнение:

1) $\arccos(2x - 3) = \frac{\pi}{3}$; 2) $\arccos\frac{x+1}{3} = \frac{2\pi}{3}$.

580 Доказать, что при всех значениях a, таких, что $-1 \leqslant a \leqslant 1$, выполняется равенство $\cos(\arccos a) = a$. Вычислить:

1) $\cos(\arccos 0{,}2)$; 2) $\cos\left(\arccos\left(-\frac{2}{3}\right)\right)$;

3) $\cos\left(\pi + \arccos \frac{3}{4}\right)$; 4) $\sin\left(\frac{\pi}{2} + \arccos \frac{1}{3}\right)$;

5) $\sin\left(\arccos \frac{4}{5}\right)$; 6) $\operatorname{tg}\left(\arccos \frac{3}{\sqrt{10}}\right)$.

581 Доказать, что $\arccos(\cos \alpha) = \alpha$ при $0 \leqslant \alpha \leqslant \pi$. Вычислить:

1) $5 \arccos\left(\cos \frac{\pi}{10}\right)$; 2) $3 \arccos(\cos 2)$;

3) $\arccos\left(\cos \frac{8\pi}{7}\right)$; 4) $\arccos(\cos 4)$.

582 Вычислить:

1) $\sin\left(\arccos \frac{1}{3} + \arccos \frac{2\sqrt{2}}{3}\right)$; 2) $\cos\left(\arccos \frac{4}{5} - \arccos \frac{3}{5}\right)$.

583 Упростить выражение $\cos(2 \arccos a)$, если $-1 \leqslant a \leqslant 1$.

584 Доказать, что если $-1 \leqslant a \leqslant 1$, то $2 \arccos \sqrt{\frac{1+a}{2}} = \arccos a$.

585 С помощью микрокалькулятора решить уравнение:

1) $\cos x = 0{,}35$; 2) $\cos x = -0{,}27$.

§ 34 Уравнение $\sin x = a$

Из определения синуса следует, что $-1 \leqslant \sin \alpha \leqslant 1$. Поэтому если $|a| > 1$, то уравнение $\sin x = a$ не имеет корней. Например, уравнение $\sin x = 2$ не имеет корней.

Задача 1 Решить уравнение $\sin x = \frac{1}{2}$.

▶ Напомним, что $\sin x$ — ордината точки единичной окружности, полученной поворотом точки $P(1; 0)$ вокруг начала координат на угол x. Ординату, равную $\frac{1}{2}$, имеют две точки окружности M_1 и M_2 (рис. 72). Так как $\frac{1}{2} = \sin \frac{\pi}{6}$, то точка M_1 получается из точки $P(1; 0)$ поворотом на угол $x_1 = \frac{\pi}{6}$,

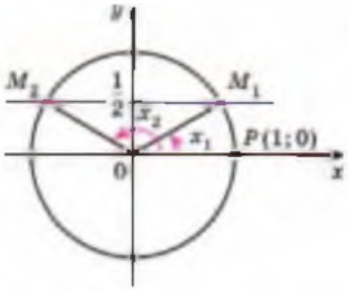


Рис. 72

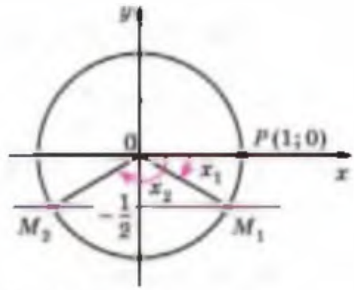


Рис. 73

а также на углы $x = \frac{\pi}{6} + 2\pi k$, где $k = \pm 1, \pm 2, \ldots$. Точка M_2 получается из точки $P\,(1;\,0)$ поворотом на угол $x_2 = \frac{5\pi}{6}$, а также на углы $x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi k$, т. е. на углы $x = \pi - \frac{\pi}{6} + 2\pi k$, где $k = \pm 1, \pm 2, \ldots$.

Итак, все корни уравнения $\sin x = \frac{1}{2}$ можно найти по формулам $x = \frac{\pi}{6} + 2\pi k$, $x = \pi - \frac{\pi}{6} + 2\pi k$, $k \in \mathbf{Z}$.

Эти формулы объединяются в одну:

$$x = (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n, \quad n \in \mathbf{Z}. \qquad (1)$$

В самом деле, если n — чётное число, т. е. $n = 2k$, то из формулы (1) получаем $x = \frac{\pi}{6} + 2\pi k$, а если n — нечётное число, т. е. $n = 2k + 1$, то из формулы (1) получаем $x = \pi - \frac{\pi}{6} + 2\pi k$.

Ответ $x = (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n$, $n \in \mathbf{Z}$. ◁

Задача 2 Решить уравнение $\sin x = -\frac{1}{2}$.

▶ Ординату, равную $-\frac{1}{2}$, имеют две точки единичной окружности M_1 и M_2 (рис. 73), где $x_1 = -\frac{\pi}{6}$, $x_2 = -\frac{5\pi}{6}$. Следовательно, все корни уравнения $\sin x = -\frac{1}{2}$ можно найти по формулам

$$x = -\frac{\pi}{6} + 2\pi k, \quad x = -\frac{5\pi}{6} + 2\pi k, \quad k \in \mathbf{Z}.$$

Эти формулы объединяются в одну:

$$x = (-1)^n \left(-\frac{\pi}{6}\right) + \pi n,\ n \in \mathbf{Z}. \qquad (2)$$

В самом деле, если $n = 2k$, то по формуле (2) получаем $x = -\frac{\pi}{6} + 2\pi k$, а если $n = 2k - 1$, то по формуле (2) находим $x = -\frac{5\pi}{6} + 2\pi k$.

Ответ $x = (-1)^n \left(-\frac{\pi}{6}\right) + \pi n,\ n \in \mathbf{Z}$. ◁

Итак, каждое из уравнений $\sin x = \frac{1}{2}$ и $\sin x = -\frac{1}{2}$ имеет бесконечное множество корней. На отрезке $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ каждое из этих уравнений имеет только один корень: $x_1 = \frac{\pi}{6}$ — корень уравнения $\sin x = \frac{1}{2}$ и $x_1 = -\frac{\pi}{6}$ — корень уравнения $\sin x = -\frac{1}{2}$.

Число $\frac{\pi}{6}$ называют арксинусом числа $\frac{1}{2}$ и записывают $\arcsin \frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}$; число $-\frac{\pi}{6}$ называют арксинусом числа $-\frac{1}{2}$ и пишут $\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{\pi}{6}$.

Вообще, уравнение $\sin x = a$, где $-1 \leqslant a \leqslant 1$, на отрезке $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ имеет только один корень. Если $a \geqslant 0$, то корень заключён в промежутке $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$; если $a < 0$, то корень заключён в промежутке $\left[-\frac{\pi}{2}; 0\right)$. Этот корень называют *арксинусом числа a* и обозначают $\arcsin a$ (рис. 74).

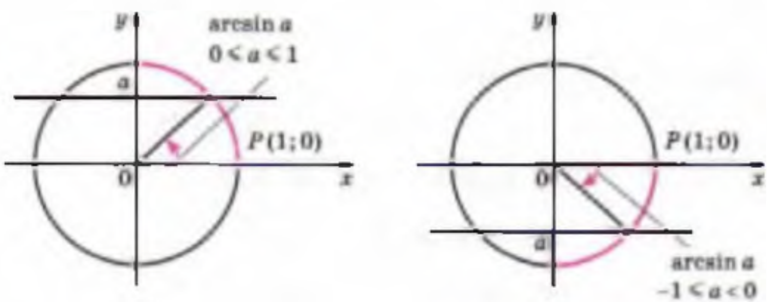


Рис. 74 а) б)

Арксинусом числа $a \in [-1; 1]$ называется такое число $\alpha \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, синус которого равен a:

$$\arcsin a = \alpha, \text{ если } \sin\alpha = a \text{ и } -\frac{\pi}{2} \leqslant \alpha \leqslant \frac{\pi}{2}. \quad (3)$$

Например, $\arcsin\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi}{4}$, так как $\sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ и $-\frac{\pi}{2} \leqslant \frac{\pi}{4} \leqslant \frac{\pi}{2}$; $\arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\frac{\pi}{3}$, так как $\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ и $-\frac{\pi}{2} \leqslant -\frac{\pi}{3} \leqslant \frac{\pi}{2}$.

Аналогично тому, как это сделано при решении задач 1 и 2, можно показать, что корни уравнения $\sin x = a$, где $|a| \leqslant 1$, выражаются формулой

$$x = (-1)^n \arcsin a + \pi n, \; n \in \mathbf{Z}. \quad (4)$$

Задача 3 Решить уравнение $\sin x = \frac{2}{3}$.

▶ По формуле (4) находим $x = (-1)^n \arcsin\frac{2}{3} + \pi n$, $n \in \mathbf{Z}$. ◁

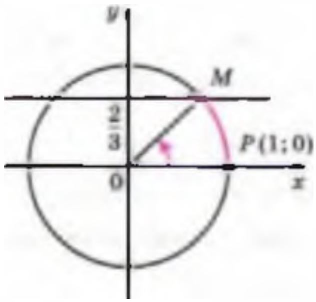


Рис. 75

Значение $\arcsin\frac{2}{3}$ можно приближённо найти из рисунка 75, измеряя угол POM транспортиром.

Значения арксинуса можно находить с помощью специальных таблиц или микрокалькулятора. Например, значение $\arcsin\frac{2}{3}$ можно вычислить на микрокалькуляторе:

$$\arcsin\frac{2}{3} \approx 0{,}73.$$

Задача 4* Решить уравнение

$$(3\sin x - 1)(2\sin 2x + 1) = 0.$$

▶ 1) $3\sin x - 1 = 0$, $\sin x = \frac{1}{3}$,

$x = (-1)^n \arcsin\frac{1}{3} + \pi n$, $n \in \mathbf{Z}$;

2) $2\sin 2x + 1 = 0$, $\sin 2x = -\frac{1}{2}$,

$$2x=(-1)^n\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right)+\pi n=(-1)^n\left(-\frac{\pi}{6}\right)+\pi n=$$

$$=(-1)^{n+1}\frac{\pi}{6}+\pi n,\quad x=(-1)^{n+1}\frac{\pi}{12}+\frac{\pi n}{2},\quad n\in Z.$$

Ответ $x=(-1)^n\arcsin\frac{1}{3}+\pi n,\ x=(-1)^{n+1}\frac{\pi}{12}+\frac{\pi n}{2},\ n\in Z.$ ◁

Можно доказать, что для любого $a\in[-1;\ 1]$ справедлива формула

$$\arcsin(-a)=-\arcsin a. \qquad (5)$$

Эта формула позволяет находить значения арксинусов отрицательных чисел через значения арксинусов положительных чисел. Например:

$$\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right)=-\arcsin\frac{1}{2}=-\frac{\pi}{6},$$

$$\arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=-\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2}=-\frac{\pi}{3}.$$

Отметим, что из формулы (4) следует, что корни уравнения $\sin x=a$ при $a=0$, $a=1$, $a=-1$ можно находить по более простым формулам:

$$\sin x=0,\quad x=\pi n,\quad n\in Z, \qquad (6)$$

$$\sin x=1,\quad x=\frac{\pi}{2}+2\pi n,\quad n\in Z, \qquad (7)$$

$$\sin x=-1,\quad x=-\frac{\pi}{2}+2\pi n,\quad n\in Z. \qquad (8)$$

Задача 5 Решить уравнение $\sin 2x=1$.

▶ По формуле (7) имеем $2x=\frac{\pi}{2}+2\pi n,\ n\in Z$, откуда $x=\frac{\pi}{4}+\pi n,\ n\in Z.$ ◁

Упражнения

Вычислить (586—587).

586 1) $\arcsin 0$; 2) $\arcsin 1$; 3) $\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2}$;

4) $\arcsin\frac{1}{2}$; 5) $\arcsin\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$; 6) $\arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

587 1) $\arcsin 1-\arcsin(-1)$; 2) $\arcsin\frac{1}{\sqrt{2}}+\arcsin\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$;

3) $\arcsin\frac{1}{2}+\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2}$; 4) $\arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right)$.

588 Сравнить числа:

1) $\arcsin \frac{1}{4}$ и $\arcsin \left(-\frac{1}{4}\right)$; 2) $\arcsin \left(-\frac{3}{4}\right)$ и $\arcsin (-1)$.

Решить уравнение (589—592).

589 1) $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$; 2) $\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$; 3) $\sin x = -\frac{1}{\sqrt{2}}$.

590 1) $\sin x = \frac{2}{7}$; 2) $\sin x = -\frac{1}{4}$; 3) $\sin x = \frac{\sqrt{5}}{3}$.

591 1) $\sin 3x = 1$; 2) $\sin 2x = -1$; 3) $\sqrt{2} \sin \frac{x}{3} = -1$;

4) $2 \sin \frac{x}{2} = \sqrt{3}$; 5) $\sin \left(x + \frac{3\pi}{4}\right) = 0$; 6) $\sin \left(2x + \frac{\pi}{2}\right) = 0$.

592 1) $\sin 4x \cos 2x = \cos 4x \sin 2x$;
2) $\cos 2x \sin 3x = \sin 2x \cos 3x$.

593 Выяснить, имеет ли смысл выражение:
1) $\arcsin (\sqrt{5} - 2)$; 2) $\arcsin (\sqrt{5} - 3)$;
3) $\arcsin (3 - \sqrt{17})$; 4) $\arcsin (2 - \sqrt{10})$;
5) $\operatorname{tg} \left(6 \arcsin \frac{1}{2}\right)$; 6) $\operatorname{tg} \left(2 \arcsin \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

Решить уравнение (594—596).

594 1) $1 - 4 \sin x \cos x = 0$; 2) $\sqrt{3} + 4 \sin x \cos x = 0$;
3) $1 + 6 \sin \frac{x}{4} \cos \frac{x}{4} = 0$; 4) $1 - 8 \sin \frac{x}{3} \cos \frac{x}{3} = 0$.

595 1) $1 + \cos 5x \sin 4x = \cos 4x \sin 5x$;
2) $1 - \sin x \cos 2x = \cos x \sin 2x$.

596 1) $(4 \sin x - 3)(2 \sin x + 1) = 0$;
2) $(4 \sin 3x - 1)(2 \sin x + 3) = 0$.

597 Найти все корни уравнения $\sin 2x = \frac{1}{2}$, принадлежащие отрезку $[0; 2\pi]$.

598 Найти все корни уравнения $\sin \frac{x}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, удовлетворяющие неравенству $\log_\pi (x - 4\pi) < 1$.

599 Доказать, что $\sin (\arcsin a) = a$ при $-1 \leqslant a \leqslant 1$. Вычислить:
1) $\sin \left(\arcsin \frac{1}{7}\right)$; 2) $\sin \left(\arcsin \left(-\frac{1}{5}\right)\right)$;
3) $\sin \left(\pi + \arcsin \frac{3}{4}\right)$; 4) $\cos \left(\frac{3\pi}{2} - \arcsin \frac{1}{3}\right)$;
5) $\cos \left(\arcsin \frac{4}{5}\right)$; 6) $\operatorname{tg} \left(\arcsin \frac{1}{\sqrt{10}}\right)$.

600 Доказать, что $\arcsin(\sin\alpha) = \alpha$ при $-\frac{\pi}{2} \leqslant \alpha \leqslant \frac{\pi}{2}$. Вычислить:

1) $7\arcsin\left(\sin\frac{\pi}{7}\right)$; 2) $4\arcsin\left(\sin\frac{1}{2}\right)$;

3) $\arcsin\left(\sin\frac{6\pi}{7}\right)$; 4) $\arcsin(\sin 5)$.

Вычислить (601—603).

601 1) $\cos\left(\arcsin\frac{3}{5}\right)$; 2) $\cos\left(\arcsin\left(-\frac{4}{5}\right)\right)$;

3) $\cos\left(\arcsin\left(-\frac{1}{3}\right)\right)$; 4) $\cos\left(\arcsin\frac{1}{4}\right)$.

602 1) $\sin\left(\arccos\frac{2}{3}\right)$; 2) $\sin\left(\arccos\left(-\frac{1}{2}\right)\right)$.

603 1) $\sin\left(\arcsin\frac{1}{3} + \arccos\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)$; 2) $\cos\left(\arcsin\frac{3}{5} + \arccos\frac{4}{5}\right)$.

604 Решить уравнение:

1) $\arcsin\left(\frac{x}{2} - 3\right) = \frac{\pi}{6}$; 2) $\arcsin(3 - 2x) = -\frac{\pi}{4}$.

605 Доказать, что если $0 \leqslant a \leqslant 1$, то $2\arcsin a = \arccos(1 - 2a^2)$.

606 С помощью микрокалькулятора решить уравнение:
1) $\sin x = 0{,}65$; 2) $\sin x = -0{,}31$.

§ 35 Уравнение $\operatorname{tg} x = a$

Из определения тангенса следует, что $\operatorname{tg} x$ может принимать любое действительное значение. Поэтому уравнение $\operatorname{tg} x = a$ имеет корни при любом значении a.

Задача 1 Решить уравнение $\operatorname{tg} x = \sqrt{3}$.

▶ Построим углы, тангенсы которых равны $\sqrt{3}$. Для этого проведём через точку P (рис. 76) прямую, перпендикулярную PO, и отложим отре-

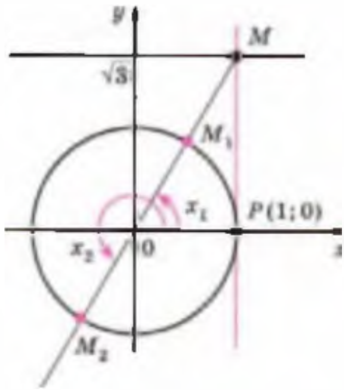


Рис. 76

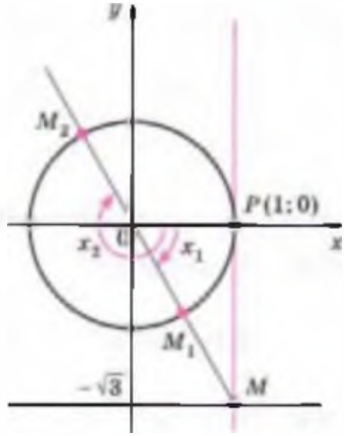


Рис. 77

зок $PM = \sqrt{3}$; через точки M и O проведём прямую. Эта прямая пересекает единичную окружность в двух диаметрально противоположных точках M_1 и M_2. Из прямоугольного треугольника POM находим $\frac{PM}{PO} = \frac{\sqrt{3}}{1} = \sqrt{3} = \operatorname{tg} x_1$, откуда $x_1 = \frac{\pi}{3}$. Таким образом, точка M_1 получается из точки $P\,(1;\,0)$ поворотом вокруг начала координат на угол $\frac{\pi}{3}$, а также на углы $x = \frac{\pi}{3} + 2\pi k$, где $k = \pm1, \pm2, \ldots$.

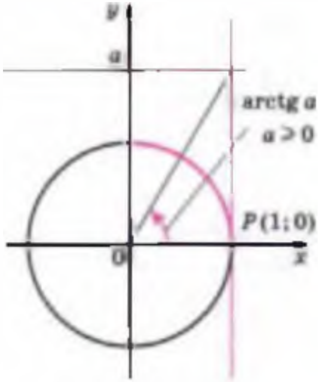
Точка M_2 получается поворотом точки $P\,(1;\,0)$ на угол $x_2 = \frac{\pi}{3} + \pi$, а также на углы $x = \frac{\pi}{3} + \pi + 2\pi k$, где $k = \pm1, \pm2, \ldots$.

Итак, корни уравнения $\operatorname{tg} x = \sqrt{3}$ можно найти по формулам $x = \frac{\pi}{3} + 2\pi k$, $x = \frac{\pi}{3} + \pi\,(2k+1)$, $k \in \mathbb{Z}$. Эти формулы объединяются в одну:

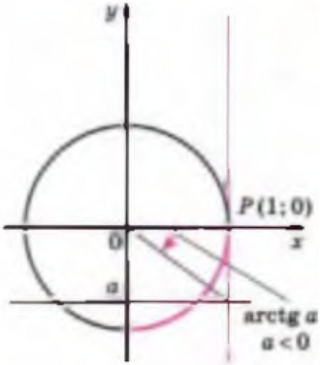
$$x = \frac{\pi}{3} + \pi n,\ n \in \mathbb{Z}. \triangleleft$$

Задача 2 **Решить уравнение $\operatorname{tg} x = -\sqrt{3}$.**

▶ Углы, тангенсы которых равны $-\sqrt{3}$, указаны на рисунке 77, где $PM \perp PO$, $PM = \sqrt{3}$. Из прямоугольного треугольника POM находим $\angle POM = \frac{\pi}{3}$,



а)



б)

Рис. 78

т. е. $x_1 = -\frac{\pi}{3}$. Таким образом, точка M_1 получается поворотом точки $P(1;\ 0)$ вокруг начала координат на угол $x_1 = -\frac{\pi}{3}$, а также на углы $x = -\frac{\pi}{3} + 2\pi k$, где $k = \pm 1, \pm 2, \ldots$. Точка M_2 получается поворотом точки $P(1;\ 0)$ на углы $x = -\frac{\pi}{3} + \pi(2k+1)$, $k \in \mathbf{Z}$. Поэтому корни уравнения $\operatorname{tg} x = -\sqrt{3}$ можно найти по формуле

$$x = -\frac{\pi}{3} + \pi n,\ n \in \mathbf{Z}. \lhd$$

Итак, каждое из уравнений $\operatorname{tg} x = \sqrt{3}$ и $\operatorname{tg} x = -\sqrt{3}$ имеет бесконечное множество корней. На интервале $\left(-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right)$ каждое из этих уравнений имеет только один корень: $x_1 = \frac{\pi}{3}$ — корень уравнения $\operatorname{tg} x = \sqrt{3}$ и $x_1 = -\frac{\pi}{3}$ — корень уравнения $\operatorname{tg} x = -\sqrt{3}$. Число $\frac{\pi}{3}$ называют арктангенсом числа $\sqrt{3}$ и записывают $\operatorname{arctg} \sqrt{3} = \frac{\pi}{3}$; число $-\frac{\pi}{3}$ называют арктангенсом числа $-\sqrt{3}$ и пишут $\operatorname{arctg}(-\sqrt{3}) = -\frac{\pi}{3}$. Вообще, уравнение $\operatorname{tg} x = a$ для любого $a \in \mathbf{R}$ имеет на интервале $\left(-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right)$ только один корень. Если $a \geqslant 0$, то корень заключён в промежутке $\left[0;\ \frac{\pi}{2}\right)$; если $a < 0$, то в промежутке $\left(-\frac{\pi}{2};\ 0\right)$. Этот корень называют *арктангенсом числа* a и обозначают $\operatorname{arctg} a$ (рис. 78).

Арктангенсом числа $a \in \mathbf{R}$ называется такое число $\alpha \in \left(-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right)$, тангенс которого равен a:

$$\operatorname{arctg} a = \alpha, \text{ если } \operatorname{tg} \alpha = a \text{ и } -\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2}. \qquad (1)$$

Например, $\operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{4}$, так как $\operatorname{tg}\frac{\pi}{4} = 1$ и $-\frac{\pi}{2} < \frac{\pi}{4} < \frac{\pi}{2}$; $\operatorname{arctg}\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = -\frac{\pi}{6}$, так как $\operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ и $-\frac{\pi}{2} < -\frac{\pi}{6} < \frac{\pi}{2}$.

Аналогично тому, как это сделано при решении задач 1 и 2, можно показать, что все корни уравнения $\operatorname{tg} x = a$, где $a \in \boldsymbol{R}$, выражаются формулой

$$x = \operatorname{arctg} a + \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}. \qquad (2)$$

Задача 3 Решить уравнение $\operatorname{tg} x = 2$.

▶ По формуле (2) находим

$$x = \operatorname{arctg} 2 + \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}. \ \triangleleft$$

Значение $\operatorname{arctg} 2$ можно приближённо найти из рисунка 79, измеряя угол POM транспортиром.

Приближённые значения арктангенса можно также найти по таблицам или с помощью микрокалькулятора:

$$\operatorname{arctg} 2 \approx 1{,}11.$$

Задача 4* Решить уравнение $(\operatorname{tg} x + 4)(\operatorname{ctg} x - \sqrt{3}) = 0$.

▶ 1) $\operatorname{tg} x + 4 = 0$, $\operatorname{tg} x = -4$, $x = \operatorname{arctg}(-4) + \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

При этих значениях x первый множитель левой части исходного уравнения обращается в нуль, а второй не теряет смысла, так как из равенства $\operatorname{tg} x = -4$ следует, что $\operatorname{ctg} x = -\frac{1}{4}$. Следовательно, найденные значения x являются корнями исходного уравнения.

2) $\operatorname{ctg} x - \sqrt{3} = 0$, $\operatorname{ctg} x = \sqrt{3}$,

$\operatorname{tg} x = \frac{1}{\sqrt{3}}$, $\quad x = \operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{3}} + \pi n = \frac{\pi}{6} + \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

Эти значения x также являются корнями исходного уравнения, так как при этом второй множитель левой части уравнения равен нулю, а первый не теряет смысла.

Ответ $x = \operatorname{arctg}(-4) + \pi n$,

$x = \frac{\pi}{6} + \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$. $\triangleleft$

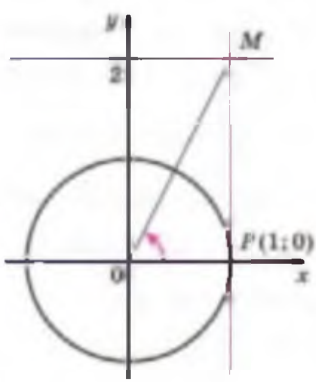


Рис. 79

Можно доказать, что для любого $a \in R$ справедлива формула

$$\operatorname{arctg}(-a) = -\operatorname{arctg} a. \qquad (3)$$

Эта формула позволяет находить значения арктангенсов отрицательных чисел через значения арктангенсов положительных чисел. Например:

$$\operatorname{arctg}(-\sqrt{3}) = -\operatorname{arctg}\sqrt{3} = -\frac{\pi}{3},$$

$$\operatorname{arctg}(-1) = -\operatorname{arctg} 1 = -\frac{\pi}{4}.$$

Упражнения

Вычислить (607—608).

607 1) $\operatorname{arctg} 0$; 2) $\operatorname{arctg}(-1)$; 3) $\operatorname{arctg}\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$; 4) $\operatorname{arctg}\sqrt{3}$.

608 1) $6\operatorname{arctg}\sqrt{3} - 4\arcsin\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$;

2) $2\operatorname{arctg} 1 + 3\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right)$;

3) $5\operatorname{arctg}(-\sqrt{3}) - 3\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

609 Сравнить числа:

1) $\operatorname{arctg}(-1)$ и $\arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$; 2) $\operatorname{arctg}\sqrt{3}$ и $\arccos\frac{1}{2}$;

3) $\operatorname{arctg}(-3)$ и $\operatorname{arctg} 2$; 4) $\operatorname{arctg}(-5)$ и $\operatorname{arctg} 0$.

Решить уравнение (610—612).

610 1) $\operatorname{tg} x = \frac{1}{\sqrt{3}}$; 2) $\operatorname{tg} x = \sqrt{3}$; 3) $\operatorname{tg} x = -\sqrt{3}$;

4) $\operatorname{tg} x = -1$; 5) $\operatorname{tg} x = 4$; 6) $\operatorname{tg} x = -5$.

611 1) $\operatorname{tg} 3x = 0$; 2) $1 + \operatorname{tg}\frac{x}{3} = 0$; 3) $\sqrt{3} + \operatorname{tg}\frac{x}{6} = 0$.

612 1) $(\operatorname{tg} x - 1)(\operatorname{tg} x + \sqrt{3}) = 0$;

2) $(\sqrt{3}\operatorname{tg} x + 1)(\operatorname{tg} x - \sqrt{3}) = 0$;

3) $(\operatorname{tg} x - 2)(2\cos x - 1) = 0$;

4) $(\operatorname{tg} x - 4{,}5)(1 + 2\sin x) = 0$;

5) $(\operatorname{tg} x + 4)\left(\operatorname{tg}\frac{x}{2} - 1\right) = 0$;

6) $\left(\operatorname{tg}\frac{x}{6} + 1\right)(\operatorname{tg} x - 1) = 0$.

613 Найти наименьший положительный и наибольший отрицательный корни уравнения $3 \operatorname{tg} x - \sqrt{3} = 0$.

614 Решить уравнение:

1) $\operatorname{arctg}(5x - 1) = \frac{\pi}{4}$; 2) $\operatorname{arctg}(3 - 5x) = -\frac{\pi}{3}$.

615 Доказать, что $\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} a) = a$ при любом a. Вычислить:

1) $\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} 2{,}1)$; 2) $\operatorname{tg}(\operatorname{arctg}(-0{,}3))$;

3) $\operatorname{tg}(\pi - \operatorname{arctg} 7)$; 4) $\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2} + \operatorname{arctg} 6\right)$.

616 Доказать, что $\operatorname{arctg}(\operatorname{tg} \alpha) = \alpha$ при $-\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2}$. Вычислить:

1) $3 \operatorname{arctg}\left(\operatorname{tg} \frac{\pi}{4}\right)$; 2) $4 \operatorname{arctg}(\operatorname{tg} 0{,}5)$;

3) $\operatorname{arctg}\left(\operatorname{tg} \frac{7\pi}{8}\right)$; 4) $\operatorname{arctg}(\operatorname{tg} 13)$.

617 Вычислить:

1) $\operatorname{arctg}\left(\operatorname{ctg} \frac{5\pi}{6}\right)$; 2) $\operatorname{arctg}\left(\operatorname{ctg} \frac{3\pi}{4}\right)$;

3) $\operatorname{arctg}\left(2 \sin \frac{5\pi}{6}\right)$; 4) $\operatorname{arctg}\left(2 \sin \frac{\pi}{3}\right)$.

618 Доказать, что при любом действительном значении a справедливо равенство $\cos(\operatorname{arctg} a) = \frac{1}{\sqrt{1 + a^2}}$.

619 С помощью микрокалькулятора решить уравнение:

1) $\operatorname{tg} x = 9$; 2) $\operatorname{tg} x = -7{,}8$.

§ 36 Решение тригонометрических уравнений

В предыдущих параграфах были выведены формулы корней простейших тригонометрических уравнений $\sin x = a$, $\cos x = a$, $\operatorname{tg} x = a$. К этим уравнениям сводятся другие тригонометрические уравнения. Для решения большинства таких уравнений требуется применение различных формул и преобразований тригонометрических выражений. Рассмотрим некоторые примеры решения тригонометрических уравнений.

1. Уравнения, сводящиеся к квадратным.

Задача 1 Решить уравнение $\sin^2 x + \sin x - 2 = 0$.

▶ Это уравнение является квадратным относительно $\sin x$. Обозначив $\sin x = y$, получим уравнение $y^2 + y - 2 = 0$. Его корни $y_1 = 1$, $y_2 = -2$. Таким образом, решение исходного уравнения свелось к решению простейших уравнений $\sin x = 1$ и $\sin x = -2$.

Уравнение $\sin x = 1$ имеет корни $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $n \in \mathbf{Z}$; уравнение $\sin x = -2$ не имеет корней.

Ответ $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $n \in \mathbf{Z}$. ◁

Задача 2 Решить уравнение $2\cos^2 x - 5\sin x + 1 = 0$.

▶ Заменяя $\cos^2 x$ на $1 - \sin^2 x$, получаем

$$2(1 - \sin^2 x) - 5\sin x + 1 = 0, \text{ или}$$
$$2\sin^2 x + 5\sin x - 3 = 0.$$

Обозначая $\sin x = y$, получаем $2y^2 + 5y - 3 = 0$, откуда $y_1 = -3$, $y_2 = \frac{1}{2}$.

1) $\sin x = -3$ — уравнение не имеет корней, так как $|-3| > 1$;

2) $\sin x = \frac{1}{2}$, $x = (-1)^n \arcsin \frac{1}{2} + \pi n = (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n$, $n \in \mathbf{Z}$.

Ответ $x = (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n$, $n \in \mathbf{Z}$. ◁

Задача 3 Решить уравнение $2\sin^2 x - \cos x - 1 = 0$.

▶ Используя формулу $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$, получаем

$$2(1 - \cos^2 x) - \cos x - 1 = 0,$$
$$2\cos^2 x + \cos x - 1 = 0, \ \cos x = y,$$
$$2y^2 - y - 1 = 0, \ y_1 = 1, \ y_2 = -\frac{1}{2}.$$

1) $\cos x = 1$, $x = 2\pi n$, $n \in \mathbf{Z}$;

2) $\cos x = -\frac{1}{2}$, $x = \pm\arccos\left(-\frac{1}{2}\right) + 2\pi n =$

$$= \pm\left(\pi - \arccos\frac{1}{2}\right) + 2\pi n = \pm\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) + 2\pi n =$$

$$= \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi n, \quad n \in \boldsymbol{Z}.$$

Ответ $x = 2\pi n,\ x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}.$ ◁

Задача 4 Решить уравнение $\operatorname{tg} x - 2 \operatorname{ctg} x + 1 = 0$.

▶ Так как $\operatorname{ctg} x = \frac{1}{\operatorname{tg} x}$, то уравнение можно записать в виде

$$\operatorname{tg} x - \frac{2}{\operatorname{tg} x} + 1 = 0.$$

Умножая обе части уравнения на $\operatorname{tg} x$, получаем

$$\operatorname{tg}^2 x + \operatorname{tg} x - 2 = 0,$$

$$\operatorname{tg} x = y,\ y^2 + y - 2 = 0,\ y_1 = 1,\ y_2 = -2.$$

1) $\operatorname{tg} x = 1,\ x = \frac{\pi}{4} + \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}$;

2) $\operatorname{tg} x = -2,\ x = \operatorname{arctg}(-2) + \pi n = -\operatorname{arctg} 2 + \pi n,$ $n \in \boldsymbol{Z}$.

Отметим, что левая часть исходного уравнения имеет смысл, если $\operatorname{tg} x \neq 0$ и $\operatorname{ctg} x \neq 0$. Так как для найденных корней $\operatorname{tg} x \neq 0$ и $\operatorname{ctg} x \neq 0$, то исходное уравнение равносильно уравнению

$$\operatorname{tg}^2 x + \operatorname{tg} x - 2 = 0.$$

Ответ $x = \frac{\pi}{4} + \pi n,\ x = -\operatorname{arctg} 2 + \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}.$ ◁

Задача 5 Решить уравнение $3\cos^2 6x + 8 \sin 3x \cos 3x - 4 = 0$.

▶ Используя формулы

$$\sin^2 6x + \cos^2 6x = 1,\quad \sin 6x = 2 \sin 3x \cos 3x,$$

преобразуем уравнение:

$$3(1 - \sin^2 6x) + 4 \sin 6x - 4 = 0,$$

$$3\sin^2 6x - 4 \sin 6x + 1 = 0.$$

Обозначим $\sin 6x = y$, получим уравнение

$$3y^2 - 4y + 1 = 0,\ \text{откуда}\ y_1 = 1,\ y_2 = \frac{1}{3}.$$

1) $\sin 6x = 1,\ 6x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n,\ x = \frac{\pi}{12} + \frac{\pi n}{3},\ n \in \boldsymbol{Z}$;

2) $\sin 6x = \frac{1}{3},\ 6x = (-1)^n \arcsin\frac{1}{3} + \pi n,$

$$x = \frac{(-1)^n}{6} \arcsin\frac{1}{3} + \frac{\pi n}{6},\ n \in \boldsymbol{Z}.$$

Ответ $x = \frac{\pi}{12} + \frac{\pi n}{3},\ x = \frac{(-1)^n}{6} \arcsin\frac{1}{3} + \frac{\pi n}{6},\ n \in \boldsymbol{Z}.$ ◁

2. Уравнение $a \sin x + b \cos x = c$.

Задача 6 Решить уравнение $2 \sin x - 3 \cos x = 0$.

▶ Поделив уравнение на $\cos x$, получим $2 \operatorname{tg} x - 3 = 0$, $\operatorname{tg} x = \frac{3}{2}$, $x = \operatorname{arctg} \frac{3}{2} + \pi n$, $n \in \mathbf{Z}$. ◁

При решении этой задачи обе части уравнения $2 \sin x - 3 \cos x = 0$ были поделены на $\cos x$. Напомним, что при делении уравнения на выражение, содержащее неизвестное, могут быть потеряны корни. Поэтому нужно проверить, не являются ли корни уравнения $\cos x = 0$ корнями данного уравнения. Если $\cos x = 0$, то из уравнения $2 \sin x - 3 \cos x = 0$ следует, что $\sin x = 0$. Однако $\sin x$ и $\cos x$ не могут одновременно равняться нулю, так как они связаны равенством $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$. Следовательно, при делении уравнения $a \sin x + b \cos x = 0$, где $a \neq 0$, $b \neq 0$, на $\cos x$ (или $\sin x$) получаем уравнение, равносильное данному.

Задача 7 Решить уравнение $2 \sin x + \cos x = 2$.

▶ Используя формулы $\sin x = 2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}$, $\cos x = \cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2}$ и записывая правую часть уравнения в виде $2 = 2 \cdot 1 = 2\left(\sin^2 \frac{x}{2} + \cos^2 \frac{x}{2}\right)$, получаем

$$4 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} + \cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2} = 2 \sin^2 \frac{x}{2} + 2 \cos^2 \frac{x}{2},$$

$$3 \sin^2 \frac{x}{2} - 4 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} + \cos^2 \frac{x}{2} = 0.$$

Поделив это уравнение на $\cos^2 \frac{x}{2}$, получим равносильное уравнение $3 \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2} - 4 \operatorname{tg} \frac{x}{2} + 1 = 0$. Обозначая $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = y$, получаем уравнение $3y^2 - 4y + 1 = 0$, откуда $y_1 = 1$, $y_2 = \frac{1}{3}$.

1) $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = 1$, $\frac{x}{2} = \frac{\pi}{4} + \pi n$, $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $n \in \mathbf{Z}$;

2) $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = \frac{1}{3}$, $\frac{x}{2} = \operatorname{arctg} \frac{1}{3} + \pi n$, $x = 2 \operatorname{arctg} \frac{1}{3} + 2\pi n$, $n \in \mathbf{Z}$.

Ответ $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $x = 2 \operatorname{arctg} \frac{1}{3} + 2\pi n$, $n \in \mathbf{Z}$. ◁

Уравнение, рассмотренное в задаче 7, является уравнением вида

$$a \sin x + b \cos x = c, \qquad (1)$$

где $a \neq 0$, $b \neq 0$, $c \neq 0$, которое можно решить другим способом (при условии, что $c^2 \leqslant a^2 + b^2$). Разделим обе части этого уравнения на $\sqrt{a^2 + b^2}$:

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \sin x + \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \cos x = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}. \qquad (2)$$

Введём вспомогательный аргумент φ, такой, что

$$\cos \varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}, \quad \sin \varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

Такое число φ существует, так как

$$\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2 + \left(\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2 = 1.$$

Таким образом, уравнение (2) можно записать в виде $\sin x \cos \varphi + \cos x \sin \varphi = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$, откуда

$$\sin (x + \varphi) = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}. \qquad (3)$$

Изложенный метод преобразования уравнения (1) к простейшему тригонометрическому уравнению (3) называется *методом введения вспомогательного угла*.

Задача 8 Решить уравнение $4 \sin x + 3 \cos x = 5$.

▶ Здесь $a = 4$, $b = 3$, $\sqrt{a^2 + b^2} = 5$.

Поделим обе части уравнения на 5:

$$\frac{4}{5} \sin x + \frac{3}{5} \cos x = 1.$$

Введём вспомогательный аргумент φ, такой, что $\cos \varphi = \frac{4}{5}$, $\sin \varphi = \frac{3}{5}$. Исходное уравнение можно записать в виде

$$\sin x \cos \varphi + \cos x \sin \varphi = 1, \quad \sin (x + \varphi) = 1,$$

откуда $x + \varphi = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$, где $\varphi = \arccos \frac{4}{5}$.

$$x = \frac{\pi}{2} - \arccos \frac{4}{5} + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Ответ $x = \frac{\pi}{2} - \arccos \frac{4}{5} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$. ◀

3. Уравнения, решаемые разложением левой части на множители.

Многие тригонометрические уравнения, правая часть которых равна нулю, решаются разложением их левой части на множители.

Задача 9 Решить уравнение $\sin 2x - \sin x = 0$.

▶ Используя формулу синуса двойного аргумента, запишем уравнение в виде $2\sin x\cos x - \sin x = 0$. Вынося общий множитель $\sin x$ за скобки, получаем $\sin x\,(2\cos x - 1) = 0$.

1) $\sin x = 0$, $x = \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$;

2) $2\cos x - 1 = 0$, $\cos x = \frac{1}{2}$, $x = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

Ответ $x = \pi n$, $x = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$. ◁

Задача 10 Решить уравнение $\cos 3x + \sin 5x = 0$.

▶ Используя формулу приведения $\sin\alpha = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$, запишем уравнение в виде $\cos 3x + \cos\left(\frac{\pi}{2} - 5x\right) = 0$.

Используя формулу суммы косинусов, получаем

$$2\cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right)\cos\left(4x - \frac{\pi}{4}\right) = 0.$$

1) $\cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = 0$, $x - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + \pi n$, $x = \frac{3}{4}\pi + \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$;

2) $\cos\left(4x - \frac{\pi}{4}\right) = 0$, $4x - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + \pi n$, $x = \frac{3}{16}\pi + \frac{\pi n}{4}$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

Ответ $x = \frac{3}{4}\pi + \pi n$, $x = \frac{3}{16}\pi + \frac{\pi n}{4}$, $n \in \boldsymbol{Z}$. ◁

Задача 11 Решить уравнение $\sin 7x + \sin 3x = 3\cos 2x$.

▶ Применяя формулу для суммы синусов, запишем уравнение в виде

$$2\sin 5x\cos 2x = 3\cos 2x,$$
$$2\sin 5x\cos 2x - 3\cos 2x = 0,$$

откуда $\cos 2x\left(\sin 5x - \frac{3}{2}\right) = 0$.

Уравнение $\cos 2x = 0$ имеет корни $x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}$, $n \in \boldsymbol{Z}$, а уравнение $\sin 5x = \frac{3}{2}$ не имеет корней.

Ответ $x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}$, $n \in \boldsymbol{Z}$. ◁

Задача 12 Решить уравнение $\cos 3x \cos x = \cos 2x$.

▶ $\cos 2x = \cos(3x - x) = \cos 3x \cos x + \sin 3x \sin x$, поэтому уравнение примет вид $\sin x \sin 3x = 0$.

1) $\sin x = 0$, $x = \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$;

2) $\sin 3x = 0$, $x = \frac{\pi n}{3}$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

Заметим, что числа πn содержатся среди чисел вида $x = \frac{\pi n}{3}$, $n \in \boldsymbol{Z}$, так как если $n = 3k$, то $\frac{\pi n}{3} = \pi k$. Следовательно, первая серия корней содержится во второй.

Ответ $x = \frac{\pi n}{3}$, $n \in \boldsymbol{Z}$. ◁

Иногда при решении тригонометрических уравнений ответ записывают в виде серий корней, имеющих общую часть.

Например, для уравнения $\cos 3x \sin 2x = 0$ ответ можно записать в виде двух серий корней:

$$x = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi n}{3}, \quad x = \frac{\pi n}{2}, \quad n \in \boldsymbol{Z}.$$

Так как все корни уравнения $\cos x = 0$ являются корнями уравнения $\cos 3x = 0$, то ответ можно записать в виде двух непересекающихся серий:

$$x = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi n}{3}, \quad x = \pi n, \quad n \in \boldsymbol{Z}.$$

Задача 13* Решить уравнение $(\operatorname{tg} x + 1)\left(2\cos\frac{x}{3} - \sqrt{3}\right) = 0$.

▶ 1) $\operatorname{tg} x + 1 = 0$, $\operatorname{tg} x = -1$, $x = -\frac{\pi}{4} + \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

Эти значения x являются корнями исходного уравнения, так как при этом первый множитель левой части равен нулю, а второй не теряет смысла.

2) $2\cos\frac{x}{3} - \sqrt{3} = 0$, $\quad \cos\frac{x}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\quad \frac{x}{3} = \pm\frac{\pi}{6} + 2\pi n$,

$x = \pm\frac{\pi}{2} + 6\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

При этих значениях x второй множитель левой части исходного уравнения равен нулю, а первый не имеет смысла. Поэтому эти значения не являются корнями исходного уравнения.

Ответ $x = -\frac{\pi}{4} + \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$. ◁

Задача 14* Решить уравнение $6\sin^2 x + 2\sin^2 2x = 5$.

▶ Выразим $\sin^2 x$ через $\cos 2x$. Так как $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$, то $\cos 2x = (1 - \sin^2 x) - \sin^2 x$, $\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$, откуда $\sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)$.

Поэтому исходное уравнение можно записать так:

$$3(1-\cos 2x)+2(1-\cos^2 2x)=5,$$

или $2\cos^2 2x+3\cos 2x=0$, откуда

$$\cos 2x\,(2\cos 2x+3)=0.$$

1) $\cos 2x=0,\ x=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2},\ n\in Z;$

2) уравнение $\cos 2x=-\frac{3}{2}$ корней не имеет.

Ответ $x=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2},\ n\in Z.$ ◁

Задача 15* Решить систему уравнений $\begin{cases}\sin x\cos y=-\frac{1}{2},\\ \cos x\sin y=\frac{1}{2}.\end{cases}$

▶ Складывая уравнения данной системы и вычитая из второго уравнения первое, получаем равносильную систему $\begin{cases}\sin x\cos y+\cos x\sin y=0,\\ \cos x\sin y-\sin x\cos y=1,\end{cases}$

откуда $\begin{cases}\sin(x+y)=0,\\ \sin(y-x)=1,\end{cases}$ $\begin{cases}x+y=\pi n,\\ y-x=\frac{\pi}{2}+2\pi k,\ n,k\in Z.\end{cases}$

Решая последнюю систему, находим

$$x=\frac{\pi n}{2}-\frac{\pi}{4}-\pi k=\pi\left(\frac{n}{2}-k-\frac{1}{4}\right),$$

$$y=\frac{\pi n}{2}+\frac{\pi}{4}+\pi k=\pi\left(\frac{n}{2}+k+\frac{1}{4}\right).$$

Ответ $\left(\pi\left(\frac{n}{2}-k-\frac{1}{4}\right);\ \pi\left(\frac{n}{2}+k+\frac{1}{4}\right)\right),\ n,\ k\in Z.$ ◁

Отметим, что в равенствах $\begin{cases}x+y=\pi n,\\ y-x=\frac{\pi}{2}+2\pi k\end{cases}$

буквы n и k могут принимать различные целые значения независимо друг от друга. Если в обоих равенствах написать одну букву n, то будут потеряны решения. Например:

$$\begin{cases}x+y=0,\\ y-x=\frac{\pi}{2}+2\pi,\end{cases}$$

т. е. $x=-\frac{\pi}{4}-\pi,\ y=\frac{\pi}{4}+\pi.$

Упражнения

Решить уравнение (620—644).

620 1) $\sin^2 x = \frac{1}{4}$; 2) $\cos^2 x = \frac{1}{2}$;

3) $2\sin^2 x + \sin x - 1 = 0$; 4) $2\cos^2 x + \cos x - 6 = 0$.

621 1) $2\cos^2 x - \sin x + 1 = 0$; 2) $3\cos^2 x - \sin x - 1 = 0$;

3) $4\sin^2 x - \cos x - 1 = 0$; 4) $2\sin^2 x + 3\cos x = 0$.

622 1) $\operatorname{tg}^2 x = 2$; 2) $\operatorname{tg} x = \operatorname{ctg} x$;

3) $\operatorname{tg}^2 x - 3\operatorname{tg} x - 4 = 0$; 4) $\operatorname{tg}^2 x - \operatorname{tg} x + 1 = 0$.

623 1) $1 + 7\cos^2 x = 3\sin 2x$; 2) $3 + \sin 2x = 4\sin^2 x$;

3) $\cos 2x + \cos^2 x + \sin x \cos x = 0$;

4) $3\cos 2x + \sin^2 x + 5\sin x \cos x = 0$.

624 1) $\sqrt{3}\cos x + \sin x = 0$; 2) $\cos x = \sin x$;

3) $\sin x = 2\cos x$; 4) $2\sin x + \cos x = 0$.

625 1) $\sin x - \cos x = 1$; 2) $\sin x + \cos x = 1$;

3) $\sqrt{3}\sin x + \cos x = 2$; 4) $\sin 3x + \cos 3x = \sqrt{2}$.

626 1) $\cos x = \cos 3x$; 2) $\sin 5x = \sin x$;

3) $\sin 2x = \cos 3x$; 4) $\sin x + \cos 3x = 0$.

627 1) $\cos 3x - \cos 5x = \sin 4x$; 2) $\sin 7x - \sin x = \cos 4x$;

3) $\cos x + \cos 3x = 4\cos 2x$; 4) $\sin^2 x - \cos^2 x = \cos 4x$.

628 1) $(\operatorname{tg} x - \sqrt{3})\left(2\sin\frac{x}{12} + 1\right) = 0$;

2) $\left(1 - \sqrt{2}\cos\frac{x}{4}\right)(1 + \sqrt{3}\operatorname{tg} x) = 0$;

3) $\left(2\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) - 1\right)(2\operatorname{tg} x + 1) = 0$;

4) $\left(1 + \sqrt{2}\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)\right)(\operatorname{tg} x - 3) = 0$.

629 1) $\sqrt{3}\sin x \cos x = \sin^2 x$; 2) $2\sin x \cos x = \cos x$;

3) $\sin 4x + \sin^2 2x = 0$; 4) $\sin 2x + 2\cos^2 x = 0$.

630 1) $2\sin^2 x = 1 + \frac{1}{3}\sin 4x$; 2) $2\cos^2 2x - 1 = \sin 4x$;

3) $2\cos^2 2x + 3\cos^2 x = 2$; 4) $(\sin x + \cos x)^2 = 1 + \cos x$.

631 1) $2\sin 2x - 3(\sin x + \cos x) + 2 = 0$;

2) $\sin 2x + 3 = 3\sin x + 3\cos x$;

3) $\sin 2x + 4(\sin x + \cos x) + 4 = 0$;

4) $\sin 2x + 5(\cos x + \sin x + 1) = 0$.

632 1) $1 - \cos(\pi - x) + \sin\left(\frac{\pi}{2} + \frac{x}{2}\right) = 0;$

2) $\sqrt{2}\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = (\sin x + \cos x)^2.$

633 1) $4\sin x\cos x\cos 2x = \sin^2 4x;$ 2) $1 + \cos^2 x = \sin^4 x.$

634 1) $2\cos^2 2x + 3\sin 4x + 4\sin^2 2x = 0;$

2) $1 - \sin x\cos x + 2\cos^2 x = 0;$

3) $2\sin^2 x + \frac{1}{4}\cos^3 2x = 1;$ 4) $\sin^2 2x + \cos^2 3x = 1 + 4\sin x.$

635 1) $\cos x\cos 2x = \sin x\sin 2x;$ 2) $\sin 2x\cos x = \cos 2x\sin x;$

3) $\sin 3x = \sin 2x\cos x;$ 4) $\cos 5x\cos x = \cos 4x.$

636 1) $4\sin^2 x - 5\sin x\cos x - 6\cos^2 x = 0;$

2) $3\sin^2 x - 7\sin x\cos x + 2\cos^2 x = 0;$

3) $1 - 4\sin x\cos x + 4\cos^2 x = 0;$ 4) $1 + \sin^2 x = 2\sin x\cos x.$

637 1) $4\sin 3x + \sin 5x - 2\sin x\cos 2x = 0;$

2) $6\cos 2x\sin x + 7\sin 2x = 0.$

638 1) $\sin^2 x + \sin^2 2x = \sin^2 3x;$

2) $\sin x(1 - \cos x)^2 + \cos x(1 - \sin x)^2 = 2.$

639 1) $\sin x\sin 2x\sin 3x = \frac{1}{4}\sin 4x;$

2) $\sin^4 x + \cos^4 x = \frac{1}{2}\sin^2 2x.$

640 1) $\cos^2 x + \cos^2 2x = \cos^2 3x + \cos^2 4x;$ 2) $\sin^6 x + \cos^6 x = \frac{1}{4}.$

641 1) $\frac{\cos 2x}{\cos x} + \frac{\cos x}{\cos 2x} = 1;$ 2) $\sin x + \frac{1}{\sin x} = \sin^2 x + \frac{1}{\sin^2 x}.$

642 1) $\sin x\sin 5x = 1;$ 2) $\sin x\cos 4x = -1.$

643 1) $\sqrt{5\cos x - \cos 2x} = -2\sin x;$ 2) $\sqrt{\cos x + \cos 3x} = -\sqrt{2}\cos x.$

644 1) $4|\cos x| + 3 = 4\sin^2 x;$ 2) $|\operatorname{tg} x| + 1 = \frac{1}{\cos^2 x}.$

645 Решить систему уравнений:

1) $\begin{cases}\cos(x+y) = 0,\\ \cos(x-y) = 1;\end{cases}$ 2) $\begin{cases}\sin x - \sin y = 1,\\ \sin^2 x + \cos^2 y = 1.\end{cases}$

646 Найти все значения a, при которых уравнение

$$4\sin^2 x + 2(a - 3)\cos x + 3a - 4 = 0$$

имеет корни, и решить это уравнение.

647 Найти все значения a, при которых уравнение

$$\sin^2 x - \sin x\cos x - 2\cos^2 x = a$$

не имеет корней.

§ 37* Примеры решения простейших тригонометрических неравенств

Задача 1 Решить неравенство $\cos x > \frac{1}{2}$.

▶ По определению $\cos x$ — это абсцисса точки единичной окружности. Чтобы решить неравенство $\cos x > \frac{1}{2}$, нужно выяснить, какие точки единичной окружности имеют абсциссу, большую $\frac{1}{2}$.

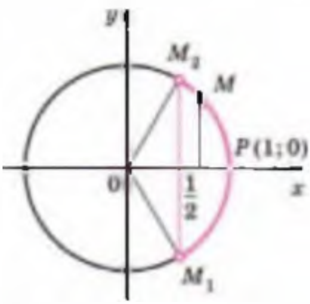


Рис. 80

Абсциссу, равную $\frac{1}{2}$, имеют две точки единичной окружности M_1 и M_2 (рис. 80).

Точка M_1 получается поворотом точки $P(1; 0)$ на угол $-\frac{\pi}{3}$, а также на углы $-\frac{\pi}{3} + 2\pi n$, где $n = \pm 1, \pm 2, \ldots$. Точка M_2 получается поворотом на угол $\frac{\pi}{3}$, а также на углы $\frac{\pi}{3} + 2\pi n$, где $n = \pm 1, \pm 2, \ldots$.

Абсциссу, большую $\frac{1}{2}$, имеют все точки M дуги единичной окружности, лежащие правее прямой M_1M_2. Таким образом, решениями неравенства $\cos x > \frac{1}{2}$ являются все числа x из промежутка $\left(-\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{3}\right)$.

Все решения данного неравенства — множество интервалов

$$\left(-\frac{\pi}{3} + 2\pi n; \frac{\pi}{3} + 2\pi n\right), \ n \in \mathbb{Z}. \ ◁$$

Задача 2 Решить неравенство $\cos x \leqslant \frac{1}{2}$.

▶ Абсциссу, не большую $\frac{1}{2}$, имеют все точки дуги M_1MM_2 единичной окружности (рис. 81). Поэто-

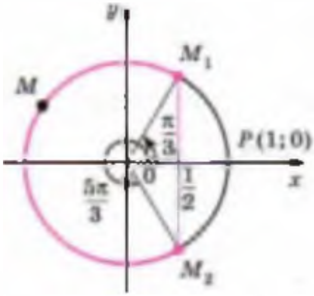


Рис. 81

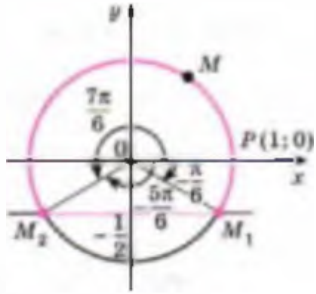


Рис. 82

му решениями неравенства $\cos x \leqslant \frac{1}{2}$ являются числа x, которые принадлежат отрезку $\left[\frac{\pi}{3}; \frac{5\pi}{3}\right]$.
Все решения данного неравенства — множество отрезков

$$\left[\frac{\pi}{3} + 2\pi n; \frac{5\pi}{3} + 2\pi n\right], \ n \in \mathbf{Z}. \ \triangleleft$$

Задача 3 Решить неравенство $\sin x \geqslant -\frac{1}{2}$.

▶ Ординату, не меньшую $-\frac{1}{2}$, имеют все точки дуги M_1MM_2 единичной окружности (рис. 82). Поэтому решениями неравенства $\sin x \geqslant -\frac{1}{2}$ являются числа x, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{\pi}{6}; \frac{7\pi}{6}\right]$. Все решения данного неравенства — множество отрезков

$$\left[-\frac{\pi}{6} + 2\pi n; \frac{7\pi}{6} + 2\pi n\right], \ n \in \mathbf{Z}. \ \triangleleft$$

Отметим, что все точки окружности, лежащие ниже прямой M_1M_2, имеют ординату, меньшую $-\frac{1}{2}$ (рис. 82). Поэтому все числа $x \in \left(-\frac{5\pi}{6}; -\frac{\pi}{6}\right)$ являются решениями неравенства $\sin x < -\frac{1}{2}$. Все решения этого неравенства — интервалы

$$\left(-\frac{5\pi}{6} + 2\pi n; -\frac{\pi}{6} + 2\pi n\right), \ n \in \mathbf{Z}.$$

Задача 4 Решить неравенство $\cos\left(\frac{x}{4}-1\right) \leqslant -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

▶ Обозначим $\frac{x}{4}-1=y$. Решая неравенство $\cos y \leqslant -\frac{\sqrt{2}}{2}$ (рис. 83), находим

$$\frac{3\pi}{4}+2\pi n \leqslant y \leqslant \frac{5\pi}{4}+2\pi n,\ n \in \mathbf{Z}.$$

Заменяя $y=\frac{x}{4}-1$, получаем

$$\frac{3\pi}{4}+2\pi n \leqslant \frac{x}{4}-1 \leqslant \frac{5\pi}{4}+2\pi n,$$

откуда

$$1+\frac{3\pi}{4}+2\pi n \leqslant \frac{x}{4} \leqslant 1+\frac{5\pi}{4}+2\pi n,$$

$$4+3\pi+8\pi n \leqslant x \leqslant 4+5\pi+8\pi n,\ n \in \mathbf{Z}.$$

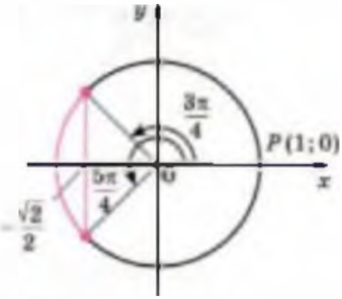


Рис. 83

Ответ $4+3\pi+8\pi n \leqslant x \leqslant 4+5\pi+8\pi n$, $n \in \mathbf{Z}$. ◁

Упражнения

Решить неравенство (648—654).

648 1) $\cos x \geqslant \frac{\sqrt{2}}{2}$; 2) $\cos x < \frac{\sqrt{3}}{2}$;

3) $\cos x > -\frac{\sqrt{3}}{2}$; 4) $\cos x \leqslant -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

649 1) $\cos x \leqslant \sqrt{3}$; 2) $\cos x < -2$; 3) $\cos x \geqslant 1$; 4) $\cos x \leqslant -1$.

650 1) $\sin x > \frac{1}{2}$; 2) $\sin x \leqslant \frac{\sqrt{2}}{2}$; 3) $\sin x \leqslant -\frac{\sqrt{2}}{2}$; 4) $\sin x > -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

651 1) $\sin x \geqslant -\sqrt{2}$; 2) $\sin x > 1$;

3) $\sin x \leqslant -1$; 4) $\sin x \geqslant 1$.

652 1) $\sqrt{2}\cos 2x \leqslant 1$; 2) $2\sin 3x > -1$;

3) $\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right) \leqslant \frac{\sqrt{2}}{2}$; 4) $\cos\left(x-\frac{\pi}{6}\right) \geqslant \frac{\sqrt{3}}{2}$.

653 1) $\cos\left(\frac{x}{3}+2\right) \geqslant \frac{1}{2}$; 2) $\sin\left(\frac{x}{4}-3\right) < -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

654 1) $\sin^2 x+2\sin x > 0$; 2) $\cos^2 x-\cos x < 0$.

Упражнения к главе VI

655 Вычислить:

1) $2 \arcsin \frac{\sqrt{3}}{2} + 3 \arcsin \left(-\frac{1}{2}\right)$;

2) $\arcsin \frac{1}{\sqrt{2}} - 4 \arcsin 1$;

3) $\arccos \left(-\frac{1}{2}\right) - \arcsin \frac{\sqrt{3}}{2}$;

4) $\arccos (-1) - \arcsin (-1)$;

5) $2 \operatorname{arctg} 1 + 3 \operatorname{arctg} \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$;

6) $4 \operatorname{arctg} (-1) + 3 \operatorname{arctg} \sqrt{3}$.

Решить уравнение (656—665).

656 1) $\cos (4 - 2x) = -\frac{1}{2}$; 2) $\cos (6 + 3x) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$;

3) $\sqrt{2} \cos \left(2x + \frac{\pi}{4}\right) + 1 = 0$; 4) $2 \cos \left(\frac{\pi}{3} - 3x\right) - \sqrt{3} = 0$.

657 1) $2 \sin \left(3x - \frac{\pi}{4}\right) + 1 = 0$; 2) $1 - \sin \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{3}\right) = 0$;

3) $3 + 4 \sin (2x + 1) = 0$; 4) $5 \sin (2x - 1) - 2 = 0$.

658 1) $(1 + \sqrt{2} \cos x)(1 - 4 \sin x \cos x) = 0$;

2) $(1 - \sqrt{2} \cos x)(1 + 2 \sin 2x \cos 2x) = 0$.

659 1) $\operatorname{tg} \left(2x + \frac{\pi}{4}\right) = -1$; 2) $\operatorname{tg} \left(3x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{3}}$;

3) $\sqrt{3} - \operatorname{tg} \left(x - \frac{\pi}{5}\right) = 0$; 4) $1 - \operatorname{tg} \left(x + \frac{\pi}{7}\right) = 0$.

660 1) $2 \sin^2 x + \sin x = 0$; 2) $3 \sin^2 x - 5 \sin x - 2 = 0$;

3) $\cos^2 x - 2 \cos x = 0$; 4) $6 \cos^2 x + 7 \cos x - 3 = 0$.

661 1) $6 \sin^2 x - \cos x + 6 = 0$; 2) $8 \cos^2 x - 12 \sin x + 7 = 0$.

662 1) $\operatorname{tg}^2 x + 3 \operatorname{tg} x = 0$; 2) $2 \operatorname{tg}^2 x - \operatorname{tg} x - 3 = 0$;

3) $\operatorname{tg} x - 12 \operatorname{ctg} x + 1 = 0$; 4) $\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x = 2$.

663 1) $2 \sin 2x = 3 \cos 2x$; 2) $4 \sin 3x + 5 \cos 3x = 0$.

664 1) $5 \sin x + \cos x = 5$; 2) $4 \sin x + 3 \cos x = 6$.

665 1) $\sin 3x = \sin 5x$; 2) $\cos^2 3x - \cos 3x \cos 5x = 0$;
3) $\cos x = \cos 3x$; 4) $\sin x \sin 5x - \sin^2 5x = 0$.

Проверь себя!

1 **Найти значение выражения:**

1) $\arccos 1 + \arcsin 0$; 2) $\arccos\left(-\frac{1}{2}\right) - \arcsin \frac{\sqrt{3}}{2}$.

2 **Решить уравнение:**

1) $\sin 3x \cos x - \sin x \cos 3x = 1$;
2) $2 \cos^2 x + 5 \cos x = 3$; 3) $\operatorname{tg} x - 3 \operatorname{ctg} x = 0$;
4) $\sin 3x - \sin x = 0$; 5) $2 \sin x + \sin 2x = 0$.

Вычислить (666—667).

666 1) $\sin\left(\arccos \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$; 2) $\operatorname{tg}\left(\arccos \frac{1}{2}\right)$; 3) $\operatorname{tg}\left(\arccos \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

667 1) $\sin (4 \arcsin 1)$; 2) $\sin\left(3 \arcsin \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$;
3) $\cos (6 \arcsin 1)$; 4) $\operatorname{tg}\left(4 \arcsin \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

Решить уравнение (668—675).

668 1) $\sin 2x + 2 \cos 2x = 1$;
2) $\cos 2x + 3 \sin 2x = 3$.

669 1) $3 \sin^2 x + \sin x \cos x - 2 \cos^2 x = 0$;
2) $2 \sin^2 x + 3 \sin x \cos x - 2 \cos^2 x = 0$.

670 1) $1 + 2 \sin x = \sin 2x + 2 \cos x$;
2) $1 + 3 \cos x = \sin 2x + 3 \sin x$.

671 1) $\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) + \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = 1 + \cos 2x$;
2) $\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \sin 2x$.

672 1) $\cos^3 x \sin x - \sin^3 x \cos x = \frac{1}{4}$;
2) $\sin^3 x \cos x + \cos^3 x \sin x = \frac{1}{4}$.

673 1) $\sin^2 x + \sin^2 2x = 1$; 2) $\sin^2 x + \cos^2 2x = 1$;
3) $\sin 4x = 6 \cos^2 2x - 4$; 4) $2 \cos^2 3x + \sin 5x = 1$.

674 1) $\sin^2 x - \cos x \cos 3x = \frac{1}{4}$;

2) $\sin 3x = 3 \sin x$;

3) $3 \cos 2x - 7 \sin x = 4$;

4) $1 + \cos x + \cos 2x = 0$;

5) $5 \sin 2x + 4 \cos^3 x - 8 \cos x = 0$.

675 1) $\sin x + \sin 2x + \sin 3x = 0$;

2) $\cos x - \cos 3x = \cos 2x - \cos 4x$.

Вычислить (676—677).

676 1) $\sin\left(\arcsin \frac{1}{3}\right)$; 2) $\sin\left(\arcsin\left(-\frac{1}{4}\right)\right)$;

3) $\sin\left(\pi - \arcsin \frac{3}{4}\right)$; 4) $\sin\left(\pi + \arcsin \frac{2}{3}\right)$.

677 1) $\operatorname{tg}\left(\pi + \operatorname{arctg} \frac{5}{4}\right)$; 2) $\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} 2\right)$.

Решить уравнение (678—684).

678 1) $\frac{\sin 2x}{\sin x} = 0$; 2) $\frac{\sin 3x}{\sin x} = 0$; 3) $\frac{\cos 2x}{\cos x} = 0$;

4) $\frac{\cos 3x}{\cos x} = 0$; 5) $\frac{\sin x}{\sin 5x} = 0$; 6) $\frac{\cos x}{\cos 7x} = 0$.

679 1) $\cos x \sin 5x = -1$; 2) $\sin x \cos 3x = -1$.

680 1) $2 \cos 3x = 3 \sin x + \cos x$; 2) $\cos 3x - \cos 2x = \sin 3x$.

681 1) $\sin 2x + \cos 2x = 2 \operatorname{tg} x + 1$; 2) $\sin 2x - \cos 2x = \operatorname{tg} x$.

682 $\cos^2 x + \cos^2 2x + \cos^2 3x = \frac{3}{2}$.

683 $\sqrt{-4 \cos x \cos 2x} = \sqrt{7 \sin 2x}$.

684 $|\cos x| - \cos 3x = \sin 2x$.

Решить систему уравнений (685—686).

685 1) $\begin{cases} \sin y \cos y = \frac{1}{2}, \\ \sin 2x + \sin 2y = 0; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \sin x + \sin y = 1, \\ \cos x - \cos y = \sqrt{3}. \end{cases}$

686 1) $\begin{cases} \frac{\sin x}{\sin y} = \frac{5}{3}, \\ \frac{\cos x}{\cos y} = \frac{1}{3}; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \sin x \cos y = \frac{1}{2}, \\ \cos x \sin y = -\frac{1}{2}. \end{cases}$

687 При каких значениях a уравнение

$$\sin^4 x + \cos^4 x = a$$

имеет корни? Найти эти корни.

688 Найти все значения a, при которых уравнение

$$\sin^{10} x + \cos^{10} x = a$$

имеет корни.

689 Найти все значения a, при которых уравнение

$$\sin 2x - 2a\sqrt{2}(\sin x + \cos x) + 1 - 6a^2 = 0$$

имеет корни, и решить это уравнение.

690 Решить неравенство:

1) $2\cos^2 x + \sin x - 1 < 0$;
2) $2\sin^2 x - 5\cos x + 1 > 0$.

VII
глава

Тригонометрические функции

Я не мог понять содержание вашей статьи, так как она не оживлена иксами и игреками.

У. Томсон

§ 38 Область определения и множество значений тригонометрических функций

Известно, что каждому действительному числу x соответствует единственная точка единичной окружности, получаемая поворотом точки (1; 0) на угол x рад. Для этого угла определены $\sin x$ и $\cos x$. Тем самым каждому действительному числу x поставлены в соответствие числа $\sin x$ и $\cos x$, т. е. на множестве R всех действительных чисел определены функции

$$y = \sin x \quad \text{и} \quad y = \cos x.$$

Областью определения функций $y = \sin x$ и $y = \cos x$ является множество R всех действительных чисел.

Чтобы найти множество значений функции $y = \sin x$, нужно выяснить, какие значения может принимать y при различных значениях x, т. е. установить, для каких значений y существуют такие значения x, при которых $\sin x = y$. Известно, что уравнение $\sin x = a$ имеет корни, если $|a| \leqslant 1$, и не имеет корней, если $|a| > 1$.

Множеством значений функции $y = \sin x$ является отрезок $[-1; 1]$.
Множеством значений функции $y = \cos x$ также является отрезок $[-1; 1]$.

Функции $y = \sin x$ и $y = \cos x$ являются ограниченными.

Задача 1 Найти область определения функции

$$y = \frac{1}{\sin x + \cos x}.$$

▶ Найдём значения x, при которых выражение $\frac{1}{\sin x + \cos x}$ не имеет смысла, т. е. значения x, при которых знаменатель равен нулю. Решая уравнение $\sin x + \cos x = 0$, находим $\operatorname{tg} x = -1$, $x = -\frac{\pi}{4} + \pi n$, $n \in \mathbf{Z}$. Следовательно, областью определения данной функции являются все значения $x \neq -\frac{\pi}{4} + \pi n$, $n \in \mathbf{Z}$. ◁

Задача 2 Найти множество значений функции

$$y = 3 + \sin x \cos x.$$

▶ Нужно выяснить, какие значения может принимать y при различных значениях x, т. е. установить, для каких значений a уравнение $3 + \sin x \cos x = a$ имеет корни. Применяя формулу синуса двойного угла, запишем уравнение так: $3 + \frac{1}{2} \sin 2x = a$, откуда $\sin 2x = 2a - 6$. Это уравнение имеет корни, если $|2a - 6| \leqslant 1$, т. е. $-1 \leqslant 2a - 6 \leqslant 1$, откуда $5 \leqslant 2a \leqslant 7$, $2{,}5 \leqslant a \leqslant 3{,}5$. Следовательно, множеством значений данной функции является отрезок $[2{,}5; 3{,}5]$. ◁

Функция $y = \operatorname{tg} x$ определяется формулой $y = \frac{\sin x}{\cos x}$. Эта функция определена при тех значениях x, для которых $\cos x \neq 0$.

Известно, что $\cos x = 0$ при $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in \mathbf{Z}$.

Областью определения функции $y = \operatorname{tg} x$ является множество чисел $x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in \mathbf{Z}$.

Множеством значений функции $y = \operatorname{tg} x$ является множество $\mathbf{R}$ всех действительных чисел, так как уравнение $\operatorname{tg} x = a$ имеет корни при любом действительном значении a.

Функции $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \operatorname{tg} x$ называются *тригонометрическими функциями*.

Задача 3 Найти область определения функции

$$y = \sin 3x + \operatorname{tg} 2x.$$

▶ Нужно выяснить, при каких значениях x выражение $\sin 3x + \operatorname{tg} 2x$ имеет смысл. Выражение $\sin 3x$ имеет смысл при любом значении x, а выражение $\operatorname{tg} 2x$ — при $2x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$, т. е. при $x \neq \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}$, $n \in \mathbb{Z}$. Следовательно, областью определения данной функции является множество действительных чисел $x \neq \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}$, $n \in \mathbb{Z}$. ◁

Задача 4* Найти множество значений функции

$$y = 3 \sin x + 4 \cos x.$$

▶ Выясним, при каких значениях a уравнение $3 \sin x + 4 \cos x = a$ имеет корни. Поделим уравнение на $\sqrt{3^2 + 4^2} = 5$:

$$\frac{3}{5} \sin x + \frac{4}{5} \cos x = \frac{a}{5}.$$

Так как $0 < \frac{3}{5} < 1$, то можно найти такой угол α первой четверти, $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, что $\cos \alpha = \frac{3}{5}$ $\left(\text{этот угол } \alpha = \arccos \frac{3}{5}\right)$. Тогда $\sin^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha = 1 - \frac{9}{25} = \frac{16}{25}$, откуда $\sin \alpha = \frac{4}{5}$, так как $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$. Уравнение примет вид $\sin x \cos \alpha + \cos x \sin \alpha = \frac{a}{5}$, т. е. $\sin (x + \alpha) = \frac{a}{5}$. Это уравнение имеет корни, если $-1 \leqslant \frac{a}{5} \leqslant 1$, т. е. $-5 \leqslant a \leqslant 5$.

Ответ $-5 \leqslant y \leqslant 5$. ◁

Упражнения

691 Найти область определения функции:

1) $y = \sin 2x$; 2) $y = \cos \frac{x}{2}$; 3) $y = \cos \frac{1}{x}$;

4) $y = \sin \frac{2}{x}$; 5) $y = \sin \sqrt{x}$; 6) $y = \cos \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}$.

692 Найти множество значений функции:

1) $y = 1 + \sin x$; 2) $y = 1 - \cos x$;

3) $y = 2\sin x + 3$; 4) $y = 1 - 4\cos 2x$;

5) $y = \sin 2x \cos 2x + 2$; 6) $y = \frac{1}{2}\sin x \cos x - 1$.

Найти область определения функции (693—695).

693 1) $y = \frac{1}{\cos x}$; 2) $y = \frac{2}{\sin x}$; 3) $y = \operatorname{tg} \frac{x}{3}$; 4) $y = \operatorname{tg} 5x$.

694 1) $y = \sqrt{\sin x + 1}$; 2) $y = \sqrt{\cos x - 1}$; 3) $y = \lg \sin x$;

4) $y = \sqrt{2\cos x - 1}$; 5) $y = \sqrt{1 - 2\sin x}$; 6) $y = \ln \cos x$.

695 1) $y = \frac{1}{2\sin^2 x - \sin x}$; 2) $y = \frac{2}{\cos^2 x - \sin^2 x}$;

3) $y = \frac{1}{\sin x - \sin 3x}$; 4) $y = \frac{1}{\cos^3 x + \cos x}$.

696 **Найти множество значений функции:**

1) $y = 2\sin^2 x - \cos 2x$; 2) $y = 1 - 8\cos^2 x \sin^2 x$;

3) $y = \frac{1 + 8\cos^2 x}{4}$; 4) $y = 10 - 9\sin^2 3x$;

5) $y = 1 - 2|\cos x|$; 6) $y = \sin x + \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$.

697 **Найти наибольшее и наименьшее значения функции**

$$y = 3\cos 2x - 4\sin 2x.$$

698 **Найти множество значений функции** $y = \sin x - 5\cos x$.

699 **Найти множество значений функции**

$$y = 10\cos^2 x - 6\sin x \cos x + 2\sin^2 x.$$

§ 39 Чётность, нечётность, периодичность тригонометрических функций

Каждая из функций $y = \sin x$ и $y = \cos x$ определена на множестве R, и для любого значения x верны равенства $\sin(-x) = -\sin x$, $\cos(-x) = \cos x$. Следовательно, $y = \sin x$ — *нечётная* функция, а $y = \cos x$ — *чётная* функция. Так как для любого значения x из области определения функции $y = \operatorname{tg} x$ верно равенство $\operatorname{tg}(-x) = -\operatorname{tg} x$, то $y = \operatorname{tg} x$ — *нечётная* функция.

Задача 1 Выяснить, является ли функция

$y = 2 + \sin x \cos\left(\frac{3\pi}{2} + x\right)$ чётной или нечётной.

▶ Функция определена на множестве R. По формуле приведения она примет вид $y = 2 + \sin^2 x$. Так как $\sin(-x) = -\sin x$, то $(\sin(-x))^2 = \sin^2 x$, т. е. $2 + \sin^2(-x) = 2 + \sin^2 x$ и $y(-x) = y(x)$, т. е. данная функция является чётной. ◁

Известно, что для любого значения x верны равенства $\sin(x + 2\pi) = \sin x$, $\cos(x + 2\pi) = \cos x$. Из этих равенств следует, что значения синуса и косинуса периодически повторяются при изменении аргумента на 2π. Такие функции называются *периодическими* с периодом 2π.

Функция $f(x)$ называется *периодической*, если существует такое число $T \neq 0$, что для любого x из области определения этой функции выполняется равенство $f(x - T) = f(x) = f(x + T)$.
Число T называется *периодом функции* $f(x)$.

Из этого определения следует, что если x принадлежит области определения функции $f(x)$, то числа $x + T$, $x - T$ и вообще числа $x + Tn$, $n \in Z$, также принадлежат области определения этой периодической функции и $f(x + Tn) = f(x)$, $n \in Z$.

Задача 2 Доказать, что число 2π является наименьшим положительным периодом функции $y = \cos x$.

▶ Пусть $T > 0$ — период косинуса, т. е. для любого x выполняется равенство $\cos(x + T) = \cos x$. Положив $x = 0$, получим $\cos T = 1$. Отсюда $T = 2\pi k$, $k \in Z$. Так как $T > 0$, то T может принимать значения 2π, 4π, 6π, ..., и поэтому период не может быть меньше 2π. ◁

Аналогично можно доказать, что наименьший положительный период функции $y = \sin x$ также равен 2π.

Задача 3 Доказать, что $f(x) = \sin 3x$ — периодическая функция с периодом $\frac{2\pi}{3}$.

▶ Если функция $f(x)$ определена на всей числовой оси, то, для того чтобы убедиться в том, что она является периодической с периодом T, достаточно показать, что для любого x верно равенство

$f(x+T)=f(x)=f(x-T)$. Данная функция определена для всех $x \in R$, и $f\left(x+\frac{2\pi}{3}\right)=\sin 3\left(x+\frac{2\pi}{3}\right)=$ $=\sin(3x+2\pi)=\sin 3x=f(x)$. Аналогично, $f\left(x-\frac{2\pi}{3}\right)=\sin(3x-2\pi)=f(x)$. ◁

Задача 4 Доказать, что функция $y=\operatorname{tg} x$ является периодической с наименьшим положительным периодом π.

▶ Если x принадлежит области определения этой функции, т. е. $x \neq \frac{\pi}{2}+\pi n$, $n \in Z$, то по формулам приведения получаем

$$\operatorname{tg}(x-\pi)=-\operatorname{tg}(\pi-x)=-(-\operatorname{tg} x)=\operatorname{tg} x,$$
$$\operatorname{tg}(x+\pi)=\operatorname{tg} x.$$

Таким образом, $\operatorname{tg}(x-\pi)=\operatorname{tg} x=\operatorname{tg}(x+\pi)$. Следовательно, π — период функции $y=\operatorname{tg} x$.
Пусть T — период тангенса, тогда $\operatorname{tg}(x+T)=\operatorname{tg} x$, откуда при $x=0$ получаем $\operatorname{tg} T=0$, $T=k\pi$, $k \in Z$. Так как наименьшее целое положительное k равно 1, то π — наименьший положительный период функции $y=\operatorname{tg} x$. ◁

Задача 5 Доказать, что $y=\operatorname{tg}\frac{x}{3}$ — периодическая функция с периодом 3π.

▶ Так как $\operatorname{tg}\frac{x+3\pi}{3}=\operatorname{tg}\left(\frac{x}{3}+\pi\right)=\operatorname{tg}\frac{x}{3}$, $\operatorname{tg}\frac{x-3\pi}{3}=$ $=\operatorname{tg}\left(\frac{x}{3}-\pi\right)=\operatorname{tg}\frac{x}{3}$, то $y=\operatorname{tg}\frac{x}{3}$ — периодическая функция с периодом 3π. ◁

Периодическими функциями описываются многие физические процессы (колебания маятника, вращение планет, переменный ток и т. д.).

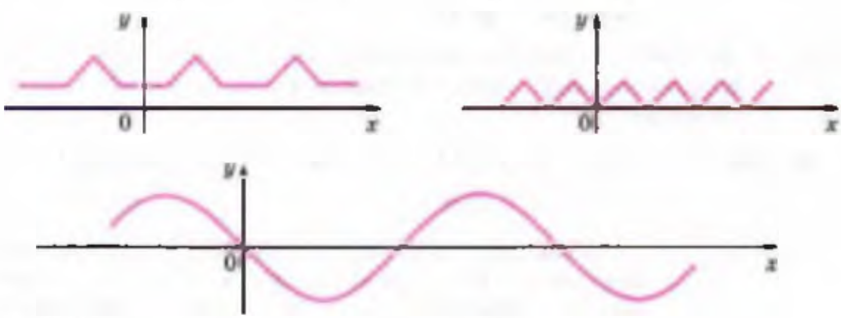


Рис. 84

На рисунке 84 изображены графики некоторых периодических функций. Отметим, что на всех последовательных отрезках числовой прямой, длина которых равна периоду, график периодической функции имеет один и тот же вид.

Упражнения

Выяснить, является ли данная функция чётной или нечётной (700—701).

700 1) $y = \cos 3x$; 2) $y = 2\sin 4x$; 3) $y = \frac{x}{2}\operatorname{tg}^2 x$;

4) $y = x\cos\frac{x}{2}$; 5) $y = x\sin x$; 6) $y = 2\sin^2 x$.

701 1) $y = \sin x + x$; 2) $y = \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) - x^2$;

3) $y = 3 - \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right)\sin(\pi - x)$;

4) $y = \frac{1}{2}\cos 2x\sin\left(\frac{3}{2}\pi - 2x\right) + 3$;

5) $y = \frac{\sin x}{x} + \sin x\cos x$; 6) $y = x^2 + \frac{1 + \cos x}{2}$.

702 Доказать, что функция $y = f(x)$ является периодической с периодом 2π, если:

1) $y = \cos x - 1$; 2) $y = \sin x + 1$; 3) $y = 3\sin x$;

4) $y = \frac{\cos x}{2}$; 5) $y = \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$; 6) $y = \cos\left(x + \frac{3\pi}{2}\right)$.

703 Доказать, что функция $y = f(x)$ является периодической с периодом T, если:

1) $y = \sin 2x$, $T = \pi$; 2) $y = \cos\frac{x}{2}$, $T = 4\pi$;

3) $y = \operatorname{tg} 2x$, $T = \frac{\pi}{2}$; 4) $y = \sin\frac{4x}{5}$, $T = \frac{5}{2}\pi$.

704 Определить, является ли данная функция чётной или нечётной:

1) $y = \frac{1 - \cos x}{1 + \cos x}$; 2) $y = \frac{\sqrt{\sin^2 x}}{1 + \cos 2x}$;

3) $y = \frac{\cos 2x - x^2}{\sin x}$; 4) $y = \frac{x^3 + \sin 2x}{\cos x}$;

5) $y = 3^{\cos x}$; 6) $y = x\,|\sin x|\sin^3 x$.

Найти наименьший положительный период функции (705—706).

705 1) $y = \cos\frac{2}{5}x$; 2) $y = \sin\frac{3}{2}x$; 3) $y = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$; 4) $y = |\sin x|$.

706 1) $y = \sin x + \cos x$; 2) $y = \sin x + \operatorname{tg} x$.

707 Пусть функция $f(x)$ определена на всей числовой прямой. Доказать, что:
1) $f(x) + f(-x)$ — чётная функция;
2) $f(x) - f(-x)$ — нечётная функция.

§ 40 Свойства функции $y = \cos x$ и её график

Напомним, что функция $y = \cos x$ определена на всей числовой прямой и множеством её значений является отрезок $[-1; 1]$. Следовательно, функция ограничена и график этой функции расположен *в полосе между прямыми* $y = -1$ *и* $y = 1$.

Так как функция $y = \cos x$ периодическая с периодом 2π, то *достаточно построить её график на* каком-нибудь *промежутке длиной* 2π, например на отрезке $[-\pi; \pi]$; тогда на промежутках, получаемых сдвигами выбранного отрезка на $2\pi n$, $n \in Z$, график будет таким же.

Функция $y = \cos x$ является чётной. Поэтому её график симметричен относительно оси Oy. Для построения графика на отрезке $[-\pi; \pi]$ достаточно построить его для $x \in [0; \pi]$, а затем симметрично отразить его относительно оси Oy.

Прежде чем перейти к построению графика, покажем, что функция $y = \cos x$ убывает на отрезке $[0; \pi]$.

В самом деле, при повороте точки $P(1; 0)$ вокруг начала координат против часовой стрелки на угол от 0 до π абсцисса точки, т. е. $\cos x$, уменьшается от 1 до -1. Поэтому если $0 \leqslant x_1 < x_2 \leqslant \pi$, то $\cos x_1 > \cos x_2$ (рис. 85). Это и означает, что функция $y = \cos x$ убывает на отрезке $[0; \pi]$.

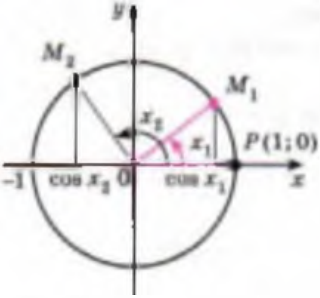


Рис. 85

Рис. 86

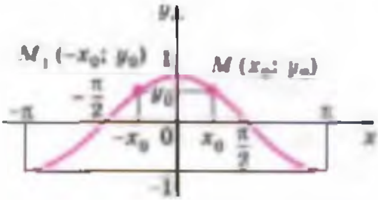


Рис. 87

Используя свойство убывания функции $y = \cos x$ на отрезке $[0; \pi]$ и найдя несколько точек, принадлежащих графику, построим его на этом отрезке (рис. 86).

Пользуясь свойством чётности функции $y = \cos x$, отразим построенный на отрезке $[0; \pi]$ график симметрично относительно оси Oy, получим график этой функции на отрезке $[-\pi; \pi]$ (рис. 87).

Так как $y = \cos x$ — периодическая функция с периодом 2π и её график построен на отрезке $[-\pi; \pi]$ длиной, равной периоду, распространим его по всей числовой прямой с помощью сдвигов на 2π, 4π и т. д. вправо, на -2π, -4π и т. д. влево, т. е. вообще на $2\pi n$, $n \in Z$ (рис. 88).

Итак, график функции $y = \cos x$ построен геометрически на всей числовой прямой, начиная с построения его части на отрезке $[0; \pi]$.

Поэтому свойства функции $y = \cos x$ можно получить, опираясь на свойства этой функции на отрезке $[0; \pi]$. Например, функция $y = \cos x$ возрастает на отрезке $[-\pi; 0]$, так как она убывает на отрезке $[0; \pi]$ и является чётной.

Рис. 88

Основные свойства функции $y = \cos x$.

1) Область определения — множество R всех действительных чисел.

2) Множество значений — отрезок $[-1; 1]$.

3) Периодическая с периодом 2π.

4) Чётная.

5) Функция принимает:

— значение, равное 0, при $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in Z$;

— наибольшее значение, равное 1, при $x = 2\pi n$, $n \in Z$;

— наименьшее значение, равное -1, при $x = \pi + 2\pi n$, $n \in Z$;

— положительные значения на интервале $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ и на интервалах, получаемых сдвигами этого интервала на $2\pi n$, $n = \pm 1, \pm 2, \ldots$;

— отрицательные значения на интервале $\left(\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right)$ и на интервалах, получаемых сдвигами этого интервала на $2\pi n$, $n = \pm 1, \pm 2, \ldots$.

6) Возрастающая на отрезке $[\pi; 2\pi]$ и на отрезках, получаемых сдвигами этого отрезка на $2\pi n$, $n = \pm 1, \pm 2, \ldots$.

7) Убывающая на отрезке $[0; \pi]$ и на отрезках, получаемых сдвигами этого отрезка на $2\pi n$, $n = \pm 1, \pm 2, \ldots$.

Задача 1 Найти все корни уравнения $\cos x = -\frac{1}{2}$, принадлежащие отрезку $[-\pi; 2\pi]$.

▶ Построим графики функций $y = \cos x$ и $y = -\frac{1}{2}$ на данном отрезке (рис. 89). Эти графики пересе-

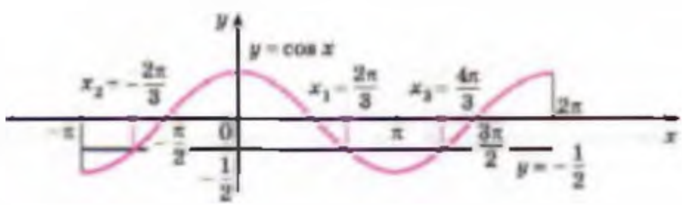


Рис. 89

каются в трёх точках, абсциссы которых x_1, x_2, x_3 являются корнями уравнения $\cos x = -\frac{1}{2}$.

На отрезке $[0; \pi]$ корнем уравнения $\cos x = -\frac{1}{2}$ является число $x_1 = \arccos\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{2\pi}{3}$. Из рисунка видно, что точки x_2 и x_1 симметричны относительно оси Oy, т. е. $x_2 = -x_1 = -\frac{2\pi}{3}$, а $x_3 = x_2 + 2\pi = -\frac{2\pi}{3} + 2\pi = \frac{4\pi}{3}$.

Ответ $x_1 = \frac{2\pi}{3}$, $x_2 = -\frac{2\pi}{3}$, $x_3 = \frac{4\pi}{3}$. ◁

Задача 2 Найти все решения неравенства $\cos x > -\frac{1}{2}$, принадлежащие отрезку $[-\pi; 2\pi]$.

▶ Из рисунка 89 видно, что график функции $y = \cos x$ лежит выше графика функции $y = -\frac{1}{2}$ на промежутках $\left(-\frac{2\pi}{3}; \frac{2\pi}{3}\right)$ и $\left(\frac{4\pi}{3}; 2\pi\right]$.

Ответ $-\frac{2\pi}{3} < x < \frac{2\pi}{3}$, $\frac{4\pi}{3} < x \leqslant 2\pi$. ◁

Упражнения

Пользуясь графиком функции $y = \cos x$, выполнить упражнения (708—713).

708 (Устно.) Выяснить, при каких значениях x, принадлежащих отрезку $[0; 3\pi]$, функция $y = \cos x$ принимает:
1) значение, равное 0, 1, −1;
2) положительные значения;
3) отрицательные значения.

709 (Устно.) Выяснить, возрастает или убывает функция $y = \cos x$ на отрезке:
1) $[3\pi; 4\pi]$; 2) $[-2\pi; -\pi]$; 3) $\left[2\pi; \frac{5\pi}{2}\right]$;
4) $\left[-\frac{\pi}{2}; 0\right]$; 5) $[1; 3]$; 6) $[-2; -1]$.

710 Разбить данный отрезок на два отрезка так, чтобы на одном из них функция $y = \cos x$ возрастала, а на другом убывала:
1) $\left[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$; 2) $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$; 3) $\left[0; \frac{3\pi}{2}\right]$; 4) $\left[-\pi; \frac{\pi}{2}\right]$.

711 Используя свойство возрастания или убывания функции $y = \cos x$, сравнить числа:

1) $\cos \frac{\pi}{7}$ и $\cos \frac{8\pi}{9}$; 2) $\cos \frac{8\pi}{7}$ и $\cos \frac{10\pi}{7}$;

3) $\cos \left(-\frac{6\pi}{7}\right)$ и $\cos \left(-\frac{\pi}{8}\right)$; 4) $\cos \left(-\frac{8\pi}{7}\right)$ и $\cos \left(-\frac{9\pi}{7}\right)$;

5) $\cos 1$ и $\cos 3$; 6) $\cos 4$ и $\cos 5$.

712 Найти все корни уравнения, принадлежащие отрезку $[0; 3\pi]$:

1) $\cos x = \frac{1}{2}$; 2) $\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$; 3) $\cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$; 4) $\cos x = -\frac{1}{2}$.

713 Найти все решения неравенства, принадлежащие отрезку $[0; 3\pi]$:

1) $\cos x \geqslant \frac{1}{2}$; 2) $\cos x \geqslant -\frac{1}{2}$;

3) $\cos x < -\frac{\sqrt{2}}{2}$; 4) $\cos x < \frac{\sqrt{3}}{2}$.

714 Выразив синус через косинус по формулам приведения, сравнить числа:

1) $\cos \frac{\pi}{5}$ и $\sin \frac{\pi}{5}$; 2) $\sin \frac{\pi}{7}$ и $\cos \frac{\pi}{7}$; 3) $\cos \frac{3\pi}{8}$ и $\sin \frac{5\pi}{8}$;

4) $\sin \frac{3\pi}{5}$ и $\cos \frac{\pi}{5}$; 5) $\cos \frac{\pi}{6}$ и $\sin \frac{5\pi}{14}$; 6) $\cos \frac{\pi}{8}$ и $\sin \frac{3\pi}{10}$.

715 Найти все корни уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$:

1) $\cos 2x = \frac{1}{2}$; 2) $\cos 3x = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

716 Найти все решения неравенства, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$:

1) $\cos 2x < \frac{1}{2}$; 2) $\cos 3x > \frac{\sqrt{3}}{2}$.

717 Построить график функции и выяснить её свойства:

1) $y = 1 + \cos x$; 2) $y = \cos 2x$; 3) $y = 3 \cos x$.

718 Найти множество значений функции $y = \cos x$, если x принадлежит промежутку:

1) $\left[\frac{\pi}{3}; \pi\right]$; 2) $\left(\frac{5\pi}{4}; \frac{7\pi}{4}\right)$.

719 Построить график функции:

1) $y = |\cos x|$; 2) $y = 3 - 2 \cos (x - 1)$.

§ 41 Свойства функции $y = \sin x$ и её график

Функция $y = \sin x$ определена на всей числовой прямой, является нечётной и периодической с периодом 2π. Её график можно построить таким же способом, как и график функции $y = \cos x$, начиная с построения, например, на отрезке $[0; \pi]$. Однако проще воспользоваться формулой

$$\sin x = \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right).$$

Эта формула показывает, что график функции $y = \sin x$ можно получить сдвигом графика функции $y = \cos x$ вдоль оси абсцисс вправо на $\frac{\pi}{2}$ (рис. 90).

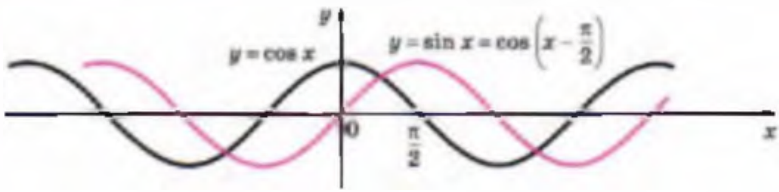


Рис. 90

График функции $y = \sin x$ изображен на рисунке 91. Кривая, являющаяся графиком функции $y = \sin x$, называется *синусоидой*.

Так как график функции $y = \sin x$ получается сдвигом графика функции $y = \cos x$, то свойства функции $y = \sin x$ можно получить из свойств функции $y = \cos x$.

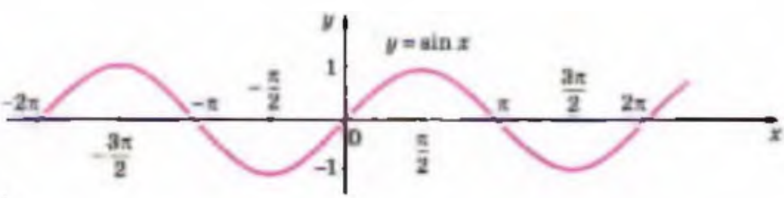


Рис. 91

Основные свойства функции $y = \sin x$.

1) Область определения — множество R всех действительных чисел.

2) Множество значений — отрезок $[-1; 1]$.

3) Периодическая, $T = 2\pi$.

4) Нечётная.

5) Функция принимает:

— значение, равное 0, при $x = \pi n$, $n \in Z$;

— наибольшее значение, равное 1, при
$x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $n \in Z$;

— наименьшее значение, равное -1, при
$x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $n \in Z$;

— положительные значения на интервале $(0; \pi)$ и на интервалах, получаемых сдвигами этого интервала на $2\pi n$, $n = \pm 1, \pm 2, \ldots$;

— отрицательные значения на интервале $(\pi; 2\pi)$ и на интервалах, получаемых сдвигами этого интервала на $2\pi n$, $n = \pm 1, \pm 2, \ldots$.

6) Возрастающая на отрезке $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ и на отрезках, получаемых сдвигами этого отрезка на $2\pi n$, $n = \pm 1, \pm 2, \ldots$.

7) Убывающая на отрезке $\left[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$ и на отрезках, получаемых сдвигами этого отрезка на $2\pi n$, $n = \pm 1, \pm 2, \ldots$.

Задача 1 Найти все корни уравнения $\sin x = \frac{1}{2}$, принадлежащие отрезку $[-\pi; 2\pi]$.

▶ Построим графики функций $y = \sin x$ и $y = \frac{1}{2}$ на данном отрезке (рис. 92). Эти графики пересекаются в двух точках, абсциссы которых являются кор-

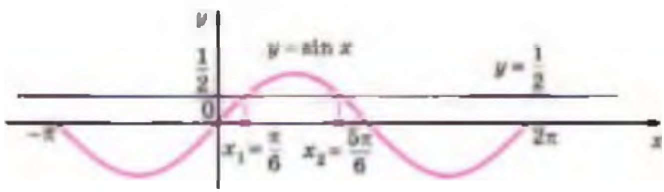


Рис. 92

ями уравнения $\sin x = \frac{1}{2}$. На отрезке $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ уравнение имеет корень $x_1 = \arcsin\frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}$. Второй корень $x_2 = \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}$, так как $\sin\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) = \sin\frac{\pi}{6}$.

Ответ $x_1 = \frac{\pi}{6}$, $x_2 = \frac{5\pi}{6}$. ◁

Задача 2 Найти все решения неравенства $\sin x < \frac{1}{2}$, принадлежащие отрезку $[-\pi; 2\pi]$.

▶ Из рисунка 92 видно, что график функции $y = \sin x$ лежит ниже графика функции $y = \frac{1}{2}$ на промежутках $\left[-\pi; \frac{\pi}{6}\right)$ и $\left(\frac{5\pi}{6}; 2\pi\right]$.

Ответ $-\pi \leqslant x < \frac{\pi}{6}$, $\frac{5\pi}{6} < x \leqslant 2\pi$. ◁

Упражнения

Пользуясь графиком функции $y = \sin x$, выполнить упражнения (720—725).

720 (Устно.) Выяснить, при каких значениях x, принадлежащих отрезку $[0; 3\pi]$, функция $y = \sin x$ принимает:
1) значение, равное 0, 1, –1;
2) положительные значения;
3) отрицательные значения.

721 (Устно.) Выяснить, возрастает или убывает функция $y = \sin x$ на промежутке:
1) $\left[\frac{3\pi}{2}; \frac{5\pi}{2}\right]$; 2) $\left(\frac{\pi}{2}; \pi\right)$; 3) $\left(-\pi; -\frac{\pi}{2}\right)$;
4) $\left[-\frac{3\pi}{2}; -\frac{\pi}{2}\right]$; 5) $[2; 4]$; 6) $(6; 7)$.

722 Разбить данный отрезок на два отрезка так, чтобы на одном из них функция $y = \sin x$ возрастала, а на другом убывала:
1) $[0; \pi]$; 2) $\left[\frac{\pi}{2}; 2\pi\right]$; 3) $[-\pi; 0]$; 4) $[-2\pi; -\pi]$.

723 Используя свойство возрастания или убывания функции $y = \sin x$, сравнить числа:
1) $\sin\frac{7\pi}{10}$ и $\sin\frac{13\pi}{10}$; 2) $\sin\frac{13\pi}{7}$ и $\sin\frac{11\pi}{7}$;
3) $\sin\left(-\frac{8\pi}{7}\right)$ и $\sin\left(-\frac{9\pi}{8}\right)$; 4) $\sin 7$ и $\sin 6$.

724 Найти все корни уравнения, принадлежащие отрезку $[0; 3\pi]$:

1) $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$; 2) $\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$;

3) $\sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$; 4) $\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

725 Найти все решения неравенства, принадлежащие отрезку $[0; 3\pi]$:

1) $\sin x > \frac{1}{2}$; 2) $\sin x \leqslant \frac{\sqrt{2}}{2}$; 3) $\sin x \geqslant -\frac{1}{2}$; 4) $\sin x < -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

726 Выразив косинус через синус по формулам приведения, сравнить числа:

1) $\sin \frac{\pi}{9}$ и $\cos \frac{\pi}{9}$; 2) $\sin \frac{9\pi}{8}$ и $\cos \frac{9\pi}{8}$;

3) $\sin \frac{\pi}{5}$ и $\cos \frac{5\pi}{14}$; 4) $\sin \frac{\pi}{8}$ и $\cos \frac{3\pi}{10}$.

727 Найти все корни уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{3\pi}{2}; \pi\right]$:

1) $\sin 2x = -\frac{1}{2}$; 2) $\sin 3x = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

728 Найти все решения неравенства, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{3\pi}{2}; \pi\right]$:

1) $\sin 2x \geqslant -\frac{1}{2}$; 2) $\sin 3x < \frac{\sqrt{3}}{2}$.

729 Построить график функции и выяснить её свойства:

1) $y = 1 - \sin x$; 2) $y = 2 + \sin x$;

3) $y = \sin 3x$; 4) $y = 2 \sin x$.

730 Найти множество значений функции $y = \sin x$, если x принадлежит промежутку:

1) $\left[\frac{\pi}{6}; \pi\right]$; 2) $\left[\frac{3\pi}{4}; \frac{5\pi}{4}\right]$.

731 Построить график функции:

1) $y = \sin |x|$; 2) $y = |\sin x|$.

732 Сила переменного электрического тока является функцией, зависящей от времени, и выражается формулой

$$I = A \sin (\omega t + \varphi),$$

где A — амплитуда колебания, ω — частота, φ — начальная фаза. Построить график этой функции, если:

1) $A = 2$, $\omega = 1$, $\varphi = \frac{\pi}{4}$; 2) $A = 1$, $\omega = 2$, $\varphi = \frac{\pi}{3}$.

§ 42 Свойства функции $y = \text{tg}\, x$ и её график

Функция $y = \text{tg}\, x$ определена при $x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in Z$, является нечётной и периодической с периодом π. Поэтому достаточно построить её график на промежутке $\left[0; \frac{\pi}{2}\right)$. Затем, отразив его симметрично относительно начала координат, получить график на интервале $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$. Наконец, используя периодичность, построить график функции $y = \text{tg}\, x$ на всей области определения.

Прежде чем строить график функции на промежутке $\left[0; \frac{\pi}{2}\right)$, покажем, что на этом промежутке функция $y = \text{tg}\, x$ возрастает.

● * Пусть $0 \leqslant x_1 < x_2 < \frac{\pi}{2}$. Покажем, что $\text{tg}\, x_1 < \text{tg}\, x_2$, т. е. $\frac{\sin x_1}{\cos x_1} < \frac{\sin x_2}{\cos x_2}$.

По условию $0 \leqslant x_1 < x_2 < \frac{\pi}{2}$, откуда по свойствам функции $y = \sin x$ имеем $0 \leqslant \sin x_1 < \sin x_2$, а по свойствам функции $y = \cos x$ также имеем $\cos x_1 > \cos x_2 > 0$, откуда $0 < \frac{1}{\cos x_1} < \frac{1}{\cos x_2}$.

Перемножив неравенства $\sin x_1 < \sin x_2$ и $\frac{1}{\cos x_1} < \frac{1}{\cos x_2}$, получим $\frac{\sin x_1}{\cos x_1} < \frac{\sin x_2}{\cos x_2}$. ○

Зная, что функция $y = \text{tg}\, x$ возрастает на промежутке $\left[0; \frac{\pi}{2}\right)$, найдём несколько точек, принадлежащих графику, и построим его на этом промежутке (рис. 93).

Исходя из свойства нечётности функции $y = \text{tg}\, x$, отразим построенный на промежутке $\left[0; \frac{\pi}{2}\right)$ график симметрично относительно начала координат,

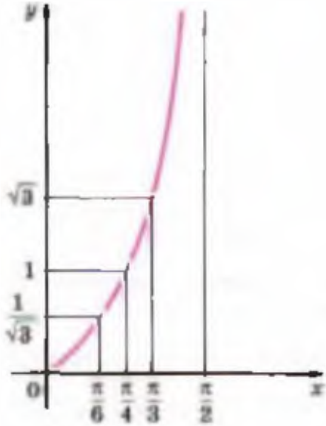


Рис. 93

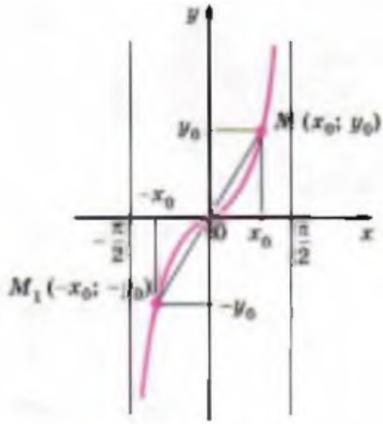


Рис. 94

получим график этой функции на интервале $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ (рис. 94).

Напомним, что при $x = \pm\frac{\pi}{2}$ функция $y = \operatorname{tg} x$ не определена. Если $x < \frac{\pi}{2}$ и x приближается к $\frac{\pi}{2}$, то $\sin x$ приближается к 1, а $\cos x$, оставаясь положительным, стремится к нулю. При этом дробь $\frac{\sin x}{\cos x} = \operatorname{tg} x$ неограниченно возрастает, и поэтому график функции $y = \operatorname{tg} x$ приближается к вертикальной прямой $x = \frac{\pi}{2}$. Аналогично при отрицательных значениях x, больших $-\frac{\pi}{2}$ и приближающихся к $-\frac{\pi}{2}$, график функции $y = \operatorname{tg} x$ приближается к вертикальной прямой $x = -\frac{\pi}{2}$, т. е. прямые $x = \frac{\pi}{2}$ и $x = -\frac{\pi}{2}$ являются вертикальными асимптотами графика функции.

Перейдём к построению графика функции $y = \operatorname{tg} x$ на всей области определения. Функция $y = \operatorname{tg} x$ периодическая с периодом π. Следовательно, график этой функции получается из её графика на интервале $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ (рис. 94) сдвигами вдоль оси абсцисс на πn, $n \in Z$ (рис. 95).

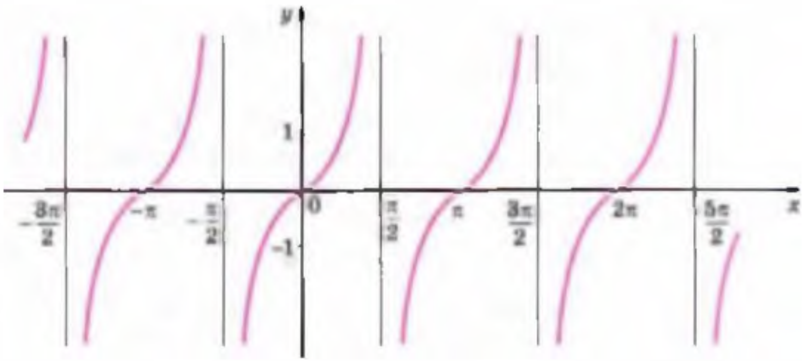


Рис. 95

Итак, весь график функции $y = \operatorname{tg} x$ строится с помощью геометрических преобразований его части, построенной на промежутке $\left[0; \frac{\pi}{2}\right)$.

Свойства функции $y = \operatorname{tg} x$ можно получить, опираясь на свойства этой функции на промежутке $\left[0; \frac{\pi}{2}\right)$. Например, функция $y = \operatorname{tg} x$ возрастает на интервале $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$, так как эта функция возрастает на промежутке $\left[0; \frac{\pi}{2}\right)$ и является нечётной.

Основные свойства функции $y = \operatorname{tg} x$.

1) Область определения — множество всех действительных чисел $x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

2) Множество значений — множество $\boldsymbol{R}$ всех действительных чисел.

3) Периодическая с периодом π.

4) Нечётная.

5) Функция принимает:

— значение, равное 0, при $x = \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$;

— положительные значения на интервалах $\left(\pi n; \frac{\pi}{2} + \pi n\right)$, $n \in \boldsymbol{Z}$;

— отрицательные значения на интервалах $\left(-\frac{\pi}{2} + \pi n; \pi n\right)$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

6) Возрастающая на интервалах $\left(-\frac{\pi}{2} + \pi n; \frac{\pi}{2} + \pi n\right)$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

Задача 1 Найти все корни уравнения $\operatorname{tg} x = 2$, принадлежащие отрезку $\left[-\pi; \frac{3\pi}{2}\right]$.

▶ Построим графики функций $y = \operatorname{tg} x$ и $y = 2$ на данном отрезке (рис. 96, *а*). Эти графики пересекаются в трёх точках, абсциссы которых x_1, x_2, x_3 являются корнями уравнения $\operatorname{tg} x = 2$. На интервале $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ уравнение имеет корень $x_1 = \operatorname{arctg} 2$.

Так как функция $y = \operatorname{tg} x$ периодическая с периодом π, то $x_2 = \operatorname{arctg} 2 + \pi$, $x_3 = \operatorname{arctg} 2 - \pi$.

Ответ $x_1 = \operatorname{arctg} 2$, $x_2 = \operatorname{arctg} 2 + \pi$, $x_3 = \operatorname{arctg} 2 - \pi$. ◁

Задача 2 Найти все решения неравенства $\operatorname{tg} x \leqslant 2$, принадлежащие отрезку $\left[-\pi; \frac{3\pi}{2}\right]$.

▶ Из рисунка 96, *а* видно, что график функции $y = \operatorname{tg} x$ лежит не выше прямой $y = 2$ на промежутках $[-\pi; x_3]$, $\left(-\frac{\pi}{2}; x_1\right]$ и $\left(\frac{\pi}{2}; x_2\right]$.

Ответ $-\pi \leqslant x \leqslant -\pi + \operatorname{arctg} 2$, $-\frac{\pi}{2} < x \leqslant \operatorname{arctg} 2$;

$\frac{\pi}{2} < x \leqslant \pi + \operatorname{arctg} 2$. ◁

Задача 3 Решить неравенство $\operatorname{tg} x > 1$.

▶ Построим графики функций $y = \operatorname{tg} x$ и $y = 1$ (рис. 96, *б*). Рисунок показывает, что график функции $y = \operatorname{tg} x$ лежит выше прямой $y = 1$ на промежутке $\left(\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}\right)$, а также на промежутках, полученных сдвигами его на π, 2π, 3π, $-\pi$, -2π и т. д.

Ответ $\frac{\pi}{4} + \pi n < x < \frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in Z$. ◁

Тригонометрические функции широко применяются в математике, физике и технике. Например, многие процессы, такие как колебания струны, маятника, напряжение в цепи переменного тока и т. д., описываются функцией, которая задаётся формулой $y = A \sin(\omega x + \varphi)$. Такие процессы называют *гармоническими колебаниями*, а описывающие их функции — гармониками (от греч. harmonikos — соразмерный). График функции $y = A \sin(\omega x + \varphi)$ получается из синусоиды $y = \sin x$ сжатием или растяжением её вдоль координатных осей и сдвигом вдоль оси Ox.

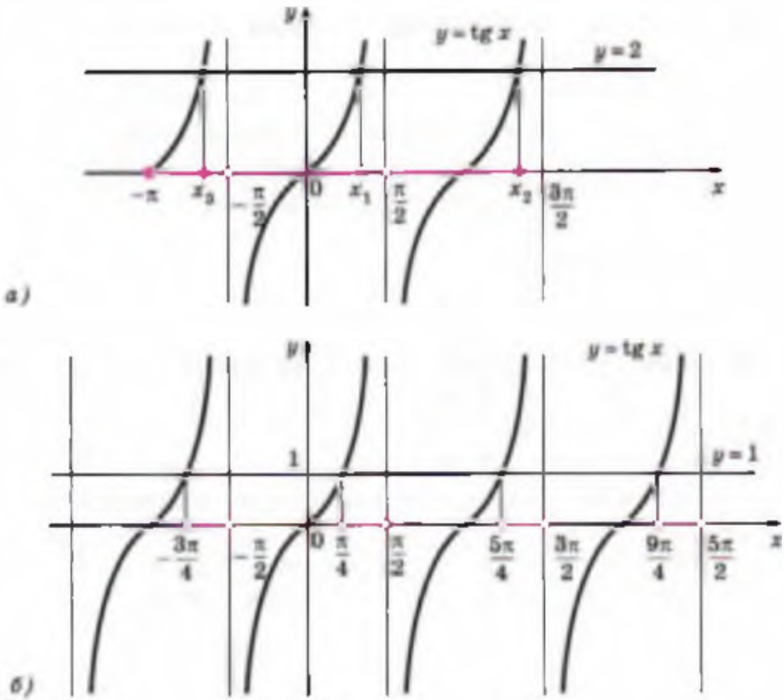


Рис. 96

Обычно гармоническое колебание является функцией времени: $y = A \sin(\omega t + \varphi)$, где A — амплитуда колебания, ω — частота, φ — начальная фаза, $\frac{2\pi}{\omega}$ — период колебания.

Упражнения

733 (Устно.) Выяснить, при каких значениях x из промежутка $[-\pi; 2\pi]$ функция $y = \operatorname{tg} x$ принимает:
1) значение, равное 0; 2) положительные значения;
3) отрицательные значения.

734 (Устно.) Выяснить, является ли функция $y = \operatorname{tg} x$ возрастающей на промежутке:
1) $\left[\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{3}\right]$; 2) $\left(\frac{\pi}{2}; \pi\right)$; 3) $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{8}\right)$; 4) $[2; 3]$.

735 С помощью свойства возрастания функции $y = \operatorname{tg} x$ сравнить числа:
1) $\operatorname{tg}\frac{\pi}{5}$ и $\operatorname{tg}\frac{\pi}{7}$; 2) $\operatorname{tg}\frac{7\pi}{8}$ и $\operatorname{tg}\frac{8\pi}{9}$; 3) $\operatorname{tg}\left(-\frac{7\pi}{8}\right)$ и $\operatorname{tg}\left(-\frac{8\pi}{9}\right)$;
4) $\operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{5}\right)$ и $\operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{7}\right)$; 5) $\operatorname{tg} 2$ и $\operatorname{tg} 3$; 6) $\operatorname{tg} 1$ и $\operatorname{tg} 1{,}5$.

736 Найти все корни уравнения, принадлежащие промежутку $(-\pi; 2\pi)$:

1) $\operatorname{tg} x = 1$; 2) $\operatorname{tg} x = \sqrt{3}$; 3) $\operatorname{tg} x = -\sqrt{3}$; 4) $\operatorname{tg} x = -1$.

737 Найти все решения неравенства, принадлежащие промежутку $(-\pi, 2\pi)$:

1) $\operatorname{tg} x \geqslant 1$; 2) $\operatorname{tg} x < \frac{\sqrt{3}}{3}$; 3) $\operatorname{tg} x < -1$; 4) $\operatorname{tg} x \geqslant -\sqrt{3}$.

738 Решить неравенство:

1) $\operatorname{tg} x < 1$; 2) $\operatorname{tg} x \geqslant \sqrt{3}$; 3) $\operatorname{tg} x \leqslant -\frac{\sqrt{3}}{3}$; 4) $\operatorname{tg} x > -1$.

739 Найти все корни уравнения, принадлежащие отрезку $[0; 3\pi]$:

1) $\operatorname{tg} x = 3$; 2) $\operatorname{tg} x = -2$.

740 Решить неравенство:

1) $\operatorname{tg} x > 4$; 2) $\operatorname{tg} x \leqslant 5$; 3) $\operatorname{tg} x < -4$; 4) $\operatorname{tg} x \geqslant -5$.

741 Найти все решения неравенства, принадлежащие отрезку $[0; 3\pi]$:

1) $\operatorname{tg} x \geqslant 3$; 2) $\operatorname{tg} x < 4$; 3) $\operatorname{tg} x \leqslant -4$; 4) $\operatorname{tg} x > -3$.

742 Найти все корни уравнения, принадлежащие промежутку $\left(-\frac{\pi}{2}; \pi\right)$:

1) $\operatorname{tg} 2x = \sqrt{3}$; 2) $\operatorname{tg} 3x = -1$.

743 Найти все решения неравенства, принадлежащие промежутку $\left(-\frac{\pi}{2}; \pi\right)$:

1) $\operatorname{tg} 2x \leqslant 1$; 2) $\operatorname{tg} 3x < -\sqrt{3}$.

744 Построить график функции и выяснить её свойства:

1) $y = \operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$; 2) $y = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$.

745 Найти множество значений функции $y = \operatorname{tg} x$, если x принадлежит промежутку:

1) $\left[-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{3}\right]$; 2) $\left(\frac{3\pi}{4}; \frac{3\pi}{2}\right)$; 3) $(0; \pi)$; 4) $\left[\frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4}\right]$.

Построить график функции **(746—748)**.

746 1) $y = \operatorname{tg}|x|$; 2) $y = |\operatorname{tg} x|$; 3) $y = \operatorname{ctg} x$; 4) $y = \frac{1}{\operatorname{ctg} x}$.

747 1) $y = \operatorname{tg} x \operatorname{ctg} x$; 2) $y = \sin x \operatorname{ctg} x$.

748 1) $y = \operatorname{tg}\left(3x - \frac{\pi}{4}\right)$; 2) $y = \operatorname{ctg}\left(3\left(x + \frac{\pi}{6}\right)\right)$.

749 Решить неравенство:

1) $\operatorname{tg}^2 x < 1$; 2) $\operatorname{tg}^2 x \geqslant 3$; 3) $\operatorname{ctg} x \geqslant -1$; 4) $\operatorname{ctg} x > \sqrt{3}$.

§ 43*

1. Функция $y = \arcsin x$.

По определению арксинуса числа для каждого $x \in [-1; 1]$ определено одно число $y = \arcsin x$. Тем самым на отрезке $[-1; 1]$ задана функция

$$y = \arcsin x, \quad -1 \leqslant x \leqslant 1.$$

Покажем, что функция $y = \arcsin x$ является обратной к функции $y = \sin x$, рассматриваемой на отрезке $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$.

● Рассмотрим уравнение $\sin x = y$, где y — заданное число из отрезка $[-1; 1]$, а x — неизвестное. На отрезке $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ это уравнение по определению арксинуса числа имеет единственный корень $x = \arcsin y$.

В этой формуле меняем местами x и y, получаем $y = \arcsin x$. ○

Таким образом, свойства функции $y = \arcsin x$ можно получить из свойств функции $y = \sin x$. График функции $y = \arcsin x$ симметричен графику функции $y = \sin x$, $-\frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}$ относительно прямой $y = x$ (рис. 97, 98).

Рис. 97

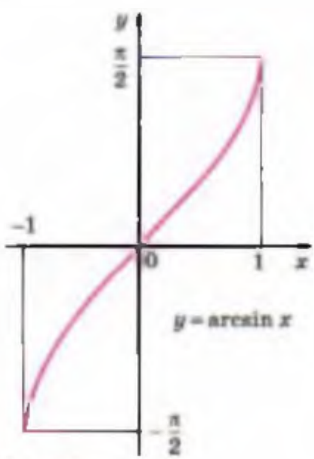


Рис. 98

Основные свойства функции $y = \arcsin x$.

1) Область определения — отрезок $[-1; 1]$.
2) Множество значений — отрезок $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$.
3) Возрастающая.
4) Нечётная, так как
$$\arcsin(-x) = -\arcsin x.$$

2. Функция $y = \arccos x$.

По определению арккосинуса числа для каждого $x \in [-1; 1]$ определено одно число $y = \arccos x$. Тем самым на отрезке $[-1; 1]$ определена функция $y = \arccos x$, $-1 \leqslant x \leqslant 1$.

Эта функция является обратной к функции $y = \cos x$, рассматриваемой на отрезке $[0; \pi]$. График функции $y = \arccos x$ симметричен графику функции $y = \cos x$, $0 \leqslant x \leqslant \pi$, относительно прямой $y = x$ (рис. 99, 100).

Основные свойства функции $y = \arccos x$.

1) Область определения — отрезок $[-1; 1]$.
2) Множество значений — отрезок $[0; \pi]$.
3) Убывающая.

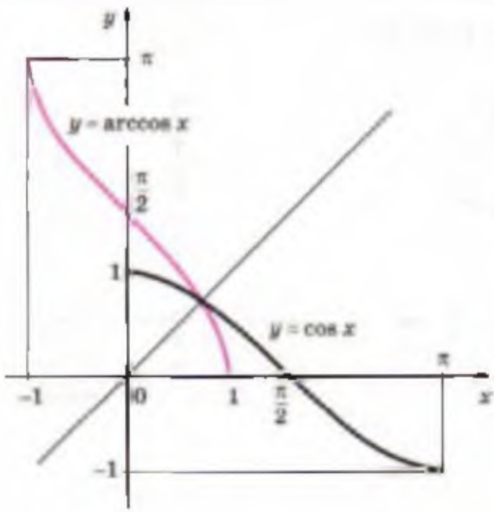


Рис. 99

Рис. 100

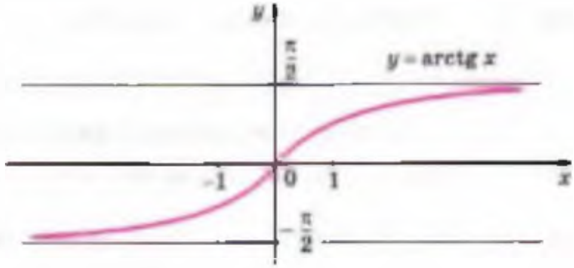


Рис. 101

3. **Функция $y = \operatorname{arctg} x$.**

По определению арктангенса числа для каждого действительного x определено одно число $y = \operatorname{arctg} x$. Тем самым на всей числовой прямой определена функция $y = \operatorname{arctg} x$, $x \in \boldsymbol{R}$.

Эта функция является обратной к функции $y = \operatorname{tg} x$, рассматриваемой на интервале $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$.

График функции $y = \operatorname{arctg} x$ получается из графика функции $y = \operatorname{tg} x$, $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$ (рис. 94), симметрией относительно прямой $y = x$ (рис. 101).

Основные свойства функции $y = \operatorname{arctg} x$.

1) Область определения — множество $\boldsymbol{R}$ всех действительных чисел.

2) Множество значений — интервал $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$.

3) Возрастающая.

4) Нечётная, так как

$$\operatorname{arctg}(-x) = -\operatorname{arctg} x.$$

Функции $y = \arcsin x$, $y = \arccos x$, $y = \operatorname{arctg} x$ называются *обратными тригонометрическими функциями*.

Задача 1 Сравнить числа:

1) $\arcsin \frac{1}{3}$ и $\arcsin \frac{1}{4}$; 2) $\operatorname{arctg}\left(-\frac{2}{3}\right)$ и $\operatorname{arctg}\left(-\frac{1}{2}\right)$.

▶ 1) Так как $\frac{1}{3} > \frac{1}{4}$ и функция $y = \arcsin x$ возрастает, то $\arcsin \frac{1}{3} > \arcsin \frac{1}{4}$.

2) Так как $-\frac{2}{3} < -\frac{1}{2}$ и функция $y = \operatorname{arctg} x$ возрастает, то $\operatorname{arctg}\left(-\frac{2}{3}\right) < \operatorname{arctg}\left(-\frac{1}{2}\right)$. ◁

Задача 2 Решить уравнение $\arccos(2x+1)=\frac{3\pi}{4}$.

▶ Так как $\frac{3\pi}{4}\in[0;\ \pi]$, то по определению арккосинуса числа данное уравнение равносильно уравнению $2x+1=\cos\frac{3\pi}{4}$, откуда $2x+1=-\frac{\sqrt{2}}{2}$, $x=-\frac{2+\sqrt{2}}{4}$. ◁

Задача 3 Найти область определения функции

$$y=\arcsin\frac{x-1}{3}.$$

▶ Так как функция $y=\arcsin x$ определена при $-1\leqslant x\leqslant 1$, то функция $y=\arcsin\frac{x-1}{3}$ определена для тех значений x, для которых выполняются неравенства $-1\leqslant\frac{x-1}{3}\leqslant 1$. Отсюда

$$-3\leqslant x-1\leqslant 3,\quad -2\leqslant x\leqslant 4.\ ◁$$

Упражнения

Сравнить числа (750—752).

750 1) $\arcsin\frac{1}{\sqrt{3}}$ и $\arcsin\frac{2}{\sqrt{10}}$; 2) $\arcsin\left(-\frac{2}{3}\right)$ и $\arcsin\left(-\frac{3}{4}\right)$.

751 1) $\arccos\frac{1}{\sqrt{3}}$ и $\arccos\frac{1}{\sqrt{5}}$; 2) $\arccos\left(-\frac{4}{5}\right)$ и $\arccos\left(-\frac{1}{3}\right)$.

752 1) $\operatorname{arctg}2\sqrt{3}$ и $\operatorname{arctg}3\sqrt{2}$; 2) $\operatorname{arctg}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ и $\operatorname{arctg}\left(-\frac{1}{\sqrt{5}}\right)$.

Решить уравнение (753—755).

753 1) $\arcsin(2-3x)=\frac{\pi}{6}$; 2) $\arcsin(3-2x)=\frac{\pi}{4}$;

3) $\arcsin\frac{x-2}{4}=-\frac{\pi}{4}$; 4) $\arcsin\frac{x+3}{2}=-\frac{\pi}{3}$.

754 1) $\arccos(2x+3)=\frac{\pi}{3}$; 2) $\arccos(3x+1)=\frac{\pi}{2}$;

3) $\arccos\frac{x+1}{3}=\frac{2\pi}{3}$; 4) $\arccos\frac{2x-1}{3}=\pi$.

755 1) $\operatorname{arctg}\frac{1-x}{4}=\frac{\pi}{3}$; 2) $\operatorname{arctg}\frac{1+2x}{3}=\frac{\pi}{4}$;

3) $\operatorname{arctg}(2x+1)=-\frac{\pi}{3}$; 4) $\operatorname{arctg}(2-3x)=-\frac{\pi}{4}$.

756 Найти область определения функции:

1) $y = \arcsin \frac{x-3}{2}$; 2) $y = \arccos (2 - 3x)$;

3) $y = \arccos (2\sqrt{x} - 3)$; 4) $y = \arcsin \frac{2x^2 - 5}{3}$.

757 Доказать, что график функции $y = \arccos x$ симметричен относительно точки $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$.

Упражнения к главе VII

758 Найти область определения функции:

1) $y = \sin x + \cos x$; 2) $y = \sin x + \operatorname{tg} x$;

3) $y = \sqrt{\sin x}$; 4) $y = \sqrt{\cos x}$;

5) $y = \frac{2x}{2 \sin x - 1}$; 6) $y = \frac{\cos x}{2 \sin^2 x - \sin x}$.

759 Найти множество значений функции:

1) $y = 1 - 2 \sin^2 x$; 2) $y = 2 \cos^2 x - 1$;

3) $y = 3 - 2 \sin^2 x$; 4) $y = 2 \cos^2 x + 5$;

5) $y = \cos 3x \sin x - \sin 3x \cos x + 4$;

6) $y = \cos 2x \cos x + \sin 2x \sin x - 3$.

760 Выяснить, является ли данная функция чётной или нечётной:

1) $y = x^2 + \cos x$; 2) $y = x^3 - \sin x$;

3) $y = (1 - x^2) \cos x$; 4) $y = (1 + \sin x) \sin x$.

761 Найти наименьший положительный период функции:

1) $y = \cos 7x$; 2) $y = \sin \frac{x}{7}$.

762 Найти корни уравнения, принадлежащие промежутку $[0; 3\pi]$:

1) $2 \cos x + \sqrt{3} = 0$; 2) $\sqrt{3} - \sin x = \sin x$;

3) $3 \operatorname{tg} x = \sqrt{3}$; 4) $\cos x + 1 = 0$.

763 Найти все решения неравенства, принадлежащие промежутку $[-2\pi; -\pi]$:

1) $1 + 2 \cos x \geqslant 0$; 2) $1 - 2 \sin x < 0$;

3) $2 + \operatorname{tg} x > 0$; 4) $1 - 2 \operatorname{tg} x \leqslant 0$.

764 Используя графики, найти число корней уравнения:

1) $\cos x = x^2$; 2) $\sin x = \frac{x}{2}$.

Проверь себя!

1 Найти область определения функции $y = \text{tg}\, 4x$. Является ли эта функция чётной?

2 Построить графики функций $y = \sin x$, $y = \cos x$ на отрезке $[-\pi; 2\pi]$. Для каждой из этих функций найти значения x из данного отрезка, при которых $y(x) = 1$, $y(x) = -1$, $y(x) = 0$, $y(x) > 0$, $y(x) < 0$.

3 Построить схематически график функции $y = \text{tg}\, x$ на отрезке $\left[-\frac{3\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$. Найти значения x, при которых $\text{tg}\, x = 0$, $\text{tg}\, x < 0$, $\text{tg}\, x > 0$ на данном отрезке.

765 Найти область определения функции:

1) $y = \text{tg}\left(2x + \frac{\pi}{6}\right)$; 2) $y = \sqrt{\text{tg}\, x}$.

766 Найти наибольшее и наименьшее значения функции:

1) $y = \cos^4 x - \sin^4 x$; 2) $y = \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$;

3) $y = 1 - 2|\sin 3x|$; 4) $y = \sin^2 x - 2\cos^2 x$.

767 Выяснить, является ли функция чётной или нечётной:

1) $y = \sin x + \text{tg}\, x$; 2) $y = \sin x\, \text{tg}\, x$; 3) $y = \sin x\, |\cos x|$.

768 Найти наименьший положительный период функции:

1) $y = 2\sin(2x + 1)$; 2) $y = 3\,\text{tg}\,\frac{1}{4}(x + 1)$.

769 Решить графически уравнение:

1) $\cos x = |x|$; 2) $\sin x = -|x + 1|$.

770 Найти нули функции:

1) $y = \cos^2 x - \cos x$; 2) $y = \cos x - \cos 2x - \sin 3x$.

771 Найти все значения x, при которых функция $y = 1{,}5 - 2\sin^2\frac{x}{2}$ принимает положительные значения.

772 Найти все значения x, при которых функция $y = \text{tg}\, 2x - 1$ принимает отрицательные значения.

773 Построить график функции:

1) $y = 2\sin\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{3}\right) - 2$; 2) $y = \cos x - \sqrt{\cos^2 x}$.

774 Найти множество значений функции:

1) $y = 12\sin x - 5\cos x$; 2) $y = \cos^2 x - \sin x$.

775 Решить неравенство:

1) $\sin x \geqslant \cos x$; 2) $\text{tg}\, x > \sin x$.

VIII глава

Производная и её геометрический смысл

У каждого человека есть определённый кругозор. Когда этот кругозор сужается до бесконечности малого, то он обращается в точку. Тогда человек и говорит, что это есть его точка зрения.

Д. Гильберт

§ 44 Производная

Задача 1 На станции метро расстояние от тормозной отметки до остановки первого вагона равно 80 м. С какой скоростью поезд должен подойти к тормозной отметке, если дальше он двигается равнозамедленно с ускорением 1,6 м/с^2?

▶ Для решения задачи нужно найти скорость движения поезда в момент прохождения тормозной отметки, т. е. *мгновенную скорость* в этот момент времени. Тормозной путь вычисляется по формуле $s = \frac{at^2}{2}$, где a — ускорение, t — время торможения. В данном случае $s = 80$, $a = 1{,}6$, поэтому $80 = 0{,}8t^2$, откуда $t = 10$ с. По формуле $v = at$ находим мгновенную скорость $v = 1{,}6 \cdot 10 = 16$, т. е. $v = 16$ м/с. ◁

От мгновенной скорости зависит решение многих практических задач.

Например, от скорости вхождения в воду спортсмена, прыгающего с вышки, зависит глубина его погружения.

При нахождении мгновенной скорости используется средняя скорость движения за малый промежуток времени.

Рассмотрим, *как связаны между собой средняя и мгновенная скорости движения*.

Пусть материальная точка M движется вдоль оси Os, где O — положение материальной точки в момент времени $t = 0$. Если в момент времени t координата материальной точки равна s, где $s = s(t)$, то функцию $s(t)$ называют законом движения точки M.

При неравномерном движении материальная точка за равные по длительности промежутки времени может совершать перемещения, разные не только по величине, но и по направлению. Средняя скорость движения материальной точки за промежуток времени от t до $t + h$ определяется формулой $v_{ср} = \frac{s(t+h) - s(t)}{h}$.

Если рассматриваемое движение не является равномерным, то $v_{ср}$ при фиксированном t будет меняться при изменении h, и чем меньше h, тем лучше $v_{ср}$ будет характеризовать движение точки в момент t. *Скоростью точки в момент t (мгновенной скоростью)* называют предел, к которому стремится средняя скорость, когда $h \to 0$, т. е. скорость v в момент t определяется равенством $v = \lim\limits_{h \to 0} \frac{s(t+h) - s(t)}{h}$.

Таким образом, скорость движения в момент t — предел отношения приращения координаты $\Delta s = s(t + h) - s(t)$ за промежуток времени от t до $t + h$ к приращению времени h, когда $h \to 0$, если этот предел существует. Например, если материальная точка движется по закону $s = \frac{gt^2}{2}$ (закон свободного падения), то

$$v_{ср} = \frac{s(t+h) - s(t)}{h} = \frac{g}{2h}\left((t+h)^2 - t^2\right),$$

или

$$v_{ср} = gt + \frac{g}{2}h,$$

откуда $\lim\limits_{h \to 0} v_{ср} = gt$, т. е. $v = gt$.

Отношение $\frac{s(t+h) - s(t)}{h}$ называют *разностным отношением*, а его предел при $h \to 0$ называют *производной функции* $s(t)$ и обозначают $s'(t)$ (читается: «Эс штрих от тэ»).

Вообще, пусть функция $f(x)$ определена на некотором промежутке, x — точка этого промежутка и число $h \neq 0$ такое, что $x + h$ также принадлежит данному промежутку. Тогда предел разностного отношения $\frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ при $h \to 0$ (если этот предел существует) называется *производной функции* $f(x)$ *в точке* x и обозначается $f'(x)$ (читается: «Эф штрих от икс»). Таким образом,

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}. \qquad (1)$$

Отметим, что в формуле (1) число h, где $h \neq 0$, может быть как положительным, так и отрицательным, при этом число $x + h$ должно принадлежать промежутку, на котором определена функция $f(x)$.

Если функция $f(x)$ имеет производную в точке x, то эта функция называется *дифференцируемой в этой точке*. Если функция $f(x)$ имеет производную в каждой точке некоторого промежутка, то говорят, что эта функция *дифференцируема на этом промежутке*. Операция нахождения производной называется *дифференцированием*.

Задача 2 Найти производную функции $f(x) = x^2$.

▶ Составим разностное отношение:

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} = \frac{2xh + h^2}{h} = 2x + h.$$

Если $h \to 0$, то $2x + h \to 2x$, поэтому

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} (2x + h) = 2x.$$

Следовательно, $(x^2)' = 2x$. ◁

Задача 3 Найти производную функции $f(x) = x^3$.

▶ Найдём сначала разность $f(x+h) - f(x) =$
$= (x+h)^3 - x^3 = x^3 + 3x^2h + 3xh^2 + h^3 - x^3 =$
$= h(3x^2 + 3xh + h^2)$.

Составим теперь разностное отношение:

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{h(3x^2 + 3xh + h^2)}{h} = 3x^2 + 3xh + h^2.$$

Если $h \to 0$, то $h^2 \to 0$ и $3xh \to 0$, поэтому $3x^2 + 3xh + h^2 \to 3x^2$. Следовательно,

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = 3x^2, \text{ т. е. } (x^3)' = 3x^2. \text{ ◁}$$

Задача 4 Найти производную функции $f(x) = C$, где C — заданное число.

▶ $\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{C-C}{h} = 0$. Так как разностное отношение равно нулю при любом $h \neq 0$, т. е. его значение не меняется при $h \to 0$, то предел этого отношения также равен нулю. Таким образом, производная постоянной равна нулю, т. е. $(C)' = 0$. ◁

Задача 5 Найти производную линейной функции $f(x) = kx + b$.

▶ $\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{k(x+h)+b-(kx+b)}{h} = \frac{kh}{h} = k.$

Так как разностное отношение равно k при любом $h \neq 0$, то и предел этого отношения при $h \to 0$ также равен k. Следовательно, $(kx + b)' = k$. ◁

Применяя формулу

$$(kx + b)' = k,$$

например, получаем

$$(3x + 7)' = 3, \quad (-2x + 1)' = -2, \quad (5x)' = 5, \quad (x)' = 1.$$

Изучение теории пределов не входит в программу средней школы. По этой причине в школьном курсе математики некоторые формулы производных строго не доказываются или вообще принимаются без доказательства.

При нахождении производных простейших функций мы пользуемся наглядными представлениями. Например, мы считаем наглядно понятным, что если $h \to 0$, то $5h \to 0$, $h^2 \to 0$, $5 - 3h \to 5$ и т. п. Тем не менее приведём здесь строгое определение предела функции в точке и поясним его.

Определение. Число A называется *пределом функции* $f(x)$ *в точке* x_0 и обозначается $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$, если для любого числа $\varepsilon > 0$ существует такое число $\delta > 0$, что для всех x, удовлетворяющих условию $|x - x_0| < \delta$, где $x \neq x_0$, выполняется неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$.

Поясним это определение предела функции. Число A является пределом функции $f(x)$ в точке x_0, если значения $f(x)$ при x, достаточно близких к x_0, становятся как угодно близкими к числу A, т. е. значения $|f(x) - A|$ становятся как угодно малыми.

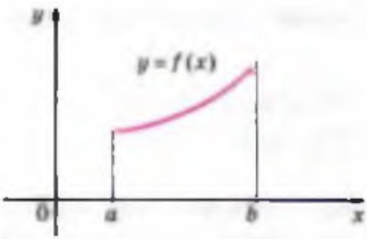


Рис. 102

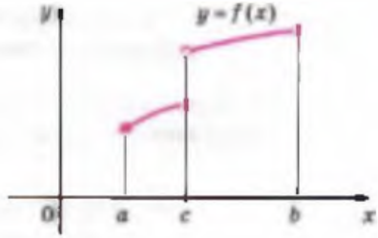


Рис. 103

Это означает, что можно взять сколь угодно малое положительное число ε и убедиться в том, что для всех x, отличающихся от x_0 меньше чем на некоторое число δ, модуль разности между $f(x)$ и числом A будет меньше взятого числа ε.

Например, если $f(x) = (x-2)^2 + 3$, то $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = 3$.

Действительно, $|f(x) - 3| = |x-2|^2$. Пусть задано $\varepsilon > 0$, тогда неравенство $|f(x) - 3| < \varepsilon$, т. е. неравенство $|x-2|^2 < \varepsilon$, равносильно неравенству $|x-2| < \sqrt{\varepsilon}$. Поэтому для всех x, таких, что $|x-2| < \delta$, где $\delta = \sqrt{\varepsilon}$, справедливо неравенство $|f(x) - 3| < \varepsilon$. Например, если $\varepsilon = 0{,}01$, то $\delta = 0{,}1$, а если $\varepsilon = 0{,}0001$, то $\delta = 0{,}01$.

Производная функции является одним из особых пределов, имеющих большое практическое значение.

Понятие предела функции тесно связано с понятием непрерывности.

Если график функции на некотором промежутке представляет собой непрерывную линию, т. е. линию, которую можно провести, не отрывая карандаша от листа бумаги, то эту функцию называют *непрерывной на этом промежутке* (рис. 102).

Приведём примеры функций, которые не являются непрерывными. На рисунке 103 изображён график функции, которая непрерывна на промежутках $[a; c]$ и $(c; b]$, но разрывна в точке $x = c$ и потому не является непрерывной на всем отрезке $[a; b]$.

Все элементарные (линейная, квадратичная, тригонометрические и др.) функции, которые изучаются в школьном курсе математики, являются непрерывными на каждом промежутке, на котором они определены.

* Сформулируем теперь строгое определение *непрерывности функции.*

Определение. Функция $f(x)$ называется *непрерывной в точке* x_0, если $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Если функция непрерывна в каждой точке некоторого интервала, то её называют *непрерывной на этом интервале*. Например, функция $f(x)$, график которой изображён на рисунке 103, непрерывна на интервале $(a; c)$, но не является непрерывной на интервале $(a; b)$. Отметим, что если функция имеет производную на некотором интервале, то она непрерывна на этом интервале.

Обратное утверждение неверно. Функция, непрерывная на промежутке, может не иметь производную в некоторых точках этого промежутка. Например, функция $y = |x|$ непрерывна при всех значениях x, но не имеет производной в точке $x = 0$.

Действительно,

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{|x|}{x} = \begin{cases} 1, \text{ если } x > 0, \\ -1, \text{ если } x < 0, \end{cases}$$

и поэтому разностное отношение $\frac{f(x) - f(0)}{x}$ не имеет предела при $x \to 0$.

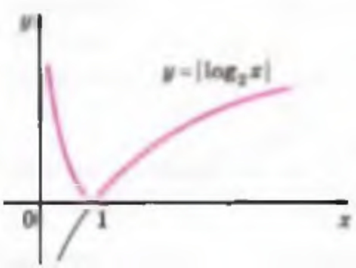


Рис. 104

Ещё пример: функция $y = |\log_2 x|$ непрерывна на промежутке $(0; +\infty)$, но не имеет производной в точке $x = 1$ (рис. 104). *

Задача 6* Выяснить, в каких точках непрерывна функция

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 9}{x - 3} & \text{при } x \neq 3, \\ 5 & \text{при } x = 3. \end{cases}$$

▶ Если $x \neq 3$, то $f(x) = x + 3$, поэтому данная функция непрерывна во всех точках $x \neq 3$, так как

$$\lim_{x \to x_0} (x + 3) = x_0 + 3, \text{ если } x_0 \neq 3.$$

Если $x_0 = 3$, то $x_0 + 3 = 6$, а по условию $f(3) = 5$, т. е. $\lim\limits_{x \to 3} f(x) \neq f(3)$, и поэтому данная функция не является непрерывной в точке $x = 3$. ◁

Упражнения

776 Точка движется по закону $s(t) = 1 + 3t$. Найти среднюю скорость движения за промежуток времени:
1) от $t = 1$ до $t = 4$; 2) от $t = 0{,}8$ до $t = 1$.

777 Найти среднюю скорость движения точки на отрезке $[1; 1{,}2]$, если закон её движения $s = s(t)$ задан формулой:
1) $s(t) = 2t$; 2) $s(t) = t^2$.

778 Найти мгновенную скорость движения точки, если:
1) $s(t) = 2t + 1$; 2) $s(t) = 2 - 3t$.

779 Закон движения задан формулой $s(t) = 0{,}25t + 2$. Найти:
1) среднюю скорость движения от $t = 4$ до $t = 8$;
2) скорость движения в моменты $t = 4$ и $t = 8$.

780 Используя определение производной, найти $f'(x)$, если:
1) $f(x) = 3x + 2$; 2) $f(x) = 5x + 7$;
3) $f(x) = 3x^2 - 5x$; 4) $f(x) = -3x^2 + 2$.

781 С помощью формулы $(kx + b)' = k$ найти производную функции:
1) $f(x) = 4x$; 2) $f(x) = -7x + 5$; 3) $f(x) = -5x - 7$.

782 Найти мгновенную скорость движения точки, если закон её движения $s(t)$ задан формулой:
1) $s(t) = \frac{3}{2}t^2$; 2) $s(t) = 5t^2$.

783 Определить скорость тела, движущегося по закону $s(t) = t^2 + 2$, в момент времени:
1) $t = 5$; 2) $t = 10$.

784 Закон движения точки задан графиком зависимости пути s от времени t (рис. 105). Найти среднюю скорость движения точки на отрезках $[0; 1]$, $[1; 2]$, $[2; 3]$.

785 Закон движения точки задан графиком зависимости пути s от времени t (рис. 106). Найти среднюю скорость движения точки на отрезках $[0; 2]$, $[2; 3]$, $[3; 3{,}5]$.

786 Используя определение предела функции в точке, выяснить, является ли верным равенство:
1) $\lim\limits_{x \to 1} (2x + 1) = 3$; 2) $\lim\limits_{x \to 2} x^2 = 4$.

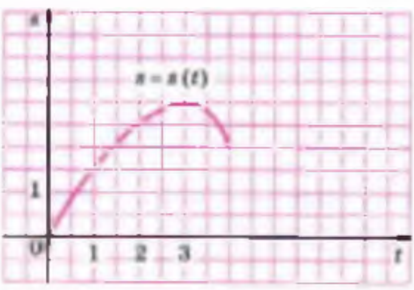


Рис. 105

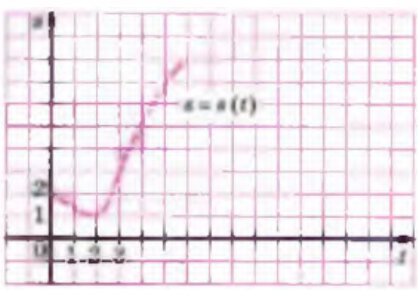


Рис. 106

§ 45 Производная степенной функции

Задача 1 Доказать, что $\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$.

▶ Пусть $f(x) = \frac{1}{x}$, $x \neq 0$. Тогда

$$f(x+h) - f(x) = \frac{1}{x+h} - \frac{1}{x} = \frac{x-(x+h)}{(x+h)x} = -\frac{h}{(x+h)x},$$

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = -\frac{1}{(x+h)x}.$$

Если $h \to 0$, то $x + h \to x$, и поэтому знаменатель дроби стремится к x^2. Следовательно, $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$.

При этом предполагалось, что если $x > 0$, то и $x + h > 0$, а если $x < 0$, то и $x + h < 0$. Таким образом, формула $\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$ справедлива при $x \neq 0$. ◁

Задача 2 Доказать, что $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

▶ Пусть $f(x) = \sqrt{x}$, $x > 0$, $x + h > 0$. Составим разностное отношение:

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h}.$$

Умножим числитель и знаменатель на сумму $\sqrt{x+h}+\sqrt{x}$. Получим

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{(\sqrt{x+h}-\sqrt{x})(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})}{h(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})} =$$

$$= \frac{(x+h)-x}{h(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})} = \frac{h}{h(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})} = \frac{1}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}}.$$

Если $h \to 0$, то $\sqrt{x+h}$ стремится к $\sqrt{x}$, поэтому знаменатель последней дроби стремится к $2\sqrt{x}$. Следовательно, $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

Таким образом, формула $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ справедлива при $x > 0$. ◁

Итак, в этом и предыдущем параграфах получены следующие формулы для производных:

$$C' = 0,\ (x)' = 1,\ (x^2)' = 2x,\ (x^3)' = 3x^2,$$

$$\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}\ (x \neq 0),\quad (\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}\ (x > 0).$$

Четыре последние формулы являются формулами производной степенной функции $f(x) = x^p$ для $p = 2,\ 3,\ -1,\ \frac{1}{2}$. Их можно записать так:

$$(x^2)' = 2x^{2-1} = 2x,\quad (x^3)' = 3x^{3-1} = 3x^2,$$

$$(x^{-1})' = (-1)\,x^{-1-1} = -\frac{1}{x^2},\quad \left(x^{\frac{1}{2}}\right)' = \frac{1}{2}\,x^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

Вообще, справедлива формула производной степенной функции для любого действительного показателя:

$$(x^p)' = px^{p-1}. \qquad (1)$$

Эта формула применима при тех значениях x, при которых её правая часть имеет смысл.

Например, $(x^5)' = 5x^4$, $\left(x^{\frac{1}{3}}\right)' = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}$, $\left(x^{\frac{3}{2}}\right)' = \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}$, $\left(x^{\sqrt{2}}\right)' = \sqrt{2}\,x^{\sqrt{2}-1}$.

Задача 3 Вычислить $f'(9)$, если $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$.

▶ $f'(x) = \left(x^{-\frac{1}{2}}\right)' = -\frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}}$, $f'(9) = -\frac{1}{2}\cdot 9^{-\frac{3}{2}} = -\frac{1}{54}$. ◁

Пользуясь формулами $(x^p)' = px^{p-1}$ и $(kx + b)' = k$, можно найти производные степенной и линейной функций, например $(x^7)' = 7x^6$, $(3x - 1)' = 3$. В более сложных случаях, например при нахождении производной функции $(3x - 1)^7$, можно воспользоваться следующей формулой:

$$((kx + b)^p)' = pk\,(kx + b)^{p-1}. \qquad (2)$$

По формуле (2) при $k = 3$, $b = -1$, $p = 7$ имеем

$$((3x - 1)^7)' = 21\,(3x - 1)^6.$$

Задача 4 Вычислить $f'(-3)$, если $f(x) = \sqrt{4-7x}$.

▶ Запишем данную функцию так: $f(x) = (-7x+4)^{\frac{1}{2}}$.

По формуле (2) находим $f'(x) = -\frac{7}{2}(-7x+4)^{-\frac{1}{2}}$.

При $x = -3$ получаем $f'(-3) = -\frac{7}{2} \cdot 25^{-\frac{1}{2}} = -0{,}7$. ◁

Задача 5* Доказать, что $\left(\sqrt[3]{x}\right)' = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$ на промежутке:

1) $x > 0$; 2) $x < 0$.

▶ 1) Если $x > 0$, то $\sqrt[3]{x} = x^{\frac{1}{3}}$ и по формуле (1) получаем $\left(\sqrt[3]{x}\right)' = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$.

2) Если $x < 0$, то $\sqrt[3]{x} = -\sqrt[3]{(-x)} = -(-x)^{\frac{1}{3}}$ и по формуле (2) получаем

$$\left(\sqrt[3]{x}\right)' = (-1)\cdot\frac{1}{3}(-1)(-x)^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{3\sqrt[3]{(-x)^2}} = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}. ◁$$

Упражнения

Найти производную функции (787—792).

787 1) x^6; 2) x^7; 3) x^{11}; 4) x^{13}.

788 1) x^{-2}; 2) x^{-3}; 3) x^{-4}; 4) x^{-7}.

789 1) $x^{\frac{1}{2}}$; 2) $x^{\frac{2}{3}}$; 3) $x^{-\frac{2}{7}}$; 4) $x^{\sqrt{3}}$.

790 1) $\frac{1}{x^5}$; 2) $\frac{1}{x^9}$; 3) $\sqrt[4]{x}$; 4) $\sqrt[3]{x^2}$; 5) $\frac{1}{\sqrt[3]{x}}$; 6) $\frac{1}{\sqrt[4]{x^3}}$.

791 1) $(4x-3)^2$; 2) $(5x+2)^{-3}$; 3) $(1-2x)^{-6}$;
4) $(2-5x)^4$; 5) $(2x)^3$; 6) $(-5x)^4$.

792 1) $\sqrt[3]{2x+7}$; 2) $\sqrt[4]{7-3x}$; 3) $\sqrt[4]{3x}$; 4) $\sqrt[3]{5x}$.

793 Найти $f'(x_0)$, если:

1) $f(x) = x^6$, $x_0 = \frac{1}{2}$; 2) $f(x) = x^{-2}$, $x_0 = 3$;

3) $f(x) = \sqrt{x}$, $x_0 = 4$; 4) $f(x) = \sqrt[3]{x}$, $x_0 = 8$;

5) $f(x) = \sqrt{5-4x}$, $x_0 = 1$; 6) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{3x+1}}$, $x_0 = 1$.

794 Построить график функции $y = x^4$ и график функции, являющейся её производной.

795 На рисунке 107 изображён график функции, являющейся производной одной из функций $y = x^2$, $y = x^3$ или $y = x^{\frac{1}{2}}$. Установить функцию.

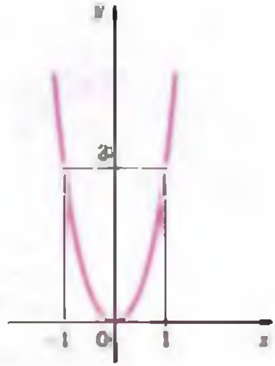


Рис. 107

796 Найти производную функции:

1) $\frac{1}{(2+3x)^2}$; 2) $\frac{1}{(3-2x)^3}$;

3) $\sqrt[3]{(3x-2)^2}$; 4) $\sqrt[7]{(3-14x)^2}$;

5) $\frac{1}{\sqrt[4]{3x-7}}$; 6) $\frac{1}{\sqrt[3]{(1-2x)^2}}$.

797 При каких значениях x производная функции $f(x)$ равна 1, если:

1) $f(x) = x^3$; 2) $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$?

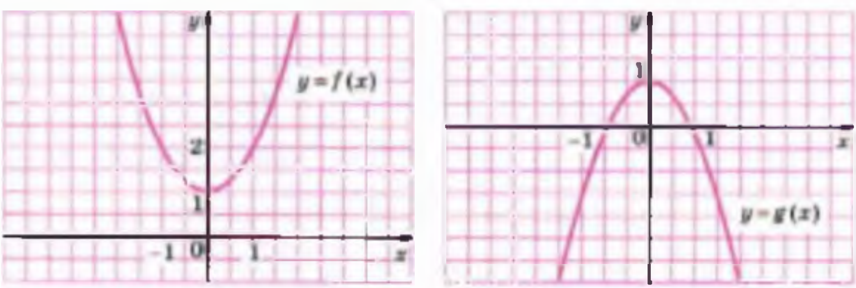
798 Найти мгновенную скорость тела, движущегося по закону $s(t) = \sqrt{t+1}$, в момент времени $t = 3$.

799 При каких значениях x выполняется равенство $f'(x) = f(x)$, если:

1) $f(x) = (2x-1)^2$; 2) $f(x) = (3x+2)^3$?

800 По данному на рисунке 108 графику квадратичной функции написать формулы, задающие саму функцию и её производную.

801 Найти значения x, при которых значения функции $y = \sqrt{3x-7}$ равны значениям функции, являющейся её производной.



а) *б)*

Рис. 108

§ 46 Правила дифференцирования

При вычислении производной используются следующие правила дифференцирования суммы, произведения и частного:

1. Производная суммы равна сумме производных:

$$(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x). \qquad (1)$$

Подробно это свойство производной формулируется так: если каждая из функций $f(x)$ и $g(x)$ имеет производную, то их сумма также имеет производную и справедлива формула (1).

● Обозначим $f(x) + g(x) = F(x)$. Тогда $F(x+h) - F(x) = f(x+h) - f(x) + g(x+h) - g(x)$. Поэтому разностное отношение равно

$$\frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \frac{f(x+h) - f(x)}{h} + \frac{g(x+h) - g(x)}{h}.$$

При $h \to 0$ первая дробь в правой части имеет предел, равный $f'(x)$; вторая дробь имеет предел, равный $g'(x)$. Поэтому левая часть имеет предел, равный $F'(x) = f'(x) + g'(x)$, т. е. справедливо равенство (1). ○

Аналогично доказывается, что производная суммы нескольких функций равна сумме производных этих функций, производная разности равна разности производных.

Задача 1 Найти производную функции:

1) $f(x) = x^3 - x^2 + x - 3$; 2) $f(x) = \sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}$.

▶ 1) $f'(x) = (x^3)' - (x^2)' + (x)' - (3)' = 3x^2 - 2x + 1$;

2) $f'(x) = \left(x^{\frac{1}{2}}\right)' - \left(x^{-\frac{1}{2}}\right)' = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}}$. ◁

2. Постоянный множитель можно вынести за знак производной:

$$(cf(x))' = cf'(x). \qquad (2)$$

● Обозначим $cf(x) = F(x)$, тогда

$$\frac{F(x+h)-F(x)}{h} = \frac{cf(x+h)-cf(x)}{h} = c\cdot\frac{f(x+h)-f(x)}{h},$$

откуда при $h \to 0$ получаем $F'(x) = cf'(x)$. ○

Задача 2 Вычислить $f'(-2)$, если $f(x) = \frac{1}{4}x^5 - 3x^3 + 7x - 17$.

▶ $f'(x) = \left(\frac{1}{4}x^5\right)' - (3x^3)' + (7x)' - (17)' = \frac{1}{4}(x^5)' -$

$- 3(x^3)' + 7(x)' = \frac{5}{4}x^4 - 9x^2 + 7,$

$f'(-2) = \frac{5}{4}(-2)^4 - 9(-2)^2 + 7 = -9.$ ◁

Приведем без доказательства формулы производной произведения и частного.

3. Производная произведения:

$$(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x). \qquad (3)$$

Задача 3 Найти производную функции $f(x)g(x)$, если $f(x) = 3x^2 - 5$, $g(x) = 2x + 7$.

▶ По формуле (3) находим

$$(f(x)g(x))' =$$
$$= (3x^2 - 5)'(2x + 7) + (3x^2 - 5)(2x + 7)' =$$
$$= 6x(2x + 7) + (3x^2 - 5)\cdot 2 = 18x^2 + 42x - 10. \text{ ◁}$$

Задача 4 Найти значения x, при которых значение производной функции $f(x) = (x-1)^9(x+2)^6$ равно нулю.

▶ По формуле (3) получаем $f'(x) = 9(x-1)^8(x+2)^6 + 6(x-1)^9(x+2)^5 = 3(x-1)^8(x+2)^5(3x+6+2x-2) = 3(x-1)^8(x+2)^5(5x+4)$.

Решая уравнение $3(x-1)^8(x+2)^5(5x+4) = 0$, находим, что $f'(x) = 0$ при

$$x_1 = 1,\ x_2 = -2,\ x_3 = -0{,}8. \text{ ◁}$$

4. Производная частного:

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)\cdot g(x) - f(x)\cdot g'(x)}{g^2(x)}. \qquad (4)$$

Формулы (3) и (4) справедливы при условии, что функции $f(x)$ и $g(x)$ имеют производную в точке x, причём в равенстве (4) $g(x) \neq 0$.

Задача 5 Найти производную функции $F(x) = \dfrac{x^3}{x^2+1}$.

▶ Обозначим $x^3 = f(x)$, $x^2 + 1 = g(x)$. По формуле (4) находим $F'(x) = \dfrac{(x^3)'(x^2+1) - x^3(x^2+1)'}{(x^2+1)^2} =$

$= \dfrac{3x^2(x^2+1) - x^3 \cdot 2x}{(x^2+1)^2} = \dfrac{x^4 + 3x^2}{(x^2+1)^2}$. ◁

Задача 6 Найти значения x, при которых значение производной функции $f(x) = \dfrac{1}{x^2+3}$: 1) положительно; 2) отрицательно.

▶ По формуле (4) получаем $f'(x) = \dfrac{-2x}{(x^2+3)^2}$.

1) Решая неравенство $\dfrac{-2x}{(x^2+3)^2} > 0$, находим, что $f'(x) > 0$ при $x < 0$.

2) Решая неравенство $\dfrac{-2x}{(x^2+3)^2} < 0$, находим, что $f'(x) < 0$ при $x > 0$. ◁

5. Производная сложной функции.

Рассмотрим функцию $F(x) = \log_2(x^2+1)$. Эту функцию можно рассматривать как *сложную функцию* $f(y) = \log_2 y$, где $y = g(x) = x^2 + 1$, т. е. как функцию $f(y)$, аргумент которой также является функцией $y = g(x)$. Иными словами, *сложная функция — это функция от функции* $F(x) = f(g(x))$. Производная сложной функции находится по формуле $F'(x) = f'(y)\,g'(x)$, где $y = g(x)$, т. е. по формуле

$$(f(g(x)))' = f'(g(x))\,g'(x). \qquad (5)$$

Рассмотрим примеры.

1) Пусть $F(x) = (2x+1)^2 + 5(2x+1)$.
Здесь $f(y) = y^2 + 5y$, $y = g(x) = 2x + 1$.
По формуле (5) находим $F'(x) = (2y+5)\cdot(2x+1)' =$
$= (2y+5)\cdot 2 = (2(2x+1)+5)\cdot 2 = 8x + 14$.

2) Пусть $F(x) = (x^2+1)^{\frac{3}{2}}$. Здесь $f(y) = y^{\frac{3}{2}}$, $y = g(x) = x^2 + 1$. По формуле (5) находим

$$F'(x) = \frac{3}{2}y^{\frac{1}{2}}(x^2+1)' = \frac{3}{2}(x^2+1)^{\frac{1}{2}}\cdot 2x = 3x\sqrt{x^2+1}.$$

Упражнения

Найти производную функции (802—803).

802 1) $x^2 + x$; 2) $x^2 - x$; 3) $3x^2$; 4) $-17x^2$;
5) $-4x^3$; 6) $0{,}5x^3$; 7) $13x^2 + 26$; 8) $8x^2 - 16$.

803 1) $3x^2 - 5x + 5$; 2) $5x^2 + 6x - 7$; 3) $x^4 + 2x^2$;
4) $x^5 - 3x^2$; 5) $x^3 + 5x$; 6) $-2x^3 + 18x$;
7) $2x^3 - 3x^2 + 6x + 1$; 8) $-3x^3 + 2x^2 - x - 5$.

804 Построить график функции $y = 3(x-2)^2 + 1$ и график функции, являющейся её производной.

805 Найти производную функции:
1) $x^2 + \frac{1}{x^3}$; 2) $x^3 + \frac{1}{x^2}$; 3) $2\sqrt[4]{x} - \sqrt{x}$; 4) $3\sqrt[6]{x} + 7\sqrt[14]{x}$.

806 Найти $f'(0)$ и $f'(2)$, если:
1) $f(x) = x^2 - 2x + 1$; 2) $f(x) = x^3 - 2x$;
3) $f(x) = -x^3 + x^2$; 4) $f(x) = x^2 + x + 1$.

807 Найти $f'(3)$ и $f'(1)$, если:
1) $f(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}$; 2) $f(x) = \sqrt{x} + \frac{1}{x} + 1$;
3) $f(x) = \frac{3}{\sqrt{x}} - \frac{2}{x^3}$; 4) $f(x) = x^{\frac{3}{2}} - x^{-\frac{3}{2}}$.

808 Дифференцируема ли функция $y = f(x)$ в точке x, если:
1) $y = \frac{2}{x-1}$, $x = 1$; 2) $y = \frac{3x-5}{(x-3)^2}$, $x = 3$;
3) $y = \sqrt{x+1}$, $x = 0$; 4) $y = \sqrt{5-x}$, $x = 4$?

809 Найти значения x, при которых значение производной функции $f(x)$ равно 0, если:
1) $f(x) = x^3 - 2x$;
2) $f(x) = -x^2 + 3x + 1$;
3) $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x - 3$;
4) $f(x) = x^3 + 2x^2 - 7x + 1$;
5) $f(x) = 3x^4 - 4x^3 - 12x^2$;
6) $f(x) = x^4 + 4x^3 - 8x^2 - 5$.

810 Найти производную функции:
1) $(x^2 - x)(x^3 + x)$; 2) $(x+2)\sqrt[3]{x}$; 3) $(x-1)\sqrt{x}$.

811 Найти $f'(1)$, если:
1) $f(x) = (x-1)^8(2-x)^7$; 2) $f(x) = (2x-1)^5(1+x)^4$;
3) $f(x) = \sqrt{2-x}\,(3-2x)^8$; 4) $f(x) = (5x-4)^6\sqrt{3x-2}$.

812 Пересекается ли график функции, являющейся производной функции $y = x^3 + 2x^2 - 3x + 4$, с графиком функции $y = 3x + 1$?

813 При каких значениях x значение производной функции $y = (x - 3)^5 (2 + 5x)^6$ равно 0?

814 Найти производную функции:

1) $\frac{x^5 + x^3 + x}{x + 1}$; 2) $\frac{\sqrt{x} + x^2 + 1}{x - 1}$.

815 Найти $f'(1)$, если:

1) $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$; 2) $f(x) = \frac{2x^2}{1 - 7x}$.

816 Найти функцию $f(g(x))$, если:

1) $g(x) = 1 - x$, $f(g) = g^{\frac{3}{2}}$; 2) $g(x) = \ln x$, $f(g) = \sqrt{g}$.

817 Представить в виде сложной функции:

1) $F(x) = \sqrt{2x^2 - 7}$; 2) $F(x) = \sin(x^2 + 1)$.

Найти производную функции (818—821).

818 1) $\frac{x^3 + x^2 + 16}{x}$; 2) $\frac{x\sqrt[3]{x} - 3x + 18}{\sqrt[3]{x}}$.

819 1) $\frac{x^2 - 4}{\sqrt{x}}$; 2) $\left(\sqrt[4]{x} + \frac{1}{\sqrt[4]{x}}\right)\left(\sqrt[4]{x} - \frac{1}{\sqrt[4]{x}}\right)$.

820 1) $(2x - 3)^5 (3x^2 + 2x + 1)$; 2) $(x - 1)^4 (x + 1)^7$;

3) $\sqrt[4]{3x + 2}\,(3x - 1)^4$; 4) $\sqrt[3]{2x + 1}\,(2x - 3)^3$.

821 1) $\frac{2x^2 - 3x + 1}{x + 1}$; 2) $\frac{3x^3 + 2x - 1}{2x + 1}$; 3) $\frac{2 - x}{\sqrt{x}} + \frac{\sqrt{x}}{2 - x}$.

822 При каких значениях x значение производной функции $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 1$ равно 0?

823 При каких значениях x значение производной функции $f(x) = \frac{2x - 1}{x + 1}$ равно 3?

824 При каких значениях x значение производной функции $f(x) = (x - 1)(x - 2)(x - 3)$ равно 11?

825 Выяснить, при каких значениях x производная функции принимает положительные значения:

1) $f(x) = x^4 - 4x^2 + 1$; 2) $f(x) = 3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + 3$;

3) $f(x) = (x + 2)^2 \sqrt{x}$; 4) $f(x) = (x - 3)\sqrt{x}$.

826 Выяснить, при каких значениях x производная функции принимает отрицательные значения:

1) $y = (5 - 3x)^4 (3x - 1)^3$; 2) $y = (2x - 3)^2 (3 - 2x)^3$;

3) $y = \frac{3x^2 - 1}{1 - 2x}$; 4) $y = \frac{3x^3}{1 - 3x}$.

827 Угол поворота тела вокруг оси изменяется в зависимости от времени t по закону $\varphi(t) = 0{,}1t^2 - 0{,}5t + 0{,}2$. Найти угловую скорость (в рад/с) вращения тела в момент времени $t = 20$ с.

828 Тело, масса которого $m = 5$ кг, движется прямолинейно по закону $s = 1 - t + t^2$ (где s измеряется в метрах, t — в секундах). Найти кинетическую энергию тела $\frac{mv^2}{2}$ через 10 с после начала движения.

829 В тонком неоднородном стержне длиной 25 см его масса (в граммах) распределена по закону $m = 2l^2 + 3l$, где l — длина стержня, отсчитываемая от его начала. Найти линейную плотность:

1) в точке, отстоящей от начала стержня на 3 см;

2) в конце стержня.

830 Найти производную функции $f(x) = \sqrt{x^2 - 5x + 6}$ при $x < 2$ и при $x > 3$.

§ 47 Производные некоторых элементарных функций

Элементарными функциями называют степенную, показательную, логарифмическую и тригонометрические функции, а также их различные комбинации. При решении многих практических задач часто приходится находить производные таких функций.

Например, напряжение в цепи переменного тока выражается формулой $U(t) = A \sin(\omega t + \varphi)$; для нахождения силы тока $I(t)$ нужно уметь находить производную $U'(t)$, так как $I(t) = U'(t)$.

1. Производная показательной функции. Показательная функция $f(x) = a^x$, где $a > 0$, $a \neq 1$, определена на всей числовой прямой и имеет производную в каждой её точке. Любую показательную функцию можно выразить через показательную функцию с основанием e по формуле

$$a^x = e^{x \ln a}, \tag{1}$$

так как $e^{x \ln a} = (e^{\ln a})^x = a^x$. В курсе высшей математики доказывается, что функция e^x обладает замечательным свойством: её производная также равна e^x, т. е.

$$(e^x)' = e^x. \tag{2}$$

Применяя правило дифференцирования сложной функции, получаем

$$(e^{kx+b})' = ke^{kx+b}. \tag{3}$$

Например, $(e^{3x+1})' = 3e^{3x+1}$, $(e^{-2x-4})' = -2e^{-2x-4}$.

Задача 1 Найти производную функции a^x, где $a > 0$, $a \neq 1$.

▶ Используя формулы (1) и (3), находим $(a^x)' = (e^{x \ln a})' = \ln a \cdot e^{x \ln a} = \ln a \cdot a^x$. ◁

Итак,

$$(a^x)' = a^x \ln a. \tag{4}$$

Например, $(3^x)' = 3^x \ln 3$, $(0{,}7^x)' = 0{,}7^x \ln 0{,}7$.

2*. Производная логарифмической функции. Логарифмическую функцию $\log_a x$ с любым основанием $a > 0$, $a \neq 1$ можно выразить через логарифмическую функцию с основанием e с помощью формулы перехода

$$\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}. \tag{5}$$

Производная функции $\ln x$ выражается формулой

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}, \quad x > 0. \tag{6}$$

Применяя правило дифференцирования сложной функции, получаем

$$(\ln(kx+b))' = \frac{k}{kx+b}. \tag{7}$$

Например, $(\ln(4x-3))' = \dfrac{4}{4x-3}$, $(\ln(1-2x))' = \dfrac{-2}{1-2x} = \dfrac{2}{2x-1}$.

Задача 2 Найти производную функции $\log_a x$, где $a > 0$, $a \neq 1$.

▶ Используя формулы (5) и (6), находим

$$(\log_a x)' = \left(\frac{\ln x}{\ln a}\right)' = \frac{1}{\ln a}(\ln x)' = \frac{1}{x \ln a}. \triangleleft$$

Итак,

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}. \qquad (8)$$

3. Производные тригонометрических функций. Покажем, как можно вывести формулу производной синуса. Обозначим $f(x) = \sin x$, составим разностное отношение:

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} =$$

$$= \frac{2\sin\frac{h}{2}\cos\left(x + \frac{h}{2}\right)}{h} = \frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}\cos\left(x + \frac{h}{2}\right). \qquad (9)$$

Если $h \to 0$, то $x + \frac{h}{2} \to x$ и $\cos\left(x + \frac{h}{2}\right) \to \cos x$.

Воспользуемся тем, что $\lim\limits_{t \to 0} \frac{\sin t}{t} = 1$. Это утверждение называют *первым замечательным пределом* и обычно доказывают в курсе высшей математики. Тогда

$$\lim_{h \to 0} \frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}} = 1,$$

и поэтому правая часть (9) имеет предел, равный $\cos x$. Следовательно, левая часть (9) также имеет предел, который по определению равен $f'(x)$. Таким образом, $(\sin x)' = \cos x$.

Аналогично можно убедиться в том, что $(\cos x)' = -\sin x$.

Итак, справедливы формулы

$$(\sin x)' = \cos x, \quad (\cos x)' = -\sin x. \qquad (10)$$

Справедливы также формулы

$$(\sin(kx + b))' = k\cos(kx + b),$$
$$(\cos(kx + b))' = -k\sin(kx + b).$$

Например, $\left(\sin\left(\frac{1}{4}x - 1\right)\right)' = \frac{1}{4}\cos\left(\frac{1}{4}x - 1\right)$,

$(\cos(3 - 4x))' = -(-4)\sin(3 - 4x) = 4\sin(3 - 4x)$.

Задача 3 Найти производную функции $\operatorname{tg} x$.

▶ Используя правило дифференцирования частного и формулы (10), находим $(\operatorname{tg} x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' =$

$$= \frac{(\sin x)' \cos x - \sin x (\cos x)'}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

Итак, $(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$. ◁

4. Применение правил дифференцирования и формул производных к решению задач.

Приведём сводную таблицу.

$$(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x), \quad (cf(x))' = cf'(x),$$
$$(f(x)\, g(x))' = f'(x)\, g(x) + f(x)\, g'(x),$$
$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)\, g(x) - f(x)\, g'(x)}{g^2(x)},$$
$$(f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x).$$

$$((x)^p)' = px^{p-1}, \quad (e^x)' = e^x, \quad (\ln x)' = \frac{1}{x},$$
$$(a^x)' = a^x \ln a, \quad (\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a},$$
$$(\sin x)' = \cos x, \quad (\cos x)' = -\sin x.$$

Задача 4 Найти производную функции:

1) $f(x) = \sin(2x + 1) - 3\cos(1 - x)$;

2) $f(x) = e^{-3x} \sin(5x - 1)$; 3) $f(x) = \frac{\ln 3x}{x + 1}$.

▶ 1) $f'(x) = 2\cos(2x + 1) - 3\sin(1 - x)$;

2) $f'(x) = -3e^{-3x} \sin(5x - 1) + 5e^{-3x} \cos(5x - 1)$;

3) $f'(x) = \frac{\frac{3}{3x}(x+1) - 1 \cdot \ln 3x}{(x+1)^2} = \frac{x + 1 - x \ln 3x}{x(x+1)^2}$. ◁

Задача 5* Найти значения x, при которых значение производной функции $f(x) = x^2 - 2\ln x$ равно нулю; положительно; отрицательно.

▶ Найдём производную $f'(x) = 2x - \frac{2}{x} = \frac{2(x^2 - 1)}{x}$.

Заметим, что равенство $(x^2 - 2\ln x)' = 2x - \frac{2}{x}$ справедливо при тех значениях x, при которых обе части имеют смысл, т. е. при $x > 0$.

Выражение $\frac{2(x^2-1)}{x}$ равно нулю при $x_{1,2} = \pm 1$, положительно на промежутках $-1 < x < 0$ и $x > 1$; отрицательно на промежутках $x < -1$ и $0 < x < 1$. Так как $x > 0$, то $f'(x) = 0$ только при $x = 1$; $f'(x) > 0$ при $x > 1$; $f'(x) < 0$ при $0 < x < 1$. ◁

Упражнения

Найти производную функции (831—839).

831 1) $e^x + 1$; 2) $e^x + x^2$; 3) $e^{2x} + \frac{1}{x}$; 4) $e^{-3x} + \sqrt{x}$.

832 1) $e^{2x+1} + 2x^3$; 2) $e^{\frac{1}{2}x-1} - \sqrt{x-1}$; 3) $e^{0,3x+2} + \frac{1}{\sqrt{x}}$;

4) $e^{1-x} + x^{-3}$; 5) e^{x^2}; 6) e^{2x^3}.

833 1) $2^x + e^x$; 2) $3^x - x^{-2}$; 3) $e^{2x} - x$; 4) $e^{3x} + 2x^2$; 5) 3^{x^2+2}.

834 1) $0,5^x + e^{3x}$; 2) $3^x - e^{2x}$; 3) $e^{2-x} + \sqrt[3]{x}$; 4) $e^{3-x} + \frac{1}{x^4}$.

835 1) $2 \ln x + 3^x$; 2) $3 \ln x - 2^x$; 3) $\log_2 x + \frac{1}{2x}$;

4) $3x^{-3} - \log_3 x$; 5) $\ln(x^2 - 2x)$; 6) $(3x^2 - 2)\log_3 x$.

836 1) $\sin x + x^2$; 2) $\cos x - 1$; 3) $\cos x + e^x$; 4) $\sin x - 2^x$.

837 1) $\sin(2x - 1)$; 2) $\cos(x + 2)$; 3) $\sin(3 - x)$; 4) $\cos(x^3)$.

838 1) $\cos\left(\frac{x}{2} - 1\right) + e^{3x}$; 2) $\sin\left(\frac{x}{3} + 3\right) + 2^x$; 3) $3\cos 4x - \frac{1}{2x}$.

839 1) $\frac{\cos x}{e^x}$; 2) $\frac{3^x}{\sin x}$; 3) $\ln x \cdot \cos 3x$; 4) $\log_3 x \cdot \sin 2x$.

840 Найти значение производной функции $f(x)$ в точке x_0:

1) $f(x) = e^{2x-4} + 2\ln x$, $x_0 = 2$;

2) $f(x) = e^{3x-2} - \ln(3x - 1)$, $x_0 = \frac{2}{3}$;

3) $f(x) = 2^x - \log_2 x$, $x_0 = 1$;

4) $f(x) = \log_{0,5} x - 3^x$, $x_0 = 1$.

841 Выяснить, при каких значениях x значение производной функции $f(x)$ равно 0:

1) $f(x) = x - \cos x$; 2) $f(x) = \frac{1}{2}x - \sin x$;

3) $f(x) = 2\ln(x + 3) - x$; 4) $f(x) = \ln(x + 1) - 2x$;

5) $f(x) = x^2 + 2x - 12\ln x$; 6) $f(x) = x^2 - 6x - 8\ln x$.

842 Выяснить, при каких значениях x значение производной функции $f(x)$ положительно:

1) $f(x) = e^x - x$; 2) $f(x) = x \ln 2 - 2^x$;

3) $f(x) = e^x x^2$; 4) $f(x) = e^x \sqrt{x}$.

Найти производную функции (**843—851**).

843 1) $\sqrt{\frac{2x-1}{3}} + \ln \frac{2x+3}{5}$; 2) $\sqrt{\frac{1-x}{6}} - 2\ln \frac{2-5x}{3}$;

3) $2e^{\frac{1-x}{3}} + 3\cos \frac{1-x}{2}$; 4) $3e^{\frac{2-x}{3}} - 2\sin \frac{1+x}{4}$.

844 1) $\sqrt{\frac{3}{2-x}} - 3\cos \frac{x-2}{3}$; 2) $2\sqrt{\frac{1}{(x+2)^3}} - 5e^{\frac{x-4}{5}}$.

845 1) $0{,}5^x \cdot \cos 2x$; 2) $5\sqrt{x} \cdot e^{-x}$; 3) $e^{3-2x} \cdot \cos(3-2x)$.

846 1) $\ln \sqrt{x-1}$; 2) $e^{\sqrt{3+x}}$; 3) $\ln(\cos x)$; 4) $\ln(\sin x)$.

847 1) $2^{\cos x + 1}$; 2) $0{,}5^{1+\sin x}$; 3) $\cos \sqrt[3]{x+2}$; 4) $\sin(\ln x)$.

848 1) $\sqrt{x^2+2x-1}$; 2) $\sqrt[3]{\sin x}$; 3) $\sqrt[4]{\cos x}$; 4) $\sqrt{\log_2 x}$.

849 1) $\frac{1+\cos x}{\sin x}$; 2) $\frac{\sqrt{3x}}{3^x+1}$; 3) $\frac{e^{0,5x}}{\cos 2x - 5}$; 4) $\frac{e^{2x}}{\sin 3x + 7}$.

850 1) $\frac{e^x - e^{-x}}{x}$; 2) $\frac{2^x - \log_2 x}{\ln 2 \cdot x}$.

851 1) $\frac{\sin x - \cos x}{x}$; 2) $\frac{1-\sin 2x}{\sin x - \cos x}$.

852 Выяснить, при каких значениях x значение производной функции $f(x)$ равно 0:

1) $f(x) = 5(\sin x - \cos x) + \sqrt{2}\cos 5x$;

2) $f(x) = 1 - 5\cos 2x + 2(\sin x - \cos x) - 2x$.

853 Найти значения производной функции $f(x)$ в точках, в которых значение этой функции равно 0:

1) $f(x) = e^{2x} \ln(2x-1)$; 2) $f(x) = \frac{\sin x - \cos x}{\sin x}$.

854 Вычислить $f'(x) + f(x) + 2$, если $f(x) = x \sin 2x$, $x = \pi$.

855 Найти значения x, при которых значение производной функции $f(x)$ равно нулю; положительно; отрицательно:

1) $f(x) = x - \ln x$; 2) $f(x) = x \ln x$;

3) $f(x) = x^2 \ln x$; 4) $f(x) = x^3 - 3\ln x$.

856 Найти производную функции $\ln(x^2 - 5x + 6)$ при $x < 2$ и при $x > 3$.

§ 48 Геометрический смысл производной

Напомним, что графиком линейной функции $y = kx + b$ является прямая (рис. 109). Число $k = \operatorname{tg} \alpha$ называют *угловым коэффициентом* прямой, а угол α — *углом между этой прямой и осью Ox*.

Если $k > 0$, то $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ (рис. 109, *а*); в этом случае функция возрастает.

Если $k < 0$, то $-\frac{\pi}{2} < \alpha < 0$ (рис. 109, *б*); в этом случае функция $y = kx + b$ убывает.

Выясним геометрический смысл производной дифференцируемой функции $y = f(x)$.

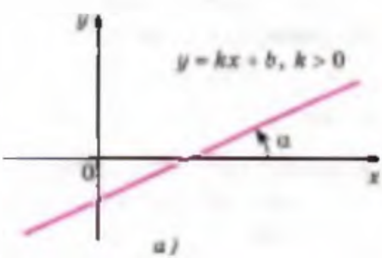
Пусть точки A и M принадлежат графику функции $y = f(x)$ (рис. 110).

Пусть x и $x + h$ — абсциссы точек A и M (рис. 111), тогда их ординаты равны $f(x)$ и $f(x + h)$. Из треугольника ACM (рис. 111), где $C\,(x + h;\ f(x))$, найдём угловой коэффициент k прямой AM, который зависит от h (его можно рассматривать как функцию от h и писать $k(h)$). Имеем

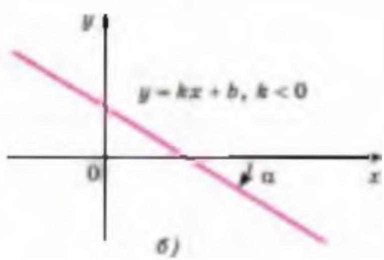
$$k(h) = \operatorname{tg} \angle CAM = \frac{MC}{AC},$$

где $MC = f(x + h) - f(x)$, $AC = h$, т. е.

$$k(h) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}. \qquad (1)$$



а)



б)

Рис. 109

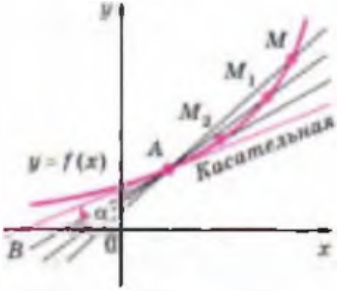


Рис. 110

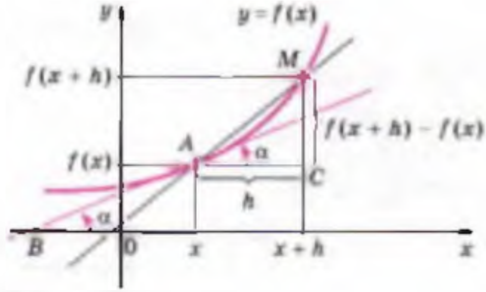


Рис. 111

Пусть число x фиксировано, а $h \to 0$, тогда точка A неподвижна, а точка M, двигаясь по графику, стремится к точке A (рис. 111). При этом прямая AM стремится занять положение некоторой прямой, которую называют *касательной к графику функции* $y = f(x)$, потому что $\lim\limits_{h \to 0} k(h)$ существует и равен $f'(x)$. Итак,

$$f'(x) = \operatorname{tg} \alpha. \qquad (2)$$

Геометрический смысл производной состоит в том, что значение производной функции $f(x)$ в точке x равно угловому коэффициенту касательной к графику функции в точке $(x; f(x))$.

Задача 1 Найти угол между касательной к графику функции $y = \sin x$ в точке (0; 0) и осью Ox.

▶ Найдем угловой коэффициент касательной к кривой $y = \sin x$ в точке (0; 0), т. е. значение производной этой функции при $x = 0$.

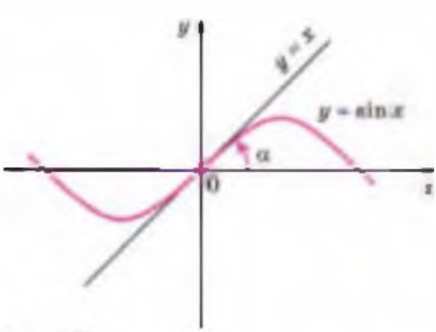


Рис. 112

Производная функции $f(x) = \sin x$ равна $f'(x) = \cos x$. По формуле (2) находим

$$\operatorname{tg} \alpha = f'(0) = \cos 0 = 1,$$

$$\alpha = \operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{4} \quad \text{(рис. 112).} \ ◁$$

Отметим, что это свойство полезно для построения графика $y = \sin x$: в точке (0; 0) синусоида касается прямой $y = x$ (рис. 112).

Задача 2 Найти угол между касательной к параболе $y = x^2$ в точке (1; 1) и осью Ox и написать уравнение этой касательной.

▶ Производная функции $f(x) = x^2$ равна $f'(x) = 2x$. По формуле (2) находим $\operatorname{tg} \alpha = f'(1) = 2 \cdot 1 = 2$, откуда $\alpha = \operatorname{arctg} 2$ (рис. 113).

Найдём теперь уравнение касательной AB к параболе $y = x^2$ в точке $A(1; 1)$ (см. рис. 113). Если $y = kx + b$ — уравнение прямой AB, то $k = \operatorname{tg} \alpha = 2$, т. е. уравнение касательной имеет вид $y = 2x + b$. Подставляя в это уравнение координаты точки (1; 1), получаем $1 = 2 \cdot 1 + b$, откуда $b = -1$. Следовательно, $y = 2x - 1$ — уравнение искомой касательной. ◁

Аналогично тому, как это сделано в задаче 2, выведем *уравнение касательной к графику дифференцируемой функции в точке* $(x_0; f(x_0))$ (рис. 114).

● Если $y = kx + b$ — искомое уравнение, то по формуле (2) находим $k = \operatorname{tg} \alpha = f'(x_0)$, т. е. уравнение касательной имеет вид $y = f'(x_0)x + b$. Подставляя в это уравнение координаты точки $(x_0; f(x_0))$, получаем $f(x_0) = f'(x_0)x_0 + b$, откуда $b = f(x_0) - f'(x_0)x_0$.

Итак, уравнение касательной $y = f'(x_0)x + f(x_0) - f'(x_0)x_0$, или

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0). \qquad (3)$$

Задача 3 Найти уравнение касательной к графику функции $y = \cos x$ в точке с абсциссой $x_0 = \frac{\pi}{6}$.

▶ Найдём значения функции $f(x) = \cos x$ и её производной в точке $x_0 = \frac{\pi}{6}$:

$$f(x_0) = \cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad f'(x_0) = -\sin\frac{\pi}{6} = -\frac{1}{2}.$$

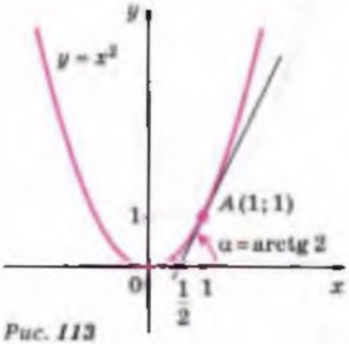


Рис. 113

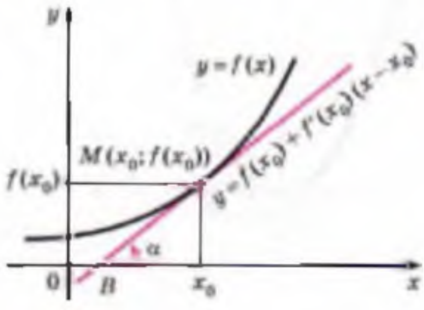


Рис. 114

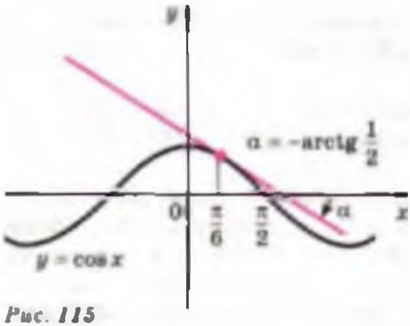


Рис. 115

Используя формулу (3), найдём искомое уравнение касательной: $y = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$,

или $y = -\frac{1}{2}x + \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\pi}{12}\right)$. ◁

Касательная к графику функции $y = \cos x$ в точке $\left(\frac{\pi}{6}; \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ изображена на рисунке 115.

Задача 4* Показать, что касательная к параболе $y = x^2$ в точке с абсциссой x_0 пересекает ось Ox в точке $\frac{x_0}{2}$.

▶ Пусть $f(x) = x^2$, тогда

$$f'(x) = 2x, \quad f(x_0) = x_0^2 \quad \text{и} \quad f'(x_0) = 2x_0.$$

По формуле (3) находим уравнение касательной:

$$y = x_0^2 + 2x_0(x - x_0), \quad y = 2x_0x - x_0^2.$$

Найдём точку пересечения этой касательной с осью абсцисс. Из равенства $2x_0x - x_0^2 = 0$ находим $x = \frac{x_0}{2}$. ◁

Отсюда следует простой геометрический *способ построения касательной к параболе* $y = x^2$ в точке A с абсциссой x_0: прямая, проходящая через точку A и точку $\frac{x_0}{2}$ оси абсцисс, касается параболы в точке A (рис. 116).

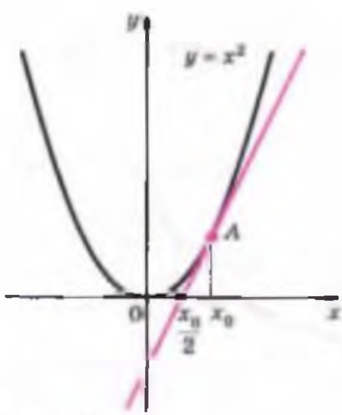


Рис. 116

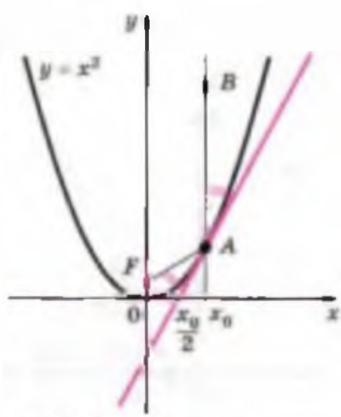


Рис. 117

Построив касательную к параболе, можно построить её *фокус* F. Напомним, что фокусом является точка, в которую нужно поместить источник света, чтобы все лучи, отражённые от параболического зеркала, были параллельны оси симметрии параболы. Для построения фокуса F нужно построить прямую AB, параллельную оси Oy, и прямую AF, образующую с касательной такой же угол, как и прямая AB (рис. 117).

Упражнения

857 Найти значения k и b, если прямая $y = kx + b$ проходит через точку $(x_0; y_0)$ и образует с осью Ox угол α:

1) $\alpha = \frac{\pi}{4}$, $x_0 = 2$, $y_0 = -3$; 2) $\alpha = \frac{\pi}{4}$, $x_0 = -3$, $y_0 = 2$;

3) $\alpha = -\frac{\pi}{3}$, $x_0 = 1$, $y_0 = 1$; 4) $\alpha = -\frac{\pi}{6}$, $x_0 = -1$, $y_0 = -1$.

858 Найти угловой коэффициент касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке с абсциссой x_0:

1) $f(x) = x^3$, $x_0 = 1$; 2) $f(x) = \sin x$, $x_0 = \frac{\pi}{4}$;

3) $f(x) = \ln x$, $x_0 = 1$; 4) $f(x) = e^x$, $x_0 = \ln 3$.

859 Найти угол между касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке с абсциссой x_0 и осью Ox:

1) $f(x) = \frac{1}{3}x^3$, $x_0 = 1$; 2) $f(x) = \frac{1}{x}$, $x_0 = 1$;

3) $f(x) = 2\sqrt{x}$, $x_0 = 3$; 4) $f(x) = \frac{18}{\sqrt{x}}$, $x_0 = 3$;

5) $f(x) = e^{\frac{3x+1}{2}}$, $x_0 = 0$; 6) $f(x) = \ln(2x + 1)$, $x_0 = 2$.

860 Написать уравнение касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке с абсциссой x_0:

1) $f(x) = x^2 + x + 1$, $x_0 = 1$; 2) $f(x) = x - 3x^2$, $x_0 = 2$;

3) $f(x) = \frac{1}{x}$, $x_0 = 3$; 4) $f(x) = \frac{1}{x}$, $x_0 = -2$;

5) $f(x) = \sin x$, $x_0 = \frac{\pi}{4}$; 6) $f(x) = e^x$, $x_0 = 0$;

7) $f(x) = \ln x$, $x_0 = 1$; 8) $f(x) = \sqrt{x}$, $x_0 = 1$.

861 Функция $y = f(x)$ задана своим графиком (рис. 118, *а*, *б*). Из точек A, B, C, D, E, F, G выбрать те, в которых производная этой функции принимает:

а) положительные значения; б) отрицательные значения; в) значения, равные 0.

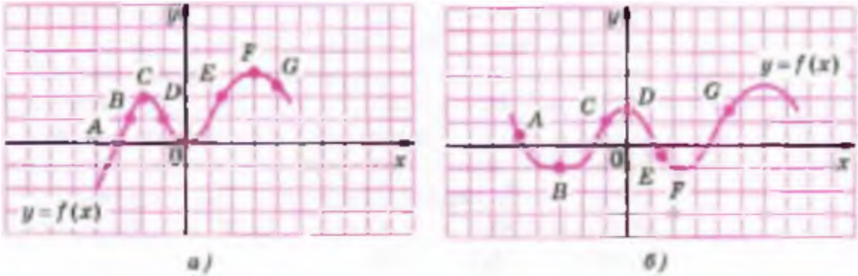


Рис. 118

862 Написать уравнение касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке с абсциссой $x = 0$:

1) $f(x) = x + \frac{1}{x+1}$; 2) $f(x) = \sin 2x - \ln(x+1)$.

863 Найти угол между осью Oy и касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке с абсциссой $x = 0$:

1) $f(x) = x + e^{-x}$; 2) $f(x) = \cos x$; 3) $f(x) = \sqrt{x+1} + e^{\frac{x}{2}}$.

864 Под каким углом пересекаются графики функций (*углом между кривыми* в точке их пересечения называют угол между касательными к этим кривым в этой точке):

1) $y = 8 - x$ и $y = 4\sqrt{x+4}$; 2) $y = \frac{1}{2}(x+1)^2$ и $y = \frac{1}{2}(x-1)^2$;

3) $y = \ln(1+x)$ и $y = \ln(1-x)$; 4) $y = e^x$ и $y = e^{-x}$?

865 Показать, что графики двух данных функций имеют одну общую точку и в этой точке общую касательную. Написать уравнение этой касательной:

1) $y = x^4$ и $y = x^6 + 2x^2$;
2) $y = x^4$ и $y = x^3 - 3x^2$;
3) $y = (x+2)^2$ и $y = 2 - x^2$;
4) $y = x(2+x)$ и $y = x(2-x)$.

866 Найти точки графика функции $y = f(x)$, в которых касательная к этому графику параллельна прямой $y = kx$:

1) $f(x) = e^x + e^{-x}$, $k = \frac{3}{2}$; 2) $f(x) = \sqrt{3x+1}$, $k = \frac{3}{4}$;

3) $f(x) = \sin 2x$, $k = 2$; 4) $f(x) = x + \sin x$, $k = 0$.

867 В каких точках касательная к графику функции $y = \frac{x+2}{x-2}$ образует с осью Ox угол, равный $-\frac{\pi}{4}$?

868 Найти точки, в которых касательные к кривым

$$f(x) = x^3 - x - 1 \quad \text{и} \quad g(x) = 3x^2 - 4x + 1$$

параллельны. Написать уравнения этих касательных.

Упражнения к главе VIII

Найти производную функции (869—874).

869 1) $2x^4 - x^3 + 3x + 4$; 2) $-x^5 + 2x^3 - 3x^2 - 1$;

3) $6\sqrt[3]{x} + \frac{1}{x^2}$; 4) $\frac{2}{x^3} - 8\sqrt[4]{x}$; 5) $(2x + 3)^8$;

6) $(4 - 3x)^7$; 7) $\sqrt[3]{3x - 2}$; 8) $\frac{1}{\sqrt{1 - 4x}}$.

870 1) $e^x - \sin x$; 2) $\cos x - \ln x$; 3) $\sin x - \sqrt[3]{x}$;

4) $6x^4 - 9e^x$; 5) $\frac{5}{x} + 4e^x$; 6) $\frac{1}{3x^3} + \frac{1}{2}\ln x$.

871 1) $\sin 5x + \cos(2x - 3)$; 2) $e^{2x} - \ln 3x$;

3) $\sin(x - 3) - \ln(1 - 2x)$; 4) $6\sin\frac{2x}{3} - e^{1-9x}$.

872 1) $x^2 \cos x$; 2) $x^3 \ln x$; 3) $5xe^x$;

4) $x \sin 2x$; 5) $e^{-x} \sin x$; 6) $e^x \cos x$.

873 1) $\frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$; 2) $\frac{x^2}{x^3 + 1}$; 3) $\frac{\sin x}{x + 1}$; 4) $\frac{\ln x}{1 - x}$.

874 1) $\sin^3 x$; 2) $8^{\cos x}$; 3) $\cos^4 x$; 4) $\ln(x^3)$.

875 Найти значения x, при которых значение производной функции $f(x)$ равно нулю; положительно; отрицательно:

1) $f(x) = 2x^3 - x^2$; 2) $f(x) = -3x^3 + 2x^2 + 4$;

3) $f(x) = x^5 - 5x^3 - 20x$; 4) $f(x) = (x + 3)^3 (x - 4)^2$;

5) $f(x) = \frac{3x + 1}{x - 2}$; 6) $f(x) = x^2 + \frac{2}{x}$.

876 Найти значение производной функции $f(x)$ в точке x_0, если:

1) $f(x) = \cos x \sin x$, $x_0 = \frac{\pi}{6}$; 2) $f(x) = e^x \ln x$, $x_0 = 1$;

3) $f(x) = \frac{2\cos x}{\sin x}$, $x_0 = \frac{\pi}{4}$; 4) $f(x) = \frac{x}{1 + e^x}$, $x_0 = 0$.

877 Написать уравнение касательной к графику функции в точке с абсциссой x_0:

1) $y = x^2 - 2x$, $x_0 = 3$; 2) $y = x^3 + 3x$, $x_0 = 3$;

3) $y = \sin x$, $x_0 = \frac{\pi}{6}$; 4) $y = \cos x$, $x_0 = \frac{\pi}{3}$.

878 Закон движения тела задан формулой $s(t) = 0{,}5t^2 + 3t + 2$ (s — в метрах, t — в секундах). Какой путь пройден телом за 4 с? Какова скорость движения в этот момент времени?

Проверь себя!

1 Найти значение производной функции $f(x) = 3x^3 + 4x - 1$ в точке $x = 3$.

2 Найти производную функции:

1) $\frac{3}{x} + 2\sqrt{x} - e^x$; 2) $(3x - 5)^4$; 3) $3 \sin 2x \cos x$; 4) $\frac{x^3}{x^2 + 5}$.

3 Найти угловой коэффициент касательной к графику функции $y = \cos 3x$ в точке с абсциссой $x_0 = \frac{\pi}{6}$.

4 Найти угол между касательной к графику функции $y = x^4 - 2x^3 + 3$ в точке с абсциссой $x_0 = \frac{1}{2}$ и осью Ox.

Найти производную функции (879—881).

879 1) $y = \cos^2 3x$; 2) $y = \sin x \cos x + x$;

3) $y = (x^3 + 1) \cos 2x$; 4) $y = \sin^2 \frac{x}{2}$;

5) $y = (x + 1)\sqrt[3]{x^2}$; 6) $y = \sqrt[3]{x - 1}\,(x^4 - 1)$.

880 1) $y = \frac{1 - \cos 2x}{1 + \cos 2x}$; 2) $y = \frac{\sqrt{x + 4}}{4x}$;

3) $y = \frac{x}{\sqrt{x + 2}}$; 4) $y = \frac{\sin x + \cos x}{\sin x - \cos x}$.

881 1) $\log_2 (x^3 - x^2 + 1)$; 2) $(\log_2 x)^3$; 3) $\sin (\log_3 x)$; 4) $\cos 3^x$.

882 На каком из рисунков 119 (*а*—*г*) изображены эскизы графиков функций, являющихся производными следующих функций: $y = e^{-x}$, $y = \ln(-x)$, $y = \sin 2x$, $y = 2 \cos x$?

883 Найти значения x, при которых значение производной функции $f(x)$ равно нулю; положительно; отрицательно:

1) $f(x) = 2^x + 2^{-x}$; 2) $f(x) = 3^{2x} - 2x \ln 3$;

3) $f(x) = x + \ln 2x$; 4) $f(x) = x + \ln(2x + 1)$;

5) $f(x) = 6x - x\sqrt{x}$; 6) $f(x) = (x + 1)\sqrt{x + 1} - 3x$.

884 Найти все значения a, при которых $f'(x) \geqslant 0$ для всех действительных значений x, если $f(x) = x^3 + 3x^2 + ax$.

885 Найти все значения a, при которых $f'(x) \leqslant 0$ для всех действительных значений x, если $f(x) = ax^3 - 6x^2 - x$.

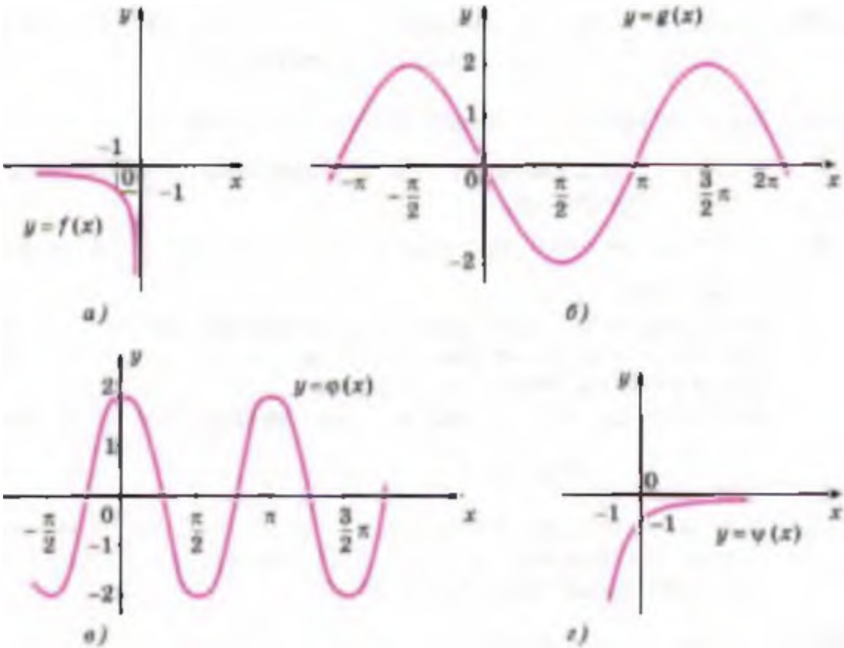


Рис. 119

886 Найти все значения a, при которых уравнение $f'(x) = 0$ не имеет действительных корней, если:

1) $f(x) = ax^2 - \frac{1}{x^2}$; 2) $f(x) = ax + \frac{1}{x}$;

3) $f(x) = ax^3 + 3x^2 + 6x$; 4) $f(x) = x^3 + 6x^2 + ax$.

887 Найти все значения a, при которых неравенство $f'(x) < 0$ не имеет действительных решений, если:

1) $f(x) = ax^7 + x^3 - 1$; 2) $f(x) = x^5 + ax^3 + 3$;

3) $f(x) = (x + a)\sqrt{x}$; 4) $f(x) = x + \frac{a}{x}$.

888 Под каким углом пересекаются графики функций:

1) $y = 2\sqrt{x}$ и $y = 2\sqrt{6 - x}$; 2) $y = \sqrt{2x + 1}$ и $y = 1$?

889 Написать уравнение касательной к графику функции в точке с абсциссой x_0:

1) $y = 2\sin\frac{x}{2}$, $x_0 = \frac{3\pi}{2}$; 2) $y = 2^{-x} - 2^{-2x}$, $x_0 = 2$;

3) $y = \frac{x + 2}{3 - x}$, $x_0 = 2$; 4) $y = x + \ln x$, $x_0 = e$.

890 Найти уравнения касательных к графику функции $y = \frac{1}{3}x^3 - \frac{5}{2}x^2$, параллельных прямой $y = 6x$.

891 Прямая касается гиперболы $y = \frac{4}{x}$ в точке $(1;\ 4)$. Найти площадь треугольника, ограниченного этой касательной и осями координат.

892 Прямая касается гиперболы $y = \frac{k}{x}$, где $k > 0$, в точке с абсциссой x_0.

1) Доказать, что площадь треугольника, ограниченного этой касательной и осями координат, не зависит от положения точки касания. Найти эту площадь.

2) Доказать, что эта касательная проходит через точки $\left(x_0;\ \frac{2k}{x_0}\right)$ и $(2x_0;\ 0)$.

893 Выяснить, при каких значениях p касательная, проведённая к графику функции $y = x^3 - px$ в его точке с абсциссой $x_0 = 1$, проходит через точку $M\ (2;\ 3)$.

894 Найти все такие точки графика функции $y = \frac{4^x - 2^{x+1}}{\ln 4}$, в которых касательная к этому графику параллельна прямой $y = 2x + 5$.

895 Найти расстояние от начала координат до той касательной к графику функции $y = x \ln x$, которая параллельна оси абсцисс.

896 Выяснить, при каких значениях параметра a прямая $y = ax - 2$ касается графика функции $y = 1 + \ln x$.

897 Найти общие касательные к графикам функций

$$f\ (x) = x^2 - 4x + 3 \quad \text{и} \quad g\ (x) = -x^2 + 6x - 10.$$

898 Две параллельные касательные к графику функции $y = x^3 - 6$ пересекают оси координат: одна — в точках A и B, другая — в точках C и D. Найти площадь треугольника AOB, если она в 4 раза меньше площади треугольника COD.

IX
глава

Применение производной к исследованию функций

Теория без практики мертва или бесплодна, практика без теории невозможна или пагубна. Для теории нужны знания, для практики, сверх всего того, и умение.

А. Н. Крылов

§ 49 Возрастание и убывание функции

1. Производная широко используется для исследования функций, т. е. для изучения различных свойств функций. Например, с помощью производной можно находить промежутки возрастания и убывания функции, её наибольшие и наименьшие значения.

Рассмотрим *применение производной к нахождению промежутков возрастания и убывания функций.* Пусть значения производной функции $y = f(x)$ положительны на некотором промежутке, т. е. $f'(x) > 0$. Тогда угловой коэффициент касательной $\operatorname{tg} \alpha = f'(x)$ к графику этой функции в каждой точке данного промежутка положителен. Это означает, что касательная образует острый угол с осью Ox, и поэтому график функции на этом промежутке «поднимается», т. е. функция $f(x)$ возрастает (рис. 120).

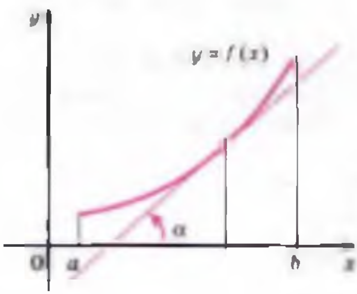


Рис. 120

Если $f'(x) < 0$ на некотором промежутке, то угловой коэффициент касательной $\operatorname{tg} \alpha = f'(x)$ к графику функции $y = f(x)$ отрицателен.

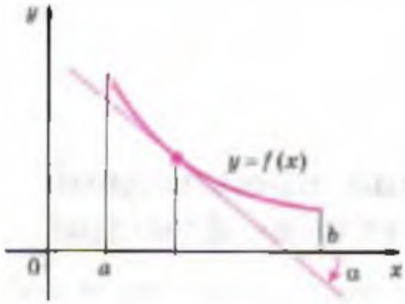


Рис. 121

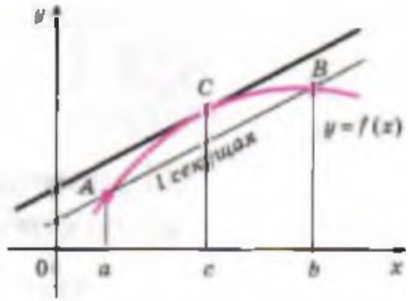


Рис. 122

Это означает, что касательная образует тупой угол с осью Ox, и поэтому график функции на этом промежутке «опускается», т. е. функция $f(x)$ убывает (рис. 121).

Итак, если $f'(x) > 0$ на промежутке, то функция $f(x)$ *возрастает* на этом промежутке.
Если $f'(x) < 0$ на промежутке, то функция $f(x)$ *убывает* на этом промежутке.

2. При доказательстве теорем о достаточных условиях возрастания или убывания функции используется теорема 1, которая называется *теоремой Лагранжа*.

Теорема 1. Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a; b]$ и дифференцируема на интервале $(a; b)$, то существует точка $c \in (a; b)$ такая, что

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a). \qquad (1)$$

Доказательство формулы (1) приводится в курсе высшей математики. Поясним геометрический смысл этой формулы.

Проведём через точки $A(a; f(a))$ и $B(b; f(b))$ графика функции $y = f(x)$ прямую l и назовём эту прямую секущей. Угловой коэффициент секущей равен

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Запишем формулу (1) в виде

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}. \qquad (2)$$

Согласно формуле (2) угловой коэффициент касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке C с абсциссой c (рис. 122) равен угловому коэффициенту секущей l, т. е. на интервале $(a; b)$ найдётся такая точка c, что в точке графика с абсциссой c касательная к графику функции $y = f(x)$ параллельна секущей. Сформулируем и докажем с помощью теоремы Лагранжа *теорему о достаточном условии возрастания функции.*

Теорема 2. Если функция $f(x)$ дифференцируема на интервале $(a; b)$ и $f'(x) > 0$ для всех $x \in (a; b)$, то функция возрастает на интервале $(a; b)$.

Пусть x_1 и x_2 — произвольные точки интервала $(a; b)$, такие, что $x_1 < x_2$. Применяя к отрезку $[x_1; x_2]$ теорему Лагранжа, получаем

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1), \text{ где } c \in (x_1; x_2).$$

Так как $f'(c) > 0$ и $x_2 - x_1 > 0$, то из последней формулы получим $f(x_2) - f(x_1) > 0$, т. е. $f(x_2) > f(x_1)$. Это означает, что функция $f(x)$ возрастает на интервале $(a; b)$. ○

Таким же способом можно доказать, что если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a; b]$ и $f'(x) > 0$ на интервале $(a; b)$, то эта функция возрастает на отрезке $[a; b]$.

Аналогично доказывается, что функция $f(x)$ убывает на интервале $(a; b)$, если $f'(x) < 0$ на $(a; b)$; если, кроме того, функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a; b]$, то она убывает на отрезке $[a; b]$.

Задача 1 Доказать, что функция $f(x) = x + \frac{1}{x}$ возрастает на промежутке $(1; +\infty)$.

▶ Найдём производную: $f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2} = \frac{x^2 - 1}{x^2}$. Если $x > 1$, то $\frac{x^2 - 1}{x^2} > 0$, т. е. $f'(x) > 0$ при $x > 1$, и поэтому данная функция возрастает на промежутке $(1; +\infty)$. ◁

Промежутки возрастания и убывания функции часто называют *промежутками монотонности этой функции.*

Задача 2 Найти интервалы монотонности функции

$$f(x) = x^3 - 3x^2.$$

▶ Найдём производную: $f'(x) = 3x^2 - 6x$.

Решая неравенство $f'(x) > 0$, т. е. неравенство $3x^2 - 6x > 0$, находим интервалы возрастания: $(-\infty; 0)$ и $(2; +\infty)$.

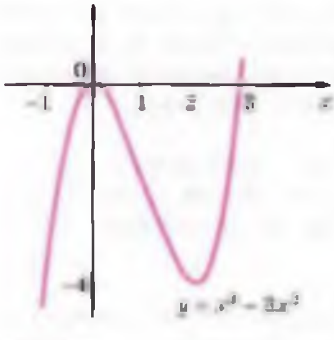


Рис. 123

Решая неравенство $f'(x) < 0$, т. е. неравенство $3x^2 - 6x < 0$, находим интервал убывания $(0; 2)$. ◁

График функции $y = x^3 - 3x^2$ изображён на рисунке 123. Из этого рисунка видно, что функция $y = x^3 - 3x^2$ возрастает не только на интервалах $(-\infty; 0)$ и $(2; +\infty)$, но и на промежутках $(-\infty; 0]$ и $[2; +\infty)$; убывает не только на интервале $(0; 2)$, но и на отрезке $[0; 2]$.

Упражнения

899 Доказать, что функция $f(x) = x^2 + \frac{2}{x}$ возрастает на промежутке $(1; +\infty)$, убывает на промежутках $(-\infty; 0)$ и $(0; 1)$.

900 Найти промежутки возрастания и убывания функции:

1) $y = x^2 - x$;
2) $y = 5x^2 - 3x - 1$;
3) $y = x^2 + 2x$;
4) $y = x^2 + 12x - 100$;
5) $y = x^3 - 3x$;
6) $y = x^4 - 2x^2$;
7) $y = 2x^3 - 3x^2 - 36x + 40$;
8) $y = x^3 - 6x^2 + 9$.

901 Построить эскиз графика непрерывной функции $y = f(x)$, определённой на отрезке $[a; b]$, если:

1) $a = 0$, $b = 5$, $f'(x) > 0$ при $0 < x < 5$, $f(1) = 0$, $f(5) = 3$;
2) $a = -1$, $b = 3$, $f'(x) < 0$ при $-1 < x < 3$, $f(0) = 0$, $f(3) = -4$.

Найти промежутки возрастания и убывания функции (902—905).

902 1) $y = \frac{1}{x+2}$; 2) $y = 1 + \frac{2}{x}$; 3) $y = -\sqrt{x-3}$; 4) $y = 1 + 3\sqrt{x-5}$.

903 1) $y = \frac{x^3}{x^2+3}$; 2) $y = \frac{(x-2)(8-x)}{x^2}$;
3) $y = (x-1)e^{3x}$; 4) $y = xe^{-3x}$.

904 1) $y = e^{x^2+3x}$; 2) $y = 3^{x^2-x}$.

905 1) $y = x - \sin 2x$; 2) $y = 3x + 2\cos 3x$.

906 Изобразить эскиз графика непрерывной функции $y = f(x)$, определённой на отрезке $[a; b]$, если:

1) $a = -2$, $b = 6$, $f(-2) = 1$, $f(6) = 5$, $f(3) = 0$, $f'(3) = 0$, $f'(x) < 0$ при $-2 < x < 3$, $f'(x) > 0$ при $3 < x < 6$;

2) $a = -3$, $b = 3$, $f(-3) = -1$, $f(3) = 4$, $f'(2) = 0$, $f'(x) < 0$ при $-3 < x < 2$, $f'(x) > 0$ при $2 < x < 3$.

907 При каких значениях a функция возрастает на всей числовой прямой:

1) $y = x^3 - ax$; 2) $y = ax - \sin x$?

908 При каких значениях a функция $y = x^3 - 2x^2 + ax$ возрастает на всей числовой прямой?

909 При каких значениях a функция $y = ax^3 + 3x^2 - 2x + 5$ убывает на всей числовой прямой?

§ 50 Экстремумы функции

На рисунке 123 изображён график функции $y = x^3 - 3x^2$. Рассмотрим *окрестность точки* $x = 0$, т. е. некоторый интервал, содержащий эту точку. Как видно из рисунка, существует такая окрестность точки $x = 0$, что наибольшее значение функция $x^3 - 3x^2$ в этой окрестности принимает в точке $x = 0$. Например, на интервале $(-1; 1)$ наибольшее значение, равное 0, функция принимает в точке $x = 0$. Точку $x = 0$ называют точкой максимума этой функции.

Аналогично точку $x = 2$ называют точкой минимума функции $x^3 - 3x^2$, так как значение функции в этой точке меньше её значения в любой точке некоторой окрестности точки $x = 2$, например окрестности $(1,5; 2,5)$.

Точка x_0 называется *точкой максимума функции* $f(x)$, если существует такая окрестность точки x_0, что для всех $x \neq x_0$ из этой окрестности выполняется неравенство $f(x) < f(x_0)$.

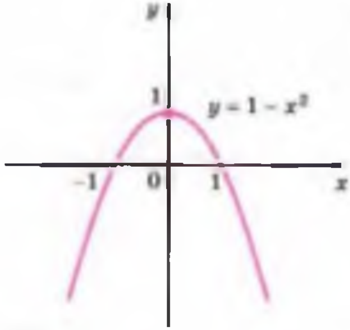


Рис. 124

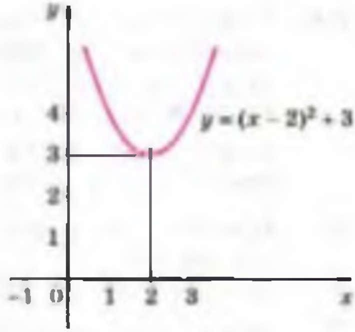


Рис. 125

Например, точка $x_0 = 0$ является точкой максимума функции $f(x) = 1 - x^2$, так как $f(0) = 1$ и при всех значениях $x \neq 0$ верно неравенство $f(x) < 1$ (рис. 124).

Точка x_0 называется *точкой минимума функции* $f(x)$, если существует такая окрестность точки x_0, что для всех $x \neq x_0$ из этой окрестности выполняется неравенство $f(x) > f(x_0)$.

Например, точка $x_0 = 2$ является точкой минимума функции $f(x) = 3 + (x - 2)^2$, так как $f(2) = 3$ и $f(x) > 3$ при всех значениях $x \neq 2$ (рис. 125).

Точки минимума и точки максимума называются *точками экстремума*.

Рассмотрим функцию $f(x)$, которая определена в некоторой окрестности точки x_0 и имеет производную в этой точке.

Теорема. Если x_0 — точка экстремума дифференцируемой функции $f(x)$, то $f'(x_0) = 0$.

Это утверждение называют *теоремой Ферма*[1].

Теорема Ферма имеет наглядный геометрический смысл: касательная к графику функции $y = f(x)$ в точке $(x_0; f(x_0))$, где x_0 — точка экстремума функции $y = f(x)$, параллельна оси абсцисс, и поэтому её угловой коэффициент $f'(x_0)$ равен нулю (рис. 126).

---

[1] Пьер Ферма (1601—1665) — французский математик, один из основоположников теории чисел и математического анализа.

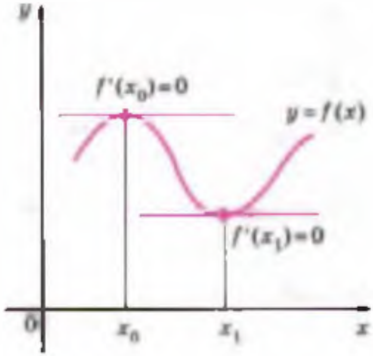


Рис. 126

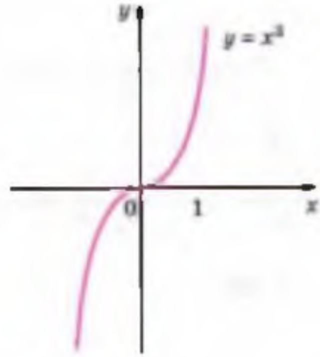


Рис. 127

Например, функция $f(x) = 1 - x^2$ (рис. 124) имеет в точке $x_0 = 0$ максимум, её производная $f'(x) = -2x$, $f'(0) = 0$. Функция $f(x) = (x - 2)^2 + 3$ имеет минимум в точке $x_0 = 2$ (рис. 125), $f'(x) = 2(x - 2)$, $f'(2) = 0$.

Отметим, что если $f'(x_0) = 0$, то этого недостаточно, чтобы утверждать, что x_0 обязательно точка экстремума функции $f(x)$.

Например, если $f(x) = x^3$, то $f'(0) = 0$. Однако точка $x = 0$ не является точкой экстремума, так как функция x^3 возрастает на всей числовой оси (рис. 127).

Итак, точки экстремума дифференцируемой функции нужно искать только среди корней уравнения $f'(x) = 0$, но не всегда корень этого уравнения является точкой экстремума. Точки, в которых производная функции равна нулю, называют ***стационарными***.

Заметим, что функция может иметь экстремум и в точке, где эта функция не имеет производной. Например, $x = 0$ — точка минимума функции $f(x) = |x|$, а $f'(0)$ не существует (см. § 44). Точки, в которых функция имеет производную, равную нулю, или недифференцируема, называют ***критическими точками этой функции***.

Таким образом, для того чтобы точка x_0 была точкой экстремума функции $f(x)$, ***необходимо***, чтобы эта точка была критической точкой данной функции.

Приведём *достаточные условия* того, что стационарная точка является точкой экстремума, т. е. условия, при выполнении которых стационарная точка есть точка максимума или минимума функции.

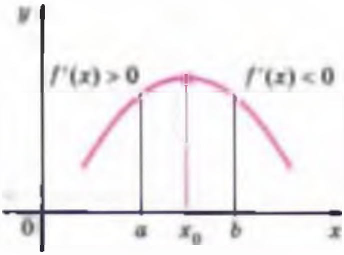


Рис. 128

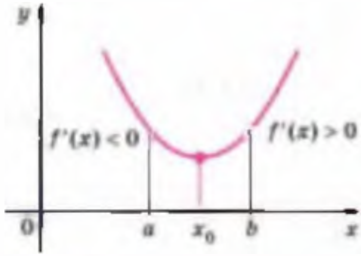


Рис. 129

Теорема. Пусть функция $f(x)$ дифференцируема на интервале $(a; b)$, $x_0 \in (a; b)$, и $f'(x_0) = 0$. Тогда:

1) если при переходе через стационарную точку x_0 функции $f(x)$ её производная меняет знак с «плюса» на «минус», т. е. $f'(x) > 0$ слева от точки x_0 и $f'(x) < 0$ справа от точки x_0, то x_0 — точка максимума функции $f(x)$ (рис. 128);

2) если при переходе через стационарную точку x_0 функции $f(x)$ её производная меняет знак с «минуса» на «плюс», то x_0 — точка минимума функции $f(x)$ (рис. 129).

Для доказательства этой теоремы можно воспользоваться формулой Лагранжа на отрезках $[x; x_0]$, где $a < x < x_0$, и $[x_0; x]$, где $x_0 < x < b$.

Задача 1 Найти точки экстремума функции $f(x) = x^4 - 4x^3$.

▶ Найдём производную:

$$f'(x) = 4x^3 - 12x^2 = 4x^2(x - 3).$$

Найдём стационарные точки:

$$4x^2(x - 3) = 0, \ x_1 = 0, \ x_2 = 3.$$

Методом интервалов устанавливаем, что производная $f'(x) = 4x^2(x - 3)$ положительна при $x > 3$, отрицательна при $x < 0$ и при $0 < x < 3$.

Так как при переходе через точку $x_1 = 0$ знак производной не меняется, то эта точка не является точкой экстремума.

При переходе через точку $x_2 = 3$ производная меняет знак с «−» на «+». Поэтому $x_2 = 3$ — точка минимума. ◁

Задача 2 Найти точки экстремума функции $f(x) = x^3 - x$ и значения функции в этих точках.

▶ Производная равна

$$f'(x) = 3x^2 - 1 = 3\left(x + \frac{1}{\sqrt{3}}\right)\left(x - \frac{1}{\sqrt{3}}\right).$$

Приравнивая производную к нулю, находим две стационарные точки: $x_1 = -\frac{1}{\sqrt{3}}$ и $x_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}$. При переходе через точку $x_1 = -\frac{1}{\sqrt{3}}$ производная меняет знак с «+» на «−». Поэтому $x_1 = -\frac{1}{\sqrt{3}}$ — точка максимума. При переходе через точку $x_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}$ производная меняет знак с «−» на «+», поэтому $x_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}$ — точка минимума. Значение функции в точке максимума равно $f\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{2}{3\sqrt{3}}$, а в точке минимума $f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = -\frac{2}{3\sqrt{3}}$. ◁

Упражнения

910 На рисунке 130 изображён график функции $y = f(x)$. Найти точки максимума и минимума этой функции.

911 На рисунке 131 изображён график функции $y = f(x)$. Найти критические точки этой функции.

912 Найти стационарные точки функции:

1) $y = \frac{x}{2} + \frac{8}{x}$;
2) $y = 2x^3 - 15x^2 + 36x$;
3) $y = e^{2x} - 2e^x$;
4) $y = \sin x - \cos x$.

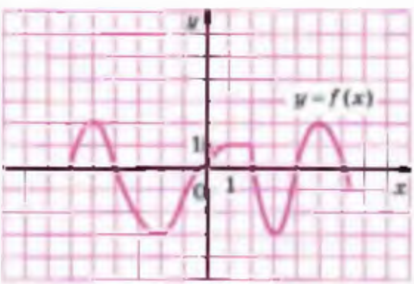


Рис. 130

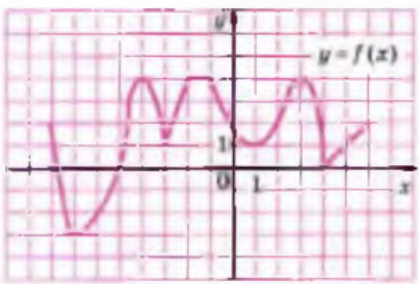


Рис. 131

913 Найти стационарные точки функции:

1) $y = \frac{2 + x^2}{x}$; 2) $y = \frac{x^2 + 8}{2x}$; 3) $y = e^{x^2 - 1}$; 4) $y = 2^{x^3 + x}$.

914 Найти точки экстремума функции:

1) $y = 2x^2 - 20x + 1$; 2) $y = 3x^2 + 36x - 1$;

3) $y = \frac{x}{5} + \frac{5}{x}$; 4) $y = \frac{4}{x} + \frac{x}{16}$.

915 Найти точки экстремума и значения функции в этих точках:

1) $y = x^3 - 3x^2$; 2) $y = x^4 - 8x^2 + 3$;

3) $y = x + \sin x$; 4) $y = 2\cos x + x$.

916 Имеет ли точки экстремума функция:

1) $y = 2x + 5$; 2) $y = 7 - 5x$; 3) $y = x^3 + 2x$; 4) $y = \frac{x}{2} - \frac{1}{x}$?

917 Построить эскиз графика непрерывной функции $y = f(x)$, определённой на отрезке $[a; b]$, если:

1) $a = -1$, $b = 7$, $f(-1) = 0$, $f(7) = -2$, $f'(x) > 0$ при $-1 < x < 4$, $f'(x) < 0$ при $4 < x < 7$, $f'(4) = 0$;

2) $a = -5$, $b = 4$, $f(-5) = 1$, $f(4) = -3$, $f'(x) < 0$ при $-5 < x < -1$, $f'(x) > 0$ при $-1 < x < 4$, $f'(-1) = 0$.

918 Найти критические точки функции:

1) $y = \sqrt{2 - 3x^2}$; 2) $y = \sqrt{x^3 - 3x}$;

3) $y = |x - 1|$; 4) $y = x^2 - |x| - 2$.

919 Найти точки экстремума функции:

1) $y = x + \sqrt{3 - x}$; 2) $y = (x - 1)^{\frac{8}{7}}$;

3) $y = x - \sin 2x$; 4) $y = \cos 3x - 3x$.

920 Найти точки экстремума и значения функции в этих точках:

1) $y = \frac{(2 - x)^3}{(3 - x)^2}$; 2) $y = \frac{x^3 + 2x^2}{(x - 1)^2}$; 3) $y = (x - 1)e^{3x}$;

4) $y = \sin x + \frac{1}{2}\sin 2x$; 5) $y = e^{\sqrt{3 - x^2}}$; 6) $y = \sqrt{e^x - x}$.

921 Построить эскиз графика функции $y = f(x)$, непрерывной на отрезке $[a; b]$, если:

1) $a = -6$, $b = 6$, $f(-6) = -6$, $f(6) = 1$, $f'(x) > 0$ при $-6 < x < -4$, $-1 < x < 4$, $f'(x) < 0$ при $-4 < x < -1$, $4 < x < 6$, $f'(-4) = 0$, $f'(-1) = 0$, $f'(4) = 0$;

2) $a = -4$, $b = 5$, $f(-4) = 5$, $f(5) = 1$, $f'(x) < 0$ при $-4 < x < -3$, $0 < x < 3$, $f'(x) > 0$ при $-3 < x < 0$, $3 < x < 5$, $f'(-3) = 0$, $f'(0) = 0$, $f'(3) = 0$.

922 Исследовать на экстремум функцию $y = (x + 1)^n e^{-x}$, где n — натуральное число.

§ 51

Применение производной к построению графиков функций

Задача 1 Построить график функции $f(x) = x^3 - 2x^2 + x$.

▶ Эта функция определена при всех $x \in R$. С помощью производной найдём промежутки монотонности этой функции и её точки экстремума. Производная равна $f'(x) = 3x^2 - 4x + 1$. Найдём стационарные точки: $3x^2 - 4x + 1 = 0$, откуда $x_1 = \frac{1}{3}$, $x_2 = 1$.

Для определения знака производной разложим квадратный трёхчлен $3x^2 - 4x + 1$ на множители: $f'(x) = 3\left(x - \frac{1}{3}\right)(x - 1)$.

Производная положительна на промежутках $\left(-\infty; \frac{1}{3}\right)$ и $(1; +\infty)$, следовательно, на этих промежутках функция возрастает.

При $\frac{1}{3} < x < 1$ производная отрицательна, следовательно, на интервале $\left(\frac{1}{3}; 1\right)$ функция убывает.

Точка $x_1 = \frac{1}{3}$ является точкой максимума, так как слева от этой точки функция возрастает, а справа убывает. Значение функции в этой точке равно $f\left(\frac{1}{3}\right) = \left(\frac{1}{3}\right)^3 - 2\left(\frac{1}{3}\right)^2 + \frac{1}{3} = \frac{4}{27}$.

Точка $x_2 = 1$ является точкой минимума, так как слева от этой точки функция убывает, а справа возрастает; её значение в точке минимума равняется $f(1) = 0$.

Результаты исследования представим в следующей таблице:

x	$x < \frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3} < x < 1$	1	$x > 1$
$f'(x)$	+	0	–	0	+
$f(x)$	↗	$\frac{4}{27}$	↘	0	↗

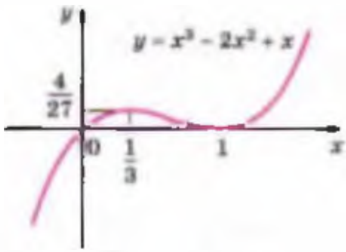


Рис. 132

Символ «↗» означает, что функция возрастает, а символ «↘» означает, что функция убывает.

При построении графика обычно находят точки пересечения графика с осями координат. Так как $f(0)=0$, то график проходит через начало координат. Решая уравнение $f(x)=0$, находим точки пересечения графика с осью абсцисс:

$x^3-2x^2+x=0$, $x(x^2-2x+1)=0$, $x(x-1)^2=0$, откуда $x=0$, $x=1$. Для более точного построения графика найдём значения функции ещё в двух точках: $f\left(-\frac{1}{2}\right)=-\frac{9}{8}$, $f(2)=2$.

Используя результаты исследования, строим график функции $y=x^3-2x^2+x$ (рис. 132). ◁

Для построения графика функции обычно сначала исследуют свойства этой функции с помощью её производной примерно по такой же схеме, как и при решении задачи 1.

При исследовании свойств функции полезно найти:
1) область её определения;
2) производную;
3) стационарные точки;
4) промежутки возрастания и убывания;
5) точки экстремума и значения функции в этих точках.

Результаты исследования удобно записать в виде таблицы. Затем, используя таблицу, строят график функции. Для более точного построения графика обычно находят точки его пересечения с осями координат и, быть может, ещё несколько точек графика.

Задача 2 Построить график функции $f(x)=1-\frac{5}{2}x^2-x^5$.

▶ 1) Область определения — множество $\boldsymbol{R}$ всех действительных чисел.
2) $f'(x)=-5x-5x^4=-5x(1+x^3)$.
3) Решая уравнение $-x(1+x^3)=0$, находим стационарные точки $x_1=-1$ и $x_2=0$.
4) Производная положительна на интервале $(-1; 0)$, следовательно, на этом интервале функция возра-

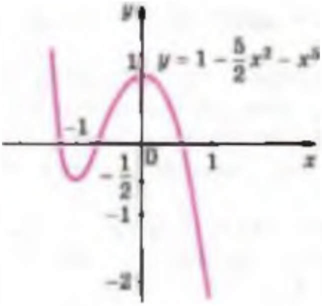


Рис. 133

стает. На промежутках $(-\infty; -1)$ и $(0; +\infty)$ производная отрицательна, следовательно, на этих промежутках функция убывает.

5) Стационарная точка $x_1 = -1$ является точкой минимума, так как при переходе через эту точку производная меняет знак с «−» на «+»; $f(-1) = -0{,}5$. Точка $x_2 = 0$ — точка максимума, так как при переходе через неё производная меняет знак с «+» на «−»; $f(0) = 1$.

Составим таблицу.

x	$x < -1$	-1	$-1 < x < 0$	0	$x > 0$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘	$-0{,}5$	↗	1	↘

Используя результаты исследования, строим график функции $y = 1 - \frac{5}{2}x^2 - x^5$ (рис. 133). ◁

График функции $y = 1 - \frac{5}{2}x^2 - x^5$ построен с помощью исследования некоторых свойств этой функции. По графику можно выявить и другие свойства данной функции. Например, из рисунка 133 видно, что уравнение $1 - \frac{5}{2}x^2 - x^5 = 0$ имеет три различных действительных корня.

Для построения графика чётной (нечётной) функции достаточно исследовать свойства и построить её график при $x > 0$, а затем отразить его симметрично относительно оси ординат (начала координат).

Задача 3 Построить график функции $f(x) = x + \frac{4}{x}$.

▶ 1) Область определения: $x \neq 0$.

2) Данная функция нечётная, так как $f(-x) = -x + \frac{4}{-x} = -\left(x + \frac{4}{x}\right) = -f(x)$. Поэтому сначала исследуем эту функцию и построим её график при $x > 0$.

3) $f'(x) = 1 - \frac{4}{x^2} = \frac{(x+2)(x-2)}{x^2}$.

4) На промежутке $(0; +\infty)$ функция имеет одну стационарную точку $x = 2$.

5) Производная положительна на промежутке $(2; +\infty)$, следовательно, на этом промежутке функция возрастает. На интервале $(0; 2)$ производная отрицательна, следовательно, на этом интервале функция убывает.

6) Точка $x = 2$ является точкой минимума, так как при переходе через эту точку производная меняет знак с «−» на «+»; $f(2) = 4$.

Составим таблицу.

x	$0 < x < 2$	2	$x > 2$
$f'(x)$	−	0	+
$f(x)$	↘	4	↗

Найдём значения функции ещё в двух точках: $f(1) = 5$, $f(4) = 5$.

Используя результаты исследования, строим график функции $y = x + \frac{4}{x}$ при $x > 0$. График этой функции при $x < 0$ строим с помощью симметрии относительно начала координат (рис. 134). ◁

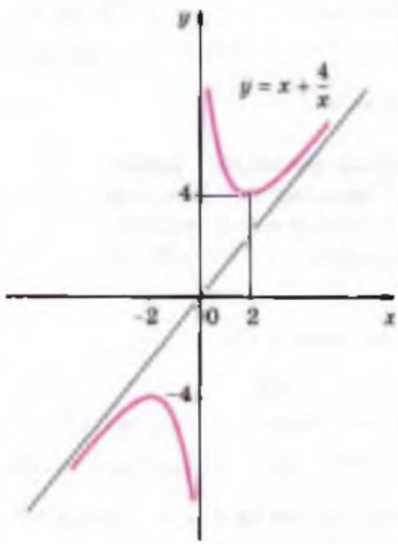


Рис. 134

Рис. 135

Для краткости записи решения задач на построение графиков функций большую часть рассуждений, предшествующих таблице, можно проводить устно.

В некоторых задачах требуется исследовать функцию не на всей области определения, а только на некотором промежутке.

Задача 4 Построить график функции $f(x) = 1 + 2x^2 - x^4$ на отрезке $[-1; 2]$.

▶ Найдём производную

$$f'(x) = 4x - 4x^3 = 4x(1 + x)(1 - x).$$

Составим таблицу.

x	-1	$-1 < x < 0$	0	$0 < x < 1$	1	$1 < x < 2$	2
$f'(x)$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	-24
$f(x)$	2	↘	1	↗	2	↘	-7

Используя эту таблицу, строим график функции $y = 1 + 2x^2 - x^4$ на отрезке $[-1; 2]$ (рис. 135). ◁

Упражнения

923 Используя график функции $y = f(x)$ (рис. 136), найти:

1) область определения и множество значений функции;
2) нули функции;
3) промежутки возрастания и убывания функции;
4) значения x, при которых функция принимает положительные, отрицательные значения;
5) экстремумы функции.

924 Построить эскиз графика функции $y = f(x)$, непрерывной на отрезке $[a; b]$, если:

1) $a = -2$, $b = 4$, $f(-2) = -2$, $y = f(x)$ возрастает на отрезке $[-2; 1]$ и $f(x) = x$ при $1 \leqslant x \leqslant 4$;
2) $a = 1$, $b = 7$, $f(7) = 1$, $f(x) = x^2$ при $1 \leqslant x \leqslant 2$, $y = f(x)$ убывает на промежутке $(2; 7]$.

925 На отрезке $[0; 6]$ изобразить эскиз графика непрерывной функции $y = f(x)$, пользуясь данными, приведёнными в таблице. Учесть, что $f(2) = 0$, $f(5) = 0$.

x	0	$0 < x < 1$	1	$1 < x < 4$	4	$4 < x < 6$	6
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	↗	2	↘	-2	↗	3

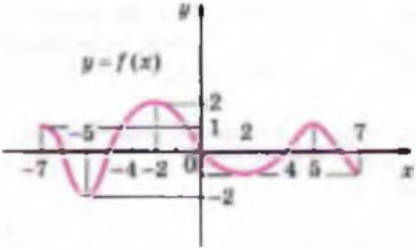


Рис. 136

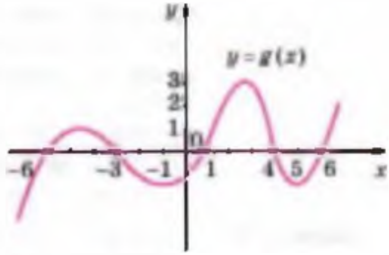


Рис. 137

Построить график функции (926—927).

926 1) $y = x^3 - 3x^2 + 4$; 2) $y = 2 + 3x - x^3$;
3) $y = -x^3 + 4x^2 - 4x$; 4) $y = x^3 + 6x^2 + 9x$.

927 1) $y = -x^4 + 8x^2 - 16$; 2) $y = x^4 - 2x^2 + 2$;
3) $y = \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{24}x^6$; 4) $y = 6x^4 - 4x^6$.

928 Построить график функции:
1) $y = x^3 - 3x^2 + 2$ на отрезке $[-1; 3]$;
2) $y = x^4 - 10x^2 + 9$ на отрезке $[-3; 3]$.

929 На рисунке 137 изображён график функции $y = g(x)$, являющейся производной функции $y = f(x)$. Используя график, найти точки экстремума функции $y = f(x)$.

Построить график функции (930—933).

930 1) $y = 2 + 5x^3 - 3x^5$; 2) $y = 3x^5 - 5x^3$;
3) $y = 4x^5 - 5x^4$; 4) $y = \frac{1}{10}x^5 - \frac{5}{6}x^3 + 2x$.

931 1) $y = 3x + \frac{1}{3x}$; 2) $y = \frac{4}{x} - x$; 3) $y = x - \frac{1}{\sqrt{x}}$.

932 1) $y = xe^{-x}$; 2) $y = xe^{x}$; 3) $y = e^{x^2}$; 4) $y = e^{-x^2}$.

933 1) $y = \frac{x^3}{x-2}$; 2) $y = \frac{-x^2 + 3x - 1}{x}$; 3) $y = \frac{4 + x - 2x^2}{(x-2)^2}$.

934 Найти число действительных корней уравнения:
1) $x^4 - 4x^3 + 20 = 0$; 2) $8x^3 - 3x^4 - 7 = 0$.

935 Построить график функции $y = \frac{x^3 - 4}{(x-1)^3}$. Сколько действительных корней имеет уравнение $\frac{x^3 - 4}{(x-1)^3} = C$ при различных значениях C?

§ 52 Наибольшее и наименьшее значения функции

1. На практике часто приходится решать задачи, в которых требуется найти *наибольшее* или *наименьшее значение* из всех тех значений, которые функция принимает *на отрезке*.

Рассмотрим, например, график функции $f(x) = 1 + 2x^2 - x^4$ на отрезке $[-1; 2]$. Этот график был построен в предыдущем параграфе (см. рис. 135).

Из рисунка видно, что наибольшее значение на этом отрезке, равное 2, функция принимает в двух точках $x = -1$ и $x = 1$; наименьшее значение, равное -7, функция принимает при $x = 2$. Точка $x = 0$ является точкой минимума функции $f(x) = 1 + 2x^2 - x^4$. Это означает, что есть такая окрестность точки $x = 0$, например интервал $\left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$, что наименьшее значение в этой окрестности функция принимает при $x = 0$. Однако на большем промежутке, например на отрезке $[-1; 2]$, наименьшее значение функция принимает не в точке минимума, а на конце отрезка. Таким образом, для нахождения наименьшего значения функции на отрезке нужно сравнить её значения в точках минимума и на концах отрезка.

Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a; b]$ и имеет несколько критических точек на этом отрезке.

Для нахождения наибольшего и наименьшего значений функции на отрезке $[a; b]$ нужно:

1) найти значения функции на концах отрезка, т. е. числа $f(a)$ и $f(b)$;

2) найти её значения в тех критических точках, которые принадлежат интервалу $(a; b)$;

3) из всех найденных значений выбрать наибольшее и наименьшее.

Задача 1 Функция $f(x)=x^3+\frac{3}{x}$ непрерывна на отрезке $\left[\frac{1}{2};\ 2\right]$. Найти её наибольшее и наименьшее значения.

▶ 1) $f\left(\frac{1}{2}\right)=6\frac{1}{8}$, $f(2)=9\frac{1}{2}$.

2) $f'(x)=3x^2-\frac{3}{x^2}=\frac{3x^4-3}{x^2}$, $3x^4-3=0$, $x_1=1$, $x_2=-1$.

Интервалу $\left(\frac{1}{2};\ 2\right)$ принадлежит одна стационарная точка $x_1=1$, $f(1)=4$.

3) Из чисел $6\frac{1}{8}$, $9\frac{1}{2}$ и 4 наибольшее $9\frac{1}{2}$, наименьшее 4.

Ответ Наибольшее значение функции равно $9\frac{1}{2}$, наименьшее равно 4. ◁

Задача 2 Функция $f(x)=x+\frac{1}{x}$ непрерывна на отрезке [2; 4]. Найти её наибольшее и наименьшее значения.

▶ 1) $f(2)=2{,}5$, $f(4)=4{,}25$.

2) $f'(x)=1-\frac{1}{x^2}$, $1-\frac{1}{x^2}=0$, $x_1=-1$, $x_2=1$.

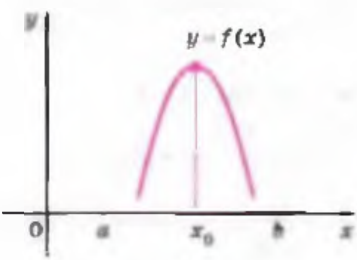
На интервале (2; 4) стационарных точек нет.

3) Из чисел 2,5 и 4,25 наибольшее 4,25, наименьшее 2,5.

Ответ Наибольшее значение функции равно 4,25, наименьшее равно 2,5. ◁

2. При решении многих задач часто приходится находить наибольшее или наименьшее значение функции не на отрезке, а на *интервале*.

Нередко встречаются задачи, в которых функция $f(x)$ имеет на заданном интервале только одну стационар-



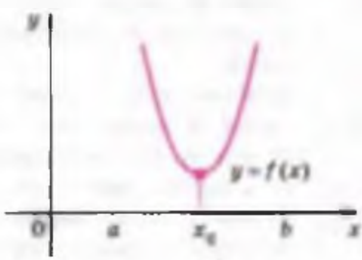


Рис. 138

ную точку: либо точку максимума, либо точку минимума. В этих случаях в точке максимума функция $f(x)$ принимает наибольшее значение на данном интервале (рис. 138, *а*); а в точке минимума — наименьшее значение на данном интервале (рис. 138, *б*).

Задача 3 Число 36 записать в виде произведения двух положительных чисел, сумма которых наименьшая.

▶ Пусть первый множитель равен x, тогда второй множитель равен $\frac{36}{x}$. Сумма этих чисел равна $x + \frac{36}{x}$.

По условию задачи x — положительное число. Таким образом, задача свелась к нахождению такого значения x, при котором функция $f(x) = x + \frac{36}{x}$ принимает наименьшее значение на интервале $(0; +\infty)$.

Найдём производную:

$$f'(x) = 1 - \frac{36}{x^2} = \frac{(x+6)(x-6)}{x^2}.$$

Стационарные точки $x_1 = 6$ и $x_2 = -6$. На интервале $(0; +\infty)$ есть только одна стационарная точка $x = 6$. При переходе через точку $x = 6$ производная меняет знак с «−» на «+», и поэтому $x = 6$ — точка минимума. Следовательно, наименьшее значение на интервале $(0; +\infty)$ функция $f(x) = x + \frac{36}{x}$ принимает в точке $x = 6$ (это значение $f(6) = 12$).

Ответ $36 = 6 \cdot 6$. ◁

3*. При решении некоторых задач на нахождение наибольшего и наименьшего значений функции полезно использовать следующее утверждение:

Если значения функции $f(x)$ неотрицательны на некотором промежутке, то эта функция и функция $(f(x))^n$, где n — натуральное число, принимают наибольшее (наименьшее) значение в одной и той же точке.

Задача 4* Из всех прямоугольников, вписанных в окружность радиуса R, найти прямоугольник наибольшей площади.

▶ Найти прямоугольник — это значит найти его размеры, т. е. длины его сторон. Пусть прямоугольник $ABCD$ вписан в окружность радиуса R (рис. 139). Обозначим $AB = x$. Из $\triangle ABC$ по теореме Пифагора

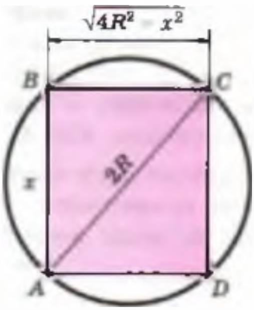


Рис. 139

находим $BC=\sqrt{4R^2-x^2}$. Площадь прямоугольника равна

$$S(x)=x\sqrt{4R^2-x^2}, \text{ где } 0<x<2R.$$

Задача свелась к нахождению такого значения x, при котором функция $S(x)$ принимает наибольшее значение на интервале $(0; 2R)$. Так как $S(x)>0$ на интервале $(0; 2R)$, то функции $S(x)$ и $f(x)=(S(x))^2$ принимают наибольшее значение на этом интервале в одной и той же точке.

Таким образом, задача свелась к нахождению такого значения x, при котором функция

$$f(x)=x^2(4R^2-x^2)=4R^2x^2-x^4$$

принимает наибольшее значение на интервале $(0; 2R)$. Найдём производную

$$f'(x)=8R^2x-4x^3=4x(R\sqrt{2}+x)(R\sqrt{2}-x).$$

На интервале $(0; 2R)$ есть только одна стационарная точка $x=R\sqrt{2}$ — точка максимума. Следовательно, наибольшее значение функция $f(x)$, (а значит, и функция $S(x)$) принимает при $x=R\sqrt{2}$.

Итак, одна сторона искомого прямоугольника равна $R\sqrt{2}$, другая равна $\sqrt{4R^2-(R\sqrt{2})^2}=R\sqrt{2}$, т. е. искомый прямоугольник — квадрат со стороной $R\sqrt{2}$, его площадь равна $2R^2$. ◁

Упражнения

936 Используя график функции (рис. 140), найти её точки экстремума, а также наибольшее и наименьшее значения.

937 Найти наибольшее и наименьшее значения функции $f(x)=2x^3+3x^2-36x$:

1) на отрезке $[-4; 3]$; 2) на отрезке $[-2; 1]$.

938 Найти наибольшее и наименьшее значения функции:

1) $f(x)=x^4-8x^2+5$ на отрезке $[-3; 2]$;

2) $f(x)=x+\frac{1}{x}$ на отрезке $[-2; -0{,}5]$;

3) $f(x)=\sin x+\cos x$ на отрезке $\left[\pi; \frac{3\pi}{2}\right]$.

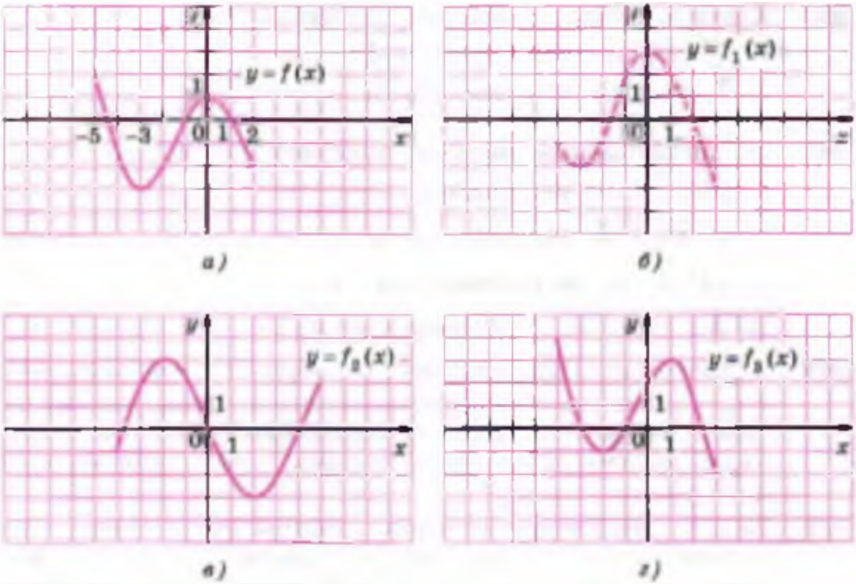


Рис. 140

939 Найти наибольшее (или наименьшее) значение функции:

1) $f(x) = x^2 + \frac{16}{x^2}$ на промежутке $(0; +\infty)$;

2) $f(x) = \frac{2}{x} - x^2$ на промежутке $(-\infty; 0)$.

940 Число 50 записать в виде суммы двух чисел, сумма кубов которых наименьшая.

941 Записать число 625 в виде произведения двух положительных чисел так, чтобы сумма их квадратов была наименьшей.

942 Из всех прямоугольников с периметром p найти прямоугольник наибольшей площади.

943 Из всех прямоугольников, площадь которых равна 9 см^2, найти прямоугольник с наименьшим периметром.

944 Найти наибольшее и наименьшее значения функции:

1) $f(x) = \ln x - x$ на отрезке $\left[\frac{1}{2}; 3\right]$;

2) $f(x) = x + e^{-x}$ на отрезке $[-1; 2]$;

3) $f(x) = 2\cos x - \cos 2x$ на отрезке $[0; \pi]$.

945 Найти наибольшее значение функции:

1) $3\sqrt{x} - x\sqrt{x}$ на промежутке $(0; +\infty)$;

2) $3x - 2x\sqrt{x}$ на промежутке $(0; +\infty)$.

946 Найти наименьшее значение функции:

1) $e^{3x} - 3x$ на интервале $(-1; 1)$;

2) $\frac{1}{x} + \ln x$ на интервале $(0; 2)$.

947 Найти наибольшее значение функции:

1) $x\sqrt[4]{5-x}$ на интервале $(0; 5)$;

2) $x\sqrt[3]{4-x}$ на интервале $(0; 4)$;

3) $\sqrt[3]{x^2(1-x)}$ на интервале $(0; 1)$;

4) $\sqrt[3]{(x^2-4x+5)^{-1}}$ на интервале $(-1; 5)$.

948 Из квадратного листа картона со стороной a нужно сделать открытую сверху коробку прямоугольной формы, вырезав по краям квадраты и загнув образовавшиеся края (рис. 141). Какой должна быть высота коробки, чтобы её объём был наибольшим?

949 Равнобедренные треугольники описаны около квадрата со стороной a так, что одна сторона квадрата лежит на основании треугольника (рис. 142). Обозначая $BK = x$, найти такое значение x, при котором площадь треугольника наименьшая.

950 Из всех прямоугольников, у которых одна вершина лежит на оси Ox, вторая — на положительной полуоси Oy, третья — в начале координат, а четвёртая — на параболе $y = 3 - x^2$, выбран прямоугольник с наибольшей площадью. Найти эту площадь.

951 Найти на параболе $y = x^2$ точку, ближайшую к точке $A\ (2; 0{,}5)$.

952 Из трёх досок одинаковой ширины сколачивается жёлоб. При каком угле наклона боковых стенок к основанию площадь поперечного сечения жёлоба будет наибольшей?

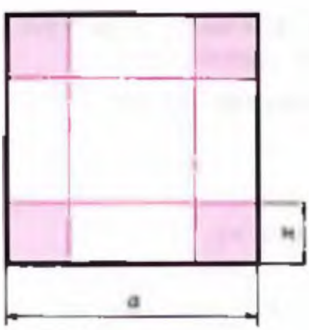


Рис. 141

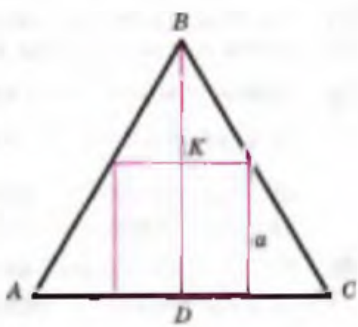


Рис. 142

§ 53* Выпуклость графика функции, точки перегиба

1. Производная второго порядка.

Пусть функция $f(x)$ дифференцируема на интервале $(a; b)$. Её производная $f'(x)$ является функцией от x на этом интервале. Производную $f'(x)$ данной функции $f(x)$ называют также *первой производной* или *производной первого порядка* функции $f(x)$. Если функция $f'(x)$ имеет производную (дифференцируема) на интервале $(a; b)$, то эту производную называют *второй производной* или *производной второго порядка* данной функции $f(x)$ и обозначают $f''(x)$, т. е.

$$f''(x) = (f'(x))'.$$

Например, если $f(x) = x^4 - 3x^2$, то $f'(x) = 4x^3 - 6x$, $f''(x) = 12x^2 - 6$, а если $f(x) = \sin 2x$, то $f'(x) = 2\cos 2x$, $f''(x) = -4\sin 2x$. Производную от второй производной функции $f(x)$ называют *третьей производной* или *производной третьего порядка* этой функции и т. д. В § 49 и 50 было показано, как с помощью первой производной можно находить промежутки возрастания (убывания) функции и точки экстремума. Рассмотрим *свойства функции*, которые устанавливаются *с помощью второй производной*.

2. Выпуклость функции.

На рисунке 143 изображены графики функций, имеющих первую и вторую производные на интервале $(a; b)$.

Рис. 143

Выясним, в чём заключается различие в поведении этих функций и какие свойства являются для них общими. На рисунке 143, *а* изображён график возрастающей, а на рисунке 143, *б* убывающей функции; функция, график которой представлен на рисунке 143, *в*, не является монотонной на $(a; b)$.

Однако все кривые, изображённые на рисунке 143, обладают общим свойством: с возрастанием x от a до b угловой коэффициент касательной к каждой из данных кривых уменьшается, т. е. производная каждой из соответствующих функций убывает на интервале $(a; b)$, и поэтому $f''(x) < 0$.

Из рисунков видно, что для любой точки x_0 интервала $(a; b)$ график функции $y = f(x)$ при всех $x \in (a; b)$ и $x \neq x_0$ *лежит ниже касательной* к этому графику в точке $(x_0; f(x_0))$.

Поэтому функции, графики которых изображены на рисунке 143, называют *выпуклыми вверх*. Дадим теперь определение *выпуклости*. Функция $y = f(x)$, дифференцируемая на интервале $(a; b)$, называется *выпуклой вверх на* этом *интервале*, если её производная $f'(x)$ убывает на $(a; b)$.

Аналогично функция $f(x)$ называется выпуклой вниз на интервале $(a; b)$, если $f'(x)$ возрастает на этом интервале (рис. 144), и потому $f''(x) > 0$.

Если x_0 — любая точка интервала $(a; b)$, то график функции, выпуклой вниз, при всех $x \in (a; b)$ и $x \neq x_0$ (рис. 144) лежит выше *касательной к* этому *графику* в точке $(x_0; f(x_0))$.

Отметим ещё, что если функция $y = f(x)$ выпукла вверх, а M_1 и M_2 — точки этого графика (рис. 145), то на интервале $(x_1; x_2)$, где $a < x_1 < x_2 < b$, график функции $y = f(x)$ лежит выше прямой, проведённой через точки M_1 и M_2.

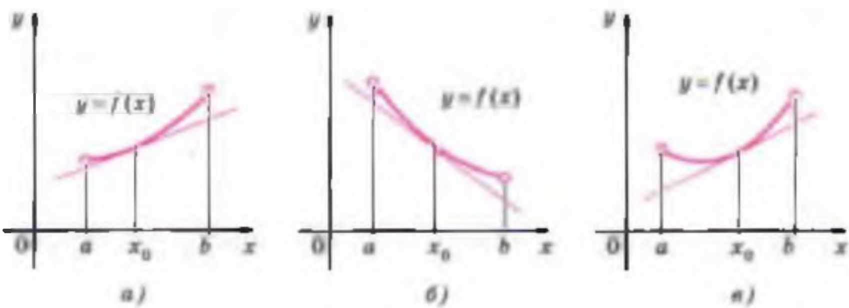


Рис. 144

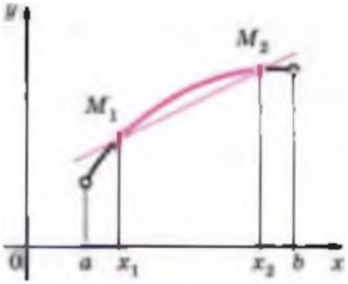


Рис. 145

Интервалы, на которых функция выпукла вверх или вниз, называют *интервалами выпуклости* этой функции.

Покажем, как с помощью второй производной можно находить интервалы выпуклости.

Пусть функция $f(x)$ имеет на интервале $(a; b)$ вторую производную. Тогда если $f''(x) < 0$ для всех $x \in (a; b)$, то на интервале $(a; b)$ функция $f(x)$ выпукла вверх, а если $f''(x) > 0$ на интервале $(a; b)$, то функция $f(x)$ выпукла вниз на интервале $(a; b)$.

Задача 1 Найти интервалы выпуклости вверх и вниз функции $f(x)$, если:

1) $f(x) = x^3$; 2) $f(x) = \sin x$, $-\pi < x < \pi$.

▶ 1) Если $f(x) = x^3$, то $f''(x) = 6x$. Так как $f''(x) < 0$ при $x < 0$ и $f''(x) > 0$ при $x > 0$, то на промежутке $(-\infty; 0)$ функция x^3 выпукла вверх, а на промежутке $(0; +\infty)$ выпукла вниз (рис. 146).

2) Если $f(x) = \sin x$, то $f''(x) = -\sin x$. Пусть $-\pi < x < 0$, тогда $\sin x < 0$ и $f''(x) > 0$. Следовательно, функция $\sin x$ (рис. 147) выпукла вниз на интервале $(-\pi; 0)$. Аналогично функция $\sin x$ выпукла вверх на интервале $(0; \pi)$, так как $-\sin x < 0$ при $0 < x < \pi$. ◁

Задача 2 Доказать, что если $0 < x < \frac{\pi}{2}$, то $\sin x > \frac{2}{\pi} x$.

▶ Прямая $y = \frac{2}{\pi} x$ проходит через точки $(0; 0)$ и $\left(\frac{\pi}{2}; 1\right)$ (см. рис. 147). Так как функция $y = \sin x$ выпукла

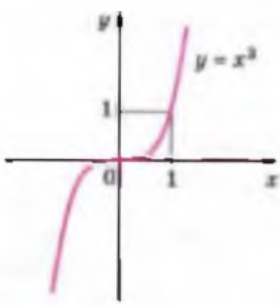


Рис. 146

Рис. 147

вверх на интервале $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$, то её график на этом интервале лежит выше прямой $y = \frac{2}{\pi}x$. Это и означает, что на интервале $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ справедливо неравенство $\sin x > \frac{2}{\pi}x$. ◁

3. Точка перегиба.

В задаче 1 были рассмотрены функции $f(x) = x^3$ и $f(x) = \sin x$, для которых точка $x = 0$ является одновременно концом интервала выпуклости вверх и концом интервала выпуклости вниз.

Точка x_0 дифференцируемой функции $f(x)$ называется ***точкой перегиба*** этой функции, если x_0 является одновременно концом интервала выпуклости вверх и концом интервала выпуклости вниз для $f(x)$.

Иными словами, *в точке перегиба x_0 дифференцируемая функция меняет направление выпуклости.*

Отметим, что при переходе через точку перегиба x_0 функции $f(x)$ график этой функции переходит с одной стороны касательной к этому графику в точке x_0 на другую сторону.

С помощью второй производной можно находить точки перегиба.

Пусть функция $f(x)$ имеет на интервале $(a; b)$ вторую производную. Тогда если $f''(x)$ меняет знак при переходе через x_0, где $x_0 \in (a; b)$, то x_0 — точка перегиба функции $f(x)$.

Задача 3 Найти точки перегиба функции:

1) $f(x) = xe^{-x}$; 2) $f(x) = x^4 - 2x^3$.

▶ Найдём первую и вторую производные функции.

1) $f'(x) = e^{-x} - xe^{-x} = e^{-x}(1 - x)$,

$f''(x) = -e^{-x}(1 - x) - e^{-x} = e^{-x}(x - 2)$.

Так как $f''(x) < 0$ при $x < 2$ и $f''(x) > 0$ при $x > 2$, то $x = 2$ — точка перегиба функции xe^{-x}. Других точек перегиба нет.

2) $f'(x) = 4x^3 - 6x^2$, $f''(x) = 12x^2 - 12x = 12x(x - 1)$.

Функция $f''(x)$ меняет знак при переходе через точки 0 и 1 (и только в этих точках). Следовательно, $x = 0$ и $x = 1$ — точки перегиба функции $f(x) = x^4 - 2x^3$. ◁

Упражнения

953 Найти $f''(x)$, если:
1) $f(x) = x^2 \cos x$;
2) $f(x) = x^3 \sin x$;
3) $f(x) = x^5 + 2x^3 - x^2 + 2$;
4) $f(x) = x^4 - 3x^3 + 5x + 6$.

954 Найти интервалы выпуклости вверх и интервалы выпуклости вниз функции $f(x)$, если:
1) $f(x) = (x+1)^4$;
2) $f(x) = x^4 - 6x^2 + 4$;
3) $f(x) = (x^2 - 3x + 2)e^x$;
4) $f(x) = x^3 - 6x \ln x$.

955 Найти точки перегиба функции $f(x)$, если:
1) $f(x) = \cos x$, $-\pi < x < \pi$;
2) $f(x) = x^5 - 80x^2$;
3) $f(x) = 12x^3 - 24x^2 + 12x$;
4) $f(x) = \sin x - \frac{1}{2}\sin 2x$, $-\pi < x < \pi$.

Упражнения к главе IX

956 Найти интервалы возрастания и убывания функции:
1) $y = 2x^3 + 3x^2 - 2$;
2) $y = \frac{2}{3}x^3 - x^2 - 4x + 5$;
3) $y = \frac{3}{x} - 1$;
4) $y = \frac{2}{x-3}$.

957 Найти стационарные точки функции:
1) $y = x^4 - 4x^3 - 8x^2 + 1$;
2) $y = 4x^4 - 2x^2 + 3$;
3) $y = \frac{x}{3} - \frac{12}{x}$;
4) $y = \cos 2x + 2\cos x$.

958 Найти точки экстремума функции:
1) $y = x^3 - 4x^2$;
2) $y = 3x^4 - 4x^3$.

959 Найти точки экстремума и значения функции в этих точках:
1) $y = x^5 - 2{,}5x^2 + 3$;
2) $y = 0{,}2x^5 - 4x^2 - 3$.

960 Построить график функции:
1) $y = \frac{x^3}{3} + 3x^2$;
2) $y = -\frac{x^4}{4} + x^2$.

961 Построить график функции:
1) $y = 3x^2 - 6x + 5$ на отрезке $[0; 3]$;
2) $y = \frac{1}{4}x^4 - \frac{2}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 2$ на отрезке $[-2; 4]$.

962 Найти наибольшее и наименьшее значения функции:

1) $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9$ на отрезке $[-2; 2]$;

2) $f(x) = x^3 + 6x^2 + 9x$ на отрезке $[-4; 0]$;

3) $f(x) = x^4 - 2x^2 + 3$ на отрезке $[-4; 3]$;

4) $f(x) = x^4 - 8x^2 + 5$ на отрезке $[-3; 2]$.

963 Доказать, что из всех прямоугольников данного периметра наименьшую диагональ имеет квадрат.

964 Из всех равнобедренных треугольников с периметром p найти треугольник с наибольшей площадью.

965 Из всех прямоугольных параллелепипедов, у которых в основании лежит квадрат и площадь полной поверхности равна 600 см^2, найти параллелепипед наибольшего объёма.

Проверь себя!

1 Найти интервалы возрастания и убывания функции
$$y = 6x - 2x^3.$$

2 Найти точки экстремума функции $y = \frac{x}{3} + \frac{3}{x}$.

3 Построить график функции:

1) $y = 2x^4 - x^2 + 1$; 2) $y = x^3 - 3x$.

4 Функция $y = x + \frac{4}{x}$ непрерывна на отрезке $[1; 5]$. Найти её наибольшее и наименьшее значения.

5 Периметр основания прямоугольного параллелепипеда 8 м, а высота 3 м. Какой длины должны быть стороны основания, чтобы объём параллелепипеда был наибольшим?

966 Доказать, что функция $y = 1{,}8x^5 - 2\frac{1}{3}x^3 + 7x + 12{,}5$ возрастает на всей области определения.

967 Доказать, что функция $y = x(1 + 2\sqrt{x})$ возрастает на всей области определения.

968 Найти точки экстремума функции:

1) $y = x \ln x$; 2) $y = xe^x$; 3) $y = \frac{25}{7-x} - \frac{9}{3-x}$.

969 На рисунке 148 изображён график функции $y = g(x)$, являющейся производной функции $y = f(x)$. Найти:

1) интервалы возрастания и убывания функции $y = f(x)$;

2) точки экстремума функции $y = f(x)$;

3)* точки перегиба функции $y = f(x)$.

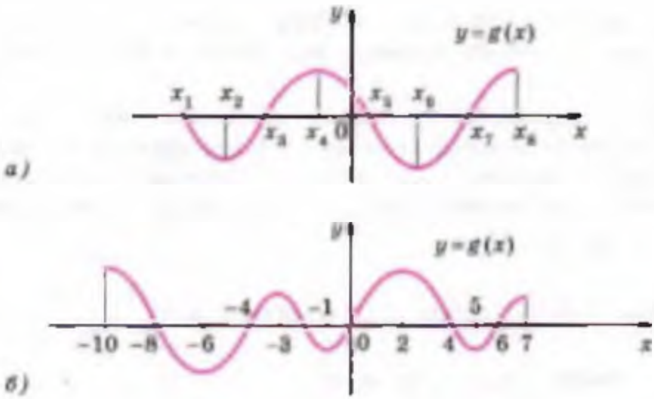


Рис. 148

970 Построить график функции:

1) $y = \frac{2}{x^2 - 4}$; 2) $y = \frac{2}{x^2 + 4}$;

3) $y = (x - 1)^2 (x + 2)$; 4) $y = x (x - 1)^3$.

971 Найти наибольшее и наименьшее значения функции:

1) $f(x) = 2 \sin x + \sin 2x$ на отрезке $\left[0; \frac{3}{2}\pi\right]$;

2) $f(x) = 2 \cos x + \sin 2x$ на отрезке $[0; \pi]$.

972 Из всех прямоугольных треугольников, у которых сумма одного катета и гипотенузы равна l, найти треугольник с наибольшей площадью.

973 Сумма катетов прямоугольного треугольника равна 40. Какую длину должны иметь катеты, чтобы площадь треугольника была наибольшей?

974 Сумма диагоналей параллелограмма равна a. Найти наименьшее значение суммы квадратов всех его сторон.

975 Найти точки перегиба функции:

1) $f(x) = 6x^2 - x^3$; 2) $f(x) = 3x^2 + 4x^3$.

976 Из всех прямоугольников, вписанных в полукруг радиуса R так, что одна сторона прямоугольника лежит на диаметре полукруга, выбран тот, у которого наибольшая площадь. Найти эту площадь.

977 Найти наибольший из объёмов всех пирамид, у каждой из которых высота равна 12, а основанием является прямоугольный треугольник с гипотенузой 4.

978 Из всех цилиндров, у которых периметр осевого сечения равен p, выбран цилиндр наибольшего объёма. Найти этот объём.

979 Открытый кузов грузового автомобиля имеет вид прямоугольного параллелепипеда с площадью поверхности $2S$. Каковы должны быть длина и ширина кузова, чтобы его объём был наибольшим, а отношение длины к ширине равнялось $\frac{5}{2}$?

980 Найти точки экстремума функции $y = \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 + 3x + 2}$.

981 Построить график функции:

1) $y = (x^2 - 1)\sqrt{x+1}$;

2) $y = |x| \cdot \sqrt[3]{1+3x}$;

3) $y = x^2 e^{-x}$;

4) $y = x^3 e^{-x}$.

Рис. 149

982 Груз, лежащий на горизонтальной плоскости, нужно сдвинуть с места силой, приложенной к этому грузу (рис. 149). Определить угол, образуемый этой силой с плоскостью, при котором величина силы будет наименьшей, если коэффициент трения груза равен k.

X
глава

Интеграл

Нет ни одной области математики, как бы абстрактна она ни была, которая когда-нибудь не окажется применимой к явлениям действительного мира.

Н. И. Лобачевский

§ 54 Первообразная

Рассмотрим движение материальной точки вдоль прямой. Пусть закон движения точки задан функцией $s(t)$. Тогда мгновенная скорость $v(t)$ равна производной функции $s(t)$, т. е. $v(t) = s'(t)$.

В практике встречается обратная задача: по заданной скорости движения точки $v(t)$ найти закон движения, т. е. найти такую функцию $s(t)$, производная которой равна $v(t)$. Функцию $s(t)$, такую, что $s'(t) = v(t)$, называют *первообразной функции* $v(t)$.

Например, если $v(t) = at$, где a — заданное число, то функция $s(t) = \frac{at^2}{2}$ является первообразной функции $v(t)$, так как $s'(t) = \left(\frac{at^2}{2}\right)' = at = v(t)$.

Функция $F(x)$ называется *первообразной* функции $f(x)$ на некотором промежутке, если для всех x из этого промежутка $F'(x) = f(x)$.

Например, функция $F(x) = \sin x$ является первообразной функции $f(x) = \cos x$, так как $(\sin x)' = \cos x$, функция $F(x) = \frac{x^4}{4}$ является первообразной функции $f(x) = x^3$, так как $\left(\frac{x^4}{4}\right)' = x^3$.

Задача 1 Доказать, что функции $\frac{x^3}{3}$, $\frac{x^3}{3}+1$, $\frac{x^3}{3}-4$ являются первообразными функции $f(x)=x^2$.

▶ 1) Обозначим $F_1(x)=\frac{x^3}{3}$, тогда $F_1'(x)=3\cdot\frac{x^2}{3}=$ $=x^2=f(x)$.

2) $F_2(x)=\frac{x^3}{3}+1$, $F_2'(x)=\left(\frac{x^3}{3}+1\right)'=x^2=f(x)$.

3) $F_3(x)=\frac{x^3}{3}-4$, $F_3'(x)=\left(\frac{x^3}{3}-4\right)'=x^2=f(x)$. ◁

Вообще, любая функция $\frac{x^3}{3}+C$, где C — постоянная, является первообразной функции x^2. Это следует из того, что производная постоянной равна нулю. Этот пример показывает, что для заданной функции её первообразная определяется неоднозначно.

Пусть $F_1(x)$ и $F_2(x)$ — две первообразные одной и той же функции $f(x)$. Тогда $F_1'(x)=f(x)$ и $F_2'(x)=f(x)$. Производная их разности $g(x)=$ $=F_1(x)-F_2(x)$ равна нулю, так как $g'(x)=F_1'(x)-$ $-F_2'(x)=f(x)-f(x)=0$.

Если $g'(x)=0$ на некотором промежутке, то касательная к графику функции $y=g(x)$ в каждой точке этого промежутка параллельна оси Ox. Поэтому графиком функции $y=g(x)$ является прямая, параллельная оси Ox, т. е. $g(x)=C$, где C — некоторая постоянная. Из равенств $g(x)=C$, $g(x)=$ $=F_1(x)-F_2(x)$ следует, что $F_1(x)=F_2(x)+C$.

Итак, если функция $F(x)$ является первообразной функции $f(x)$ на некотором промежутке, то все первообразные функции $f(x)$ записываются в виде $F(x)+C$, где C — произвольная постоянная.

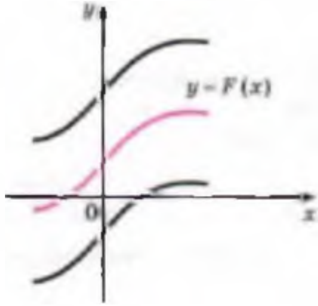


Рис. 150

Рассмотрим графики всех первообразных заданной функции $f(x)$. Если $F(x)$ — одна из первообразных функции $f(x)$, то любая первообразная этой функции получается прибавлением к $F(x)$ некоторой постоянной: $F(x)+C$. Графики функций $y=F(x)+C$ получаются из графика $y=F(x)$ сдвигом вдоль оси Oy (рис. 150). Выбором C можно добиться того, чтобы график первообразной проходил через заданную точку.

Задача 2 Для функции $f(x) = x$ найти такую первообразную, график которой проходит через точку (2; 5).

▶ Все первообразные функции $f(x) = x$ находятся по формуле $F(x) = \frac{x^2}{2} + C$, так как $F'(x) = x$. Найдём число C, такое, чтобы график функции $y = \frac{x^2}{2} + C$ проходил через точку (2; 5). Подставляя $x = 2$, $y = 5$, получаем $5 = \frac{2^2}{2} + C$, откуда $C = 3$. Следовательно, $F(x) = \frac{x^2}{2} + 3$. ◁

Задача 3 Доказать, что для любого действительного $p \neq -1$ функция $F(x) = \frac{x^{p+1}}{p+1}$ является первообразной функции $f(x) = x^p$ на промежутке $(0; +\infty)$.

▶ Так как $(x^{p+1})' = (p+1) \cdot x^p$, то $\left(\frac{x^{p+1}}{p+1}\right)' = \frac{(x^{p+1})'}{p+1} = x^p$. ◁

Упражнения

983 Показать, что функция $F(x)$ является первообразной функции $f(x)$ на всей числовой прямой:

1) $F(x) = \frac{x^6}{6}$, $f(x) = x^5$; 2) $F(x) = \frac{x^5}{5} + 1$, $f(x) = x^4$.

984 Показать, что функция $F(x)$ является первообразной функции $f(x)$ при $x > 0$:

1) $F(x) = \frac{2}{x}$, $f(x) = -\frac{2}{x^2}$; 2) $F(x) = 1 + \sqrt{x}$, $f(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

985 Найти все первообразные функции:

1) x^4; 2) x^3; 3) x^{-3}; 4) $x^{-\frac{1}{2}}$.

986 Для функции $f(x)$ найти первообразную, график которой проходит через точку M:

1) $f(x) = x$, $M(-1; 3)$; 2) $f(x) = \sqrt{x}$, $M(9; 10)$.

987 Показать, что функция $F(x)$ является первообразной функции $f(x)$ на всей числовой прямой:

1) $F(x) = 3e^{\frac{x}{3}}$, $f(x) = e^{\frac{x}{3}}$; 2) $F(x) = \sin 2x$, $f(x) = 2\cos 2x$.

§ 55 Правила нахождения первообразных

Напомним, что операцию нахождения производной для заданной функции называют дифференцированием. Обратную операцию нахождения первообразной для данной функции называют *интегрированием* (от латинского слова *integrare* — восстанавливать).

Таблицу первообразных для некоторых функций можно составить, используя таблицу производных. Например, зная, что $(\cos x)' = -\sin x$, получаем $(-\cos x)' = \sin x$, откуда следует, что все первообразные функции $\sin x$ записываются в виде $-\cos x + C$, где C — произвольная постоянная.

Приведём таблицу первообразных.

Функция	Первообразная
x^p, $p \neq -1$	$\frac{x^{p+1}}{p+1} + C$
$\frac{1}{x}$, $x > 0$	$\ln x + C$
e^x	$e^x + C$
$\sin x$	$-\cos x + C$
$\cos x$	$\sin x + C$
$(kx+b)^p$, $p \neq -1$, $k \neq 0$	$\frac{(kx+b)^{p+1}}{k(p+1)} + C$
$\frac{1}{kx+b}$, $k \neq 0$	$\frac{1}{k} \ln(kx+b) + C$
e^{kx+b}, $k \neq 0$	$\frac{1}{k} e^{kx+b} + C$
$\sin(kx+b)$, $k \neq 0$	$-\frac{1}{k} \cos(kx+b) + C$
$\cos(kx+b)$, $k \neq 0$	$\frac{1}{k} \sin(kx+b) + C$

Отметим, что во всех рассмотренных примерах и в дальнейшем функция $F(x)$ является первообразной функции $f(x)$ на таком промежутке, на котором обе функции $F(x)$ и $f(x)$ определены. Например, первообразной функции $\frac{1}{2x-4}$ является функция $\frac{1}{2}\ln(2x-4)$ на таком промежутке, на котором $2x-4>0$, т. е. на промежутке $(2; +\infty)$. Правила интегрирования можно также получить с помощью правил дифференцирования. Приведём следующие правила интегрирования:

Пусть $F(x)$ и $G(x)$ — первообразные соответственно функций $f(x)$ и $g(x)$ на некотором промежутке. Тогда:
1) функция $F(x) \pm G(x)$ является первообразной функции $f(x) \pm g(x)$;
2) функция $aF(x)$ является первообразной функции $af(x)$.

Задача 1 Найти одну из первообразных функции

$$f(x) = x^2 + 3\cos x.$$

▶ Используя правила интегрирования и таблицу первообразных для функций x^p при $p=2$ и для $\cos x$, находим одну из первообразных данной функции:
$F(x) = \frac{x^3}{3} + 3\sin x$. ◁

Задача 2 Найти все первообразные функции

$$e^{1-x} - 4\sin(2x+3).$$

▶ По таблице первообразных находим, что одной из первообразных функции e^{1-x} является функция $-e^{1-x}$, а одной из первообразных функции $\sin(2x+3)$ является функция $-\frac{1}{2}\cos(2x+3)$. По правилам интегрирования одна из первообразных данной функции: $-e^{1-x} + 2\cos(2x+3)$.

Ответ $-e^{1-x} + 2\cos(2x+3) + C$. ◁

Упражнения

Найти одну из первообразных функции (988—990).

988 1) $2x^5 - 3x^2$; 2) $5x^4 + 2x^3$; 3) $\frac{2}{x} + \frac{3}{x^2}$;

4) $\frac{2}{x^3} - \frac{3}{x}$; 5) $6x^2 - 4x + 3$; 6) $4\sqrt[3]{x} - 6\sqrt{x}$.

989 1) $3\cos x - 4\sin x$; 2) $5\sin x + 2\cos x$;
3) $e^x - 2\cos x$; 4) $3e^x - \sin x$;
5) $5 - e^{-x} + 3\cos x$; 6) $1 + 3e^x - 4\cos x$;
7) $6\sqrt[3]{x} - \frac{2}{x} + 3e^x$; 8) $\frac{4}{\sqrt{x}} + \frac{3}{x} - 2e^{-x}$.

990 1) $(x+1)^4$; 2) $(x-2)^3$; 3) $\frac{2}{\sqrt{x-2}}$; 4) $\frac{3}{\sqrt[3]{x+3}}$;
5) $\frac{1}{x-1} + 4\cos(x+2)$; 6) $\frac{3}{x-3} - 2\sin(x-1)$.

991 Найти все первообразные функции:
1) $\sin(2x+3)$; 2) $\cos(3x+4)$; 3) $\cos\left(\frac{x}{2}-1\right)$;
4) $\sin\left(\frac{x}{4}+5\right)$; 5) $e^{\frac{x+1}{3}}$; 6) e^{3x-5}; 7) $\frac{1}{2x}$; 8) $\frac{1}{3x-1}$.

992 Для функции $f(x)$ найти первообразную, график которой проходит через точку M:
1) $f(x) = 2x+3$, $M(1; 2)$; 2) $f(x) = 4x-1$, $M(-1; 3)$;
3) $f(x) = \sin 2x$, $M\left(\frac{\pi}{2}; 5\right)$; 4) $f(x) = \cos 3x$, $M(0; 0)$.

Найти одну из первообразных функции (993—996).

993 1) $e^{2x} - \cos 3x$; 2) $e^{\frac{x}{4}} + \sin 2x$;
3) $2\sin\frac{x}{5} - 5e^{2x+\frac{1}{3}}$; 4) $3\cos\frac{x}{7} + 2e^{3x-\frac{1}{2}}$;
5) $\sqrt{\frac{x}{5}} + 4\sin(4x+2)$; 6) $\frac{4}{\sqrt{3x+1}} - \frac{3}{2x-5}$.

994 1) $\frac{2x^4 - 4x^3 + x}{3}$; 2) $\frac{6x^3 - 3x + 2}{5}$;
3) $(1+2x)(x-3)$; 4) $(2x-3)(2+3x)$.

995 1) $(2x+1)\sqrt{x}$; 2) $(3x-2)\sqrt[3]{x}$; 3) $\frac{x+1}{\sqrt[3]{x}}$; 4) $\frac{x-1}{\sqrt{x}}$.

996 1) $\sin x \cos x$; 2) $\sin x \cos 3x - \cos x \sin 3x$.

997 Найти первообразную функции $y = 2\sin 5x + 3\cos\frac{x}{2}$, которая при $x = \frac{\pi}{3}$ принимает значение, равное 0.

998 Найти одну из первообразных функции:
1) $\frac{x}{x-3}$; 2) $\frac{x-1}{x^2+x-2}$; 3) $\cos^2 x$; 4) $\sin 3x \cos 5x$.

§ 56 Площадь криволинейной трапеции и интеграл

Рассмотрим фигуру, изображённую на рисунке 151. Эта фигура ограничена снизу отрезком $[a; b]$ оси Ox, сверху графиком непрерывной функции $y = f(x)$ такой, что $f(x) \geqslant 0$ при $x \in [a; b]$ и $f(x) > 0$ при $x \in (a; b)$, а с боков ограничена отрезками прямых $x = a$ и $x = b$. Такую фигуру называют *криволинейной трапецией*. Отрезок $[a; b]$ называют *основанием этой криволинейной трапеции*.

Выясним, как можно вычислить площадь S криволинейной трапеции с помощью первообразной функции $f(x)$.

Обозначим $S(x)$ площадь криволинейной трапеции с основанием $[a; x]$ (рис. 152), где x — любая точка отрезка $[a; b]$. При $x = a$ отрезок $[a; x]$ вырождается в точку и поэтому $S(a) = 0$, при $x = b$ имеем $S(b) = S$.

Показем, что $S(x)$ является первообразной функции $f(x)$, т. е. $S'(x) = f(x)$.

Рассмотрим разность $S(x + h) - S(x)$, где $h > 0$ (случай $h < 0$ рассматривается аналогично). Эта разность равна площади криволинейной трапеции с основанием $[x; x + h]$ (рис. 153). Справедливо утверждение: найдется точка $c \in [x; x + h]$ такая, что указанная площадь равна площади прямоугольника с основанием $[x; x + h]$ и высотой $f(c)$, т. е.

$$S(x + h) - S(x) = f(c)\,h.$$

Строгое доказательство этого утверждения рассматривается в курсе высшей математики.

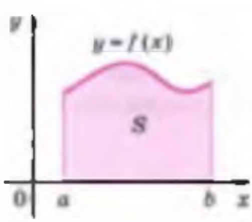


Рис. 151

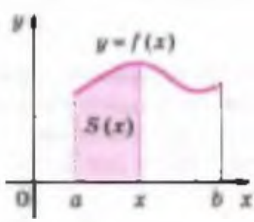


Рис. 152

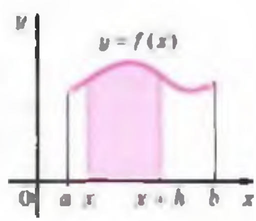


Рис. 153

Пусть $h \to 0$, тогда $c \to x$ и $f(c) \to f(x)$, так как $f(x)$ — непрерывная функция. Отсюда следует, что

$$\frac{S(x+h)-S(x)}{h}=f(c)\to f(x) \text{ при } h\to 0,$$

т. е. $S'(x)=f(x)$.

Любая другая первообразная $F(x)$ функции $f(x)$ отличается от $S(x)$ на постоянную, т. е.

$$F(x)=S(x)+C. \qquad (1)$$

Из этого равенства при $x=a$ получаем $F(a)=S(a)+C$. Так как $S(a)=0$, то $C=F(a)$ и равенство (1) можно записать так:

$$S(x)=F(x)-F(a).$$

Отсюда при $x=b$ получаем

$$S(b)=F(b)-F(a).$$

Итак, площадь криволинейной трапеции (рис. 151) можно вычислить по формуле

$$S=F(b)-F(a), \qquad (2)$$

где $F(x)$ — любая первообразная функции $f(x)$.

Таким образом, вычисление площади криволинейной трапеции сводится к отысканию первообразной $F(x)$ функции $f(x)$, т. е. к интегрированию функции $f(x)$.

Разность $F(b)-F(a)$ называют *интегралом от функции* $f(x)$ на отрезке $[a; b]$ и обозначают так: $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ (читается: «Интеграл от a до b эф от икс дэ икс»), т. е.

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx=F(b)-F(a). \qquad (3)$$

Формулу (3) называют *формулой Ньютона — Лейбница* в честь создателей дифференциального и интегрального исчисления.

Из формул (2) и (3) получаем

$$S=\int\limits_a^b f(x)\,dx. \qquad (4)$$

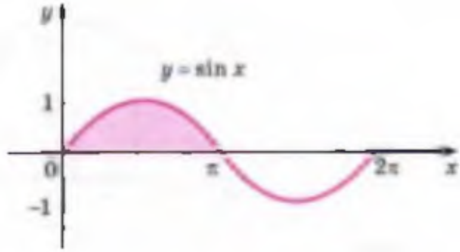


Рис. 154

Рис. 155

Задача 1 **Найти площадь криволинейной трапеции, изображённой на рисунке 154.**

▶ По формуле (4) находим $S = \int\limits_1^3 x^2\,dx$. Вычислим этот интеграл с помощью формулы Ньютона — Лейбница (3). Одной из первообразных функции $f(x) = x^2$ является $F(x) = \frac{x^3}{3}$. Поэтому $S = \int\limits_1^3 x^2\,dx = F(3) - F(1) = \frac{3^3}{3} - \frac{1^3}{3} = 8\frac{2}{3}$ (кв. ед.). ◁

Формулы (3) и (4) справедливы и для случая, когда функция $f(x)$ положительна внутри отрезка $[a; b]$, а на одном из концов отрезка или на обоих концах равна нулю.

Задача 2 **Найти площадь криволинейной трапеции, изображённой на рисунке 155.**

▶ Функция $F(x) = -\cos x$ является первообразной для функции $f(x) = \sin x$. По формулам (3) и (4) получаем $S = \int\limits_0^{\pi} \sin x\,dx = F(\pi) - F(0) = (-\cos\pi) - (-\cos 0) = 1 + 1 = 2$ (кв. ед.). ◁

Исторически интеграл возник в связи с вычислением площадей фигур, ограниченных кривыми, в частности в связи с вычислением площади криволинейной трапеции. Рассмотрим криволинейную трапецию, изображённую на рисунке 156. На этом рисунке основание трапеции — отрезок $[a; b]$ — разбито на n отрезков (необязательно равных) точками $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$.

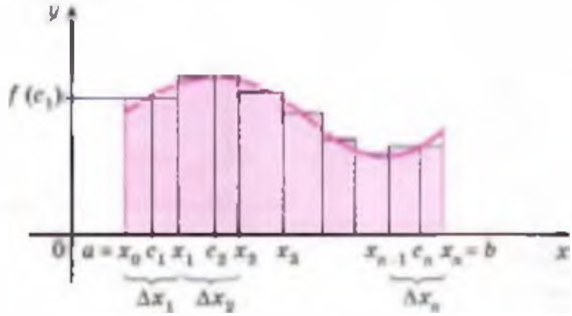


Рис. 156

Через эти точки проведены вертикальные прямые. На каждом отрезке $[x_{k-1}; x_k]$, $k = 1, 2, ..., n$, выберем точку c_k, и обозначим $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$. Тогда $f(c_k)\Delta x_k$ — площадь прямоугольника с основанием Δx_k и высотой $f(c_k)$, а площадь криволинейной трапеции приближенно равна сумме площадей построенных прямоугольников:

$$S_n = f(c_1)\,\Delta x_1 + f(c_2)\,\Delta x_2 + ... + f(c_n)\,\Delta x_n. \quad (5)$$

Сумму (5) называют *интегральной суммой функции $f(x)$ на отрезке* $[a; b]$. Будем увеличивать число точек разбиения отрезка $[a; b]$ так, чтобы наибольшая из длин отрезков $[x_{k-1}; x_k]$ стремилась к нулю. В курсе высшей математики доказывается, что для любой непрерывной на отрезке $[a; b]$ функции $f(x)$ (не обязательно неотрицательной) интегральные суммы (5) стремятся к некоторому числу, т. е. имеют предел, не зависящий от выбора точек c_k. Этот предел называют *интегралом (определённым интегралом)* от функции $f(x)$ на отрезке $[a; b]$ и обозначают $\int_a^b f(x)dx$. Вычисляют интеграл по формуле $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$, где $F(x)$ — любая первообразная для функции $f(x)$ на отрезке $[a; b]$.

Упражнения

999 Изобразить криволинейную трапецию, ограниченную:

1) графиком функции $y = (x-1)^2$, осью Ox и прямой $x = 2$;
2) графиком функции $y = 2x - x^2$ и осью Ox;

3) графиком функции $y = \frac{2}{x}$, осью Ox и прямыми $x = 1$, $x = 4$;

4) графиком функции $y = \sqrt{x}$, осью Ox и прямой $x = 4$.

1000 **Найти площадь криволинейной трапеции, ограниченной прямыми $x = a$, $x = b$, осью Ox и графиком функции $y = f(x)$:**

1) $a = 2$, $b = 4$, $f(x) = x^3$;

2) $a = 3$, $b = 4$, $f(x) = x^2$;

3) $a = -2$, $b = 1$, $f(x) = x^2 + 1$;

4) $a = 0$, $b = 2$, $f(x) = x^3 + 1$;

5) $a = \frac{\pi}{3}$, $b = \frac{2\pi}{3}$, $f(x) = \sin x$;

6) $a = -\frac{\pi}{6}$, $b = 0$, $f(x) = \cos x$.

1001 **Найти площадь фигуры, ограниченной осью Ox и параболой:**

1) $y = 4 - x^2$; 2) $y = 1 - x^2$; 3) $y = -x^2 + 4x - 3$.

1002 **Найти площадь фигуры, ограниченной прямыми $x = a$, $x = b$, осью Ox и графиком функции $y = f(x)$:**

1) $a = 1$, $b = 8$, $f(x) = \sqrt[3]{x}$; 2) $a = 4$, $b = 9$, $f(x) = \sqrt{x}$.

1003 **Найти площадь фигуры, ограниченной прямой $x = b$, осью Ox и графиком функции $y = f(x)$:**

1) $b = 2$, $f(x) = 5x - x^2$, $2 \leqslant x \leqslant 5$; 2) $b = 3$, $f(x) = x^2 + 2x$;

3) $b = 1$, $f(x) = e^x - 1$; 4) $b = 2$, $f(x) = 1 - \frac{1}{x}$.

§ 57 Вычисление интегралов

Интегралы можно приближённо вычислять с помощью интегральных сумм. Такой способ требует громоздких вычислений. Его применяют в тех случаях, когда не удаётся найти первообразную функции $f(x)$ и для вычислений обычно используют ЭВМ, составляя специальные программы. Если же первообразная функция известна, то интеграл можно вычислить точно, используя формулу Ньютона — Лейбница.

Приведём примеры вычисления интегралов по формуле Ньютона — Лейбница с помощью таблицы первообразных и правил интегрирования.

Задача 1 Вычислить интеграл $\int_0^1 (x-1)\,dx$.

▶ Одной из первообразных функции $x-1$ является функция $\frac{x^2}{2}-x$. Поэтому $\int_0^1 (x-1)\,dx = \left(\frac{1^2}{2}-1\right) - \left(\frac{0^2}{2}-0\right) = \frac{1}{2}-1 = -\frac{1}{2}$. ◁

При вычислении интегралов удобно ввести следующее обозначение:

$$F(b)-F(a)=F(x)\Big|_a^b.$$

Тогда формулу Ньютона — Лейбница можно записать в виде

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(x)\Big|_a^b.$$

Задача 2 Вычислить интеграл $\int_{-a}^{a} \sin x\,dx$.

▶ $\int_{-a}^{a} \sin x\,dx = (-\cos x)\Big|_{-a}^{a} = (-\cos a)-(-\cos(-a)) =$

$= -\cos a + \cos(-a) = 0$, так как $\cos(-a)=\cos a$. ◁

Задача 3 Вычислить интеграл $\int_{-1}^{3} \frac{1}{\sqrt{2x+3}}\,dx$.

▶ $\int_{-1}^{3} \frac{1}{\sqrt{2x+3}}\,dx = \int_{-1}^{3} (2x+3)^{-\frac{1}{2}}\,dx = (2x+3)^{\frac{1}{2}}\Big|_{-1}^{3} =$

$= (2\cdot 3+3)^{\frac{1}{2}} - (2\cdot(-1)+3)^{\frac{1}{2}} = 3-1 = 2.$ ◁

Задача 4 Вычислить интеграл $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)dx$.

▶ $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)dx = \frac{1}{2}\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} =$

$$= \frac{1}{2}\left(\sin\left(2\pi + \frac{\pi}{4}\right) - \sin\left(\pi + \frac{\pi}{4}\right)\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right) =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}. \triangleleft$$

Задача 5 Вычислить интеграл $\int\limits_0^3 x\sqrt{x+1}\,dx$.

$$\blacktriangleright \int\limits_0^3 x\sqrt{x+1}\,dx = \int\limits_0^3 (x+1-1)\sqrt{x+1}\,dx =$$

$$= \int\limits_0^3 \left((x+1)^{\frac{3}{2}} - (x+1)^{\frac{1}{2}}\right)dx = \left(\frac{2}{5}(x+1)^{\frac{5}{2}} - \frac{2}{3}(x+1)^{\frac{3}{2}}\right)\Bigg|_0^3 =$$

$$= \left(\frac{2}{5}\cdot 32 - \frac{2}{3}\cdot 8\right) - \left(\frac{2}{5} - \frac{2}{3}\right) = 7\frac{11}{15}. \triangleleft$$

Упражнения

Вычислить интеграл (1004—1011).

1004 1) $\int\limits_0^1 x\,dx$; 2) $\int\limits_0^3 x^2\,dx$; 3) $\int\limits_{-1}^2 3x^2\,dx$; 4) $\int\limits_{-2}^3 2x\,dx$;

5) $\int\limits_2^3 \frac{1}{x^2}\,dx$; 6) $\int\limits_1^2 \frac{1}{x^3}\,dx$; 7) $\int\limits_1^4 \sqrt{x}\,dx$; 8) $\int\limits_4^9 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$.

1005 1) $\int\limits_1^e \frac{1}{x}\,dx$; 2) $\int\limits_0^{\ln 2} e^x\,dx$; 3) $\int\limits_{-\pi}^{2\pi} \cos x\,dx$;

4) $\int\limits_{-2\pi}^{\pi} \sin x\,dx$; 5) $\int\limits_{-2\pi}^{\pi} \sin 2x\,dx$; 6) $\int\limits_{2\pi}^{0} \cos 3x\,dx$.

1006 1) $\int\limits_{-3}^2 (2x-3)\,dx$; 2) $\int\limits_2^{-1} (5-4x)\,dx$; 3) $\int\limits_{-1}^2 (1-3x^2)\,dx$;

4) $\int\limits_{-1}^1 (x^2+1)\,dx$; 5) $\int\limits_0^2 (3x^2-4x+5)\,dx$.

1007 1) $\int\limits_0^4 (x-3\sqrt{x})\,dx$; 2) $\int\limits_1^9 \left(2x - \frac{3}{\sqrt{x}}\right)dx$;

3) $\int\limits_0^2 e^{3x}\,dx$; 4) $\int\limits_1^3 2e^{2x}\,dx$.

1008 1) $\int\limits_{-2}^{1} x(x+3)(2x-1)\,dx$; 2) $\int\limits_{-1}^{0} (x+1)(x^2-2)\,dx$;

3) $\int\limits_{1}^{2} \left(x+\frac{1}{x}\right)^2 dx$; 4) $\int\limits_{-2}^{-1} \frac{4}{x^3}\left(1-\frac{2}{x}\right)dx$.

1009 1) $\int\limits_{1}^{2} \frac{5x-2}{\sqrt[3]{x}}\,dx$; 2) $\int\limits_{1}^{9} \frac{3x-1}{\sqrt{x}}\,dx$; 3) $\int\limits_{2}^{7} \frac{4}{\sqrt{x+2}}\,dx$.

1010 1) $\int\limits_{1}^{2} \frac{3}{2x-1}\,dx$; 2) $\int\limits_{0}^{1} \frac{4}{3x+2}\,dx$; 3) $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)dx$.

1011 1) $\int\limits_{-\pi}^{\pi} \sin^2 x\,dx$; 2) $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin x\cos x\,dx$;

3) $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{4}} (\cos^2 x-\sin^2 x)\,dx$; 4) $\int\limits_{0}^{\pi} (\sin^4 x+\cos^4 x)\,dx$;

5) $\int\limits_{0}^{3} x^2\sqrt{x+1}\,dx$; 6) $\int\limits_{3}^{4} \frac{x^2-4x+5}{x-2}\,dx$.

1012 Найти все числа $b>1$, для которых выполняется равенство $\int\limits_{1}^{b}(b-4x)\,dx \geq 6-5b$.

§ 58 Вычисление площадей с помощью интегралов

Задача 4 Вычислить площадь криволинейной трапеции, ограниченной осью Ox, прямыми $x=-1$, $x=2$ и параболой $y=9-x^2$.

▶ Построим график функции $y=9-x^2$ и изобразим данную трапецию (рис. 157).

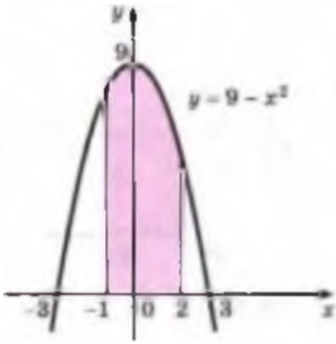


Рис. 157

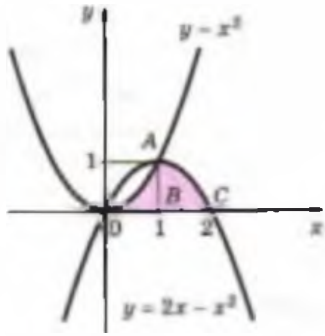


Рис. 158

Искомая площадь S равна интегралу

$$S = \int_{-1}^{2} (9 - x^2)\,dx.$$

По формуле Ньютона — Лейбница находим

$$S = \int_{-1}^{2} (9 - x^2)\,dx = \left(9x - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_{-1}^{2} = \left(9 \cdot 2 - \frac{2^3}{3}\right) -$$

$$- \left(9(-1) - \frac{(-1)^3}{3}\right) = 24. \triangleleft$$

Задача 2 Найти площадь фигуры, ограниченной параболами $y = x^2$, $y = 2x - x^2$ и осью Ox.

► Построим графики функций $y = x^2$, $y = 2x - x^2$ и найдём абсциссы точек пересечения этих графиков из уравнения $x^2 = 2x - x^2$. Корни этого уравнения $x_1 = 0$, $x_2 = 1$. Данная фигура изображена на рисунке 158. Из рисунка видно, что эта фигура состоит из двух криволинейных трапеций. Следовательно, искомая площадь равна сумме площадей этих трапеций:

$$S = \int_0^1 x^2\,dx + \int_1^2 (2x - x^2)\,dx = \frac{x^3}{3}\Bigg|_0^1 + \left(x^2 - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_1^2 = 1. \triangleleft$$

Задача 3 Найти площадь S фигуры, ограниченной отрезком $\left[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$ оси Ox и графиком функции $y = \cos x$ на этом отрезке.

► Заметим, что площадь данной фигуры равна площади фигуры, симметричной данной относительно оси Ox (рис. 159), т. е. площади фигуры, огра-

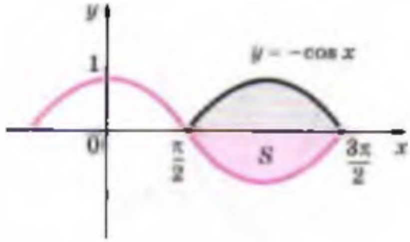


Рис. 159

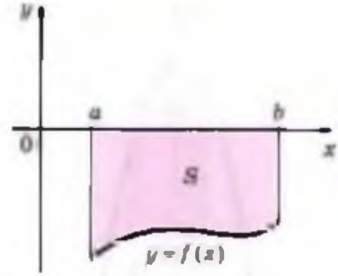


Рис. 160

ниченной отрезком $\left[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$ оси Ox и графиком функции $y = -\cos x$ на отрезке $\left[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$. На этом отрезке $-\cos x \geqslant 0$, и поэтому $S = \int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} (-\cos x)\,dx =$

$$= (-\sin x)\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} = \left(-\sin\frac{3\pi}{2}\right) - \left(-\sin\frac{\pi}{2}\right) = 2. \triangleleft$$

Вообще, если $f(x) \leqslant 0$ на отрезке $[a; b]$, причем равенство нулю может быть лишь на его концах (рис. 160), то площадь S криволинейной трапеции равна $S = \int\limits_a^b (-f(x))\,dx$.

Задача 4 Найти площадь S фигуры, ограниченной параболой $y = x^2 + 1$ и прямой $y = x + 3$.

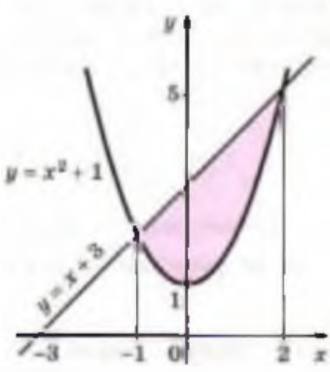


Рис. 161

▶ Построим графики функций $y = x^2 + 1$ и $y = x + 3$. Найдём абсциссы точек пересечения этих графиков из уравнения $x^2 + 1 = x + 3$. Это уравнение имеет корни $x_1 = -1$, $x_2 = 2$. Фигура, ограниченная графиками данных функций, изображена на рисунке 161. Из рисунка видно, что искомую площадь можно найти как разность площадей S_1 и S_2 двух трапеций, опирающихся на отрезок $[-1; 2]$, первая из которых ограничена сверху отрезком прямой $y = x + 3$, а вторая — дугой параболы $y = x^2 + 1$. Так как

$$S_1 = \int_{-1}^{2}(x+3)\,dx, \quad S_2 = \int_{-1}^{2}(x^2+1)\,dx,$$

$$\text{то } S = S_1 - S_2 = \int_{-1}^{2}(x+3)\,dx - \int_{-1}^{2}(x^2+1)\,dx.$$

Используя свойство первообразных, можно записать S в виде одного интеграла:

$$S = \int_{-1}^{2}((x+3)-(x^2+1))\,dx =$$

$$= \int_{-1}^{2}(x+2-x^2)\,dx = \left(\frac{x^2}{2}+2x-\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_{-1}^{2} = 4{,}5. \triangleleft$$

Вообще, площадь фигуры, изображённой на рисунке 162, равна

$$S = \int_{a}^{b}(f_2(x) - f_1(x))\,dx. \qquad (1)$$

Эта формула справедлива для любых непрерывных функций $f_1(x)$ и $f_2(x)$ (принимающих значения любых знаков), удовлетворяющих условию $f_2(x) \geqslant f_1(x)$.

Задача 5 Найти площадь S фигуры, ограниченной параболами $y = x^2$ и $y = 2x^2 - 1$.

▶ Построим данную фигуру (рис. 163) и найдём абсциссы точек пересечения парабол из уравнения $x^2 = 2x^2 - 1$.

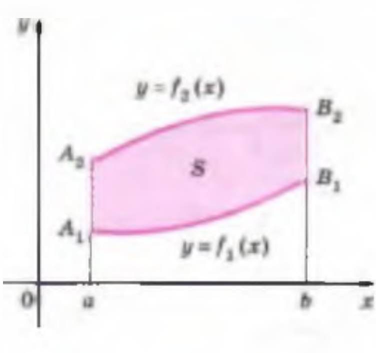


Рис. 162

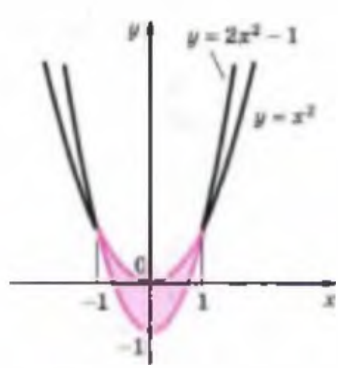


Рис. 163

Это уравнение имеет корни $x_{1,2} = \pm 1$. Воспользуемся формулой (1). Здесь $f_1(x) = 2x^2 - 1$, $f_2(x) = x^2$.

$$S = \int_{-1}^{1} (x^2 - (2x^2 - 1))\,dx = \int_{-1}^{1} (-x^2 + 1)\,dx =$$

$$= \left(-\frac{x^3}{3} + x\right)\Bigg|_{-1}^{1} = \frac{4}{3}. \triangleleft$$

Упражнения

1013 На рисунке 164 изображены криволинейные трапеции. Найти площадь каждой из них.

Найти площадь фигуры, ограниченной заданными линиями (1014—1023).

1014 1) Параболой $y = (x + 1)^2$, прямой $y = 1 - x$ и осью Ox;
2) параболой $y = 4 - x^2$, прямой $y = x + 2$ и осью Ox;
3) параболой $y = 4x - x^2$, прямой $y = 4 - x$ и осью Ox;
4) параболой $y = 3x^2$, прямой $y = 1{,}5x + 4{,}5$ и осью Ox.

1015 1) Графиками функций $y = \sqrt{x}$, $y = (x - 2)^2$ и осью Ox;
2) графиками функций $y = x^3$, $y = 2x - x^2$ и осью Ox.

1016 1) Параболой $y = x^2 + 3x$ и осью Ox;
2) параболой $y = x^2 - 4x + 3$ и осью Ox.

1017 1) Параболой $y = x^2 + 1$ и прямой $y = 3 - x$;
2) параболой $y = (x + 2)^2$ и прямой $y = x + 2$;
3) графиком функции $y = \sqrt{x}$ и прямой $y = x$.

1018 1) Параболами $y = 6x^2$, $y = (x - 3)(x - 4)$ и осью Ox;
2) параболами $y = 4 - x^2$, $y = (x - 2)^2$ и осью Ox.

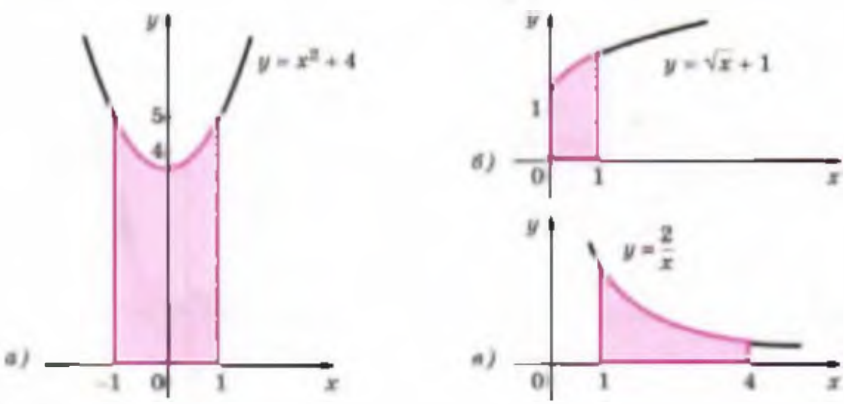


Рис. 164

1019 1) Графиком функции $y = \sin x$, отрезком $[0; \pi]$ оси Ox и прямой, проходящей через точки $(0; 0)$ и $\left(\frac{\pi}{2}; 1\right)$;

2) графиками функций $y = \sin x$, $y = \cos x$ и отрезком $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ оси Ox.

1020 1) Параболой $y = 6x - x^2$ и прямой $y = x + 4$;
2) параболой $y = 4 - x^2$ и прямой $y = x + 2$.

1021 1) Параболой $y = 2 - x^2$ и прямой $y = -x$;
2) прямой $y = 1$, осью Oy и графиком функции $y = \sin x$ при $0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}$.

1022 1) Параболой $y = -x^2 + 4x - 3$ и прямой, проходящей через точки $(1; 0)$ и $(0; -3)$;
2) параболой $y = -x^2$ и прямой $y = -2$;
3) параболами $y = 1 - x^2$ и $y = x^2 - 1$;
4) графиком функции $y = x^3$ и прямыми $y = 1$, $x = -2$.

1023 1) Параболой $y = x^2 + 10$ и касательными к этой параболе, проведёнными из точки $(0; 1)$;

2) гиперболой $y = \frac{1}{x}$, прямой $x = 1$ и касательной к кривой $y = \frac{1}{x}$ в точке с абсциссой $x = 2$.

1024 Фигура ограничена линиями $y = x^2 + 1$, $y = 0$, $x = 0$, $x = 1$. Найти точку $(x_0; y_0)$ графика функции $y = x^2 + 1$, через которую надо провести касательную к этому графику так, чтобы она отсекала от фигуры трапецию наибольшей площади.

§ 59* Применение производной и интеграла к решению практических задач

1. Простейшие дифференциальные уравнения. До сих пор рассматривались уравнения, в которых неизвестными являлись числа. В математике и её приложениях приходится рассматривать уравнения, в которых неизвестными являются функции.

Так, задача о нахождении пути $s(t)$ по заданной скорости $v(t)$ сводится к решению уравнения $s'(t) = v(t)$, где $v(t)$ — заданная функция, а $s(t)$ — искомая функция.

Например, если $v(t) = 3 - 4t$, то для нахождения $s(t)$ нужно решить уравнение $s'(t) = 3 - 4t$. Это уравнение содержит производную неизвестной функции. Такие уравнения называют *дифференциальными уравнениями*.

Задача 1 Решить дифференциальное уравнение $y' = x + 1$.

▶ Требуется найти функцию $y(x)$, производная которой равна $x + 1$, т. е. найти первообразную функции $x + 1$. По правилам нахождения первообразных получаем $y = \frac{x^2}{2} + x + C$, где C — произвольная постоянная. ◁

Решение дифференциального уравнения определяется неоднозначно, с точностью до постоянной. Обычно к дифференциальному уравнению добавляется условие, из которого эта постоянная определяется.

Задача 2 Найти решение $y(x)$ дифференциального уравнения $y' = \cos x$, удовлетворяющее условию $y(0) = 2$.

▶ Все решения этого уравнения записываются формулой $y(x) = \sin x + C$. Из условия $y(0) = 2$ находим $\sin 0 + C = 2$, откуда $C = 2$.

Ответ $y = 2 + \sin x$. ◁

Решение многих физических, биологических, технических и других практических задач сводится к решению дифференциального уравнения

$$y' = ky, \tag{1}$$

где k — заданное число. Решениями этого уравнения являются функции

$$y = Ce^{kx}, \tag{2}$$

где C — постоянная, определяемая условиями конкретной задачи.

Например, скорость $m'(t)$ размножения бактерий связана с массой $m(t)$ бактерий в момент времени t уравнением

$$m'(t) = km(t),$$

где k — положительное число, зависящее от вида бактерий и внешних условий. Решениями этого уравнения являются функции

$$m(t) = Ce^{kt}.$$

Постоянную C можно найти, например, из условия, что в момент $t = 0$ масса m_0 бактерий известна. Тогда $m(0) = m_0 = Ce^{k \cdot 0} = C$, и поэтому

$$m(t) = m_0 e^{kt}.$$

Другим примером применения уравнения (1) является задача о радиоактивном распаде вещества. Если $m'(t)$ — скорость радиоактивного распада в момент времени t, то $m'(t) = -km(t)$, где k — постоянная, зависящая от радиоактивности вещества. Решениями этого уравнения являются функции

$$m(t) = Ce^{-kt}.$$

Если в момент времени t масса равна m_0, то $C = m_0$, и поэтому

$$m(t) = m_0 e^{-kt}. \tag{3}$$

Заметим, что на практике скорость распада радиоактивного вещества характеризуется периодом полураспада, т. е. промежутком времени, в течение которого распадается половина исходного вещества. Пусть T — период полураспада, тогда из равенства (3) при $t = T$ получаем $\frac{m_0}{2} = m_0 e^{-kT}$, откуда $k = \frac{\ln 2}{T}$. Поэтому формула (3) запишется так:

$$m(t) = m_0 \cdot 2^{-\frac{t}{T}}.$$

2. Гармонические колебания.

В практике часто встречаются процессы, которые периодически повторяются, например колебательные движения маятника, струны, пружины и т. д.; процессы, связанные с переменным электрическим током, магнитным полем, и т. д. Решение многих таких задач сводится к решению дифференциального уравнения

$$y'' = -\omega^2 y, \tag{4}$$

где ω — заданное положительное число, $y = y(x)$, $y'' = (y'(x))'$. Решениями уравнения (4) являются функции

$$y(x) = C_1 \sin(\omega x + C_2), \tag{5}$$

где C_1, C_2 — постоянные, определяемые условиями конкретной задачи. Уравнение (4) называют *дифференциальным уравнением гармонических колебаний.*

Например, если $y(t)$ — отклонение точки свободно колеблющейся струны от положения равновесия в момент времени t, то

$$y(t) = A \sin(\omega t + \varphi),$$

где A — амплитуда колебания, ω — частота, φ — начальная фаза.

Графиком гармонического колебания является синусоида.

3. Примеры применения первообразной и интеграла.

Задача 3 Цилиндрический бак, высота которого равна 5 м, а радиус основания равен 0,8 м, заполнен водой (рис. 165). За какое время вытечет вода из бака через круглое отверстие в дне бака, если радиус отверстия равен 0,1 м?

▶ Обозначим высоту бака H, радиус его основания R, радиус отверстия r (длины измеряем в метрах, время — в секундах).

Скорость вытекания жидкости v зависит от высоты столба жидкости x и вычисляется по формуле Бернулли

$$v = \sigma\sqrt{2gx}, \qquad (6)$$

где $g = 9{,}8$, σ — коэффициент, зависящий от свойства жидкости; для воды $\sigma = 0{,}6$. Поэтому по мере убывания воды в баке скорость вытекания уменьшается (а не постоянна).

Пусть $t(x)$ — время, за которое вытекает вода из бака высотой x с тем же радиусом основания R и с тем же отверстием радиуса r (рис. 165). Найдём приближенно разностное отношение $\frac{t(x+h)-t(x)}{h}$, считая, что за время $t_1 = t(x+h) - t(x)$ скорость вытекания воды постоянна и выражается формулой (6). За время t_1 объём воды, вытекшей из бака, равен объему цилиндра высотой h с радиусом основания R (рис. 165), т. е. равен $\pi R^2 h$. С другой стороны, этот объём равен объёму цилиндра, основанием которого служит отверстие в дне бака, а высота равна произведению скорости вытекания v на время t_1, т. е. объём равен $\pi r^2 v t_1$. Таким обра-

Рис. 165

зом, $\pi R^2 h = \pi r^2 v t_1$. Отсюда, учитывая формулу (6) и обозначение $t_1 = t(x+h) - t(x)$, получаем

$$\frac{t(x+h)-t(x)}{h} \sim \frac{R^2}{r^2\sigma\sqrt{2g}} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}},$$

причём погрешность приближения стремится к нулю при $h \to 0$. Следовательно, при $h \to 0$ получается равенство

$$t'(x) = \frac{R^2}{r^2\sigma\sqrt{2g}} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}},$$

откуда

$$t(x) = \frac{R^2}{r^2\sigma\sqrt{2g}} \cdot 2\sqrt{x} + C.$$

Если $x = 0$ (в баке нет воды), то $t(0) = 0$, поэтому $C = 0$. При $x = H$ находим искомое время

$$t(H) = \frac{R^2\sqrt{2H}}{r^2\sigma\sqrt{g}}.$$

Используя данные задачи, вычисляем

$$t(5) = \frac{(0,8)^2 \cdot \sqrt{10}}{(0,1)^2 \cdot 0,6 \cdot \sqrt{9,8}} \approx 108.$$

Ответ 108 с. ◁

Задача 4 Вычислить работу силы F при сжатии пружины на 0,08 м, если для её сжатия на 0,01 м требуется сила 10 Н.

▶ По закону Гука сила F пропорциональна растяжению или сжатию пружины, т. е. $F = kx$, где x — величина растяжения или сжатия (в м), k — постоянная. Из условия задачи находим k. Так как при $x = 0,01$ м сила $F = 10$ Н, то $k = \frac{F}{x} = 1000$.

Следовательно, $F(x) = kx = 1000x$.
Работа силы $F(x)$ при перемещении тела из точки a в точку b равна $A = \int_a^b F(x)\,dx$.

Используя данные задачи, получаем

$$A = \int_0^{0,08} 1000x\,dx = 1000\,\frac{x^2}{2}\Bigg|_0^{0,08} = 3,2 \text{ (Дж)}. \ ◁$$

Упражнения

1025 Тело движется прямолинейно со скоростью $v(t)$ (м/с). Вычислить путь, пройденный телом за промежуток времени от $t = t_1$ до $t = t_2$:

1) $v(t) = 3t^2 + 1$, $t_1 = 0$, $t_2 = 4$;
2) $v(t) = 2t^2 + t$, $t_1 = 1$, $t_2 = 3$.

1026 Скорость прямолинейно движущегося тела равна $v(t) = 4t - t^2$. Вычислить путь, пройденный телом от начала движения до остановки.

1027 Решить дифференциальное уравнение:

1) $y' = 3 - 4x$;   2) $y' = 6x^2 - 8x + 1$;
3) $y' = 3e^{2x}$;   4) $y' = 4\cos 2x$;
5) $y' = 3\sin x$;   6) $y' = \cos x - \sin x$.

1028 Найти решение дифференциального уравнения, удовлетворяющее данному условию:

1) $y' = \sin x$, $y(0) = 0$;
2) $y' = 2\cos x$, $y(\pi) = 1$;
3) $y' = 3x^2 + 4x - 1$, $y(1) = -2$;
4) $y' = 2 + 2x - 3x^2$, $y(-1) = 2$;
5) $y' = e^x$, $y(1) = 1$;
6) $y' = e^{-x}$, $y(0) = 2$.

1029 Показать, что функция $y = C_1\cos\omega x + C_2\sin\omega x$ при любых значениях C_1 и C_2 является решением дифференциального уравнения $y'' + \omega^2 y = 0$.

1030 Масса радия, равная 1 г, через 10 лет уменьшилась до 0,999 г. Через сколько лет масса радия уменьшится до 0,5 г?

1031 Вычислить работу, которую нужно затратить при сжатии пружины на 3 см, если сила в 2 Н сжимает эту пружину на 1 см.

1032 Вычислить работу, которую нужно затратить при растяжении пружины на 8 см, если сила в 3 Н растягивает пружину на 1 см.

Упражнения к главе X

1033 Для функции $f(x)$ найти первообразную, график которой проходит через точку M:

1) $f(x) = \cos x$, $M(0; -2)$;
2) $f(x) = \sin x$, $M(-\pi; 0)$;
3) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$, $M(4; 5)$;
4) $f(x) = e^x$, $M(0; 2)$;
5) $f(x) = 3x^2 + 1$, $M(1; -2)$;
6) $f(x) = 2 - 2x$, $M(2; 3)$.

1034 Вычислить интеграл:

1) $\int_{-1}^{2} 2\,dx$;
2) $\int_{-2}^{2} (3 - x)\,dx$;
3) $\int_{1}^{3} (x^2 - 2x)\,dx$;
4) $\int_{-1}^{1} (2x - 3x^2)\,dx$;
5) $\int_{1}^{8} \sqrt[3]{x}\,dx$;
6) $\int_{1}^{2} \frac{dx}{x^2}$;
7) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x\,dx$.

1035 Найти площадь фигуры, ограниченной линиями:

1) $y = \sqrt{x}$, $x = 1$, $x = 4$, $y = 0$;
2) $y = \cos x$, $x = 0$, $x = \frac{\pi}{3}$, $y = 0$;
3) $y = x^2$, $y = 2 - x$;
4) $y = 2x^2$, $y = 0{,}5x + 1{,}5$.

Проверь себя!

1 Показать, что функция $F(x) = e^{2x} + x^3 - \cos x$ является первообразной для функции $f(x) = 2e^{2x} + 3x^2 + \sin x$ на всей числовой прямой.

2 Для функции $f(x) = 3x^2 + 2x - 3$ найти первообразную, график которой проходит через точку $M(1; -2)$.

3 Вычислить:

1) $\int_{1}^{2} 3x^3\,dx$;
2) $\int_{2}^{6} \frac{dx}{x^2}$;
3) $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \cos x\,dx$;
4) $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin 2x\,dx$.

4 Найти площадь фигуры, ограниченной:

1) параболой $y = x^2 + x - 6$ и осью Ox;
2) графиками функций $y = x^2 + 1$ и $y = 10$.

Вычислить интеграл **(1036—1037).**

1036 1) $\int\limits_0^1 (5x^4 - 8x^3)\,dx$; 2) $\int\limits_{-1}^2 (6x^3 - 5x)\,dx$;

3) $\int\limits_1^4 \sqrt{x}\left(3 - \frac{7}{x}\right)dx$; 4) $\int\limits_1^8 4\sqrt[3]{x}\left(1 - \frac{4}{x}\right)dx$;

5) $\int\limits_0^3 \sqrt{x+1}\,dx$; 6) $\int\limits_2^6 \sqrt{2x-3}\,dx$.

1037 1) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2}\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)dx$; 2) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{1}{3}\sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right)dx$;

3) $\int\limits_1^3 3\sin(3x - 6)\,dx$; 4) $\int\limits_0^{\pi} 8\cos(4x - 12)\,dx$.

Найти площадь фигуры, ограниченной линиями **(1038—1039).**

1038 1) $y = \frac{1}{x}$, $y = 4x$, $x = 1$, $y = 0$;

2) $y = \frac{1}{x^2}$, $y = x$, $x = 2$, $y = 0$;

3) $y = x^2 + 1$, $y = x + 1$;

4) $y = x^2 + 2$, $y = 2x + 2$.

1039 1) $y = x^2 - 6x + 9$, $y = x^2 + 4x + 4$, $y = 0$;

2) $y = x^2 + 1$, $y = 3 - x^2$;

3) $y = x^2$, $y = 2\sqrt{2x}$;

4) $y = \sqrt{x}$, $y = \sqrt{4 - 3x}$, $y = 0$.

1040 Найти площадь фигуры, ограниченной:

1) параболой $y = x^2 - 2x + 2$, касательной к ней, проходящей через точку пересечения параболы с осью Oy, и прямой $x = 1$;

2) гиперболой $y = \frac{4}{x}$, касательной к ней, проходящей через точку с абсциссой $x = 2$, и прямыми $y = 0$, $x = 6$.

1041 Найти площадь фигуры, ограниченной линиями:

1) $y = x^3 - 3x^2 - 9x + 1$, $x = 0$, $y = 6$ (при $x < 0$);

2) $y = x^4 - 2x^2 + 5$, $y = 1$, $x = 0$, $x = 1$.

1042 При каком значении k площадь фигуры, ограниченной параболой $y = x^2 + px$, где p — заданное число, и прямой $y = kx + 1$, наименьшая?

XI
глава

Комбинаторика

В нашу современную жизнь вторгается математика с её особым стилем мышления, становящимся сейчас обязательным и для инженера, и для биолога.

Б. В. Гнеденко

§ 60 Правило произведения

В курсе алгебры основной школы решались элементарные комбинаторные задачи, связанные с составлением различных соединений (комбинаций) из имеющихся элементов. Было сформулировано *правило произведения*, упрощающее в ряде случаев подсчёт числа соединений определённого вида. Напомним его.

Если существует n вариантов выбора первого элемента и для каждого из них имеется m вариантов выбора второго элемента, то всего существует $n \cdot m$ различных пар с выбранными таким образом первым и вторым элементами.

Задача 1 Сколько различных двузначных чисел можно записать с помощью цифр 0, 1, 2, 3?

▷ В качестве первой цифры может быть выбрана любая из цифр 1, 2, 3 (т. е. $n = 3$). Второй цифрой может быть выбрана любая из четырёх данных цифр 0, 1, 2, 3 (т. е. $m = 4$). Согласно правилу произведения число всевозможных двузначных чисел, составленных с помощью предложенных цифр, равно $n \cdot m = 3 \cdot 4 = 12$.

Ответ 12. ◁

Задача 2 Сколько различных трёхзначных чисел можно записать с помощью цифр 0, 1, 2, 3?

▶ При решении задачи 1 было установлено, что с помощью цифр 0, 1, 2 и 3 можно записать 12 различных двузначных чисел. К каждому из них можно приписать любую из четырёх имеющихся цифр, получая тем самым различные трёхзначные числа. Таким образом, согласно правилу произведения существует $12 \cdot 4 = 48$ различных трёхзначных чисел, записанных с помощью данных цифр.

Ответ 48. ◁

При решении задачи 2 фактически дважды использовалось правило произведения. Действительно, первую цифру числа можно было выбрать 3 способами, вторую к ней присоединить — любым из 4 способов, третью цифру к каждому образованному двузначному числу можно было приписать 4 способами. Всего трёхзначных чисел с помощью данных цифр можно образовать $(3 \cdot 4) \cdot 4 = 48$ способами. Таким образом, правило произведения может быть применено неоднократно для подсчёта числа соединений из трёх, четырёх и т. д. элементов, выбираемых из определённых множеств с конечным числом элементов.

Задача 3 Сколько различных пятибуквенных *слов* можно записать с помощью букв «и» и «л»? (*Словом* в комбинаторике называют любую последовательность букв; среди составленных из данных букв *слов* только слово «лилии» имеет смысл в русском языке.)

▶ Каждая из пяти букв составляемого *слова* последовательно выбирается из предложенных двух букв. Применив 4 раза правило произведения, найдём число всевозможных пятибуквенных *слов*, составленных из двух данных букв:

$$2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^5 = 32.$$

Ответ 32. ◁

Упражнения

1043 Сколько различных двузначных чисел с разными цифрами можно записать, используя цифры:

1) 1, 2 и 3; 2) 4, 5 и 6; 3) 5, 6, 7 и 8;
4) 6, 7, 8 и 9; 5) 0, 2, 4 и 6; 6) 0, 3, 5 и 7?

1044 Сколько различных трёхзначных чисел можно записать с помощью цифр:

1) 2 и 3; 2) 8 и 9; 3) 0 и 2; 4) 0 и 5?

1045 Сколько различных трёхзначных чисел, не имеющих одинаковых цифр, можно записать с помощью цифр:

1) 3, 4 и 5; 2) 7, 8 и 9; 3) 5, 6, 7 и 8; 4) 1, 2, 3 и 4?

1046 Сколько различных четырёхбуквенных *слов* можно записать с помощью букв:

1) «м» и «а»; 2) «п» и «а»; 3) «к», «а» и «о»; 4) «ш», «а» и «л»?

1047 Путешественник может попасть из пункта A в пункт C, проехав через пункт B. Между пунктами A и B имеются три различные дороги, а между пунктами B и C — четыре различные дороги. Сколько существует различных маршрутов между пунктами A и C?

1048 Чтобы попасть из города M в город K, нужно проехать через город N. Между городами M и N имеются четыре автодороги, а из города N в город K можно попасть либо поездом, либо самолетом. Сколько существует различных способов добраться из города M в город K?

1049 Сколькими способами могут распределиться золотая и серебряная медали на чемпионате по футболу, если в нём принимают участие:

1) 32 команды; 2) 16 команд?

1050 Сколькими способами можно составить расписание 5 уроков на один день из 5 различных учебных предметов?

1051 Сколькими способами можно составить расписание 6 уроков из 6 разных учебных предметов?

1052 Сколькими способами могут занять очередь в школьный буфет:

1) 6 учащихся; 2) 5 учащихся?

1053 В классе 18 учащихся. Из их числа нужно выбрать физорга, культорга и казначея. Сколькими способами это можно сделать, если один ученик может занимать не более одной должности?

1054 В классе 20 учащихся. Необходимо назначить по одному дежурному в столовую, вестибюль и спортивный зал. Сколькими способами это можно сделать?

1055 Сколько различных шифров можно набрать в автоматической камере хранения, если шифр составляется с помощью:

1) любой из 10 гласных букв с последующим трёхзначным

числовым кодом; 2) любой из 8 согласных букв «к», «л», «м», «н», «п», «р», «с», «т» с последующим четырёхзначным числовым кодом (нуль в коде может стоять и на первом месте)?

1056 Сколько существует пятизначных чисел, в которых все цифры, стоящие на нечётных местах, различны?

1057 Сколько существует шестизначных чисел, в которых все цифры, стоящие на чётных местах, различны?

1058 Сколько нечётных: 1) трёхзначных; 2) четырёхзначных чисел можно записать с помощью цифр 0, 1, 2, 3, 4, 5, если любую из них можно использовать в записи числа не более одного раза?

§ 61 Перестановки

Задача 1 Сколькими способами можно поставить рядом на полке 4 различные книги?

▶ На первое место можно поставить любую из четырёх книг, на второе — любую из трёх оставшихся, на третье — любую из двух оставшихся и на четвёртое место — последнюю оставшуюся книгу. Применяя последовательно правило произведения, получим $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$.

Ответ Книги можно поставить 24 способами. ◀

В этой задаче фактически было найдено число всевозможных соединений из четырёх элементов, которые отличались одно от другого порядком расположения этих элементов. Такие соединения называют перестановками.

Определение. *Перестановками из n элементов* называются соединения, которые состоят из одних и тех же n элементов и отличаются одно от другого только порядком их расположения.

Число перестановок из n элементов обозначают P_n (P — первая буква французского слова *permutation* — перестановка) и читают «пэ энное».

В задаче 1 было найдено $P_4 = 24$.

Последовательно применяя правило произведения, можно получить формулу числа перестановок P_n из n различных элементов:

$$P_n = n\,(n-1)\,(n-2)\cdot\ldots\cdot 3\cdot 2\cdot 1,$$
$$P_n = 1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot(n-2)\,(n-1)\,n.$$

Произведение первых n натуральных чисел обозначают $n!$ (читается «эн факториал»), т. е. $n! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot(n-1)\cdot n$, причём по определению $1! = 1$. Таким образом,

$$P_n = n! \qquad (1)$$

Задача 2 Сколькими способами можно положить 6 различных открыток в 6 имеющихся конвертов (по одной открытке в конверт)?

▶ Задача сводится к нахождению числа перестановок из 6 элементов. По формуле (1) находим: $P_6 = 6! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6 = 720$.

Ответ 720 способами. ◁

Упражнения

1059 Найти значение:

1) P_5; 2) P_7; 3) P_9; 4) P_8.

1060 Сколькими способами можно рассадить четверых детей на четырёх стульях в столовой детского сада?

1061 Сколькими способами могут занять места 5 учащихся класса за пятью одноместными партами?

1062 Сколькими способами можно установить дежурство по одному человеку в день:

1) среди семи учащихся класса в течение 7 дней;
2) среди девяти учащихся класса в течение 9 дней?

1063 Сколько различных пятизначных чисел, не содержащих одинаковых цифр, можно записать с помощью цифр 1, 2, 3, 4, 5 так, чтобы:

1) последней была цифра 3;
2) первой была цифра 4;
3) первой была цифра 5, а второй — цифра 1;
4) первой была цифра 2, а последней — цифра 4;

5) первыми были цифры 3 и 4, расположенные в любом порядке;

6) последними были цифры 1 и 2, расположенные в любом порядке?

1064 Упростить форму записи выражений (полагая, что k — натуральное число, $k > 4$):

1) $6! \cdot 7$; 2) $10! \cdot 11$; 3) $15 \cdot 14!$; 4) $12 \cdot 11!$;
5) $k!\,(k+1)$; 6) $(k-1)!\,k$; 7) $(k-1)!\,k\,(k+1)$;
8) $(k-2)!\,(k-1) \cdot k$; 9) $(k-4)!\,(k^2-5k+6)$;
10) $(k-3)!\,(k^2-3k+2)$.

1065 Найти значение выражения:

1) $\frac{26!}{25!}$; 2) $\frac{32!}{31!}$; 3) $\frac{12!}{10!}$; 4) $\frac{14!}{12!}$;
5) $\frac{5! \cdot 3!}{7!}$; 6) $\frac{6! \cdot 4!}{8!}$; 7) $\frac{10!}{8! \cdot 3!}$; 8) $\frac{11!}{9! \cdot 2!}$.

1066 Упростить выражение (буквами n и m обозначены натуральные числа):

1) $\frac{P_{n+1}}{P_n}$; 2) $\frac{P_{n+2}}{P_{n+1}}$; 3) $\frac{m!\,(m+1)}{(m+2)!}$; 4) $\frac{(m+3)!}{(m+1)!\,(m+2)}$.

1067 Решить уравнение относительно n:

1) $\frac{P_n}{P_{n+1}} = \frac{1}{4}$; 2) $\frac{P_{n+2}}{P_{n+1}} = 5$;

3) $\frac{P_n}{P_{n-2}} = 20$; 4) $\frac{P_{n-1}}{P_{n+1}} = \frac{1}{12}$.

1068 Сколько различных *слов* можно составить, переставляя местами буквы в слове: 1) гипотенуза; 2) треугольник?

1069 Сколько различных шестизначных чисел, не содержащих одинаковых цифр и кратных 5, можно записать с помощью цифр 1, 2, 3, 4, 5 и 6?

1070 Сколько различных шестизначных чисел, не содержащих одинаковых цифр и кратных 4, можно записать с помощью цифр 1, 3, 5, 6, 7 и 9?

1071 Имеются 8 книг, среди которых: 1) 6 книг различных авторов и двухтомник одного автора, книг которого не было среди предыдущих шести книг; 2) 5 книг различных пяти авторов и трёхтомник шестого автора. Сколькими способами можно расставить эти книги на полке так, чтобы книги одного автора стояли рядом?

§ 62 Размещения

Задача 1 Сколько различных двузначных чисел можно записать с помощью цифр 1, 2, 3, 4 при условии, что в каждой записи нет одинаковых цифр?

▶ Перебором убедимся в том, что из четырёх цифр 1, 2, 3, 4 можно составить 12 двузначных чисел, удовлетворяющих условию:

12, 13, 14,
21, 23, 24,
31, 32, 34,
41, 42, 43.

В записи двузначного числа на первом месте может стоять любая из данных четырёх цифр, а на втором — любая из трёх оставшихся. По правилу произведения таких двузначных чисел $4 \cdot 3 = 12$.

Ответ 12. ◁

При решении задачи 1 из четырёх данных элементов (цифр 1, 2, 3, 4) были образованы всевозможные соединения по два элемента в каждом, причём любые два соединения отличались либо составом элементов (например, 12 и 24), либо порядком их расположения (например, 12 и 21). Такие соединения называют размещениями.

Определение. *Размещениями из m элементов по n элементов* ($n \leqslant m$) называются такие соединения, каждое из которых содержит n элементов, взятых из данных m разных элементов, и которые отличаются одно от другого либо самими элементами, либо порядком их расположения.

Число всевозможных размещений из m элементов по n элементов обозначают A_m^n и читают «А из эм по эн». Так, например, при решении задачи 1 было установлено, что $A_4^2 = 12$.

Выведем формулу для вычисления A_m^n — числа размещений из m элементов по n элементов.

● Пусть имеется m различных элементов. Тогда число размещений, состоящих из одного элемента, выбранного из имеющихся m элементов, равно m, т. е. $A_m^1 = m$.

Чтобы составить все размещения из m элементов по 2, к каждому из ранее образованных размещений из m элементов по 1 будем последовательно присоединять по одному из оставшихся $(m-1)$ элементов. По правилу произведения число таких соединений равно $A_m^1 \cdot (m-1)$. Таким образом, $A_m^2 = m(m-1)$.

Для составления всех размещений из m по 3 к каждому из ранее полученных размещений из m элементов по 2 присоединим по очереди по одному из оставшихся $(m-2)$ элементов. По правилу произведения число таких соединений равно $A_m^2 \cdot (m-2)$, т. е. $A_m^3 = m(m-1)(m-2)$.

Последовательно применяя правило произведения, для любого $n \leqslant m$ получаем

$$A_m^n = m(m-1)(m-2) \cdot \ldots \cdot (m-(n-1)). \ \bigcirc \qquad (1)$$

Например, $A_4^2 = 4 \cdot 3 = 12$; $A_4^3 = 4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$; $A_5^3 = 5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$.

Отметим, что правая часть формулы (1) содержит произведение n последовательных натуральных чисел, наибольшее из которых равно m. Пусть в формуле (1) $m = n$. Тогда

$$A_n^n = n(n-1)(n-2) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1 = P_n,$$

т. е. число размещений из n элементов по n равно числу перестановок из этих элементов:

$$A_n^n = P_n. \qquad (2)$$

Задача 2 Сколькими способами можно обозначить данный вектор, используя буквы A, B, C, D, E, F?

▶ В условии задачи даны 6 букв. Для обозначения вектора используются 2 буквы, причём порядок записи этих букв в обозначении имеет значение. Поэтому задача сводится к нахождению числа размещений из 6 по 2. Находим $A_6^2 = 6 \cdot 5 = 30$.

Ответ 30 способами. ◁

Задача 3 Решить уравнение $A_n^2 = 56$.

▶ Отметим, что $n \geqslant 2$ и $n \in N$. По формуле (1) имеем $A_n^2 = n(n-1) = n^2 - n$, т. е. $n^2 - n = 56$, откуда $n^2 - n - 56 = 0$ и $n_1 = 8$, $n_2 = -7$. Так как корнем заданного уравнения может быть натуральное число $n \geqslant 2$, то $n = -7$ — посторонний корень.

Ответ $n = 8$. ◁

Преобразуем формулу (1) для нахождения числа размещений A_m^n.

● Запишем формулу (1) следующим образом:

$$A_m^n = (m - n + 1)(m - n + 2) \cdot \ldots \cdot (m - 1)\, m.$$

Умножив обе части этого равенства на $(m - n)! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (m - n)$, получим

$$(m - n)! \cdot A_m^n = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \times$$
$$\times (m - n)(m - n + 1)(m - n + 2) \cdot \ldots \cdot (m - 1)\, m,$$

т. е. $(m - n)! \cdot A_m^n = m!$, откуда

$$A_m^n = \frac{m!}{(m-n)!}. \bigcirc \qquad (3)$$

Для того чтобы формула (3) была справедлива не только для $n < m$, но и для $n = m$ (так как имеет смысл $A_m^m = P_m = m!$), полагают по определению $0! = 1$.

Задача 4 Вычислить: $\dfrac{A_{20}^7 + A_{20}^6}{A_{20}^5}$.

▶ Используя формулу (3), находим

$$\frac{A_{20}^7 + A_{20}^6}{A_{20}^5} = \frac{\dfrac{20!}{13!} + \dfrac{20!}{14!}}{\dfrac{20!}{15!}} = \frac{15!}{13!} + \frac{15!}{14!} =$$
$$= 14 \cdot 15 + 15 = 15(14 + 1) = 225.$$

Ответ 225. ◁

Упражнения

1072 Вычислить:

1) A_6^1; 2) A_5^1; 3) A_5^2; 4) A_6^2;
5) A_4^2; 6) A_6^6; 7) A_{10}^3; 8) A_8^3.

1073 В классе изучают 8 предметов естественно-математического цикла. Сколькими способами можно составить расписание на пятницу, если в этот день должны быть:
1) 5 уроков из пяти разных предметов этого цикла;
2) 6 уроков из шести разных предметов этого цикла.

1074 Сколько существует способов для обозначения с помощью букв A, B, C, D, E, F вершин данного:
1) четырёхугольника; 2) треугольника?

1075 В классе 20 человек. Сколькими способами из их числа можно сделать назначение: 1) физорга и культорга; 2) физорга, культорга и казначея?

1076 Найти значение выражения:

1) $\frac{A_{15}^{9} - A_{15}^{8}}{A_{15}^{7}}$; 2) $\frac{A_{18}^{10} + A_{18}^{11}}{A_{18}^{9}}$; 3) $\frac{A_{9}^{4} \cdot A_{4}^{4}}{A_{9}^{6}}$; 4) $\frac{A_{5}^{5} \cdot A_{10}^{3}}{A_{7}^{7}}$.

1077 Решить относительно m уравнение:

1) $A_m^2 = 72$; 2) $A_m^2 = 56$; 3) $A_m^3 = 12m$;

4) $A_m^3 = 20m$; 5) $A_{m+1}^2 = 110$; 6) $A_{m+2}^2 = 90$;

7) $A_m^5 = 18A_{m-2}^4$; 8) $(m - 4) \cdot A_m^4 = 21\,(m - 5) \cdot A_{m-2}^3$.

1078 Упростить выражение:

1) $\frac{A_{10}^{n} \cdot P_{10-n}}{P_{9}}$, где $n \leqslant 9$; 2) $\frac{P_{13}}{A_{13}^{n} \cdot P_{13-n}}$, где $n \leqslant 13$.

1079 В шахматном турнире участвуют:

1) 6 юношей и 2 девушки; 2) 5 юношей и 3 девушки. Сколькими способами могут распределиться места среди девушек, если все участники турнира набирают разное количество очков.

§ 63 Сочетания и их свойства

Задача 1 Покупатель из имеющихся в питомнике 10 саженцев хочет выбрать 2. Сколькими способами он может это сделать?

▶ Пусть x — число всевозможных пар саженцев, выбираемых из 10 имеющихся. Если бы в выбираемой паре был важен порядок расположения саженцев, то таких пар было бы в 2 раза больше числа x, т. е. $2x$. Но число упорядоченных пар из любых элементов, выбираемых из 10 имеющихся различных элементов, равно A_{10}^2. Таким образом, $2x = A_{10}^2$, т. е. $2x = 90$, откуда $x = 45$.

Ответ 45 способами. ◀

При решении этой задачи из 10 саженцев были образованы пары — соединения по 2 саженца, которые отличались друг от друга только составом. Такие соединения называют сочетаниями.

Определение. ***Сочетаниями из m элементов по n в каждом*** **($n \leqslant m$) называются соединения, каждое из которых содержит n элементов, взятых из данных m разных элементов, и которые отличаются одно от другого по крайней мере одним элементом.**

Число всевозможных сочетаний из m различных элементов по n элементов обозначают C_m^n (C — первая буква французского слова *combinaison* — сочетание) и читают «це из эм по эн». При решении задачи 1 было установлено, что $C_{10}^2 = 45$.

Выведем формулу для подсчёта числа сочетаний из m различных элементов по n элементов в каждом.

Образуем все соединения, содержащие n элементов, выбранных из данных m разных элементов, без учёта порядка их расположения. Число таких соединений равно C_m^n.

Из каждого полученного соединения перестановками его элементов можно образовать $P_n = n!$ соединений, отличающихся одно от другого только порядком расположения элементов. Тем самым получим все размещения из m элементов по n, число которых равно A_m^n. По правилу произведения число таких соединений равно $C_m^n \cdot P_n$. Итак, $C_m^n \cdot P_n = A_m^n$, откуда

$$C_m^n = \frac{A_m^n}{P_n}. \qquad (1)$$

Например, $C_5^3 = \dfrac{A_5^3}{P_3} = \dfrac{5 \cdot 4 \cdot 3}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 10$.

Заметим, что если $m = n$, то $C_n^n = \dfrac{A_n^n}{P_n} = \dfrac{P_n}{P_n} = 1$.

Учитывая, что $A_m^n = \dfrac{m!}{(m-n)!}$ при $m \geqslant n$ и $P_n = n!$, формулу (1) можно представить в виде

$$C_m^n = \frac{m!}{(m-n)! \cdot n!}, \qquad (2)$$

где $m \geqslant n$.

Например, $C_7^4 = \dfrac{7!}{(7-4)! \cdot 4!} = \dfrac{5 \cdot 6 \cdot 7}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 35$.

Задача 2 Сколько существует способов выбора двух карт из колоды в 36 карт?

▶ Изымаемые из колоды всевозможные пары карт без учёта порядка их расположения в наборе образуют сочетания из 36 по 2. По формуле (2) находим

$$C_{36}^{2}=\frac{36!}{(36-2)!\cdot 2!}=\frac{36!}{34!\cdot 2!}=\frac{35\cdot 36}{2}=35\cdot 18=630.$$

Ответ 630 способов. ◁

Рассмотрим два свойства сочетаний, которые в ряде случаев упрощают вычисления при решении задач.

Свойство 1. $C_m^n=C_m^{m-n}$.

● По формуле (2) имеем

$$C_m^n=\frac{m!}{(m-n)!\cdot n!},$$

$$C_m^{m-n}=\frac{m!}{(m-(m-n))!\cdot(m-n)!}=\frac{m!}{n!\cdot(m-n)!},$$

т. е. $C_m^n=C_m^{m-n}$. ○

Свойство 2 (рекуррентное свойство).

$$C_m^n+C_m^{n+1}=C_{m+1}^{n+1}.$$

● Воспользуемся соотношением (1):

$$C_m^n+C_m^{n+1}=\frac{A_m^n}{P_n}+\frac{A_m^{n+1}}{P_{n+1}}=$$

$$=\frac{m(m-1)\dots(m-(n-1))}{n!}+\frac{m(m-1)\dots(m-(n-1))(m-n)}{(n+1)!}=$$

$$=\frac{m(m-1)\dots(m-(n-1))(n+1)+m(m-1)\dots(m-(n-1))(m-n)}{(n+1)!}=$$

$$=\frac{m(m-1)\dots(m-(n-1))(\cancel{n}+1+m-\cancel{n})}{(n+1)!}=$$

$$=\frac{(m+1)m(m-1)\dots(m-(n-1))}{(n+1)!}=\frac{A_{m+1}^{n+1}}{P_{n+1}}=C_{m+1}^{n+1}.\ ○$$

Задача 3 Найти значение выражения $C_{20}^{18}+C_{20}^{19}$.

▶ Воспользуемся свойством 2, получим $C_{20}^{18}+C_{20}^{19}=$ $=C_{21}^{19}$. По формуле (2) имеем

$$C_{21}^{19}=\frac{21!}{(21-19)!\cdot 19!}=\frac{21!}{2!\cdot 19!}=\frac{20\cdot 21}{2}=210.$$

Ответ 210. ◁

Упражнения

1080 Найти значение:

1) C_7^1; 2) C_4^1; 3) C_8^2; 4) C_7^2;

5) C_7^3; 6) C_8^3; 7) C_8^8; 8) C_{10}^9;

9) C_{15}^{15}; 10) C_{12}^{12}; 11) C_{30}^0; 12) C_{40}^0;

13) C_{50}^{48}; 14) C_{40}^{38}; 15) C_{10}^2; 16) C_{60}^2.

1081 Сколькими способами для участия в конференции из 9 членов научного общества можно выбрать:
1) троих студентов; 2) четверых студентов?

1082 Сколько различных аккордов, содержащих: 1) 4 звука; 2) 3 звука, можно образовать из 12 клавиш одной октавы?

1083 В помещении 16 ламп. Сколько существует вариантов его освещения, если одновременно должны светиться: 1) 15 ламп; 2) 14 ламп?

1084 На плоскости отмечено: 1) 16 точек; 2) 13 точек, причём никакие 3 из них не лежат на одной прямой. Сколько различных отрезков можно построить, соединяя эти точки попарно?

1085 На окружности отмечено: 1) 10 точек; 2) 12 точек. Сколько различных треугольников с вершинами, выбранными из этих точек, можно построить?

1086 На окружности отмечено: 1) 7 точек; 2) 8 точек. Сколько различных выпуклых четырёхугольников с вершинами, выбранными из этих точек, можно построить?

1087 Из колоды карт, содержащей 36 листов, выбирают: 1) 3 карты бубновой масти и одну карту трефовой масти; 2) одну карту пиковой масти и две карты червовой масти. Сколькими способами можно осуществить такой выбор?

1088 Имеются 5 тюльпанов и 6 нарциссов. Сколькими способами можно составить букет: 1) из 3 тюльпанов и 2 нарциссов; 2) из 2 тюльпанов и 3 нарциссов?

1089 В школьном хоре 7 девочек и 4 мальчика. Сколькими способами из состава хора можно выбрать для участия в районном смотре: 1) 5 девочек и 2 мальчиков; 2) 4 девочек и 3 мальчиков?

1090 Найти значение выражения, предварительно его упростив:

1) $C_{13}^{10}+C_{13}^{11}$; 2) $C_{14}^{12}+C_{14}^{13}$; 3) $C_{19}^4-C_{18}^4$;

4) $C_{21}^3-C_{20}^3$; 5) $C_{61}^3-C_{60}^2$; 6) $C_{71}^3-C_{70}^2$.

1091 Решить уравнение:

1) $C_{x+1}^2+C_{x+1}^3=7x$; 2) $C_{x-1}^1+C_{x-1}^2=4(x-1)$;

3) $C_x^3=\frac{4}{15}C_{x+2}^4$; 4) $5C_x^3=C_{x+2}^4$;

5) $C_{2x-1}^{3x-1}=120$; 6) $C_{2x+1}^{2x-1}=36$.

§ 64 Бином Ньютона

В теории многочленов часто двучлены называют *биномами*. Рассмотрим целые неотрицательные степени бинома $a + b$ (при условии $a + b \neq 0$):

$(a + b)^0 = 1,$
$(a + b)^1 = 1 \cdot a + 1 \cdot b,$
$(a + b)^2 = 1 \cdot a^2 + 2ab + 1 \cdot b^2,$
$(a + b)^3 = 1 \cdot a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + 1 \cdot b^3,$
$(a + b)^4 = (a + b)^3 (a + b) =$
$= 1 \cdot a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + 1 \cdot b^4,$
$(a + b)^5 = (a + b)^4 (a + b) =$
$= 1 \cdot a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + 1 \cdot b^5$
и т. д.

Можно доказать справедливость следующей формулы, называемой биномиальной формулой Ньютона:

$$(a + b)^m = C_m^0 \cdot a^m + C_m^1 \cdot a^{m-1}b + \\ + C_m^2 \cdot a^{m-2}b^2 + \ldots + C_m^n \cdot a^{m-n}b^n + \ldots + \\ + C_m^{m-1} \cdot ab^{m-1} + C_m^m \cdot b^m. \qquad (1)$$

Формулу (1) чаще всего называют просто *биномом Ньютона*, а числа C_m^n — *биномиальными коэффициентами*, которые могут быть найдены по формуле

$$C_m^n = \frac{m!}{(m-n)!\,n!}.$$

Биномиальные коэффициенты легко находить с помощью так называемого *треугольника Паскаля* — таблицы значений C_m^n, составленной на основании рекуррентного свойства числа сочетаний $C_m^n + C_m^{n+1} = C_{m+1}^{n+1}$ с учётом того, что $C_m^0 = C_m^m = 1$.

Ниже приводится фрагмент треугольника Паскаля, в котором стрелками показан процесс получения определённых членов таблицы на основании рекуррентного свойства. Например, при $m = 4$ имеем строку 1, 4, 6, 4, 1, полученную из предыдущей строки следующим образом: $4 = 1 + 3$, $6 = 3 + 3$, $4 = 3 + 1$ (первый и последний члены строки равны $C_4^0 = C_4^4 = 1$).

m \ n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	1										
1	1	1									
2	1	2	1								
3	1	3	3	1							
4	1	4	6	4	1						
5	1	5	10	10	5	1					
6	1	6	15	20	15	6	1				
7	1	7	21	35	35	21	7	1			
8	1	8	28	56	70	56	28	7	1		
9	1	9	36	84	126	126	84	36	9	1	
10	1	10	45	120	210	252	210	120	45	10	1

Эта таблица наглядно иллюстрирует свойство 1 числа сочетаний $C_m^n = C_m^{m-n}$, которое можно сформулировать так: числа, одинаково удалённые от концов строки треугольника Паскаля, равны.

Задача 1 Записать разложение бинома $(x-2)^6$.

▶ По формуле (1) находим

$$(x-2)^6 = (x+(-2))^6 =$$
$$= C_6^0x^6 + C_6^1x^5\cdot(-2) + C_6^2x^4\cdot(-2)^2 + C_6^3x^3\cdot(-2)^3 +$$
$$+ C_6^4x^2\cdot(-2)^4 + C_6^5x\cdot(-2)^5 + C_6^6\cdot(-2)^6 =$$
$$= x^6 + 6x^5\cdot(-2) + 15x^4\cdot 4 + 20x^3\cdot(-8) +$$
$$+ 15x^2\cdot 16 + 6x\cdot(-32) + 64 =$$
$$= x^6 - 12x^5 + 60x^4 - 160x^3 + 240x^2 - 192x + 64. \triangleleft$$

Заметим, что при записи разложения степени бинома полезно контролировать следующие моменты: 1) число членов получаемого многочлена на единицу больше показателя m степени бинома, т. е. равно $m+1$;

2) показатели степени первого слагаемого бинома последовательно убывают на единицу от m до 0, а показатели второго последовательно возрастают на единицу от 0 до m;

3) биномиальные коэффициенты, равноудалённые от начала и конца разложения по формуле (1), равны между собой.

Задача 2 Доказать свойство элементов строки треугольника Паскаля:

$$C_m^0 + C_m^1 + C_m^2 + \ldots + C_m^{m-1} + C_m^m = 2^m. \qquad (2)$$

▶ Равенство (2) получается из равенства (1) при $a = b = 1$. ◁

Задача 3* Найти член разложения $\left(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^{10}$, содержащий x^2.

▶ $\left(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^{10} = \left(x^{\frac{1}{2}} + x^{-\frac{1}{2}}\right)^{10}$. Общий член разложения десятой степени бинома $x^{\frac{1}{2}} + x^{-\frac{1}{2}}$ имеет вид $C_{10}^n \left(x^{\frac{1}{2}}\right)^{10-n} \cdot \left(x^{-\frac{1}{2}}\right)^n$. Для того чтобы некоторый член этого разложения содержал x^2, должно выполняться равенство

$$\left(x^{\frac{1}{2}}\right)^{10-n} \cdot \left(x^{-\frac{1}{2}}\right)^n = x^2. \qquad (3)$$

Но $\left(x^{\frac{1}{2}}\right)^{10-n} \cdot \left(x^{-\frac{1}{2}}\right)^n = x^{5-\frac{n}{2}} \cdot x^{-\frac{n}{2}} = x^{5-n}$. Равенство (3) выполняется при $5 - n = 2$, т. е. при $n = 3$. При $n = 3$ имеем $C_{10}^3 = 120$.

Ответ $120x^2$. ◁

Упражнения

1092 Записать разложение бинома:

1) $(1 + x)^6$; 2) $(x + 1)^7$; 3) $(a - 1)^9$; 4) $(y - 1)^{10}$;
5) $(2x + 1)^5$; 6) $(x + 2)^6$; 7) $(3x + 2)^4$; 8) $(2a + 3)^5$;
9) $\left(2a - \frac{1}{2}\right)^5$; 10) $\left(3x - \frac{1}{3}\right)^4$.

1093 Записать разложение бинома:

1) $\left(1 + \sqrt{2}\right)^6$; 2) $\left(1 + \sqrt{3}\right)^5$; 3) $\left(a - \frac{1}{3a}\right)^7$; 4) $\left(b - \frac{1}{2b}\right)^6$.

1094 Найти четвёртый член разложения бинома:

1) $\left(\sqrt{x}+x\right)^{12}$; 2) $\left(x-\sqrt{x}\right)^{14}$; 3) $\left(x-\frac{1}{x}\right)^{12}$;

4) $\left(\frac{1}{x}+x\right)^{11}$; 5) $\left(a^{0,1}+a^{0,2}\right)^{9}$; 6) $\left(b^{0,3}+b^{0,4}\right)^{8}$.

1095 С помощью свойства элементов строки треугольника Паскаля найти сумму:

1) $C_7^0+C_7^1+C_7^2+C_7^3+C_7^4+C_7^5+C_7^6+C_7^7$;

2) $C_6^6+C_6^5+C_6^4+C_6^3+C_6^2+C_6^0$;

3) $C_6^1+C_6^2+C_6^3+C_6^4+C_6^5$;

4) $C_7^6+C_7^5+C_7^4+C_7^3+C_7^2+C_7^1$;

5) $C_9^0+C_9^1+C_9^2+C_9^3+C_9^4$;

6) $C_{11}^5+C_{11}^4+C_{11}^3+C_{11}^2+C_{11}^1+C_{11}^0$.

1096 Найти член разложения бинома:

1) $\left(\sqrt[3]{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^{12}$, содержащий x^{-1};

2) $\left(\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)^{16}$, содержащий x^{3}.

Упражнения к главе XI

1097 Вычислить:

1) $\frac{7!-5!}{5!}$; 2) $\frac{6!-4!}{5!}$; 3) $\frac{149!}{148!}-\frac{36!}{35!}$;

4) $\frac{97!}{96!}+\frac{35!}{34!}$; 5) $\frac{4!\cdot 8!}{6!\cdot 7!}$; 6) $\frac{9!\cdot 5!}{7!\cdot 6!}$.

1098 Упростить:

1) $\frac{(n+3)!}{(n+1)!}$; 2) $\frac{(n+2)!}{(n-1)!}$;

3) $\left(\frac{1}{(n+1)!}+\frac{1}{n!}\right)\cdot n!$; 4) $\left(\frac{1}{n!}-\frac{1}{(n+1)!}\right)\cdot n!$;

5) $\left(\frac{1}{n!}-\frac{1}{(n+2)!}\right)\cdot(n+1)!$; 6) $\left(\frac{1}{(n+2)!}+\frac{1}{n!}\right)\cdot(n+1)!$.

1099 Найти значение выражения:

1) $\frac{A_7^4}{P_4}$; 2) $\frac{A_6^3}{P_3}$; 3) $\left(\frac{C_{11}^7}{10} - \frac{C_7^3}{5}\right)\cdot\frac{P_5}{A_6^4}$; 4) $\left(\frac{C_{10}^7}{3} + \frac{C_8^2}{6}\right)\cdot\frac{P_4}{A_5^4}$.

1100 Решить уравнение:

1) $\frac{P_{x+1}}{P_{x-1}} = 30$; 2) $\frac{P_x}{P_{x-2}} = 42$; 3) $\frac{1}{P_{x-5}} = \frac{56}{P_{x-3}}$;

4) $\frac{1}{P_{x-4}} = \frac{110}{P_{x-2}}$; 5) $A^3_{x+1} = 72\,(x-1)$;

6) $A^4_{x-1} = 40\,(x-2)\,(x-3)$;

7) $5C^3_{n+1} = 8C^4_n$; 8) $C^3_n = 4C^2_{n-2}$.

1101 Сколькими способами можно составить график очерёдности дежурства (по одному человеку в день) в школьной столовой среди: 1) восьми учащихся на восемь дней; 2) семи учащихся на семь дней?

1102 Сколько существует способов выбора троих учёных из числа: 1) десяти; 2) девяти сотрудников кафедры?

1103 Сколькими способами могут распределиться одно первое, одно второе и одно третье места среди: 1) десяти; 2) восьми участников соревнования?

1104 Сколькими способами можно рассадить: 1) четверых; 2) троих учащихся на имеющихся в классе 20 стульях?

1105 Найти значение выражения, предварительно его упростив:

1) $C^{10}_{12} + C^{11}_{12}$; 2) $C^9_{11} + C^{10}_{11}$; 3) $C^6_8 + C^7_8 + C^8_9$; 4) $C^5_9 + C^6_9 + C^7_{10}$.

1106 Записать разложение бинома:

1) $(2-x)^5$; 2) $(x-2)^4$; 3) $(a+3)^4$;

4) $(3+a)^6$; 5) $(x-1)^6$; 6) $(1-x)^7$;

7) $\left(x+\frac{1}{x}\right)^6$; 8) $\left(2a+\frac{1}{2}\right)^6$.

Проверь себя!

1 В вазе лежат 7 разных пирожных. Сколько существует вариантов выбора из них двух пирожных?

2 Сколькими способами можно подарить 6 различных по окраске мячей шести малышам, вручая каждому по одному мячу?

3 Сколько существует способов занять 3 одноместные парты в первом ряду класса, если в выборе мест участвуют 22 школьника?

4 Найти значение выражения $\frac{C_8^3\cdot P_3}{A_7^4}$.

5 Записать разложение бинома $(1-x)^6$.

1107 Сколькими способами можно назначить патруль из двух солдат и одного офицера, если в роте:

1) 75 солдат и 6 офицеров; 2) 78 солдат и 5 офицеров?

1108 Сколько диагоналей имеет выпуклый:

1) семиугольник; 2) восьмиугольник?

1109 Найти значение выражения, предварительно его упростив:

1) $C_4^1 + C_4^2 + C_4^3 + C_4^4$; 2) $C_5^1 + C_5^2 + C_5^3 + C_5^4$;

3) $C_7^0 + C_7^7 + C_7^1 + C_7^6 + C_7^2 + C_7^5 + C_7^3 + C_7^4$;

4) $C_6^0 + C_6^6 + C_6^1 + C_6^5 + C_6^2 + C_6^4 + C_6^3$;

5) $C_{12}^2 + C_{12}^3 + C_{13}^4 + C_{14}^5$; 6) $C_9^3 + C_9^4 + C_{10}^5 + C_{11}^6$;

7) $C_{21}^7 - C_{20}^7$; 8) $C_{15}^9 - C_{14}^9$; 9) $C_{15}^{10} - C_{14}^9$; 10) $C_{13}^8 - C_{12}^7$.

1110 Сколькими способами из колоды в 36 карт можно выбрать:

1) две карты чёрвой масти; 2) две карты червовой масти?

1111 Шифр в камере хранения состоит из двух букв, выбираемых из 10 гласных русского алфавита, и четырёхзначного числового кода (буквы и цифры в шифре могут повторяться; числовой код 0000 также возможен). Сколько различных шифров можно использовать в этой камере хранения?

1112 В некотором государстве автомобильный номер составляется из трёх различных букв алфавита, состоящего из 25 букв, и трёх цифр (с их возможными повторами). Скольким автомобилям можно присвоить получаемые таким образом номера?

1113 Записать разложение бинома:

1) $(3a + 1)^5$; 2) $(x + 3)^6$; 3) $\left(x - \frac{1}{2}\right)^7$; 4) $\left(\frac{a}{3} - 1\right)^5$;

5) $(10x - 0,1)^6$; 6) $(0,1b - 10)^7$; 7) $\left(\frac{2}{a} + \frac{a}{2}\right)^7$; 8) $\left(\frac{2}{c} + \frac{c}{2}\right)^8$.

1114 Найти член разложения бинома:

1) $\left(\sqrt[3]{x} + \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)^{15}$, содержащий $x^{\frac{1}{3}}$;

2) $\left(\frac{1}{\sqrt{x}} + \sqrt{x}\right)^{14}$, содержащий x^2;

3) $\left(\frac{1}{\sqrt[4]{x}} + \sqrt[3]{x}\right)^{16}$, содержащий, $x^{\frac{13}{12}}$;

4) $\left(\sqrt[6]{x} + \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)^{18}$, содержащий $x^{-0,6}$.

XII

глава

Элементы теории вероятностей

Высшее назначение математики... состоит в том, чтобы находить скрытый порядок в хаосе, который нас окружает.

Н. Винер

§ 65 События

Всё, что происходит или не происходит в реальной действительности, называют явлениями или *событиями*. Практика показывает, что если некоторое событие происходит достаточно часто, то в его наступлении существует определённая закономерность.

Раздел математики, называемый *теорией вероятностей*, и занимается исследованием закономерностей в массовых явлениях.

Определение 1. Событие называют *случайным* по отношению к некоторому испытанию (опыту), если в ходе этого испытания оно может произойти, а может и не произойти.

Например, если испытание состоит в одном бросании игральной кости (кубика), то в ходе этого испытания возможны следующие события (*исходы* испытания): на верхней грани кости окажется число 1, число 2, ..., число 6. Каждое из этих событий является случайным, так как оно может произойти, а может и не произойти.

Случайные события обычно обозначаются начальными буквами латинского алфавита A, B, C и др.

Определение 2. Событие U называют *достоверным* по отношению к некоторому испытанию, если в ходе этого испытания событие U обязательно произойдёт.

Например, достоверным событием будет появление одного из шести чисел 1, 2, 3, 4, 5, 6 при одном бросании игральной кости.

Если испытание заключается в извлечении одного шара из коробки, в которой лежат только белые шары, то извлечение белого шара будет достоверным событием.

Определение 3. Событие V называют *невозможным* по отношению к некоторому испытанию, если в ходе этого испытания событие V заведомо не произойдёт.

Например, невозможным событием является выпадение числа 7 при бросании обычного игрального кубика.

Предположим, что в результате некоторого испытания обязательно происходит одно из взаимоисключающих друг друга событий, причём каждое из них не разделяется на более простые. Такие события называют *элементарными событиями* (или *элементарными исходными* испытаниями).

Например:

1) в испытании с бросанием игрального кубика существует шесть элементарных исходов: выпадение числа 1, выпадение числа 2, ..., выпадение числа 6;

2) при бросании монеты существует два элементарных события: появление орла и появление решки;

3) при изъятии одного шара из коробки, в которой находятся два белых и один чёрный шар, существует три элементарных исхода: изъятие любого из двух белых шаров и изъятие чёрного шара;

4) при одном бросании канцелярской кнопки существуют два элементарных исхода испытания: падение кнопки с касанием острия поверхности, на которую она падает, и падение плашмя — без касания острия поверхности падения.

Рассмотренные в каждом из примеров события *несовместны* (появление одного из них исключает появление другого) и *единственно возможны* (обязательно произойдёт одно из них). Однако в первых трёх примерах элементарные события являются *равновозможными* (у каждого из них шансы появиться равны), а в четвёртом примере (для большинства реальных кнопок) шансы названных двух событий различны.

Заметим, что на практике равновозможность событий иногда удаётся определить из соображений симметрии.

Кроме элементарных событий, в теории вероятностей рассматриваются и более сложные события. Например, при бросании игрального кубика может быть рассмотрено событие A — появление чётного числа, которое «распадается» на 3 элементарных события (появление числа 2, 4 или 6).

Упражнения

1115 (Устно.) Каким событием (достоверным, невозможным или случайным) является событие:

1) изъятая из колоды одна карта оказалась семёркой треф;

2) при комнатной температуре и нормальном атмосферном давлении медь оказалась в жидком состоянии;

3) при температуре 20 °С и нормальном атмосферном давлении вода оказалась в жидком состоянии;

4) наугад названное натуральное число оказалось больше нуля;

5) вынутый наудачу цветок из букета гвоздик оказался розой;

6) в результате броска игрального кубика появилось число 5?

1116 (Устно.) Перечислить все элементарные события, которые могут произойти в результате следующего испытания:

1) бросается на стол игральный кубик и определяется число очков, появившееся на верхней грани (грани, противоположной той, которая лежит на плоскости стола);

2) на поверхность стола бросается игральный тетраэдр (грани которого пронумерованы числами 1, 2, 3, 4) и определяется число на той грани, которая лежит на поверхности стола;

3) бросается на пол монета и определяется видимая сторона;

4) на пол роняют усечённый конус, выточенный из дерева, и определяют геометрическую фигуру, по которой упавший конус касается пола;

5) из всех карт одной масти (взятых из колоды с 36 листами) случайным образом выбирается одна карта и определяется изображение на ней;

6) из коробки, в которой лежат 5 шаров пяти различных цветов, извлекается один шар и называется его цвет.

Высказать предположение о том, являются ли перечисленные элементарные события равновозможными.

1117 (Устно.) Выяснить, являются ли события A и B несовместными, если:

1) A — появление туза, B — появление дамы в результате одного изъятия одной карты из колоды карт;

2) A — появление туза, B — появление карты бубновой масти в результате одного изъятия одной карты из колоды;

3) A — выпадение числа 6, B — выпадение чётного числа при одном бросании игральной кости;

4) A — выпадение числа 4, B — выпадение нечётного числа в результате одного броска игральной кости.

§ 66 Комбинации событий. Противоположное событие

Пусть в определенном испытании могут произойти события A и B. Рассмотрим некоторые комбинации этих событий.

Определение 1. *Суммой (объединением)* событий A и B называется событие, которое состоит в том, что происходит хотя бы одно из данных событий. Сумму событий A и B обозначают $A + B$ (или $A \cup B$).

На рисунке 166 с помощью кругов Эйлера проиллюстрировано понятие суммы событий A и B: большой круг изображает все элементарные события, которые могут произойти в рассматриваемом испытании, левый круг изображает событие A, правый — событие B, а закрашенная область — событие $A + B$.

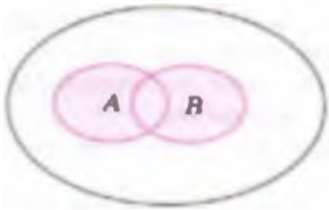


Рис. 166

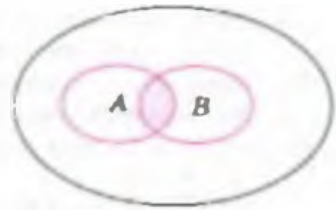


Рис. 167

Допустим, испытание состоит в определении числа на верхней грани игрального кубика после одного броска, при этом событие A — выпало чётное число, событие B — выпало число, кратное трём. Тогда событие $A + B$ состоит в том, что на верхней грани кубика появится либо чётное, либо кратное трём (либо чётное, кратное трём) число, т. е. событие $A + B$ означает, что появится одно из чисел 2, 3, 4, 6.

Определение 2. ***Произведением*** (***пересечением***) **событий A и B называется событие, которое состоит в том, что происходят оба этих события. Произведение событий A и B обозначают AB (или $A \cap B$).**

Рисунок 167 иллюстрирует с помощью кругов Эйлера произведение событий A и B: закрашенная область (общая часть кругов A и B) иллюстрирует событие AB.

Например, если событие A — выпадение чётного числа, а событие B — выпадение числа, кратного 3, в результате одного броска игрального кубика, то событие AB — выпадение чётного числа, кратного 3 (такое число одно — это 6).

Задача 1 Из колоды карт наугад вынимают одну карту и рассматривают два события: A — вынута карта пиковой масти, B — вынут король. Описать события $A + B$ и AB.

Ответ Событие $A + B$ — вынута карта пиковой масти или вынут король; событие AB — из колоды вынут король пиковой масти.

Определение 3. **События A и B называют** ***равными*** (***равносильными***) **и пишут $A = B$, если событие A происходит тогда и только тогда, когда происходит событие B.**

Например, если в испытании с одним бросанием игрального кубика событие A — выпало число 6, а событие B — выпало наибольшее из возможных чисел, то $A = B$.

Рассмотрим события A и $\bar{A}$ (читается «а с чертой»), связанные с одним испытанием.

Определение 4. Событие $\bar{A}$ называют ***противоположным*** событию A, если событие $\bar{A}$ происходит тогда и только тогда, когда не происходит событие A.

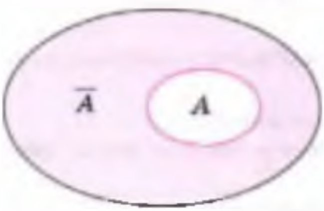


Рис. 168

Например, если событие A — выпадение чётного числа при бросании игральной кости, то $\bar{A}$ — выпадение нечётного числа; если A — попадание по мишени при одном выстреле, то $\bar{A}$ — непопадание (промах).

На рисунке 168 проиллюстрирована взаимосвязь событий A и $\bar{A}$ на множестве всех элементарных исходов испытания (событие $\bar{A}$ изображено закрашенной областью).

Задача 2 Пусть A и B — произвольные события. Записать с помощью введённых обозначений следующие события:

1) A_1 — произошли оба события;

2) A_2 — ни одно из двух событий A и B не произошло;

3) A_3 — произошло только событие A;

4) A_4 — произошло по крайней мере одно из событий A и B;

5)* A_5 — произошло либо только событие A, либо только событие B.

▶ 1) $A_1 = AB$; 2) $A_2 = \bar{A}\bar{B}$;

3) $A_3 = A\bar{B}$; 4) $A_4 = A + B$;

5) $A_5 = A\bar{B} + \bar{A}B$. ◁

Упражнения

1118 (Устно.) Из колоды карт вынимается одна карта. Пусть событие A — изъятие из колоды карты с картинкой, B — изъятие карты червовой масти. Пояснить, в чём заключается событие $A + B$; AB.

1119 Двадцать карточек пронумерованы числами от 1 до 20. Произвольно из них выбирается одна карточка. Пусть событие A — на карточке записано число, кратное 4; событие B — на карточке записано число, кратное 6. Выяснить, в чём состоят события $A + B$ и AB.

1120 (Устно.) Испытание состоит из двух выстрелов по мишени. Событие A — попадание по мишени при первом выстреле, B — попадание при втором выстреле. Пояснить, в чём состоят события $A + B$ и AB.

1121 На стол бросают две игральные кости. Событие A — на первой кости выпало число 5, B — на второй кости выпало число, не меньшее пяти. Установить, в чём заключаются события $A + B$ и AB.

1122 (Устно.) Установить событие, являющееся противоположным событию:

1) при одном броске монеты выпала решка;

2) в результате броска игральной кости выпало число, равное двум;

3) в результате броска игральной кости выпало число, большее четырех;

4) в результате броска игральной кости выпало число, не большее трёх;

5) из колоды карт изъята карта бубновой масти;

6) из колоды карт извлечена шестёрка;

7) хотя бы одна пуля попала в цель в испытании с тремя выстрелами по мишени;

8) хотя бы на одной из двух брошенных игральных костей появилось число 6;

9) в расписании уроков на понедельник первым уроком поставлена физика;

10) при сдаче экзамена студент получил оценку «отлично».

1123 Пусть C и D — произвольные события. Записать следующие события:

1) произошли оба данных события;

2) произошло только событие C;

3) произошло только событие D;

4) ни одно из данных событий не произошло;

5) произошло, по крайней мере, одно из данных двух событий;

6)* произошло только одно из данных событий.

§ 67 Вероятность события

Пусть событие A связано с испытанием, имеющим n равновозможных элементарных исходов. И пусть событие A наступает тогда, когда осуществляется любой из m каких-то элементарных исходов ($m \leqslant n$), и не наступает тогда, когда осуществляется любой из оставшихся $(n - m)$ исходов. Тогда говорят, что указанные m исходов, приводящие к событию A, *благоприятствуют* событию A.

Определение. ***Вероятностью*** **$P(A)$ события A в испытании с равновозможными элементарными исходами называется отношение числа исходов m, благоприятствующих событию A, к числу n всех исходов испытания.**

Таким образом,

$$P(A) = \frac{m}{n}, \text{ где } m \leqslant n. \qquad (1)$$

Заметим, что вероятность наступления каждого элементарного события в испытании с n равновозможными исходами равна $\frac{1}{n}$. Так, например, появление любого из шести чисел 1, 2, 3, 4, 5, 6 после одного бросания игрального кубика имеет вероятность $\frac{1}{6}$.

Из формулы (1) следует, что

$$0 \leqslant P(A) \leqslant 1,$$

а также

$$P(V) = 0, \ P(U) = 1,$$

где V — невозможное событие; U — достоверное событие.

Задача 1 Бросают игральную кость. Найти вероятность события: 1) A_1 — выпало чётное число; 2) A_2 — выпало число, кратное 3.

▶ Число всех возможных элементарных исходов испытания $n = 6$.

1) Событию A_1 благоприятствуют 3 исхода (числа 2, 4 и 6), т. е. $m = 3$, поэтому $P(A_1) = \frac{m}{n} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$.

2) Событию A_2 благоприятствуют 2 исхода (числа 3 и 6), т. е. $m = 2$, поэтому $P(A_2) = \frac{m}{n} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$.

Ответ 1) $\frac{1}{2}$; 2) $\frac{1}{3}$. ◁

Задача 2 Бросают две монеты. Найти вероятность события A — хотя бы на одной монете выпал орёл.

▶ Обозначим появление орла на выпавшей монете буквой «О», а появление решки — буквой «Р». Тогда равновозможны следующие четыре ($n = 4$) элементарных исхода испытания: ОО, ОР, РО, РР (в каждой паре на первом месте записан результат появления орла или решки на первой монете, на втором месте — на второй монете). Событию A благоприятствуют первые 3 пары исходов ($m = 3$). Поэтому $P(A) = \frac{m}{n} = \frac{3}{4}$.

Ответ $\frac{3}{4}$. ◁

Задача 3 Игральная кость бросается дважды. Найти вероятность события A — сумма выпавших очков не меньше 10.

▶ Результаты двух бросаний игральной кости — равновозможные упорядоченные пары чисел, выбираемых из чисел 1, 2, 3, 4, 5 и 6. Согласно комбинаторному правилу произведения число таких пар равно $6 \cdot 6 = 36$. Событию A благоприятствуют следующие 6 пар: 4 и 6, 6 и 4, 5 и 5, 5 и 6, 6 и 5, 6 и 6. Таким образом, $P(A) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$.

Ответ $\frac{1}{6}$. ◁

Задача 4 В ящике лежат 3 белых и 4 чёрных одинаковых на ощупь шаров. Наугад вынимают 2 шара. Найти вероятность события: 1) A — оба вынутых шара белого цвета; 2) B — вынуты шары разного цвета.

▶ Общее число возможных исходов испытания $n = C_7^2 = \frac{7!}{5! \cdot 2!} = 21$.

1) Число благоприятствующих событию A исходов $m = C_3^2 = \frac{3!}{1! \cdot 2!} = 3$, поэтому $P(A) = \frac{m}{n} = \frac{3}{21} = \frac{1}{7}$.

2) Так как любой из 3 белых шаров может комбинироваться с любым из 4 чёрных шаров, то по правилу произведения существует $3 \cdot 4 = 12$ пар из белого и чёрного шаров, т. е. $m = 12$. Таким образом, $P(B) = \frac{12}{21} = \frac{4}{7}$.

Ответ 1) $\frac{1}{7}$; 2) $\frac{4}{7}$. ◁

Упражнения

1124 (Устно.) Какова вероятность выпадения числа: 1) 2; 2) 5 в результате одного бросания игрального кубика?

1125 Какова вероятность того, что при изъятии одной карты из колоды в 36 листов игрок вынет: 1) даму треф; 2) короля пик; 3) валета красной масти; 4) семёрку чёрной масти; 5) шестёрку; 6) туза; 7) или даму, или валета; 8) или восьмёрку, или девятку; 9) или короля червовой масти, или даму любой масти; 10) или валета любой масти, или туза пик; 11) не короля треф; 12) не даму?

1126 Какова вероятность того, что на открытом наугад листе отрывного календаря на январь окажется: 1) 21-е число; 2) 10-е число; 3) 31-е число; 4) 32-е число; 5) число, содержащее в своей записи цифру 0; 6) число, содержащее цифру 4; 7) число, содержащее хотя бы одну цифру 2; 8) число, содержащее хотя бы одну цифру 1?

1127 В коробке находятся 2 белых, 3 чёрных и 4 красных шара. Наугад вынимается один шар. Найти вероятность того, что вынутый шар: 1) белый; 2) чёрный; 3) красный; 4) белый или чёрный; 5) белый или красный; 6) чёрный или красный; 7) или белый, или чёрный, или красный; 8) синий.

1128 В лотерее участвуют 100 билетов, среди которых: 1) 4 выигрышных; 2) 5 выигрышных. Наугад берут один билет. Какова вероятность того, что взятый билет выигрышный?

1129 Брошены две игральные кости. Найти вероятность того, что: 1) на обеих костях выпали числа 6; 2) на обеих костях выпали числа 5; 3) на первой кости выпало число 2, а на второй число 3; 4) на первой кости выпало число 6, а на второй число 1; 5) на первой кости выпало чётное число, а на второй число 3; 6) на первой кости выпало число 2, а на второй нечётное число; 7) на первой кости выпало нечётное число, а на второй чётное число; 8) на первой кости выпало чётное число, а на второй кратное трём; 9) на первой кости выпало число, большее 2, а на второй число, не меньшее 4; 10) на первой кости выпало число, не большее 4, а на второй число, большее 4; 11) сумма выпавших чисел равна 3; 12) сумма выпавших чисел равна 4; 13) сумма выпавших чисел не больше 4; 14) сумма выпавших чисел не меньше 10; 15) произведение выпавших чисел равно 10; 16) произведение выпавших чисел равно 5; 17) произведение выпавших чисел равно 6; 18) произведение выпавших чисел равно 4.

1130 Среди 20 деталей, лежащих в ящике, 3 детали бракованные. Наугад вынимают 2 детали. Какова вероятность того, что: 1) обе детали оказались бракованными; 2) одна деталь бракованная, а другая нет; 3) обе детали не бракованные?

1131 Среди 15 лампочек 4 испорчены. Наугад берут 2 лампочки. Какова вероятность того, что: 1) обе выбранные лампочки испорчены; 2) одна лампочка исправная, а одна — испорченная; 3) обе лампочки исправные?

1132 Брошены 3 игральные кости. Какова вероятность того, что: 1) на каждой кости выпало число 3; 2) выпали одинаковые числа; 3) сумма чисел на всех костях равна 4; 4) произведение всех выпавших чисел равно 2?

1133 Из полного набора домино, не глядя, извлекают две костяшки. Найти вероятность того, что: 1) обе костяшки окажутся дублями; 2) на каждой из костяшек одна половинка будет «пустой».

§ 68 Сложение вероятностей

Напомним, что сумма событий A и B — это событие $A + B$, состоящее в наступлении либо только события A, либо только события B, либо и события A и события B одновременно.

Например, если стрелок сделал 2 выстрела по мишени и событие A — попадание в мишень при первом выстреле, событие B — попадание при втором выстреле, то событие $A + B$ — это попадание стрелком в мишень хотя бы при одном из выстрелов.

Теорема 1. **Вероятность суммы двух несовместных событий равна сумме вероятностей этих событий, т. е.**

$$P(A+B) = P(A) + P(B). \qquad (1)$$

● Пусть событиям A и B, связанным с некоторым испытанием, благоприятствуют соответственно k и l исходов, а всего имеется n равновозможных исходов. Так как события A и B несовместны, то среди n исходов нет таких, которые одновременно благоприятствовали бы как событию A, так и событию B. Поэтому событию $A + B$ будут благоприятствовать $k + l$ исходов.

По определению вероятности

$$P(A) = \frac{k}{n}, \quad P(B) = \frac{l}{n}, \quad P(A+B) = \frac{k+l}{n} = \frac{k}{n} + \frac{l}{n},$$

откуда следует равенство (1). ○

Следствие. Сумма вероятностей противоположных событий равна единице, т. е.

$$P(A) + P(\overline{A}) = 1. \qquad (2)$$

● События A и $\overline{A}$ несовместны, поэтому по теореме 1 имеем $P(A+\overline{A}) = P(A) + P(\overline{A})$. Но $A + \overline{A} = U$ — достоверное событие, и поэтому $P(A+\overline{A}) = P(U) = 1$, т. е. $P(A+\overline{A}) = P(A) + P(\overline{A}) = 1$. ○

Задача 1 В ящике лежат 9 шаров, из которых 2 белых, 3 красных и 4 зелёных. Наугад берётся один шар. Какова вероятность того, что этот шар цветной (не белый)?

▶ **I способ.** Пусть событие A — появление красного шара, событие B — появление зелёного шара, тогда событие $A + B$ — появление цветного шара. Очевидно, что $P(A) = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$, $P(B) = \frac{4}{9}$. Так как события A и B несовместны, к ним применима теорема сложения вероятностей

$$P(A+B) = P(A) + P(B) = \frac{1}{3} + \frac{4}{9} = \frac{7}{9}.$$

II способ. Пусть событие C — появление белого шара, тогда противоположное ему событие $\overline{C}$ — появление не белого (цветного) шара. Очевидно, что $P(C) = \frac{2}{9}$, а согласно следствию из теоремы имеем

$$P(\bar{C}) = 1 - P(C) = 1 - \frac{2}{9} = \frac{7}{9}.$$

Ответ $\frac{7}{9}$. ◁

Задача 2 Вероятность того, что при одном выстреле стрелок попадает в мишень, равна 0,8. Какова вероятность того, что, выстрелив по мишени один раз, этот стрелок промахнётся?

▶ Если событие A — попадание в цель при одном выстреле, то по условию $P(A) = 0{,}8$. Противоположное событию A событие $\bar{A}$ — промах, его вероятность $P(\bar{A}) = 1 - P(A) = 1 - 0{,}8 = 0{,}2$.

Ответ 0,2. ◁

Задача 3 В группе спортсменов 10 лыжников и 7 велосипедистов. Какова вероятность того, что среди случайным образом выбранных из этой группы пятерых человек окажется хотя бы один велосипедист?

▶ Пусть событие A — среди выбранных пятерых человек окажется хотя бы один велосипедист, тогда событие $\bar{A}$ — среди выбранных спортсменов нет ни одного велосипедиста (т. е. все — лыжники). В данном случае вероятность события $\bar{A}$ найти проще, чем $P(A)$. Найдём $P(\bar{A})$.

Число всех способов выбрать из имеющихся 17 спортсменов пятерых равно числу сочетаний из 17 по 5, т. е. $n = C_{17}^5$. Благоприятствующими событию $\bar{A}$ будут все пятерки спортсменов, выбранных из 10 лыжников. Их число $m = C_{10}^5$. Таким образом,

$$P(\bar{A}) = \frac{m}{n} = \frac{C_{10}^5}{C_{17}^5} = \frac{\frac{10!}{5! \cdot 5!}}{\frac{17!}{12! \cdot 5!}} = \frac{10! \cdot 12!}{5! \cdot 17!} =$$

$$= \frac{6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10}{13 \cdot 14 \cdot 15 \cdot 16 \cdot 17} = \frac{9}{221}.$$

Теперь находим $P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 1 - \frac{9}{221} = \frac{212}{221}$.

Ответ $\frac{212}{221}$. ◁

З а м е ч а н и я. 1) Теорема, аналогичная теореме 1, верна для любого конкретного числа событий, т. е.

$$P(A_1 + A_2 + \ldots + A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \ldots + P(A_n),$$

где $A_1, \ldots, A_n$ — попарно несовместные события.

2) Если $A_1, A_2, \dots, A_n$ — все элементарные события некоторого испытания, то их совокупность называют *полем событий*. Очевидно, что эти события попарно несовместны и $A_1 + A_2 + \dots + A_n = U$, где U — достоверное событие.

$$P(U) = P(A_1 + A_2 + \dots + A_n) =$$
$$= P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_n), \text{ но } P(U) = 1,$$

поэтому

$$P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_n) = 1.$$

Упражнения

1134 Из колоды карт (36 листов) наугад вынимается одна карта. Какова вероятность того, что эта карта: 1) либо дама, либо валет; 2) либо шестёрка, либо туз; 3) либо семёрка треф, либо карта бубновой масти; 4) либо туз красной масти, либо карта трефовой масти? Решить задачу двумя способами.

1135 В ящике находятся 3 белых, 4 синих и 5 красных шаров. Наугад вынимают один шар. Какова вероятность того, что этот шар: 1) цветной; 2) либо белый, либо красный; 3) либо белый, либо синий? Решить задачу двумя способами.

1136 В папке находятся 15 билетов спортивной лотереи, 20 билетов художественной лотереи и 30 билетов денежно-вещевой лотереи. Найти вероятность того, что наугад вынутый из этой пачки один билет окажется билетом: 1) либо спортивной, либо денежно-вещевой лотереи; 2) либо спортивной, либо художественной лотереи; 3) либо художественной, либо денежно-вещевой лотереи. Решить задачу двумя способами.

1137 Найти вероятность того, что в результате одного бросания игральной кости выпадет число, отличное от 1.

1138 Найти вероятность того, что наугад вынутая из полного набора домино одна кость окажется не дублем.

1139 Вероятность попадания мяча в корзину, брошенного один раз некоторым баскетболистом, равна 0,4. Найти вероятность того, что, бросив мяч в корзину, этот баскетболист промахнётся.

1140 Вероятность выигрыша по одному билету в некоторой лотерее равна 10^{-5}. Какова вероятность приобретения невыигрышного билета при покупке одного билета?

1141 В коробке лежат 5 белых и 7 чёрных шаров. Наугад вынимают 3 шара. Найти вероятность того, что среди них окажется по крайней мере один: 1) белый шар; 2) чёрный шар.

1142 В коробке лежат 6 белых и 5 красных шаров. Наугад вынимают 4 шара. Найти вероятность того, что среди них окажется по крайней мере один: 1) белый шар; 2) красный шар.

1143 Известно, что среди 100 деталей 5 бракованных. Наугад выбирают 4 детали. Найти вероятность того, что среди них окажется: 1) хотя бы одна бракованная деталь; 2) хотя бы одна не бракованная деталь.

1144 В студенческой группе 24 человека, среди которых только 6 девушек. Случайным образом из числа всех студентов выбирают троих на профсоюзную конференцию. Найти вероятность того, что среди них окажется: 1) по крайней мере одна девушка; 2) по крайней мере один юноша.

§ 69 Независимые события. Умножение вероятностей

Предположим, что из колоды в 36 карт извлекается одна карта и рассматриваются: событие A — извлечена карта трефовой масти, событие B — извлечена дама треф. Между событиями A и B очевидно наличие какой-то *зависимости*. Действительно, из 9 случаев, благоприятствующих событию A, событию B благоприятствует один; поэтому при наступлении события A вероятность события B равна $\frac{1}{9}$. Но при отсутствии информации о наступлении события A вероятность события B оценивается как равная $\frac{1}{36}$. Так как $\frac{1}{9} > \frac{1}{36}$, то очевидно, что наступление события A повышает шансы события B. Существуют, однако, пары событий, для которых факт зависимости вероятности наступления одного из них от наступления другого не очевиден.

Определение. События A и B называют *независимыми*, если выполняется равенство

$$P(AB) = P(A) \cdot P(B). \qquad (1)$$

Рассмотрим опыт с бросанием двух игральных костей и исследуем два события: A — на первой кости выпало 5 очков, B — на второй кости выпало 5 очков. Выясним, будут ли события A и B независимыми.

● Появление любого числа очков на первой кости (в частности, наступление события A) не влияет на событие B и на его вероятность. И наоборот, наступление или не наступление события B не влияет на вероятность события A. Таким образом, $P(A) = \frac{1}{6}$ и $P(B) = \frac{1}{6}$.

Событие AB состоит в совместном наступлении событий A и B. Элементарные исходы испытания — это пары чисел, в которых на первом месте стоит число очков первой кости, на втором — число очков второй кости. Всего элементарных исходов испытания $n = 36$. Среди них присутствует лишь одна пара (5 и 5 очков), благоприятствующая событию AB, т. е. $m = 1$. Таким образом, $P(AB) = \frac{1}{36} = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = P(A) \cdot P(B)$, т. е. события A и B независимые. ○

Часто о независимости событий удается судить не на основании формулы (1), а на основании того, как организован опыт, в котором они происходят. Независимые события появляются тогда, когда опыт состоит из нескольких *независимых испытаний* (как, например, было в рассмотренном опыте с бросанием двух игральных костей).

Если независимость испытаний не очевидна, то независимость событий A и B проверяется с помощью формулы (1).

Задача 1 Выяснить, являются ли события A и B независимыми, если:

1) $P(A) = 0{,}2$, $P(B) = 0{,}5$, $P(AB) = 0{,}1$;

2) $P(A) = \frac{1}{6}$, $P(B) = \frac{2}{3}$, $P(AB) = \frac{2}{9}$.

▶ 1) Так как $P(A) \cdot P(B) = 0{,}2 \cdot 0{,}5 = 0{,}1 = P(AB)$, то события A и B являются независимыми.

2) Так как $P(A) \cdot P(B) = \frac{1}{6} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{9} \neq \frac{2}{9} = P(AB)$, то события A и B не являются независимыми. ◀

Задача 2 Пусть наугад называется одно из первых десяти натуральных чисел и рассматриваются события: A — названо чётное число, B — названо число, кратное пяти. Выяснить являются ли события A и B независимыми.

▶ Среди десяти чисел 1, 2, 3, ..., 9, 10 чётных чисел 5, а кратных пяти — 2, поэтому $P(A) = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$, $P(B) = \frac{2}{10} = \frac{1}{5}$. Событие AB состоит в названии числа, кратного как числу 2, так и числу 5, т. е. числу 10. Среди первых десяти натуральных чисел таким является одно число 10, поэтому $P(AB) = \frac{1}{10}$. Так как $P(A) \cdot P(B) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{5} = \frac{1}{10} = P(AB)$, то события A и B являются независимыми. ◁

Задача 3 За офисом наблюдают две независимые друг от друга видеокамеры. Вероятность того, что в течение суток первая видеокамера выйдет из строя, равна 0,001, а вероятность того, что выйдет из строя вторая, равна 0,0005. Найти вероятность того, что в течение суток выйдут из строя обе видеокамеры.

▶ Пусть событие A — выход из строя в течение рассматриваемых суток первой видеокамеры, B — выход из строя в течение тех же суток второй камеры. Согласно условию задачи $P(A) = 0{,}001 = 10^{-3}$, $P(B) = 0{,}0005 = 5 \cdot 10^{-4}$. Событие AB — выход из строя в течение суток обеих видеокамер. Считая события A и B независимыми, находим

$$P(AB) = P(A) \cdot P(B) = 10^{-3} \cdot 5 \cdot 10^{-4} = 5 \cdot 10^{-7}.$$

Ответ $5 \cdot 10^{-7}$. ◁

Задача 4 Вероятность попадания в цель при одном выстреле первым орудием равна 0,8, а вторым орудием — 0,7. Найти вероятность попадания в цель хотя бы одним орудием, после того как они оба, стреляя по цели, сделали по одному выстрелу.

▶ Пусть событие A — попадание в цель хотя бы одним орудием, а противоположное ему событие $\overline{A}$ наступает при промахе как первого, так и второго орудия. Вероятность промаха первого орудия равна $1 - 0{,}8 = 0{,}2$, а вероятность промаха второго равна $1 - 0{,}7 = 0{,}3$. Считая промахи орудий при стрельбе по цели независимыми событиями, находим $P(\overline{A}) = 0{,}2 \cdot 0{,}3 = 0{,}06$, значит, $P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 1 - 0{,}06 = 0{,}94$.

Ответ 0,94. ◁

Упражнения

1145 Выяснить, являются ли события A и B независимыми, если:

1) $P(A)=\frac{2}{5},\ P(B)=\frac{10}{13},\ P(AB)=\frac{4}{13}$;

2) $P(A)=0{,}75,\ P(B)=0{,}2,\ P(AB)=0{,}15$;

3) $P(A)=0{,}3,\ P(B)=0{,}2,\ P(AB)=0{,}6$;

4) $P(A)=\frac{3}{14},\ P(B)=\frac{7}{12},\ P(AB)=\frac{1}{4}$.

1146 Наугад называется: 1) одно из первых двенадцати натуральных чисел; 2) одно из первых тринадцати натуральных чисел. Рассматриваются события: A — названное число является чётным, B — названное число кратно трём. Установить, являются ли события A и B независимыми.

1147 Бросаются две игральные кости и рассматриваются события: 1) A — на первой кости выпало число 6, B — на второй кости выпало чётное число; 2) A — на первой кости выпало нечётное число, B — на второй кости выпало число, кратное 3. Убедиться с помощью формулы (1) в независимости событий A и B.

1148 Вероятность выигрыша на некоторой бирже в течение каждого из двух фиксированных дней равна 0,3. Найти вероятность того, что на этой бирже: 1) выигрыши произойдут в каждый из этих двух дней; 2) два этих дня не будет выигрышей; 3) выигрыши произойдут хотя бы в один из двух фиксированных дней.

1149 Для сигнализации об угоне установлены два независимых датчика. Вероятность того, что при угоне сработает первый датчик, равна 0,97, что сработает второй, равна 0,95. Найти вероятность того, что при угоне: 1) сработают оба датчика; 2) оба датчика не сработают; 3) сработает хотя бы один из датчиков; 4) хотя бы один из датчиков не сработает.

1150 В первой партии из 20 деталей 6 нестандартных, а во второй партии из 30 деталей 5 нестандартных. Наугад из каждой партии изымают по одной детали. Найти вероятность того, что: 1) обе детали оказались нестандартными; 2) обе детали оказались стандартными; 3) хотя бы одна деталь оказалась стандартной; 4) хотя бы одна деталь оказалась нестандартной.

1151 В первой коробке находятся 7 белых и 3 чёрных шара, а во второй — 5 белых и 9 чёрных. Не глядя из каждой коробки вынимают по одному шару. Найти вероятность того, что: 1) оба вынутых шара белые; 2) оба вынутых шара чёрные; 3) хотя бы один шар белый; 4) хотя бы один шар чёрный.

1152 Вероятность того, что цель будет поражена хотя бы одним из двух выстрелов, равна 0,96. Полагая, что каждый раз вероятность поражения цели при одном выстреле одна и та же, найти эту вероятность.

1153 Вероятность P того, что при измерении прибором некоторой физической величины будет допущена ошибка, превышающая заданную точность, постоянна. Вероятность того, что ошибка будет допущена этим прибором хотя бы один раз из двух измерений, равна $\frac{32}{81}$. Найти P.

1154 Вероятность попадания по мишени при одном выстреле некоторым стрелком равна 0,8. Найти вероятность попадания по мишени этим стрелком: 1) в каждом из трёх выстрелов; 2) хотя бы одним из трёх выстрелов.

1155 Имеются 3 партии деталей. Вероятность того, что вынутая из первой партии деталь окажется бракованной, равна 0,1. Вероятность того, что бракованной будет вынутая из второй партии деталь, равна 0,2. Вероятность того, что бракованной будет вынутая из третьей партии деталь, равна 0,3. Случайным образом из каждой партии изымают по одной детали. Найти вероятность того, что: 1) все 3 детали окажутся бракованными; 2) все 3 детали окажутся не бракованными; 3) хотя бы одна деталь окажется не бракованной; 4) хотя бы одна деталь окажется бракованной.

§ 70 Статистическая вероятность

Определение вероятности, сформулированное в § 67, называется *классическим определением вероятности*. Оно применяется, когда теоретически удаётся выявить все элементарные равновозможные исходы испытания и определить благоприятствующие исследуемому событию исходы. В этом случае число элементарных исходов испытания конечно и выражается конкретным числом. Однако на практике — при изучении случайных явлений в естествозна-

Рис. 169

нии, экономике, медицине, производстве — часто встречаются испытания, число возможных исходов которых необозримо велико. А в ряде случаев до проведения реальных испытаний трудно или невозможно установить равновозможность исходов испытания. Например, до многократного подбрасывания кнопки (рис. 169) трудно представить, равновозможны ли её падения «на плоскость» и «на остриё». Поэтому наряду с классическим на практике используется и так называемое *статистическое определение вероятности*. Для знакомства с ним требуется ввести понятие *относительной частоты*.

Определение 1. *Относительной частотой* события A в данной серии испытаний называют отношение числа испытаний M, в которых это событие произошло, к числу всех проведённых испытаний N. При этом число M называют *частотой* события A.

Относительную частоту события A обозначают $W(A)$, поэтому по определению

$$W(A) = \frac{M}{N}. \qquad (1)$$

Задача 1 Во время стрельбы по мишени было сделано 25 выстрелов и зарегистрировано 15 попаданий. Какова относительная частота попадания по мишени в данной серии выстрелов?

▶ Событие A — попадание по мишени, произошло в 15 случаях, т. е. $M = 15$. Общее число испытаний (выстрелов) $N = 25$. По формуле (1) имеем $W(A) = \frac{M}{N} = \frac{15}{25} = \frac{3}{5} = 0{,}6$.

Ответ 0,6. ◁

Если проводить реальное испытание с подбрасыванием монеты и наблюдать за относительной частотой появления, например орла, в каждой серии испытаний, то можно заметить следующий факт: чем больше проводится испытаний, тем всё меньше относительная частота появления орла отличается от 0,5, т. е. от значения вероятности этого события в классическом понимании.

Этот факт подтверждают и дошедшие до нас исторические сведения.

Известно, что в XVIII в. французский естествоиспытатель Жорж Луи Леклерк де Бюффон (1707—1788) провёл 4040 испытаний с подбрасыванием монеты. В результате чего наблюдал появление орла 2048 раз. Таким образом, Бюффон получил относительную частоту появления орла, равную $\frac{2048}{4040} = 0{,}5069$. В начале XX в. английский учёный Карл Пирсон (1857—1936) провёл с помощью своих учеников 24 000 аналогичных испытаний и наблюдал 12 012 появлений орла. Относительная частота события у Пирсона оказалась равной $\frac{12012}{24000} = 0{,}5005$.

Определение 2. ***Статистической вероятностью*** **называют число, около которого колеблется относительная частота события при большом числе испытаний.**

Различные исследования с большим числом однотипных испытаний проводили учёные в разные годы. Наблюдая за уменьшением амплитуды колебания относительных частот события около некоторого числа при увеличении количества испытаний, швейцарский математик Якоб Бернулли (1654—1705) обосновал так называемый *закон больших чисел*:

Можно считать достоверным тот факт, что при любой достаточно большой серии испытаний относительная частота события A стремится к некоторому числу — вероятности этого события. Таким образом, $W(A) \approx P(A)$ при большом числе испытаний.

Проиллюстрируем ещё одним примером сформулированный закон больших чисел.

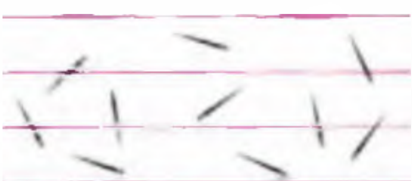


Рис. 170

На листе начерчены параллельные линии, расстояния между которыми равны длине некоторой иглы (рис. 170). Эта игла 100 раз бросается на расчерченный лист, и случаи её пересечения с любой из линий подсчитываются во втором столбце таблицы, где N — число бросаний, M — частота пересечения иглой линии, $\frac{M}{N}$ — относительная частота события в серии из N испытаний, подсчитанная с точностью до десятитысячных.

N	M	$W = \frac{M}{N}$
10	6	0,6
20	14	0,7
30	19	0,6333
40	26	0,65
50	33	0,66
60	40	0,6667
70	46	0,6571
80	54	0,675
90	59	0,6556
100	66	0,66

По результатам 100 бросков можно предположить, что значения дроби $\frac{M}{N}$ колеблются около числа $\frac{2}{3} \approx 0{,}6667$. Действительно ли вероятность рассматриваемого события равна $\frac{2}{3}$? При увеличении числа испытаний было обнаружено, что относительная частота этого события стабилизируется около числа, чуть меньшего, чем $\frac{2}{3}$. На основании понятия геометрической вероятности Бюффон доказал, что вероятность этого события равна $\frac{2}{\pi}$.

Упражнения

1156 В изготовленной партии из 10 000 деталей обнаружено: 1) 350; 2) 220 бракованных деталей. Найти относительную частоту появления в данной партии бракованной детали. Результат выразить в процентах.

1157 Заполнить последний столбец таблицы (с точностью до тысячных):

№ п/п	Испытание	Число испытаний (N)	Наблюдаемое событие	Частота события (M)	Относительная частота события $\left(W = \frac{M}{N}\right)$
1	Брошена монета	200	Выпала решка	98	
2	Брошен игральный кубик	300	Выпало число 4	53	
3	Спортсмен стреляет по мишени	100	Попадание по мишени	93	
4	Брошен игральный тетраэдр (с гранями, пронумерованными числами 1, 2, 3, 4)	200	Выпало число 3	49	

1158 Проводились серии из N испытаний с подбрасыванием некоторой правильной треугольной призмы, сделанной из стали. Результаты заносились в таблицу:

Число испытаний (N)	10	50	100	300	500	1000
Частота падения призмы на любую боковую грань (M)	8	34	73	206	353	698
Относительная частота падения призмы на боковую грань (W)						

Заполнить последнюю строку таблицы, округляя результаты вычислений до сотых. Высказать предположение о приближённом значении (с точностью до одной десятой) вероятности события A — падение призмы на боковую грань.

1159 Провести серии из N испытаний (где $N_1 = 10$, $N_2 = 20$, $N_3 = 40$, $N_4 = 50$) с подбрасыванием игрального кубика, наблюдая за частотой появления числа 1. Убедиться в том, что относительная частота события A — появление числа 1 с увеличением N всё меньше отличается от числа $\frac{1}{6}$ (значения вероятности этого события в классическом понимании).

Упражнения к главе XII

1160 (Устно.) Перечислить все элементарные события, которые могут произойти в результате следующего испытания: 1) наугад называется день недели; 2) перекидной календарь на апрель месяц открывается наугад и читается записанное на листе число; 3) на пол роняется тонкий бутерброд и определяется — на какую сторону он упадёт; 4) бросают на пол 2 монеты и наблюдают выпавшие стороны; 5) на пол бросают 3 монеты и наблюдают выпавшие стороны; 6) по мишени по одному разу стреляют 3 стрелка; наблюдается попадание (П) или непопадание (Н) по мишени каждым из них; 7) из пункта A пешеход может попасть в пункт C по одной из трёх дорог (на рисунке 171 дороги проходят либо по сторонам прямоугольника $ABCD$, либо по его диагонали AC); оцениваются длины маршрутов в каждом испытании. Высказать предположение о равновозможности перечисленных элементарных событий.

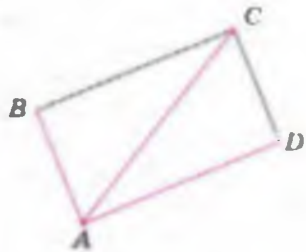


Рис. 171

1161 (Устно.) Назвать события $A + B$ и AB, если: 1) из полного набора домино извлекается одна костяшка, событие A — вынута костяшка «два — два», событие B — вынут дубль; 2) из колоды карт в 36 листов извлекается одна карта, событие A — вынута карта с картинкой; событие B — вынут король.

1162 Двенадцать карточек пронумерованы натуральными числами от 1 до 12. Случайным образом выбирается одна карточка. Рассматриваются события: 1) A — на карточке записан делитель числа 12, B — записано число, кратное 12; 2) A — на карточке делитель числа 6, B — на карточке число, кратное 6; 3) A — на карточке число, меньшее 10, B — на карточке число, большее 5; 4) A — на карточке число, большее 7, B — на карточке число, меньшее 9; 5) A — на карточке число, кратное 2, B — на карточке число, кратное 4; 6) A — на карточке число, кратное 3, B — на карточке число, кратное 6. Установить, в чём состоят события $A + B$ и AB.

1163 (Устно.) Установить событие, являющееся противоположным событию: 1) выпало число 4 в результате броска игрального тетраэдра; 2) выпало число, кратное 5, в результате броска игрального кубика; 3) хотя бы на одном из кубиков выпало чётное число в результате бросания двух игральных кубиков; 4) хотя бы на одном из двух брошенных игральных тетраэдров появилось число 1; 5) брошенная на шахматную доску шашка имеет с клеткой «f2» хотя бы одну общую точку; 6) брошенная на шахматную доску шашка легла на чёрную клетку.

1164 События A и B изображены с помощью кругов Эйлера (рис. 172). Большим кругом изображены все элементарные исходы испытания, с которым связаны события A и B. Перенести рисунок в тетрадь и штриховкой показать событие, состоящее в том, что: 1) произошли оба события A и B; 2) произошло или событие A, или событие B; 3) произошло только событие A; 4) произошло событие $\bar{B}$.

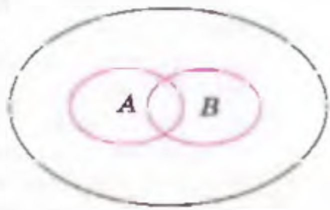


Рис. 172

1165 Брошена игральная кость. Найти вероятность события: 1) выпало число, не меньшее 2; 2) выпало число, меньшее 3; 3) выпало число, большее 4; 4) выпало число, не большее 5.

1166 В коробке находятся 2 белых, 5 чёрных и один синий шар. Наугад вынимают один из них. Найти вероятность события: 1) вынут белый шар; 2) вынут чёрный шар; 3) вынут синий шар; 4) вынут или белый, или чёрный шар; 5) вынут не чёрный шар; 6) вынут не белый шар.

1167 Из колоды карт в 36 листов наугад вынимается одна карта. Найти вероятность того, что эта карта: 1) дама красной масти; 2) шестёрка чёрной масти; 3) семёрка; 4) девятка; 5) с картинкой; 6) не с картинкой; 7) или король, или шестёрка; 8) или семёрка, или туз червей; 9) не король бубен; 10) не валет.

1168 Вероятность выигрыша по одному лотерейному билету в некоторой лотерее равна: 1) $2 \cdot 10^{-4}$; 2) $3 \cdot 10^{-5}$. Какова вероятность приобрести невыигрышный билет при покупке одного билета?

1169 Установить, являются ли события C и D независимыми, если: 1) $P(A) = 0{,}75$, $P(B) = 0{,}4$, $P(AB) = 0{,}3$; 2) $P(A) = 10^{-3}$, $P(B) = 10^{-2}$, $P(AB) = 10^{-6}$.

1170 Наугад называется одно из первых: 1) девятнадцати; 2) двадцати натуральных чисел; рассматриваются события: A — названо число, кратное 4, B — названо число, кратное 5. Выяснить, являются ли события A и B независимыми.

1171 Два стрелка независимо друг от друга стреляют по мишени. Вероятность попадания по мишени у первого стрелка равна 0,65, у второго равна 0,8. Найти вероятность того, что: 1) оба стрелка попадут по мишени; 2) хотя бы один из стрелков попадёт по мишени; 3) оба стрелка промахнутся; 4) хотя бы один промахнётся.

1172 Вероятность того, что лампочка в люстре перегорит в течение года, равна 0,3. Считая, что каждая из двух таких лампочек в люстре перегорает независимо от другой, найти вероятность события: 1) в течение года перегорят обе лампочки; 2) в течение года не перегорит ни одна из лампочек; 3) в течение года перегорит хотя бы одна лампочка; 4) в течение года не перегорит хотя бы одна лампочка.

1173 Заполнить последний столбец таблицы, округляя результаты вычислений с точностью до тысячных.

№ п/п	Испытание	Число испытаний	Наблюдаемое событие	Частота события	Относительная частота события
1	Брошены два игральных кубика	400	Сумма выпавших чисел равна 2	11	
2	Брошены два игральных кубика	200	Сумма выпавших чисел равна 3	11	
3	Спортсмен стреляет по мишени	300	Попадание по мишени	284	
4	Из колоды карт извлекается одна карта	200	Извлечён туз	23	

Проверь себя!

1 Наугад называется одно из первых восемнадцати чисел. Событие A — названо чётное число, событие B — названо число, кратное 3. Перечислить элементарные исходы испытания, благоприятствующие событию: 1) $A+B$; 2) AB; 3) $\bar{A}$; 4) $\bar{B}$.

2 Брошены 2 игральных кубика. Какова вероятность того, что на первой кости выпало число 4, а на второй — нечётное число?

3 Вероятность попадания по цели при одном выстреле у первого орудия равна 0,6, у второго — 0,7. Найти вероятность того, что по цели попадёт хотя бы одно орудие после того, как оба сделают по одному выстрелу.

1174 С помощью штриховки (см. рис. 172) проиллюстрировать событие: 1) $\overline{A + B}$; 2) $\overline{AB}$, если большой круг на рисунке изображает все элементарные события испытания, с которым связаны события A и B (эти события проиллюстрированы малыми кругами).

1175 Бросают 3 монеты и определяют выпавшие стороны. Перечислить все элементарные исходы, благоприятствующие событию: 1) хотя бы на одной монете появилась решка; 2) хотя бы на двух монетах появилась решка.

1176 Бросают 3 монеты и наблюдают за выпавшими сторонами. Перечислить все элементарные исходы, благоприятствующие событию $\overline{A}$, если событие A состоит в следующем: 1) только на одной монете появился орёл; 2) хотя бы на одной монете появился орёл.

1177 Бросают две игральные кости. Найти вероятность события: 1) произведение появившихся чисел равно 6; 2) произведение появившихся чисел равно 4; 3) сумма выпавших чисел равна 4; 4) сумма выпавших чисел равна 5; 5) сумма выпавших чисел больше 9; 6) сумма выпавших чисел не больше 5.

1178 В коробке лежат 5 белых и 6 чёрных шаров. Наугад вынимают 2 шара. Найти вероятность события: 1) оба шара белого цвета; 2) оба шара чёрного цвета; 3) один шар белый, другой чёрный; 4) по крайней мере один шар белый; 5) по крайней мере один шар чёрный.

1179 В коробке лежат 6 белых и 7 чёрных шаров. Наугад вынимают 2 шара. Найти вероятность события: 1) оба шара белые; 2) оба шара чёрные; 3) один шар белый, другой чёрный; 4) по крайней мере один шар белый; 5) по крайней мере один шар чёрный.

1180 В коробке лежат 5 белых и 7 чёрных шаров. Наугад вынимают 3 шара. Найти вероятность того, что: 1) все шары белые; 2) все шары чёрные; 3) один шар белый и 2 чёрных; 4) один шар чёрный и 2 белых.

1181 Клавиатура компьютера имеет 105 клавиш. Найти вероятность того, что при случайном последовательном нажатии трёх клавиш будет написано слово: 1) *дом*; 2) *око*.

1182 В первом ящике находятся 8 белых и 9 чёрных шаров, во втором — 6 белых и 5 чёрных. Наугад из каждого ящика выбирают по одному шару. Найти вероятность того, что: 1) оба шара оказались белыми; 2) оба шара оказались чёрными; 3) из первого ящика извлекли белый шар, а из второго — чёрный; 4) из первого ящика извлекли чёрный, а из второго — белый шар; 5) хотя бы один шар оказался белым; 6) хотя бы один шар оказался чёрным.

1183 Два мальчика играют в игру *крестики-нолики* на поле 3×3. Первый случайным образом ставит в одну клетку крестик, второй случайным образом ставит нолик в одну из оставшихся 8 клеток. Найти вероятность того, что после этих ходов будут заняты заранее зафиксированные наблюдателем две клетки поля. Решить задачу двумя способами.

XIII

глава

Статистика

Цель математически оформленных теорий состоит не только в том, чтобы описать с помощью точных формул уже накопленные знания, но и в том, чтобы предсказать новые явления.

Б. В. Гнеденко

§ 71 Случайные величины

Статистика занимается сбором, представлением (в виде таблиц, диаграмм, графиков и др.) и анализом информации о различных случайных величинах.

Случайными величинами **называют такие величины, которые в ходе наблюдений или испытаний могут принимать различные значения. Можно говорить о том, что их значения зависят от случая.**

Например, сумма чисел (очков), выпадающая при бросании двух игральных костей, — случайная величина. Обозначим её X, тогда $X_1 = 2$, $X_2 = 3$, $X_3 = 4$, ..., $X_{11} = 12$ — значения этой случайной величины. В таблице 1 указаны суммы выпавших чисел, а в таблице 2 показано распределение значений случайной величины X (суммы выпавших чисел) по их вероятностям P: каждой из сумм X_1, X_2, X_3, ..., X_{11} поставлена в соответствие вероятность, с которой она может появиться в результате одного испытания (одного бросания двух игральных костей).

Например, сумма $X_2 = 3$ появляется в двух благоприятствующих случаях ($1 + 2$ и $2 + 1$) из 36 возможных, поэтому $P_2 = \frac{2}{36} = \frac{1}{18}$.

Таблица 1

I кость / II кость	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

Таблица 2

X	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
P	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

Для наглядности распределение значений случайной величины X, представленное в таблице 2, может быть изображено в виде, например, линейной или столбчатой диаграммы.

Заметим, что сумма вероятностей ΣP[1] всех значений величины X (записанных во второй строке таблицы 2) равна 1, как сумма вероятностей всех элементарных исходов испытания с нахождением суммы очков при одном бросании двух игральных костей (см. предыдущую главу).

Таблицы распределения значений случайной величины, аналогичные таблице 2, составляются по результатам теоретических расчётов вероятностей. На практике часто после проведения реальных испытаний составляются таблицы распределения значений случайных величин по частотам (или по относительным частотам), после чего для большей наглядности распределение данных представляют либо в виде диаграммы, либо в виде *полигона частот* (полигона относительных частот).

---

[1] Знак Σ, введённый Л. Эйлером, используется для записи суммы значений некоторой величины (в данном случае — суммы всех значений вероятности P).

Задача Имеются результаты 20 измерений диаметра d болта (в миллиметрах с точностью до 0,1):

10,1; 10,0; 10,2; 10,1; 9,8; 9,9; 10,0; 10,0; 10,2; 10,0;
10,0; 9,9; 10,0; 10,1; 10,0; 9,9; 10,0; 10,1; 10,1; 10,0.

Представить эти данные с помощью: 1) таблиц распределения по частотам M и относительным частотам W, 2) полигона частот.

▶ 1) Имеющиеся данные (значения случайной величины d) представим в виде таблицы 3 распределения по частотам и относительным частотам:

Таблица 3

d	9,8	9,9	10,0	10,1	10,2
M	1	3	9	5	2
$W = \frac{M}{N}$	0,05	0,15	0,45	0,25	0,1

Отметим, что $\Sigma M = N = 20$, $\Sigma W = 1$.

2) На рисунке 173 представлено распределение значений d в виде полигона частот. ◁

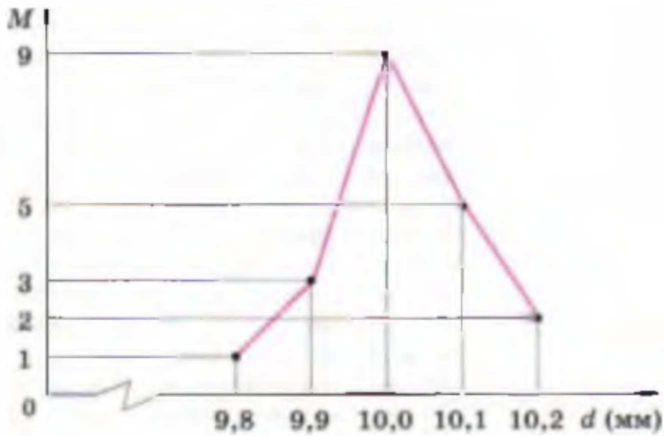


Рис. 173

* Рассмотренные в этом параграфе случайные величины принимали изолированные друг от друга значения. Такие величины называют *дискретными* (от лат. *discretus* — раздельный, прерывистый).

Если случайная величина может принимать любое значение из некоторого промежутка, то такая величина называется *непрерывной*. Например, время T ожидания автобуса на остановке, когда пассажир приходит на остановку случайным образом, а автобусы ходят с интервалом 10 мин, есть непрерывная случайная величина, принимающая любое числовое значение $T \in [0; 10]$.

Очевидно, число возможных значений непрерывной случайной величины бесконечно. Однако существует способ, с помощью которого можно задать распределение и непрерывной случайной величины. Для этого промежуток значений величины разбивают на части (обычно — на равные) и считают частоты (или вероятности) попадания значений случайной величины в каждую из них.

Рассмотрим пример. Пусть время горения T (в часах) электрической лампочки некоторого вида $T \in [0; 1000]$. Тогда промежуток $[0; 1000]$ можно разделить к примеру на 5 одинаковых по длине промежутков и результаты горения каждой из 100 экспериментальных лампочек занести в частотную таблицу 4:

Таблица 4

T	[0; 200)	[200; 400)	[400; 600)	[600; 800)	[800; 1000]
M	1	3	10	18	68

Отметим, что $\Sigma M = N = 100$.

Данные этой таблицы можно представить с помощью так называемой *гистограммы частот* — ступенчатой фигуры (рис. 174).

Если основанием каждой ступени служит промежуток длиной h, то высоту столбца берут равной $\frac{M}{h}$, где M — частота значений величины X на соответствующем промежутке. Тогда площадь такого столбца будет равна $\frac{M}{h} \cdot h = M$, а площадь фигуры под гистограммой равна $\Sigma M = N$.

Если по данным таблицы 4 заполнить таблицу 5 относительных частот, то построенную на её основе ступенчатую фигуру называют *гистограммой относительных частот* (рис. 175).

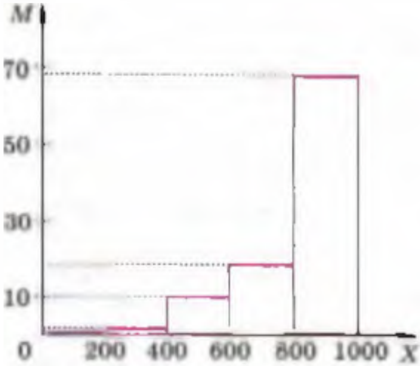


Рис. 174

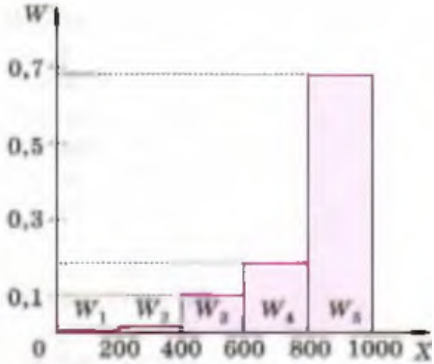


Рис. 175

Таблица 5

X	[0; 200)	[200; 400)	[400; 600)	[600; 800)	[800; 1000]
W	0,01	0,03	0,1	0,18	0,68

Гистограмму относительных частот строят обычно таким образом, чтобы площадь каждого столбца под ступенькой была равна соответствующему значению W. Тогда площадь фигуры под гистограммой будет равна единице ($\Sigma W = 1$). *

Упражнения

1184 Составить таблицу распределения по вероятностям P значений случайной величины X — числа очков, появившихся при бросании игрального кубика: 1) на двух гранях которого отмечены 3 очка, на одной — 4 очка, на трёх — 5 очков; 2) на одной грани которого отмечено 2 очка, на другой — 3 очка, на двух гранях — по 4 очка и на оставшихся двух — по 5 очков.

1185 Составить таблицу распределения по вероятностям P значений случайной величины X — суммы чисел, появившихся при бросании двух игральных тетраэдров, грани которых пронумерованы натуральными числами от 1 до 4.

1186 На стол бросают обыкновенный игральный кубик и игральный октаэдр, грани которого пронумерованы числами от 1 до 8. Составить таблицу распределения значений случайной величины X — суммы выпавших чисел по их вероятностям P.

1187 Составить таблицу распределения по частотам M значений случайной величины X — цифр, встречающихся в выборке следующих телефонных номеров:

1) 3965184, 6542913, 7902914, 2878858;

2) 1316573, 4336582, 2983412, 3941009.

1188 Построить полигон частот и полигон относительных частот значений случайной величины X, распределение которой представлено в таблице:

1)

X	5	6	7	8	9
M	2	3	6	4	1

2)

X	12	13	14	15	16	17
M	4	5	7	6	4	3

1189 В таблице записаны результаты 20 взвешиваний (с точностью до 1 г) одной и той же стальной отливки:

99	97	101	100	99	102	100	102	98	101
100	98	100	98	101	97	101	100	100	99

Составить таблицы распределения по частотам (M) и относительным частотам (W), а также полигон частот значений случайной величины X — результата определения массы стальной отливки.

1190 Составить таблицы распределения по частотам (M) и относительным частотам (W), а также полигон частот значений случайной величины Y — ростов 30 девушек спортивной секции гимнастики, приведённых (с точностью до 1 см) в таблице:

160	163	161	162	166	163	166	159	164	165
163	159	164	158	164	162	165	163	166	162
162	164	161	165	163	164	161	166	160	163

1191 Сроки службы T приборов некоторого вида (в часах) попадают в промежуток $[0; 2500]$. Результаты проверки сроков работы 200 приборов этого вида отражены в частотной таблице:

T	$[0; 500)$	$[500; 1000)$	$[1000; 1500)$	$[1500; 2000)$	$[2000; 2500]$
M	5	10	15	20	150

Проиллюстрировать распределение этих данных с помощью гистограммы частот.

1192 Значения роста H у 100 жителей дома (в сантиметрах) попадают в промежуток [50; 190]. Распределение значений непрерывной случайной величины H отражено в частотной таблице:

H	[50; 70)	[70; 90)	[90; 110)	[110; 130)	[130; 150)	[150; 170)	[170; 190]
M	5	8	10	12	15	30	20

Проиллюстрировать распределение этих данных с помощью гистограммы относительных частот.

§ 72 Центральные тенденции

Однотипные объекты можно сравнивать по общим параметрам, присущим этим объектам. Например, российские монеты можно сравнивать по номиналу, весу, диаметру; юношей одного класса можно сравнивать по возрасту, весу, росту и др. Каждый из названных параметров может принимать определённые числовые значения.

В статистике исследуют различные совокупности данных — числовых значений случайных величин с учётом частот, с которыми они встречаются в совокупности. При этом совокупность всех данных называют *генеральной совокупностью*, а любую выбранную из неё часть — *выборкой*. В статистических исследованиях выборку называют *репрезентативной* (от фр. *representative* — представительный), если в ней присутствуют те и только те значения случайной величины, что и в генеральной совокупности, причём частоты имеющихся в ней данных находятся практически в тех же отношениях, что и в генеральной совокупности.

Рассмотрим пример. Пусть некоторая случайная величина X имеет распределение своих значений по частотам M, представленное в таблице 6,

Таблица 6

X	-1	2	6	8
M	200	500	700	300

и пусть совокупность всех значений этой величины принята за генеральную совокупность. Тогда выборку из этой совокупности, распределение которой представлено в таблице 7, следует считать репрезентативной, так как $200 : 500 : 700 : 300 = 2 : 5 : 7 : 3$ и в выборке присутствуют те и только те значения X, которые присутствуют в генеральной совокупности. Выборки же, представленные в таблицах 8 и 9, не являются репрезентативными.

Таблица 7

X	-1	2	6	8
M	2	5	7	3

Таблица 8

X	-1	2	8
M	2	5	3

Таблица 9

X	-1	2	6	8
M	2	9	7	3

Совокупность данных иногда бывает полезно охарактеризовать (оценить) одним числом — *мерой центральной тенденции* числовых значений её элементов. К таким характеристикам относятся мода, медиана и среднее.

Мода (обозначают Mo) — это значение случайной величины, имеющее наибольшую частоту в рассматриваемой выборке.

Например, мода выборки 7, 6, 2, 5, 6, 1 равна 6; выборка 2, 3, 8, 2, 8, 5 имеет две моды: $Mo_1 = 2$, $Mo_2 = 8$.

Медиана (обозначают Me) — это число (значение случайной величины), разделяющее упорядоченную выборку на две равные по количеству данных части. Если в упорядоченной выборке нечётное количество данных, то медиана равна серединному из них. Если в упорядоченной выборке чётное количество данных, то медиана равна среднему арифметическому двух серединных чисел.

Задача 1 Найти медиану выборки значений случайной величины: 1) 5, 9, 1, 4, 5, −2, 0; 2) 7, 4, 2, 3, 6, 1.

▶ 1) Расположим элементы выборки в порядке возрастания: −2, 0, 1, 4, 5, 5, 9. Количество данных нечётно. Слева и справа от числа 4 находятся по 3 элемента, т. е. 4 — серединное число выборки, поэтому $Me = 4$.

2) Упорядочим элементы выборки: 1, 2, 3, 4, 6, 7. Количество данных чётно. Серединные данные выборки: 3 и 4, поэтому $Me = \frac{3+4}{2} = 3{,}5$.

Ответ 1) 4; 2) 3,5. ◁

Среднее (или *среднее арифметическое*) выборки — это число, равное отношению суммы всех чисел выборки к их количеству. Если рассматривается совокупность значений случайной величины X, то её среднее обозначают $\overline{X}$.

Задача 2 Найти среднее выборки значений случайной величины X, распределение которых по частотам представлено в таблице 10.

Таблица 10

X	2	3	4	8	10
M	1	2	3	1	1

▶ $$\overline{X} = \frac{2 \cdot 1 + 3 \cdot 2 + 4 \cdot 3 + 8 \cdot 1 + 10 \cdot 1}{1 + 2 + 3 + 1 + 1} = \frac{2 + 6 + 12 + 8 + 10}{8} = \frac{38}{8} = 4{,}75.$$

Ответ 4,75. ◁

* Одной из наиболее распространённых характеристик выборки значений случайной величины, чьё распределение по вероятностям известно, является так называемое *математическое ожидание*.

Пусть распределение по вероятностям P значений некоторой случайной величины X задано таблицей 11.

Таблица 11

X	X_1	X_2	X_3	...	X_{n-1}	X_n
P	P_1	P_2	P_3	...	P_{n-1}	P_n

Тогда число E, где

$$E = X_1P_1 + X_2P_2 + X_3P_3 + \ldots + X_{n-1}P_{n-1} + X_nP_n, \quad (1)$$

называют *математическим ожиданием* (или *средним значением*) случайной величины X.

Например, для случайной величины X — суммы чисел, выпавших при бросании двух игральных кубиков (её распределение представлено в таблице 2), можно найти её математическое ожидание:

$$E = 2\cdot\frac{1}{36} + 3\cdot\frac{2}{36} + 4\cdot\frac{3}{36} + 5\cdot\frac{4}{36} + 6\cdot\frac{5}{36} + 7\cdot\frac{6}{36} +$$

$$+ 8\cdot\frac{5}{36} + 9\cdot\frac{4}{36} + 10\cdot\frac{3}{36} + 11\cdot\frac{2}{36} + 12\cdot\frac{1}{36} =$$

$$= \frac{1}{36}(2 + 6 + 12 + 20 + 30 + 42 + 40 + 36 + 30 + 22 + 12) =$$

$$= \frac{1}{36}\cdot 252 = 7.$$

Понятие математического ожидания широко используется в теории игр.

Рассмотрим пример. Предположим, что в некоторой игре с двумя игроками первый игрок может выиграть X_1, X_2, ..., X_k рублей (среди чисел X_1, X_2, ..., X_k могут быть отрицательные и 0, а суммарный выигрыш обоих игроков всегда равен 0). При этом вероятность того, что первый игрок выиграет X_i рублей, равна P_i. Тогда средний выигрыш первого игрока будет равен $E = X_1P_1 + X_2P_2 + \ldots + X_kP_k$. Игра называется *справедливой*, если $E = 0$, т. е. если $X_1P_1 + X_2P_2 + \ldots + X_kP_k = 0$. Игра называется *выгодной* (не выгодной) для первого игрока, если $E > 0$ ($E < 0$). *

Упражнения

1193 (Устно.) Распределение в генеральной совокупности значений случайной величины X отражено в таблице:

X	5	7	9	11	12
M	25	60	80	45	15

Установить выборку, являющуюся репрезентативной для заданной генеральной совокупности:

1)

X	5	7	9	11	12
M	5	12	16	9	5

2)

X	5	7	11	12
M	5	12	9	3

3)

X	5	7	9	11	12
M	5	12	16	9	3

4)

X	5	7	8	9	11	12
M	5	12	14	16	9	3

1194 Найти моду выборки:

1) 4, 15, 6, 7, 3, 6, 8; 2) 18, 9, 5, 3, 7, 9, 1;
3) 1, 3, 5, 1, 4, 3, 2; 4) 6, 8, 5, 4, 8, 3, 6.

1195 Найти медиану выборки:

1) 17, 12, 34, 18, 6; 2) 24, 15, 13, 20, 21;
3) 4, 1, 8, 9, 13, 10; 4) 15, 6, 12, 8, 9, 14.

1196 Найти среднее значение выборки:

1) 24, −5, 13, −8; 2) 7, 16, −9, −2, 10;
3) 0,3, 0,8, 0,2, 0,5, 0,8, 0,2;
4) 1,3, 1,4, 1,3, 0,9, 0,9, 1,4.

1197 Найти моду, медиану и среднее выборки:

1) 3, −2, 1, 0, 2, −1; 2) 7, 4, −1, 3, −3, 0.

1198 Найти среднее арифметическое выборки значений случайной величины X, распределение которых по частотам представлено в таблице:

1)

X	−2	0	1	3
M	5	6	7	2

2)

X	−1	2	3
M	4	5	2

3)

X	−1	4	6
M	5	1	2

4)

X	−3	2	3	4
Y	4	3	2	1

1199 Найти моду, медиану и среднее выборки значений случайной величины X:

1)

X	−3	−1	0	5
M	2	3	5	2

2)

X	−2	−1	0	1	3
M	1	3	2	4	1

1200 Найти математическое ожидание значений случайной величины X, распределение которых по вероятностям представлено в таблице:

1)

X	−3	−1	1	3
P	$\frac{2}{7}$	$\frac{3}{7}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{7}$

2)

X	−1	0	1	2	3
P	$\frac{3}{14}$	$\frac{4}{14}$	$\frac{5}{14}$	$\frac{1}{14}$	$\frac{1}{14}$

§ 73 Меры разброса

Не каждую выборку имеет смысл оценивать с помощью центральных тенденций. Например, если исследуется выборка

$$80,\ 80,\ 320,\ 4600 \qquad (1)$$

годовых доходов (в тысячах рублей) четверых человек, то очевидно, что ни мода (80), ни медиана (200), ни среднее (1270) не могут выступать в роли единой объективной характеристики данной выборки. Это объясняется тем, что наименьшие значения выборки (1) существенно отличаются от наибольшего — разность наибольшего и наименьшего значений соизмерима с наибольшим значением.

Определение 1. Разность наибольшего и наименьшего значений случайной величины выборки называется её *размахом* и обозначается R.

Так, для выборки (1) размах $R = 4600 - 80 = 4520$. Размах показывает, как велик разброс значений случайной величины в выборке. Однако, зная только размах выборки, невозможно охарактеризовать отличие её элементов друг от друга, отличие каждого элемента от среднего значения. Возникает вопрос: как сравнить, например, две выборки, имеющие одинаковые размахи и одинаковые средние значения? Рассмотрим реальную ситуацию на примере.

На место токаря претендуют двое рабочих. Для каждого из них установили испытательный срок, в течение которого они должны были изготавливать одинаковые детали. Результаты работы претендентов представлены в таблице 12.

Каждый из рабочих за 5 дней изготовил 250 деталей, значит, средняя производительность труда за день у обоих рабочих одинаковая:

$$\overline{X} = \overline{Y} = \frac{250}{5} = 50 \text{ (дет./день)}.$$

Таблица 12

День недели	Дневная выработка	
	первого рабочего (X)	второго рабочего (Y)
Понедельник	52	61
Вторник	54	40
Среда	50	55
Четверг	48	50
Пятница	46	44
	$\Sigma X = 250$	$\Sigma Y = 250$

Моды у предложенных совокупностей отсутствуют, а медианы одинаковые (50 и 50). Кого же из этих рабочих предпочтительнее взять на работу? В данном случае в качестве критерия сравнения совокупностей может выступать *стабильность* производительности труда рабочего. Её можно оценивать с помощью отклонений от среднего значения элементов совокупности.

Определение 2. *Отклонением от среднего* называют разность между рассматриваемым значением случайной величины и средним значением выборки.

Например, если значение величины $X_1 = 52$, а значение среднего $\overline{X} = 50$, то отклонение X_1 от среднего будет равно $X_1 - \overline{X} = 52 - 50 = 2$.

Очевидно, отклонение от среднего может быть как положительным, так и отрицательным числом. Нетрудно показать, что *сумма отклонений всех значений выборки от среднего значения равна нулю*. Поэтому характеристикой стабильности элементов совокупности может служить *сумма квадратов отклонений от среднего*.

Из предложенной ниже таблицы 13 видно, что у второго рабочего сумма квадратов отклонений от среднего больше, чем у первого рабочего:

$$\Sigma (X - \overline{X})^2 < \Sigma (Y - \overline{Y})^2.$$

На практике это означает, что второй рабочий имеет нестабильную производительность труда: в какие-то дни работает не в полную силу, а в какие-то

Таблица 13

День недели	Значение случайной величины		Отклонение от среднего $\overline{X} = \overline{Y} = 50$		Квадраты отклонений	
	X	Y	$X - \overline{X}$	$Y - \overline{Y}$	$(X - \overline{X})^2$	$(Y - \overline{Y})^2$
Понедельник	48	50	−2	0	4	0
Вторник	54	40	4	−10	16	100
Среда	50	55	0	5	0	25
Четверг	52	61	2	11	4	121
Пятница	46	44	−4	−6	16	36
Сумма	**250**	**250**	**0**	**0**	**40**	**282**

навёрстывает упущенное, что всегда сказывается на качестве продукции. Очевидно, что работодатель предпочтёт взять на место токаря первого рабочего (у которого сумма квадратов отклонений от средней производительности меньше).

Если бы рабочие работали разное количество дней и производили в среднем за день одинаковое число деталей, то стабильность работы каждого из них можно было бы оценить по величине *среднего арифметического квадратов отклонений*.

Такая величина называется *дисперсией* (от лат. *dispersio* — рассеяние) и обозначается буквой D.

Для случайной величины X, принимающей N различных значений и имеющей среднее значение $\overline{X}$, дисперсия находится по формуле

$$D = \frac{(X_1 - \overline{X})^2 + (X_2 - \overline{X})^2 + \ldots + (X_N - \overline{X})^2}{N} \qquad (1)$$

Задача 1 Два токаря вытачивали одинаковые детали, причём первый трудился полную рабочую неделю, а второй по распоряжению начальника — 4 дня. Сведения об их дневной выработке представлены в таблице 14. Сравнить стабильность работы токарей.

▶ Найдём средние значения выборок данных величин X и Y:

$$\overline{X} = \frac{53 + 54 + 49 + 48 + 46}{5} = \frac{250}{5} = 50,$$

$$\overline{Y} = \frac{52 + 46 + 53 + 49}{4} = \frac{200}{4} = 50.$$

Очевидно, $\overline{X} = \overline{Y}$.

Таблица 14

День недели	Дневная выработка	
	первого токаря (X)	второго токаря (Y)
Понедельник	53	52
Вторник	54	46
Среда	49	53
Четверг	48	49
Пятница	46	—

С помощью таблицы 15 найдём суммы квадратов отклонений от средних всех значений величин X и Y.

Таблица 15

День недели	Значение случайной величины		Отклонение от среднего		Квадрат отклонения от среднего	
	X	Y	$X - 50$	$Y - 50$	$(X - 50)^2$	$(Y - 50)^2$
Понедельник	53	52	3	2	9	4
Вторник	54	46	4	−4	16	16
Среда	49	53	−1	3	1	9
Четверг	48	49	−2	−1	4	1
Пятница	46	—	−4	—	16	—
				Сумма:	46	30

$$D_X = \frac{46}{5} = 9{,}2, \text{ а } D_Y = \frac{30}{4} = 7{,}5, \text{ т. е. } D_X > D_Y.$$

Ответ Второй токарь работает стабильнее первого.

Если значения $X_1, X_2, \ldots, X_k$ случайной величины X повторяются с частотами $M_1, M_2, \ldots, M_k$ соответственно, то дисперсию величины X можно вычислить по формуле

$$D = \frac{(X_1 - \bar{X})^2 M_1 + (X_2 - \bar{X})^2 M_2 + \ldots + (X_k - \bar{X})^2 M_k}{M_1 + M_2 + \ldots + M_k}, \quad (1)$$

где $\bar{X} = \dfrac{X_1 M_1 + X_2 M_2 + \ldots + X_k M_k}{M_1 + M_2 + \ldots + M_k}$.

Используя знак суммы Σ, формулу (1) можно записать компактнее:

$$D = \frac{\Sigma\left((X - \overline{X})^2 M\right)}{\Sigma M}, \text{ где } \overline{X} = \frac{\Sigma(XM)}{\Sigma M}.$$

Пусть величина X имеет некоторую размерность (например, сантиметры). Тогда её среднее значение $\overline{X}$ и отклонение от среднего $X - \overline{X}$ имеют ту же размерность, что и сама величина (в сантиметрах). Квадрат же отклонения $(X - \overline{X})^2$ и дисперсия D имеют размерности квадрата этой величины (в квадратных сантиметрах).

Для оценки степени отклонения от среднего значения удобно иметь дело с величиной той же размерности, что и сама величина X. С этой целью используют значения корня квадратного из дисперсии $\sqrt{D}$.

Определение. Корень квадратный из дисперсии называют *средним квадратичным отклонением* и обозначают σ, т. е. $\sigma = \sqrt{D}$.

Задача 2 Распределение по частотам значений величины X — числа забитых голов игроками футбольной команды за период соревнований показано в таблице 16. Найти среднее квадратичное отклонение от среднего значения числа всех забитых голов.

Таблица 16

X	0	1	2	3
M	4	2	3	1

▶ Результаты последовательных вычислений будем заносить в таблицу 17, при этом:

$$\Sigma M = 10, \ \overline{X} = \frac{\Sigma(X \cdot M)}{\Sigma M} = \frac{11}{10} = 1{,}1.$$

Таблица 17

X	0	1	2	3
M	4	2	3	1
$X - \overline{X}$	−1,1	−0,1	0,9	1,9
$(X - \overline{X})^2$	1,21	0,01	0,81	3,61
$(X - \overline{X})^2 \cdot M$	4,84	0,02	2,43	3,61

$$D = \frac{\sum\left((X - \overline{X})^2 \cdot M\right)}{\sum M} = \frac{4{,}84 + 0{,}02 + 2{,}43 + 3{,}61}{10} =$$

$$= \frac{10{,}9}{10} = 1{,}09,$$

$$\sigma = \sqrt{D} = \sqrt{1{,}09} \approx 1{,}04.$$

Ответ $\sigma \approx 1{,}04$. ◁

Задача 3 Продавец обуви имеет возможность выбрать, в каком из двух мест (в точке A или точке B) ставить по рабочим дням торговую палатку. В первую очередь его интересует объём продаж, а во вторую — стабильность ежедневных продаж. Продавец провёл исследование: по рабочим дням в январе он торговал в точке A, а в феврале — в точке B. Результаты продаж фиксировались, после чего были составлены две таблицы распределения значений величины X_A и величины X_B — количества проданных за день пар обуви в точках A и B соответственно:

X_A	1	2	3	4	5
M_A	2	7	7	4	2

X_B	1	2	3	4	6
M_B	3	5	6	5	1

Какой торговой точке следует отдать предпочтение?

▶ Очевидно, в январе было 22 рабочих дня ($\Sigma M_A = 22$), а в феврале было 20 рабочих дней ($\Sigma M_B = 20$). Найдём величины среднесуточных продаж обуви в точках A и B:

$$\overline{X}_A = \frac{\sum(X_A \cdot M_A)}{\sum M_A} = \frac{1 \cdot 2 + 2 \cdot 7 + 3 \cdot 7 + 4 \cdot 4 + 5 \cdot 2}{22} =$$

$$= \frac{63}{22} \approx 2{,}86;$$

$$\overline{X}_B = \frac{\sum(X_B \cdot M_B)}{\sum M_B} = \frac{1 \cdot 3 + 2 \cdot 5 + 3 \cdot 6 + 4 \cdot 5 + 6 \cdot 1}{20} =$$

$$= \frac{57}{20} = 2{,}85.$$

Среднее значение суточных продаж оказалось практически одинаковым (примем $\overline{X}_A = \overline{X}_B = \overline{X} = 2{,}9$), значит, предпочтение следует отдать точке с более стабильной торговлей. Для этого нужно сравнить средние квадратичные отклонения совокупностей значений X_A и X_B. Результаты вычислений будем заносить в таблицы:

X_A	1	2	3	4	5
M_A	2	7	7	4	2
$X_A - \overline{X}$	−1,9	−0,9	0,1	1,1	2,1
$(X_A - \overline{X})^2$	3,61	0,81	0,01	1,21	4,41
$(X_A - \overline{X})^2 \cdot M_A$	7,22	5,67	0,07	4,84	8,82

X_B	1	2	3	4	6
M_B	3	5	6	5	1
$X_B - \overline{X}$	−1,9	−0,9	0,1	1,1	3,1
$(X_B - \overline{X})^2$	3,61	0,81	0,01	1,21	9,61
$(X_B - \overline{X})^2 \cdot M_B$	10,83	4,05	0,06	6,05	9,61

$$D_A = \frac{\sum\left((X_A - \overline{X})^2 \cdot M_A\right)}{\sum M_A} = \frac{7{,}22 + 5{,}67 + 0{,}07 + 4{,}84 + 8{,}82}{22} =$$

$$= \frac{26{,}62}{22} = 1{,}21\ (\text{пар}^2),$$

$$\sigma_A = \sqrt{D_A} = \sqrt{1{,}21} = 1{,}1\ (\text{пар});$$

$$D_B = \frac{\sum\left((X_B - \overline{X})^2 \cdot M_B\right)}{\sum M_B} = \frac{10{,}83 + 4{,}05 + 0{,}06 + 6{,}05 + 9{,}61}{20} =$$

$$= \frac{30{,}6}{20} = 1{,}53\ (\text{пар}^2),$$

$$\sigma_B = \sqrt{D_B} = \sqrt{1{,}53} \approx 1{,}24\ (\text{пар}).$$

Так как $\sigma_A < \sigma_B$, то точка A предпочтительнее для организации в ней торговли, чем точка B. ◁

Замечание. Дисперсию и среднее квадратичное отклонение в статистике называют также *мерами рассеивания* значений случайной величины около среднего значения.

Упражнения

1201 Найти размах выборки:

1) 15, −7, 13, −6, 8, 2, 1, −8, −2;

2) 21, 12, −1, 7, −3, 20, 14, 0, 1.

1202 Найти дисперсию выборки:

1) 10 см, 12 см, 7 см, 11 см; 2) 16 г, 14 г, 13 г, 17 г;

3) 11 с, 14 с, 11 с, 12 с, 12 с; 4) 5 м, 13 м, 8 м, 12 м, 12 м.

1203 Найти дисперсию совокупности значений случайной величины X, заданной частотным распределением:

1)

X	2	3	4	6
M	3	2	2	3

2)

X	−1	2	3	4	5
M	3	1	2	3	1

1204 Найти среднее квадратичное отклонение от среднего значения элементов выборки:
1) 3 кг, 5 кг, 5 кг, 8 кг, 4 кг; 2) 12 м, 10 м, 7 м, 12 м, 9 м.

1205 Сравнить дисперсии двух выборок, имеющих одинаковые средние значения:
1) 6, 10, 7, 8, 9 и 8, 9, 5, 10;
2) 5, 12, 7, 8, 18 и 17, 6, 11, 7, 9, 10.

1206 Найти среднее квадратичное отклонение величины X, заданной частотным распределением:

1)

X	2	3	4	6
M	2	2	1	3

2)

X	−5	−2	2	3
M	2	3	4	2

1207 Сравнить дисперсии выборок, имеющих разные средние значения:
1) 4, 6, 8, 9, 8 и 6, 8, 10, 12, 9;
2) 6, 3, 4, 8, 9 и 2, 6, 3, 7, 5, 7.

1208 Двух футболистов, участвующих в играх пяти сезонов и забивших одинаковое количество голов (см. таблицу), сравнить по стабильности результатов.

Условный номер сезона	1	2	3	4	5
Число голов, забитых 1-м футболистом	18	23	19	17	23
Число голов, забитых 2-м футболистом	19	16	22	23	20

1209 Двух футболистов, один из которых участвовал в пяти игровых сезонах, а другой — в шести (см. таблицу), сравнить по стабильности в забивании голов.

Условный номер сезона	1	2	3	4	5	6
Число голов, забитых 1-м футболистом	17	21	20	16	15	19
Число голов, забитых 2-м футболистом	—	17	20	18	21	14

Упражнения к главе XIII

1210 Составить таблицу распределения по вероятностям P значений случайной величины X — числа очков, появившихся при бросании кубика: 1) на одной грани которого отмечено одно очко, а на остальных — 2 очка; 2) на двух гранях которого отмечено одно очко, а на остальных — 2 очка; 3) на одной грани которого отмечено одно очко, на двух — 2 очка, на остальных — 3 очка; 4) на одной грани которого отмечено одно очко, на другой — 2 очка, на двух — 3 очка, на остальных — 4 очка.

1211 Имеются две монеты, у которых на одной из сторон записано число 1, а на другой — число 2. Составить таблицу распределения по вероятностям P значений случайной величины Y — суммы чисел, появившихся при бросании этих монет.

1212 Дан набор случайно названных двузначных чисел:
1) 27, 31, 49, 25, 74, 99, 30, 12, 22, 58;
2) 19, 46, 54, 28, 67, 88, 37, 92, 71, 33.
Составить таблицу распределения по частотам M значений случайной величины X — цифр, встречающихся в наборе.

1213 Построить полигон частот и полигон относительных частот значений случайной величины Z, распределение которых представлено в таблице:

1)

Z	3	4	5	6	7	8
M	1	3	4	5	3	2

2)

Z	10	11	12	13	14
M	4	6	9	7	3

Найти размах, моду, медиану и среднее выборки (**1214—1217**):

1214 1) 1, 5, 5, 8, 10;
2) 3, 10, 12, 12, 18;

1215 1) –8, –8, –5, –5, 0, 2;
2) –4, –4, 0, 2, 9, 9;

1216 1) –1, 12, –6, –7, 13, –2, 10, –2, –9;
2) 4, –10, 13, 8, –6, –3, –1, 13, –6;

1217 1) –5, –15, 12, –7, 8, 13, –1, –7;
2) 16, –2, –8, 10, 14, –6, –2, 11.

1218 Найти дисперсию и среднее квадратичное отклонение выборки:

1) 3, 8, 5, 6; 2) 4, 7, 3, 9;
3) 4, 1, 3, 2, 2; 4) 3, 2, 1, 1, 5;
5) 2, −1, 3, −2, 5; 6) −2, 4, −3, −1, 6.

Проверь себя!

1 На стол бросают монету (на одной из сторон которой записано число 1, на другой — число 2) и игральный кубик (грани которого пронумерованы числами от 1 до 6). Составить вероятностную таблицу распределения значений случайной величины X — суммы чисел, появившихся на монете и на кубике.

2 Найти размах, моду, медиану и среднее выборки:
−5, 6, 3, 8, 3, −2, −4, 0, 3, −2.

3 Найти дисперсию выборки: −2, 3, 1, 0, 4.

1219 Найти размах, моду, медиану и среднее выборки значений случайной величины X, распределение которых по частотам M задано таблицей:

1)

X	−1	0	1	3	5	6
M	2	3	4	1	1	1

2)

X	−2	−1	0	2	3	4
M	1	2	4	4	1	1

1220 Рост каждой из 50 гимнасток одного спортивного клуба занесён в таблицу:

148	148	149	149	149	149	149	149	149	149
149	150	150	150	150	150	150	150	150	150
150	151	151	151	151	151	151	151	151	152
152	152	152	152	152	152	152	152	153	153
153	153	153	153	153	153	154	154	154	154

По имеющимся данным составить таблицу распределения значений случайной величины X — роста гимнасток клуба: 1) по частотам (M); 2) по относительным частотам (W). Построить полигон относительных частот значений величины X.

1221 Найти дисперсию и среднее квадратичное отклонение значений случайной величины Z, заданных распределением по частотам M:

1)

Z	−2	−1	1	3
M	2	1	3	1

2)

Z	−4	−1	2	3
M	1	2	3	1

1222 Сравнить дисперсии выборок:
1) 2, 3, 5, 3, 7 и 4, 7, 5, 6; 2) −1, 3, 4 и −2, 0, 2, 4, 5.

1223 Сравнить стабильность производительности труда двух рабочих, первый из которых работал 5 дней, а второй — 6 дней, при этом они имели одинаковую среднюю производительность:

1)

Порядковый номер дня недели	1	2	3	4	5	6
Производительность труда I рабочего (дет. / день)	8	11	9	12	10	—
Производительность труда II рабочего (дет. / день)	8	12	11	8	12	9

2)

Порядковый номер дня недели	1	2	3	4	5	6
Производительность труда I рабочего (дет. / день)	9	—	11	10	11	9
Производительность труда II рабочего (дет. / день)	9	10	11	11	10	9

1224 Были произведены замеры десяти диаметров d оснований цилиндров в партии стальных заготовок. Замеры производились дважды — двумя различными измерительными приборами. Результаты измерений (с точностью до 1 мм) первым прибором представлены в таблице слева, а вторым прибором — в таблице справа.

d_1	58	59	60	61	62
M_1	1	2	4	2	1

d_2	59	60	61	62
M_2	2	5	2	1

Сравнить дисперсии значений случайных величин d_1 и d_2.

1225 Среди трёх совокупностей, представленных таблицами распределения, выявить ту совокупность, значения которой имеют меньший разброс данных около своего среднего.

X	1	2	4	5
M	2	1	3	2

Y	−2	0	1	2	3
M	2	3	2	2	1

Z	−5	−4	−2	3
M	1	3	3	1

1226 Массы m пятидесяти детей до года, стоящих на учёте в некоторой районной поликлинике, попадают в промежуток [2; 12]. Распределение значений случайной величины m представлено в частотной таблице:

m	[2; 4)	[4; 6)	[6; 8)	[8; 10)	[10; 12]
M	2	3	13	26	6

Построить гистограмму распределения значений величины m.

1227 Найти математическое ожидание значений случайной величины X, распределение которых по вероятностям представлено в таблице:

1)

X	−3	0	1	2
P	0,2	0,3	0,4	0,1

2)

X	−2	−1	1	2	4
P	0,2	0,2	0,3	0,2	0,1

Приложение

§ 1. Множества

1. Множество и его элементы.

Буквами N, Z, Q, R, C обозначают соответственно множества натуральных, целых, рациональных, действительных и комплексных чисел.

Если x — элемент множества A, то пишут $x \in A$, а если x не является элементом множества A, то пишут $x \notin A$.

Если каждый элемент множества A является элементом множества B, то пишут $A \subset B$ или $B \supset A$ и говорят, что множество A является *подмножеством множества* B. В этом случае говорят также, что A содержится в B или что B содержит A.

Например, $N \subset Z$, $Q \subset R$, $R \subset C$.

Если $A \subset B$ и $B \subset A$, то $A = B$. Иначе говоря, множества A и B *равны*, если каждый элемент множества A принадлежит множеству B, а каждый элемент множества B принадлежит множеству A.

Для удобства вводится понятие *пустого* множества (его обозначают $\varnothing$), которое по определению не содержит элементов и содержится в любом множестве.

Числовые промежутки можно записывать как с помощью неравенств, так и с помощью символики, используемой для обозначения отрезков, лучей, интервалов и др. Один и тот же промежуток обозначают, например, так:

1) $x \leqslant 2$ и $(-\infty; 2]$; 2) $x > -3$ и $(-3; +\infty)$; 3) $-1 < x \leqslant 5$ и $(-1; 5]$.

2. Операции над множествами.

Множество, состоящее из всех тех и только тех элементов, которые принадлежат хотя бы одному из множеств A и B, называется *объединением* множеств A и B и обозначается $A \cup B$ или $A + B$.

Например, если $A = [1; 4]$, $B = [2; 7)$, то $A \cup B = [1; 7)$.

Множество, состоящее из всех тех и только тех элементов, которые принадлежат как множеству A, так и множеству B, называется *пересечением* множеств A и B и обозначается $A \cap B$ или AB. Если $A \cap B = \varnothing$, то говорят, что множества A и B не пересекаются.

Например, если $A = [2; 6)$, $B = (3; 8]$, то $A \cap B = (3; 6)$, а если $A = [1; 5]$, $B = (6; 9)$, то $A \cap B = \varnothing$.

Множество, состоящее из всех элементов множества A, не принадлежащих множеству B, называется *разностью* множеств A и B и обозначается $A \backslash B$.

Например, если $A = [1; 5]$, $B = (2; 4]$, то $A \backslash B = [1; 2] \cup (4; 5]$.

§ 2 Элементы математической логики

1. Высказывание. Отрицание высказывания.

Любое утверждение, о котором имеет смысл говорить, что оно *истинно* или *ложно*, называется *высказыванием*. Сами высказывания будем записывать в фигурных скобках. Например, высказывание A = {число 1352 делится на 4} — истинное высказывание, а высказывание B = {число 2 — единственный корень уравнения $x^2 = 4$} — ложное высказывание.

Из каждого высказывания A можно получить новое высказывание, отрицая его, т. е. утверждая, что высказывание A не имеет места (не выполняется). Такое высказывание (его называют *отрицанием* высказывания A и обозначают $\overline{A}$), является либо истинным, либо ложным. Из двух высказываний A и $\overline{A}$ одно является истинным, а другое — ложным.

Например, если A = {число 132 делится на 3} — истинное высказывание, то $\overline{A}$ = {число 132 не делится на 3} — ложное высказывание.

Пусть A = {во всяком треугольнике три медианы пересекаются в одной точке}, тогда $\overline{A}$ = {не во всяком треугольнике три медианы пересекаются в одной точке} = {найдётся треугольник, в котором три медианы не пересекаются в одной точке}.

Вообще, если высказывание A начинается со слов «все», «каждый», «любой», то для получения $\overline{A}$ надо либо, ничего не меняя, поставить отрицание «не» перед этими словами, либо заменить эти слова на «найдётся», «существует», а утверждение (свойство), которое стоит после этих слов, заменить его отрицанием.

2. Прямая и обратная теоремы. Необходимые и достаточные условия. Противоположные теоремы.

1) Формулировка каждой теоремы содержит её условие и заключение. Поменяв местами в формулировке некоторой теоремы условие и заключение, получим формулировку теоремы, *обратной данной*.

Например, теорема Пифагора утверждает, что если в треугольнике ABC угол C прямой, то $c^2 = a^2 + b^2$, т. е. квадрат стороны, лежащей против угла C (гипотенузы), равен сумме квадратов двух других сторон (катетов). Теорему, обратную теореме Пифагора, можно сформулировать так: если в треугольнике ABC длины сторон a, b, c связаны равенством $c^2 = a^2 + b^2$, то этот треугольник является прямоугольным, а угол C — прямым. Эта теорема верна, и для её доказательства можно воспользоваться теоремой косинусов.

2) Пусть A — некоторое высказывание. Тогда всякое высказывание B, из которого следует A, называется *достаточным условием* для A, а всякое высказывание C, которое следует из A, называется *необходимым условием* для A. В этих случаях пишут $B \Rightarrow A$, $A \Rightarrow C$.

Например, если A = {натуральное число n делится на 4}, C = {последняя цифра числа n чётная}, то $A \Rightarrow C$.

3) Если высказывания M и N таковы, что каждое из них следует из другого ($M \Rightarrow N$, $N \Rightarrow M$), то говорят, что каждое из этих высказываний является *необходимым и достаточным условием* другого, и пишут $M \Leftrightarrow N$.

Это утверждение выражают так:

а) для справедливости M необходимо и достаточно, чтобы имело место N;

б) M имеет место в том и только в том случае, если выполняется N;

в) M справедливо тогда и только тогда, когда выполняется N.

Например, если M = {квадратичная функция $y = ax^2 + bx + c$ принимает положительные значения при всех $x \in R$}, N = {$D = b^2 - 4ac < 0$ и $a > 0$}, то $M \Leftrightarrow N$.

Если в некоторой теореме заменить её условие и заключение их отрицанием, то получится формулировка теоремы, *противоположной* данной.

Например, справедлива теорема: если многоугольник Q является четырёхугольником, то сумма его внутренних углов равна 2π.

Противоположную теорему можно сформулировать так: если многоугольник Q не является четырёхугольником, то сумма его внутренних углов не равна 2π. Эта теорема верна.

Можно показать, что исходная теорема и теорема, противоположная обратной к исходной, либо обе верны, либо обе не верны. Этот факт лежит в основе так называемого метода доказательства *от противного*.

Например, если A = {квадратичная функция $y = ax^2 + bx + c$ принимает положительные значения при всех $x \in R$}, $B = \{D = b^2 - 4ac < 0\}$, то $A \Rightarrow B$. Действительно, если предположить, что $D \geqslant 0$, то $y = 0$ при $x = x_1$ и $x = x_2$, где x_1, x_2 — нули функции $y = ax^2 + bx + c$, а это противоречит A. Следовательно, $D < 0$, т. е. справедливо утверждение B.

§ 3 Предел последовательности

1. Понятие предела последовательности.

Если каждому числу $n \in N$ поставлено в соответствие число x_n, то говорят, что задана *числовая последовательность*; её обозначают $\{x_n\}$ или (x_n); число x_n называют *членом* или *элементом* этой последовательности, n называют *номером* члена x_n.

Например, арифметическая и геометрическая прогрессии — последовательности, n-е члены (a_n и b_n) которых задаются соответственно формулами $a_n = a_1 + d\,(n - 1)$, где d — разность арифметической прогрессии, и $b_n = b_1 q^{n-1}$, где q — знаменатель геометрической прогрессии, $b_1 \neq 0$, $q \neq 0$.

Последовательность $\{x_n\}$ называется *ограниченной снизу*, если существует число c_1 такое, что для всех $n \in N$ выполняется неравенство $c_1 \leqslant x_n$, и *ограниченной сверху*, если существует число c_2 такое, что $x_n \leqslant c_2$ для всех $n \in N$. Если для всех $n \in N$ справедливо неравенство

$$c_1 \leqslant x_n \leqslant c_2,$$

где c_1 и c_2 — некоторые числа, то говорят, что $\{x_n\}$ — *ограниченная последовательность*.

Например, последовательность $\{\sin 5n\}$ ограничена, так как $|\sin 5n| \leqslant 1$, т. е. $-1 \leqslant \sin 5n \leqslant 1$.

Предваряя определение предела последовательности, рассмотрим две числовые последовательности $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$, где

$$x_n = 1 + \frac{(-1)^n}{n}, \quad y_n = \frac{1}{2^n}.$$

Выпишем несколько первых членов каждой последовательности:

$$\{x_n\}:\ 0,\ \frac{3}{2},\ \frac{2}{3},\ \frac{5}{4},\ \frac{4}{5},\ \frac{7}{6},\ \frac{6}{7},\ \frac{9}{8},\ \frac{8}{9},\ \ldots;$$

$$\{y_n\}:\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{8},\ \frac{1}{16},\ \frac{1}{32},\ \frac{1}{64},\ \ldots.$$

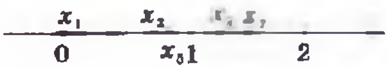


Рис. 176

Рис. 177

Изобразим члены этих последовательностей точками на числовой прямой (рис. 176, 177).

Заметим, что члены последовательности $\{x_n\}$ как бы «сгущаются» около точки 1 (см. рис. 176), располагаясь правее точки 1 при чётных n и левее точки 1 при нечётных n. С увеличением n расстояние от точки x_n до точки 1 уменьшается (стремится к нулю). Поэтому число 1 называют пределом последовательности $\{x_n\}$ при $n \to \infty$ и пишут

$$\lim_{n \to \infty} x_n = 1.$$

Аналогично члены последовательности $\{y_n\}$ с ростом n «приближаются» к точке 0 (см. рис. 177), и поэтому

$$\lim_{n \to \infty} y_n = 0.$$

Сформулируем определение предела последовательности.

Определение. Число a называется пределом последовательности $\{x_n\}$, если для каждого $\varepsilon > 0$ существует такой номер N_ε, что для всех $n > N_\varepsilon$ выполняется неравенство $|x_n - a| < \varepsilon$.

Если a — предел последовательности, то пишут

$$\lim_{n \to \infty} x_n = a \text{ или } x_n \to a \text{ при } n \to \infty.$$

Замечание. Запись N_ε указывает на то, что номер, начиная с которого все члены последовательности удовлетворяют условию $|x_n - a| < \varepsilon$, зависит, вообще говоря, от ε.

Если $x_n = a$ для всех $n \in N$ (такую последовательность называют *стационарной*), то $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = a$.

Последовательность, у которой существует предел, называют *сходящейся*.

Последовательность, не являющуюся сходящейся, называют *расходящейся*; иначе говоря, последовательность называют расходящейся, если никакое число не является её пределом.

Обратимся ещё раз к определению предела последовательности. Согласно определению число a является пределом последовательности $\{x_n\}$, если при всех $n > N_\varepsilon$ выполняется неравенство $|x_n - a| < \varepsilon$, которое можно записать в виде

$$a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon.$$

Рис. 178

Другими словами, для каждого $\varepsilon > 0$ найдётся номер N_ε, начиная с которого все члены последовательности $\{x_n\}$ принадлежат интервалу $(a - \varepsilon;\ a + \varepsilon)$. Этот интервал называют ε-*окрестностью* точки a (рис. 178) и обозначают $U_\varepsilon(a)$.

Итак, число a — предел последовательности $\{x_n\}$, если для каждой ε-окрестности точки a найдётся номер, начиная с которого все члены последовательности принадлежат ε-окрестности точки a, так что вне этой окрестности либо нет ни одного члена последовательности, либо содержится лишь конечное число членов.

Задача 1 С помощью определения предела последовательности доказать, что: а) $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{n+1}{n} = 1$; б) $\lim\limits_{n \to \infty} q^n = 0$ при $|q| < 1$; в) $\lim\limits_{n \to \infty} (\sqrt{n+2} - \sqrt{n+1}) = 0$.

► а) Если $x_n = \frac{n+1}{n}$, то $x_n = 1 + \frac{1}{n}$, откуда $|x_n - 1| < \frac{1}{n}$. Неравенство $|x_n - 1| < \varepsilon$ будет выполняться, если $\frac{1}{n} < \varepsilon$, т. е. при $n > \frac{1}{\varepsilon}$, а в качестве N_ε можно взять число $N_\varepsilon = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right] + 1$, где $\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]$ — целая часть числа $\frac{1}{\varepsilon}$, т. е. наибольшее целое число, не превосходящее $\frac{1}{\varepsilon}$.

б) Если $x_n = q^n$ и $q \neq 0$, то $r = \frac{1}{|q|} > 1$, так как $|q| < 1$. Тогда $r = 1 + \alpha$, где $\alpha > 0$, откуда $\frac{1}{|q|^n} = r^n = (1+\alpha)^n$. Можно показать, что $(1 + \alpha)^n > \alpha n$ при $\alpha > 0$ и любом $n \in N$. Тогда $|x_n| = |q|^n < \frac{1}{\alpha n}$ и для всех $n \geqslant N_\varepsilon$, где $N_\varepsilon = \left[\frac{1}{\alpha\varepsilon}\right] + 1$, справедливо неравенство $|x_n| < \frac{1}{\alpha n} \leqslant \frac{1}{\alpha N_\varepsilon} < \varepsilon$. Это означает, что $\lim\limits_{n \to \infty} q^n = 0$, если $|q| < 1$.

в) Так как

$$x_n = \sqrt{n+2} - \sqrt{n+1} = \frac{(\sqrt{n+2})^2 - (\sqrt{n+1})^2}{\sqrt{n+2} + \sqrt{n+1}} = \frac{1}{\sqrt{n+2} + \sqrt{n+1}} < \frac{1}{2\sqrt{n}},$$

то неравенство $\frac{1}{2\sqrt{n}} < \varepsilon$, равносильное неравенству $n > \frac{1}{4\varepsilon^2}$, будет выполняться для всех $n \geqslant N_\varepsilon$, где $N_\varepsilon = \left[\frac{1}{4\varepsilon^2}\right] + 1$. Это означает, что $\lim\limits_{n \to \infty} (\sqrt{n+2} - \sqrt{n+1}) = 0$. ◁

2. Свойства сходящихся последовательностей.

1) Если последовательность имеет предел, то она ограничена.

2) Если последовательности $\{x_n\}$, $\{y_n\}$, $\{z_n\}$ таковы, что для всех $n \geqslant N_0$ выполняется неравенство

$$x_n \leqslant y_n \leqslant z_n,$$

и если $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = a$, $\lim\limits_{n \to \infty} z_n = a$, то последовательность $\{y_n\}$ сходится и $\lim\limits_{n \to \infty} y_n = a$.

3) Если $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = a$, $\lim\limits_{n \to \infty} y_n = b$, то $\lim\limits_{n \to \infty} (x_n \pm y_n) = a \pm b$, $\lim\limits_{n \to \infty} (x_n y_n) = ab$, $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{x_n}{y_n} = \frac{a}{b}$ при условии, что $y_n \neq 0$ $(n \in N)$ и $b \neq 0$.

4. Предел монотонной последовательности.

Последовательность $\{x_n\}$ называют: *возрастающей*, если для любого $n \in N$ верно неравенство $x_{n+1} > x_n$; *неубывающей*, если для любого $n \in N$ справедливо неравенство $x_{n+1} \geqslant x_n$.

Последовательность $\{x_n\}$ называют: *убывающей*, если для любого $n \in N$ верно неравенство $x_{n+1} < x_n$; *невозрастающей*, если для любого $n \in N$ справедливо неравенство $x_{n+1} \leqslant x_n$.

Теорема. Если последовательность $\{x_n\}$ является возрастающей (неубывающей) и ограничена сверху, то она имеет предел.

Если последовательность $\{x_n\}$ является убывающей (невозрастающей) и ограничена снизу, то она имеет предел.

Например, последовательность $x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ является возрастающей и ограничена сверху ($x_n < 3$ при всех $n \in N$), поэтому она имеет предел. Этот предел равен числу e, где $e \approx 2{,}7182818289045$.

§ 4 Дробно-линейная функция и её график

Функцию вида

$$y = \frac{ax+b}{cx+d}, \qquad (1)$$

где a, b, c, d — заданные числа, такие, что $c \neq 0$, $ad \neq bc$, называют *дробно-линейной*.

Если $c = 0$ и $d \neq 0$, то y — линейная функция; если $ad = bc$, то $y = \text{const}$. Дробно-линейная функция определена при всех $x \in R$, кроме $x = -\frac{d}{c}$. Преобразуем правую часть равенства (1), выделив целую часть:

$$\frac{ax+b}{cx+d} = \frac{a\left(x+\frac{d}{c}\right)+b-\frac{ad}{c}}{c\left(x+\frac{d}{c}\right)} = \frac{a}{c} + \frac{bc-ad}{c^2}\cdot\frac{1}{x+\frac{d}{c}},$$

$$y = \frac{a}{c} + \frac{bc-ad}{c^2}\cdot\frac{1}{x+\frac{d}{c}}. \qquad (2)$$

Полагая

$$A = \frac{a}{c},\ B = \frac{bc-ad}{c^2},\ x_0 = -\frac{d}{c}, \qquad (3)$$

запишем равенство (2) в виде

$$y = A + \frac{B}{x-x_0}. \qquad (4)$$

Из формулы (4) следует, что график дробно-линейной функции (1) можно получить сдвигом гиперболы $y = \frac{B}{x}$ на $|x_0|$ единиц вдоль оси Ox и $|A|$ единиц вдоль оси Oy (направление сдвига зависит от знаков чисел x_0 и A, x_0 — корень уравнения $cx + d = 0$; запоминать формулы (3) нет необходимости). Точка $(x_0; A)$ — центр симметрии графика функции (4).

Прямая $x = x_0$ является вертикальной асимптотой графика функции (1), а прямая $y = A$ — горизонтальная асимптота этого графика при $x \to +\infty$ и $x \to -\infty$.

Задача 1 Построить график функции $y = \frac{3x+2}{2x+3}$.

► Так как $\frac{3x+2}{2x+3} = \frac{3\left(x+\frac{3}{2}\right)+2-4{,}5}{2\left(x+\frac{3}{2}\right)} = 1{,}5 - \frac{1{,}25}{x+1{,}5}$, т. е.

$$y = 1{,}5 - \frac{1{,}25}{x+1{,}5},$$

то график данной функции можно получить из графика функции $y = -\frac{1{,}25}{x}$ (рис. 179) сдвигом вдоль оси Ox на 1,5 так, что точка $(-1{,}5; 1{,}5)$ — центр симметрии графика, а прямые $x = -1{,}5$ и $y = 1{,}5$ — его асимптоты. График пересекает ось Ox в точке $\left(-\frac{2}{3}; 0\right)$, а ось Oy — в точке $\left(0; \frac{2}{3}\right)$ и изображён на рисунке 179. ◁

Рис. 179

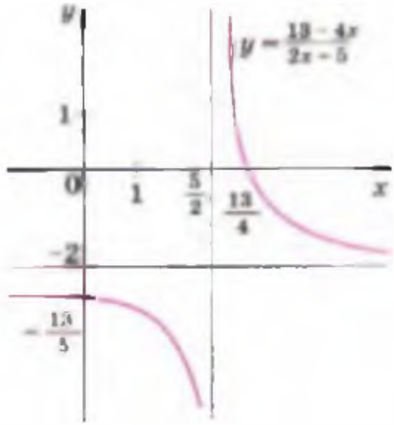


Рис. 180

Задача 2 Построить график функции $y=\frac{13-4x}{2x-5}$.

▶ Так как $\frac{13-4x}{2x-5}=\frac{-2(2x-5)+3}{2x-5}=-2+\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{x-\frac{5}{2}}$, т. е. $y=-2+\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{x-\frac{5}{2}}$, то прямые $x=\frac{5}{2}$ и $y=-2$ — асимптоты графика функции, точка $\left(\frac{5}{2};\ -2\right)$ — центр симметрии, а $\left(\frac{13}{4};\ 0\right)$; и $\left(0;\ -\frac{13}{5}\right)$ — точки пересечения графика с осями координат (рис. 180). ◁

§ 5 Уравнения и неравенства с двумя неизвестными

1. Линейные уравнения с двумя неизвестными.

Пусть на плоскости дана прямоугольная система координат Oxy. Тогда уравнение

$$y=kx+b \qquad (1)$$

определяет прямую l (рис. 181), пересекающую ось Oy в точке $M\ (0;\ b)$ и образующую угол α с положительным направлением оси Ox, где $\operatorname{tg}\alpha=k$ — угловой коэффициент прямой l.

Чтобы построить прямую l, заданную уравнением (1), достаточно найти две точки этой прямой. На рисунке 182 изображены пря-

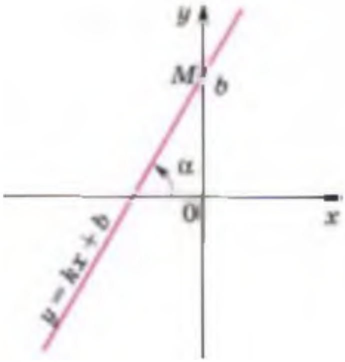


Рис. 181

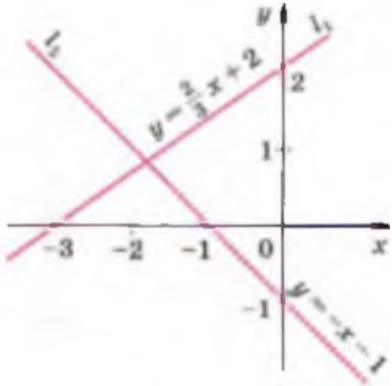


Рис. 182

мые l_1 и l_2, заданные соответственно уравнениями $y = \frac{2}{3}x + 2$ и $y = -x - 1$.

Рассмотрим уравнение

$$Ax + By + C = 0, \qquad (2)$$

предполагая, что хотя бы одно из чисел A, B отлично от нуля $(A^2 + B^2 > 0)$.

Пусть $B \neq 0$, тогда уравнение (2) можно записать в виде $y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B}$, т. е. в виде (1), где $k = -\frac{A}{B}$, $b = -\frac{C}{B}$.

Если $B = 0$ и $A \neq 0$, то уравнение (2), которое можно записать в виде $x = -\frac{C}{A}$, есть уравнение прямой, параллельной оси Oy.

Таким образом, при любых A, B, C, таких, что $A^2 + B^2 > 0$, уравнение (2) является уравнением некоторой прямой.

2. Линейные неравенства с двумя неизвестными.

Задача 1 Дать геометрическое описание множества точек координатной плоскости, удовлетворяющих неравенству $3y - 2x - 6 < 0$.

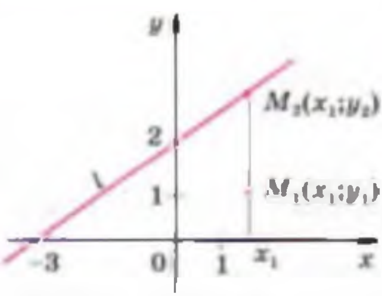


Рис. 183

▶ Уравнением $3y - 2x - 6 = 0$ задаётся прямая (рис. 183), проходящая через точки $(-3;\ 0)$ и $(0;\ 2)$. Пусть $M_1\ (x_1;\ y_1)$ — точка, расположенная ниже прямой l, а $M_2\ (x_1;\ y_2)$ — точка с абсциссой x_1 и ординатой y_2, лежащая на прямой l. Тогда

$$3y_2 - 2x_1 - 6 = 0,$$
$$3y_1 - 2x_1 - 6 < 0,$$

так как $y_1 < y_2$.

Аналогично можно показать, что в любой точке M $(x;\ y)$, лежащей ниже прямой l, выполняется неравенство $3y - 2x - 6 < 0$; в любой точке M $(x;\ y)$, лежащей выше прямой l, справедливо неравенство $3y - 2x - 6 > 0$. ◁

Рассмотрим неравенство

$$Ax + By + C < 0, \tag{3}$$

считая, что $A^2 + B^2 > 0$.

Как и в задаче 1, возьмём точки (они лежат на прямой, параллельной оси Oy) M_1 $(x_1;\ y_1)$ и M_2 $(x_1;\ y_2)$, такие, что M_1 лежит ниже прямой l, заданной уравнением (2), а M_2 — на этой прямой, тогда $y_1 < y_2$.

Если $B > 0$, то $By_1 < By_2$, и поэтому $Ax_1 + By_1 + C < 0$, т. е. координаты точки M_1 удовлетворяют неравенству (3). Этому неравенству удовлетворяют координаты любой точки, расположенной ниже прямой l, если $B > 0$.

Если $B < 0$, то неравенству (3) удовлетворяют координаты любой точки, лежащей выше прямой l.

Если $B = 0$ $(A \neq 0)$, то неравенство (3) примет вид $Ax + C < 0$. Это неравенство равносильно неравенству $x < -\frac{C}{A}$ при $A > 0$ и неравенству $x > -\frac{C}{A}$ при $A < 0$.

Например, неравенство $3x + 4 < 0$, равносильное неравенству $x < -\frac{4}{3}$, выполняется во всех точках, лежащих слева от прямой $x = -\frac{4}{3}$.

Таким образом, прямая, заданная уравнением (2), разбивает плоскость на две полуплоскости, такие, что во всех точках одной из этих полуплоскостей выполняется неравенство (3), а в другой — неравенство

$$Ax + By + C > 0. \tag{4}$$

Чтобы решить неравенство (3) или неравенство (4), т. е. чтобы определить, в какой из полуплоскостей оно справедливо, достаточно определить знак левой части этого неравенства в какой-либо точке одной из полуплоскостей.

Если $C \neq 0$ (прямая не проходит через начало координат), то в качестве такой точки удобно взять точку $(0;\ 0)$.

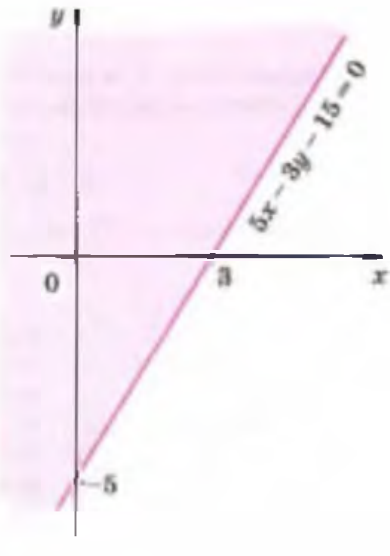


Рис. 184

Например, неравенство $5x - 3y - 15 < 0$ при $x = y = 0$ является верным. Поэтому оно выполняется во всех точках той из полуплоскостей (их общая граница — прямая $5x - 3y - 15 = 0$), которая содержит точку (0; 0). Эта полуплоскость отмечена на рисунке 184.

3. Системы линейных неравенств с двумя неизвестными.

Рассмотрим систему неравенств

$$\begin{cases} A_1 x + B_1 y + C_1 > 0, \\ A_2 x + B_2 y + C_2 > 0, \end{cases} \qquad (5)$$

предполагая, что $A_1^2 + B_1^2 > 0$, $A_2^2 + B_2^2 > 0$. Первому неравенству системы (5) удовлетворяют точки множества K_1, лежащие по одну сторону от прямой l_1, заданной уравнением $A_1x + B_1y + C_1 = 0$.

Аналогично второе неравенство системы (5) является верным на множестве K_2 — одной из полуплоскостей, на которые разбивается координатная плоскость прямой l_2, заданной уравнением $A_2x + B_2y + C_2 = 0$.

Множество решений системы (5) — пересечение множеств K_1 и K_2.

Если прямые l_1 и l_2 пересекаются в точке A, то множество решений системы (5) — множество точек, расположенных внутри одного из четырёх попарно вертикальных углов с вершиной в точке A.

Задача 2 Решить систему неравенств

$$\begin{cases} 2x - 3y + 6 > 0, \\ x + y + 1 < 0. \end{cases} \qquad (6)$$

▶ Найдём точку A, в которой пересекаются прямые l_1 и l_2, заданные соответственно уравнениями системы

$$\begin{cases} 2x - 3y + 6 = 0, \\ x + y + 1 = 0. \end{cases} \qquad (7)$$

Решив систему (7), получим, что прямые l_1 и l_2 пересекаются в точке $A\left(-\frac{9}{5}; \frac{4}{5}\right)$. Так как координаты точки O (0; 0) удовлетворяют первому неравенству системы (6) и не удовлетворяют второму неравенству, то системе (6) удовлетворяют координаты тех и только тех точек, которые лежат ниже прямой l_1 и ниже прямой l_2, т. е. точки того угла с вершиной A, который содержит точку (−2; 0) (рис. 185). ◁

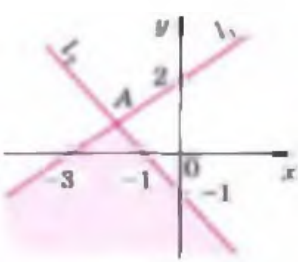


Рис. 185

4. Нелинейные уравнения и неравенства с двумя неизвестными.

а) *Нелинейные уравнения с двумя неизвестными.*

Задача 3 Найти множество точек координатной плоскости, удовлетворяющих уравнению:

1) $y^2 - 4x^2 = 0$;
2) $6x^2 + xy - y^2 = 0$;
3) $x^2 + y^2 - 4x + 6y - 3 = 0$.

▶ 1) Запишем уравнение в виде $(y - 2x)(y + 2x) = 0$.

Множество точек, удовлетворяющих этому уравнению, — объединение прямых $y = 2x$ и $y = -2x$.

2) Разложим левую часть уравнения на множители:

$$9x^2 - y^2 - 3x^2 + xy = (3x + y)(3x - y) - x(3x - y) = (3x - y)(2x + y).$$

Искомое множество — объединение прямых $3x - y = 0$ и $2x + y = 0$.

3) Применяя метод выделения полного квадрата, получаем

$$x^2 + y^2 - 4x + 6y - 3 = 0,$$
$$(x - 2)^2 + (y + 3)^2 - 16 = 0,$$
$$(x - 2)^2 + (y + 3)^2 = 16.$$

Следовательно, множество решений данного уравнения — окружность радиуса 4 с центром в точке $A\ (2; -3)$. ◁

б) *Нелинейные неравенства с двумя неизвестными.*

Если $A\ (a; b)$ — точка координатной плоскости, $R > 0$, то неравенству

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 < R^2$$

удовлетворяют все те точки, которые находятся от точки A на расстоянии, меньшем R, т. е. все точки (и только они), расположенные внутри окружности C радиуса R с центром в точке $A\ (a; b)$.

Аналогично множество решений неравенства

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 > R^2$$

есть множество точек, лежащих вне окружности C.

Задача 4 Найти множество точек координатной плоскости, удовлетворяющих неравенству:

$$2x^2 + 2y^2 + 2x - 6y - 13 < 0.$$

▶ Преобразуем неравенство, выделяя полный квадрат:

$$2\left(x^2 + x + \frac{1}{4}\right) + 2\left(y^2 - 3y + \frac{9}{4}\right) - 13 - 5 < 0,$$

$$\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{3}{2}\right)^2 < 9.$$

Множество решений этого неравенства — множество точек, лежащих внутри окружности радиуса 3 с центром в точке $\left(-\frac{1}{2}; \frac{3}{2}\right)$. ◁

Упражнения для итогового повторения курса алгебры и начал математического анализа

Умение решать задачи — практическое искусство, подобное плаванию, или катанию на лыжах, или игре на фортепьяно: научиться этому можно, лишь подражая избранным образцам и постоянно тренируясь...

Д. Пойа

1. Числа и алгебраические преобразования.

1228 Найти 2,5% от 3,2.

1229 Найти число, если 42% его составляют 12,6.

1230 Какой процент составляет 1,3 от 39?

1231 Сколько процентов составляет 46,6 от 11,65?

1232 Найти число, 175% которого составляют 78,75.

1233 Найти 180% от 7,5.

1234 Цена товара была снижена сначала на 24%, а затем на 50% от новой цены. Найти общий процент снижения цены товара.

1235 В сплаве содержится 18 кг цинка, 6 кг олова и 36 кг меди. Каково процентное содержание составных частей сплава?

1236 Стоимость товара и перевозки составляет 3942 р., причём расходы по перевозке товара составляют 8% стоимости самого товара. Какова стоимость товара без учета стоимости его перевозки?

1237 Высота пирамиды равна 5 см, а площадь её основания равна 4 см^2. На сколько процентов увеличится объём этой пирамиды, если и площадь её основания, и высоту увеличить на 10%?

1238 При делении некоторого числа на 72 получится остаток, равный 68. Каким будет остаток, если это же число разделить на 12?

1239 Сумма двух чисел равна 1100. Найти наибольшее из них, если 6% одного числа равны 5% другого.

1240 По вкладу, вносимому на срок не менее года, банк начисляет 3% годовых. Вкладчик внёс в банк вклад в размере 600 р. Какую сумму денег он получит в конце второго года со дня вклада? в конце третьего года со дня вклада?

1241 По обычному вкладу банк начисляет 2% годовых. Вкладчик внёс 500 р., а через месяц снял со счёта 100 р. Какая сумма денег будет на его счету по истечении года со дня выдачи ему 100 р.?

Вычислить (1242—1243).

1242 1) $23{,}276 : 2{,}3 - 3{,}6 \cdot (17{,}2 \cdot 0{,}125 + 0{,}005 : 0{,}1) + 6{,}25 \cdot 3{,}2$;

2) $9{,}25 \cdot 1{,}04 - (6{,}372 : 0{,}6 + 1{,}125 \cdot 0{,}8) : 1{,}2 + 0{,}16 \cdot 6{,}25$.

1243 1) $\dfrac{\left(28 : 1\frac{3}{4} + 7\frac{1}{3} : 22 + 1\frac{2}{3} \cdot 9\frac{3}{4} + 14 : 1\frac{1}{2}\right) \cdot 3\frac{1}{7}}{10\frac{1}{2} - 9\frac{3}{4}}$;

2) $\left(\frac{1}{2} - 0{,}375\right) : 0{,}125 + \left(\frac{5}{6} - \frac{7}{12}\right) : (0{,}358 - 0{,}108)$.

1244 Найти неизвестный член пропорции:

1) $10 : \frac{1}{8} = x : 1\frac{1}{4}$; 2) $x : 0{,}75 = 9\frac{1}{2} : 14\frac{1}{4}$; 3) $\frac{x}{15} = \frac{1{,}456}{1{,}05}$.

Вычислить (1245—1249).

1245 $\left(\dfrac{15 \cdot 5^{\frac{1}{2}}}{125^{-\frac{1}{3}}} - 2 \cdot 7^{\frac{1}{2}} \cdot 49^{\frac{1}{4}}\right)\left(\left(\frac{1}{81}\right)^{-\frac{1}{4}} + 45^{\frac{1}{2}}\right) - 183\sqrt{5}$.

1246 1) $\log_{27} 729$; 2) $\log_9 729$; 3) $\log_{\frac{1}{3}} 729$.

1247 1) $\log_{\frac{1}{16}} \sqrt[6]{64}$; 2) $\log_3 \log_4 \log_2 16$.

1248 1) $\left(2^{\frac{1}{\sqrt{3}}}\right)^{\sqrt{3}}$; 2) $\left(2^{\sqrt{27}}\right)^{\sqrt{3}} \cdot 2^{-3}$.

1249 1) $\log_3 \frac{9}{\sqrt[5]{3}} + \log_6 \sqrt[5]{36}$; 2) $16^{0{,}5 \log_4 10 + 1}$.

1250 Сравнить числа:

1) $2{,}5^{\frac{1}{7}}$ и $2{,}5^{0{,}5}$; 2) $0{,}2^{\frac{2}{3}}$ и $0{,}2^{\frac{3}{4}}$;

3) $\log_{3,1} \sqrt{10}$ и $\log_{3,1} 3$; 4) $\log_{0,3} \frac{4}{5}$ и $\log_{0,3} \frac{3}{4}$.

1251 Какому из промежутков (0; 1) или (1; +∞) принадлежит число a, если:

1) $a^{0,2} > 1$; 2) $a^{-1,3} > 1$; 3) $a^{-3,1} < 1$;

4) $a^{2,7} < 1$; 5) $\log_a 0{,}2 > 0$; 6) $\log_a 1{,}3 > 0$?

1252 Какое из чисел больше:

1) $\sqrt{18}$ или $4^{\log_2 3 + \log_4 \frac{8}{11}}$; 2) $\sqrt[3]{18}$ или $\left(\frac{1}{6}\right)^{\log_6 2 - \frac{1}{2}\log_{\sqrt{6}} 5}$?

1253 Между какими целыми числами заключено число:

1) $\lg 50$; 2) $\log_2 10$?

Упростить (1254—1255).

1254 1) $3\sqrt{\frac{5}{9}} - \frac{1}{2}\sqrt{20} + 3\sqrt{180} - 4\sqrt{\frac{125}{4}}$;

2) $\frac{1}{\sqrt{6}-\sqrt{5}} - \frac{3}{\sqrt{5}+\sqrt{2}} - \frac{4}{\sqrt{6}-\sqrt{2}}$.

1255 1) $\sqrt{a^4(9a^2-6a+1)}$; 2) $\sqrt{b^4(4b^4+4b^2+1)}$.

1256 Освободиться от иррациональности в знаменателе дроби:

1) $\frac{5}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$; 2) $\frac{3}{\sqrt{6}+\sqrt{5}}$; 3) $\frac{12}{\sqrt{10}-\sqrt{7}}$; 4) $\frac{8}{\sqrt{11}+\sqrt{3}}$.

1257 Освободиться от иррациональности в числителе дроби:

1) $\frac{\sqrt{5}}{10}$; 2) $\frac{3\sqrt{6}}{6}$; 3) $\frac{\sqrt{7}-\sqrt{5}}{2}$.

1258 Записать в виде обыкновенной дроби число:

1) 0,(4); 2) 2,(7); 3) 0,(21);

4) 1,(36); 5) 0,3(5); 6) 0,21(3).

1259 Записать в виде десятичной периодической дроби число:

1) $\frac{5}{6}$; 2) $2\frac{1}{9}$; 3) $\frac{1}{7}$; 4) $5\frac{2}{11}$.

1260 Может ли быть рациональным числом:

1) сумма двух положительных иррациональных чисел;

2) произведение двух иррациональных чисел;

3) частное от деления суммы двух неравных иррациональных положительных чисел на их произведение?

1261 Доказать, что если a и b — натуральные числа и $\sqrt{ab}$ — рациональное число, то $\sqrt{\frac{a}{b}}$ также рациональное число, а если $\sqrt{ab}$ — иррациональное число, то и $\sqrt{\frac{a}{b}}$ — иррациональное число.

1262 Пусть a — рациональное число, b — иррациональное число, $a \neq 0$, $b \neq 0$. Доказать, что $a + b$, $a \cdot b$, $\frac{a}{b}$, $\frac{b}{a}$ — иррациональные числа.

1263 Имеют ли общие точки промежутки:

1) $[1;\ 3\sqrt{2} + 2\sqrt{7}]$ и $[3\sqrt{3} + 4;\ 15]$;

2) $(0;\ \sqrt{27} + \sqrt{6})$ и $(\sqrt{48} - 1;\ 10)$;

3) $[2;\ 2\sqrt{5} + 2\sqrt{6}]$ и $(3\sqrt{2} + \sqrt{22};\ 11)$;

4) $[1;\ 1 + \sqrt{3}]$ и $\left(\frac{2}{\sqrt{3} - 1};\ 4\right)$?

1264 Пусть $0 < a < b$. Доказать, что на числовой оси:

1) точка $\frac{a + b}{2}$ — середина отрезка $[a;\ b]$;

2) точка $\frac{a + bc}{1 + c}$, где $c > 0$, лежит внутри отрезка $[a;\ b]$.

1265 1) Вычислить диаметр x круга, вписанного в равносторонний треугольник (рис. 186), если $a = 6$ см.

2) Вычислить угол α заготовки, изображённой на рисунке 187, если $a = 4$ см.

1266 Вычислить ширину l ущелья по данным, указанным на рисунке 188.

1267 Вычислить длину моста по данным, указанным на рисунке 189.

1268 Найти числовые значения всех остальных тригонометрических функций по данному значению одной из них $\left(0 < \alpha < \frac{\pi}{2}\right)$:

1) $\cos\alpha = 0{,}8$; 2) $\sin\alpha = \frac{5}{13}$; 3) $\operatorname{tg}\alpha = 2{,}4$; 4) $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{7}{24}$.

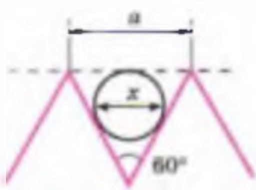


Рис. 186

Рис. 187

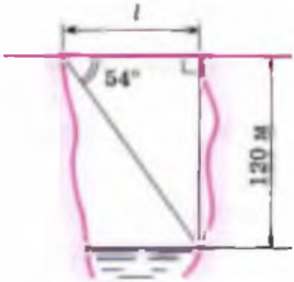


Рис. 188

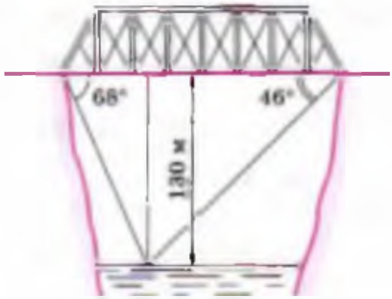


Рис. 189

1269 Вычислить $\cos 2\alpha$, если $\sin \alpha = \frac{1}{3}$.

1270 Найти значение выражения $\sin \frac{11\pi}{3} + \cos 690^\circ - \cos \frac{19\pi}{3}$.

Вычислить **(1271—1276)**.

1271 1) $2 \operatorname{arctg} 1 - 3 \arcsin \frac{\sqrt{3}}{2}$; 2) $8 \arccos \frac{\sqrt{2}}{2} + 6 \operatorname{arctg} \sqrt{3}$.

1272 1) $\sin\left(2 \arcsin \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$; 2) $\operatorname{tg}(2 \operatorname{arctg} 3)$.

1273 1) $\log_4 \sin \frac{\pi}{4}$; 2) $\log_{10} \operatorname{tg} \frac{\pi}{4}$; 3) $\log_8 \sin \frac{3\pi}{4}$;

4) $\log_2 \cos \frac{\pi}{3}$; 5) $\log_3 1 - \log_4 \operatorname{tg} \frac{\pi}{4} \cdot \log_5 \cos 0$.

1274 1) $\operatorname{ctg}(\operatorname{arctg} \sqrt{3})$; 2) $\operatorname{ctg}(\operatorname{arctg} 1)$; 3) $\sin(\operatorname{arctg}(-\sqrt{3}))$;

4) $\sin\left(\operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$; 5) $\cos(\operatorname{arctg} 1)$; 6) $\cos(\operatorname{arctg}(-\sqrt{3}))$.

1275 1) $\cos\left(6 \arccos \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$; 2) $\sin(5 \arccos 0)$.

1276 1) $\frac{\sin \alpha \cos \alpha}{\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha}$ при $\operatorname{tg} \alpha = \frac{3}{4}$;

2) $\sin \alpha \cos \alpha$, если $\sin \alpha + \cos \alpha = \frac{1}{3}$.

Упростить выражение **(1277—1279)**.

1277 1) $\frac{a+2}{a-2} \cdot \left(\frac{2a^2 - a - 3}{a^2 + 5a + 6} : \frac{2a-3}{a-2}\right)$; 2) $\left(2 + \frac{1}{b}\right) : \frac{8b^2 + 8b + 2}{b^2 - 4b} \cdot \frac{2b+1}{b}$.

1278 1) $\frac{a}{a^2-1}+\frac{a^2+a-1}{a^3-a^2+a-1}+\frac{a^2-a-1}{a^3+a^2+a+1}-\frac{2a^3}{a^4-1}$;

2) $\frac{1}{a^2+5a+6}+\frac{2a}{a^2+4a+3}+\frac{1}{(a+1)^2+a+1}-\frac{2}{a+3}$.

1279 1) $\frac{1}{4+4\sqrt{a}}-\frac{1}{2-2a}+\frac{1}{4-4\sqrt{a}}$; 2) $\frac{a\sqrt{2}+a-\sqrt{2}-1}{a\sqrt{2}-2-\sqrt{2}+2a}$.

1280 Упростить выражение и найти его значение:

1) $\left(1+\sqrt{\frac{a-x}{a+x}}\right)\cdot\left(1-\sqrt{\frac{a-x}{a+x}}\right)$ при $a=5$, $x=4$;

2) $\frac{a+\sqrt{a^2-x^2}}{a-\sqrt{a^2-x^2}}-\frac{a-\sqrt{a^2-x^2}}{a+\sqrt{a^2-x^2}}$ при $a=3$, $x=\sqrt{5}$.

Упростить выражение (1281—1288).

1281 1) $\frac{x^{\frac{1}{2}}}{1+x^{\frac{1}{2}}}\cdot\left(\frac{x^{\frac{1}{2}}}{1-x^{\frac{1}{2}}}-\frac{1}{x^{\frac{1}{2}}-x}\right)$; 2) $\frac{m+2m^{\frac{1}{2}}+1}{2m^{\frac{1}{2}}}\cdot\left(\frac{2m^{\frac{1}{2}}}{m^{\frac{1}{2}}-1}-\frac{4m^{\frac{1}{2}}}{m-1}\right)$.

1282 1) $6n\cdot\sqrt{\frac{m}{2n}}\cdot\sqrt{18mn}$; 2) $\frac{a-1}{a^{\frac{3}{4}}+a^{\frac{1}{2}}}\cdot\frac{a^{\frac{1}{2}}+a^{\frac{1}{4}}}{a^{\frac{1}{2}}+1}\cdot a^{\frac{1}{4}}$.

1283 1) $\left(\frac{a\sqrt{a}-1}{\sqrt{a}-1}+\sqrt{a}\right):\frac{a-1}{\sqrt{a}-1}$; 2) $\left(\frac{1+b\sqrt{b}}{1+\sqrt{b}}-\sqrt{b}\right)\cdot\frac{1+\sqrt{b}}{1-b}$.

1284 $\frac{a^{-1}b^{-2}-a^{-2}b^{-1}}{a^{-\frac{5}{3}}b^{-2}-b^{-\frac{5}{3}}a^{-2}}-a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}}$.

1285 1) $\left(\frac{a+\sqrt{ab}}{\sqrt{a^2+ab}}-\frac{\sqrt{ab+b^2}}{\sqrt{ab}+b}\right)^{-2}-\frac{\sqrt{a^3b}+\sqrt{ab^3}}{2ab}$;

2) $(\sqrt{a}+\sqrt{b})^{-2}\cdot\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)+\frac{2\left(a^{-\frac{1}{2}}+b^{-\frac{1}{2}}\right)}{(\sqrt{a}+\sqrt{b})^3}$.

1286 $\left(\frac{9a-25a^{-1}}{3a^{\frac{1}{2}}-5a^{-\frac{1}{2}}}-\frac{a+7+10a^{-1}}{a^{\frac{1}{2}}+2a^{-\frac{1}{2}}}\right)^4$.

1287 $\left(\dfrac{3\sqrt[3]{b}}{\sqrt[3]{b^4}-9\sqrt[3]{b}}+\dfrac{1}{\sqrt{b}-\dfrac{9}{\sqrt{b}}}\right)^{-2}-(b^2+18b+81)^{0,5}$.

1288 1) $\dfrac{1+\operatorname{tg}^2\alpha}{1+\operatorname{ctg}^2\alpha}$; 2) $(1+\operatorname{tg}\alpha)(1+\operatorname{ctg}\alpha)-\dfrac{1}{\sin\alpha\cos\alpha}$.

1289 Доказать тождество $\dfrac{1-(\sin\alpha+\cos\alpha)^2}{\sin\alpha\cos\alpha-\operatorname{ctg}\alpha}=2\operatorname{tg}^2\alpha$.

Упростить выражение **(1290—1291)**.

1290 1) $\sin^2(\alpha+8\pi)+\cos^2(\alpha+10\pi)$;
2) $\cos^2(\alpha+6\pi)+\cos^2(\alpha-4\pi)$.

1291 $\dfrac{\sin 2\alpha}{2(1-2\cos^2\alpha)}+\dfrac{\sin\alpha\cos(\pi-\alpha)}{1-2\sin^2\alpha}$.

1292 Доказать тождество $\dfrac{\cos^2 x}{1+\sin x}-\dfrac{\sin^2 x}{1-\cos x}=-\sin x-\cos x$.

1293 Разложить на множители:
1) $1+\cos\alpha+\sin\alpha$; 2) $1-\cos\alpha-\sin\alpha$;
3) $3-4\sin^2\alpha$; 4) $1-4\cos^2\alpha$.

1294 Доказать, что если $\alpha+\beta+\gamma=\pi$, то:
1) $\sin\alpha+\sin\beta-\sin\gamma=4\sin\dfrac{\alpha}{2}\sin\dfrac{\beta}{2}\cos\dfrac{\gamma}{2}$;
2) $\sin 2\alpha+\sin 2\beta+\sin 2\gamma=4\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma$.

1295 Известно, что $\operatorname{tg}\alpha=2$. Найти значение выражения:
1) $\dfrac{\sin^2\alpha+\sin\alpha\cos\alpha}{\cos^2\alpha+3\cos\alpha\sin\alpha}$; 2) $\dfrac{2-\sin^2\alpha}{3+\cos^2\alpha}$.

1296 Известно, что $\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{ctg}\alpha=3$. Найти $\operatorname{tg}^2\alpha+\operatorname{ctg}^2\alpha$.

Упростить выражение **(1297—1302)**.

1297 1) $\dfrac{\cos\alpha+\sin\alpha}{\cos\alpha-\sin\alpha}-\operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{4}+\alpha\right)$; 2) $\operatorname{tg}^2\left(\dfrac{\pi}{2}-\alpha\right)-\dfrac{1-\cos 2\alpha}{1+\cos 2\alpha}$.

1298 1) $\dfrac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{ctg}\beta}$; 2) $(\sin\alpha+\cos\alpha)^2+(\sin\alpha-\cos\alpha)^2$;
3) $\dfrac{\sin\left(\dfrac{\pi}{4}+\alpha\right)-\cos\left(\dfrac{\pi}{4}+\alpha\right)}{\sin\left(\dfrac{\pi}{4}+\alpha\right)+\cos\left(\dfrac{\pi}{4}+\alpha\right)}$; 4) $\dfrac{\sin\alpha+2\sin\left(\dfrac{\pi}{3}-\alpha\right)}{2\cos\left(\dfrac{\pi}{6}-\alpha\right)-\sqrt{3}\cos\alpha}$.

1299 1) $\dfrac{1-\operatorname{tg}^2\left(\dfrac{\pi}{4}-\alpha\right)}{1+\operatorname{tg}^2\left(\dfrac{\pi}{4}-\alpha\right)}$; 2) $\dfrac{\sin 2\alpha}{1+\cos 2\alpha}$.

1300 1) $\frac{\mathrm{tg}^2\alpha}{1+\mathrm{ctg}^2\alpha}$; 2) $\frac{1+\mathrm{ctg}^2\alpha}{\mathrm{ctg}^2\alpha}$; 3) $\frac{\mathrm{tg}\,\alpha+\mathrm{tg}\,\beta}{\mathrm{ctg}\,\alpha+\mathrm{ctg}\,\beta}$;

4) $(\mathrm{tg}\,\alpha+\mathrm{ctg}\,\alpha)^2-(\mathrm{tg}\,\alpha-\mathrm{ctg}\,\alpha)^2$.

1301 1) $\frac{1+\cos 2\alpha}{2\cos\alpha}$; 2) $\frac{\mathrm{tg}\,\alpha-\sin\alpha}{\mathrm{tg}\,\alpha+\sin\alpha}$;

3) $\frac{\sin\alpha+\sin 3\alpha+\sin 5\alpha}{\cos\alpha+\cos 3\alpha+\cos 5\alpha}$; 4) $\frac{2\sin 2\alpha+\sin 4\alpha}{2\sin 2\alpha-\sin 4\alpha}$.

1302 1) $\frac{\sin 2\alpha+\cos 2\alpha+2\sin^2\alpha}{\sin(-\alpha)-\sin(2{,}5\pi+\alpha)}$; 2) $\frac{\cos 2\alpha-\sin 2\alpha-2\cos^2\alpha}{\cos(-\alpha)-\cos(2{,}5\pi+\alpha)}$.

1303 Доказать тождество:

1) $\frac{1-\cos(2\pi-2\alpha)}{1-\cos^2(\alpha+\pi)}=2$; 2) $\frac{\sin^2(\alpha+90^\circ)}{1+\sin(-\alpha)}=1+\cos(\alpha-90^\circ)$.

Упростить выражение (1304—1309).

1304 $\frac{5\cos x-3\sin x}{\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)+\sin(-x)}-\frac{\sin 2x-8\sin^2 x}{\cos 2x}$.

1305 $\sin(x-2\pi)\cos\left(\frac{3\pi}{2}-x\right)+\mathrm{tg}(\pi-x)\,\mathrm{tg}\left(\frac{3\pi}{2}+x\right)$.

1306 1) $\cos^2(\alpha+2\beta)+\sin^2(\alpha-2\beta)-1$;
2) $\sin^2(\alpha+2\beta)+\sin^2(\alpha-2\beta)-1$.

1307 1) $\frac{\cos 4\alpha-\cos 2\alpha}{\sin 3\alpha\sin\alpha}$; 2) $\frac{1+\cos\alpha+\cos 2\alpha+\cos 3\alpha}{\cos\alpha+2\cos^2\alpha-1}$.

1308 1) $\frac{4\sin^2\alpha-\sin^2 2\alpha}{4-4\sin^2\alpha-\sin^2 2\alpha}$; 2) $\frac{\mathrm{tg}^2 2\alpha\,\mathrm{tg}^2\alpha-1}{\mathrm{tg}^2\alpha-\mathrm{tg}^2 2\alpha}$.

1309 1) $\frac{\sqrt{2}-\cos x-\sin x}{\sin x-\cos x}$; 2) $\frac{1+\cos x+\sin x+\mathrm{tg}\,x}{\sin x+\cos x}$.

1310 Вычислить $\frac{\sin\alpha\cos\alpha}{\sin^2\alpha-\cos^2\alpha}$, если $\mathrm{ctg}\,\alpha=\frac{3}{4}$.

1311 Упростить выражение и найти его числовое значение при данном значении α: $\frac{2-3\sin^2\alpha}{\cos 2\alpha}-\frac{\sin\alpha+2\cos\alpha}{\sin\alpha+\cos\alpha}$, $\alpha=-\frac{\pi}{8}$.

Доказать тождество (1312—1320).

1312 $\frac{\mathrm{tg}(\alpha-\beta)+\mathrm{tg}\,\beta}{\mathrm{tg}(\alpha+\beta)-\mathrm{tg}\,\beta}=\frac{\cos(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha-\beta)}$.

1313 1) $1+\sin\alpha=2\cos^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)$; 2) $1-\sin\alpha=2\sin^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)$.

1314 1) $\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{3}\right)-\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{3}\right)=\sqrt{3}\cos\alpha$;

2) $\cos\left(\frac{\pi}{6}+\alpha\right)+\cos\left(\frac{\pi}{6}-\alpha\right)=\sqrt{3}\cos\alpha$.

1315 1) $\dfrac{2}{\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}+\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}}=\sin\alpha$; 2) $\dfrac{\operatorname{ctg}\alpha-\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{tg}\alpha}=\cos 2\alpha$.

1316 $(1+\cos\alpha)\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\sin\alpha$.

1317 1) $1-\operatorname{tg}^2\alpha=\dfrac{\cos 2\alpha}{\cos^2\alpha}$; 2) $1-\operatorname{ctg}^2\alpha=\dfrac{-\cos 2\alpha}{\sin^2\alpha}$.

1318 $1+\cos\alpha+\cos 2\alpha=4\cos\alpha\cos\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\alpha}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{6}-\frac{\alpha}{2}\right)$.

1319 1) $\dfrac{1-2\sin^2\alpha}{1+\sin 2\alpha}=\dfrac{1-\operatorname{tg}\alpha}{1+\operatorname{tg}\alpha}$; 2) $\dfrac{1}{4\sin^2\alpha\cos^2\alpha}=1+\dfrac{(1-\operatorname{tg}^2\alpha)^2}{4\operatorname{tg}^2\alpha}$;

3) $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)=\dfrac{1+\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha}$; 4) $\dfrac{1-\sin 2\alpha}{1+\sin 2\alpha}=\operatorname{ctg}^2\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)$.

1320 1) $4\sin x\sin\left(\frac{\pi}{3}-x\right)\sin\left(\frac{\pi}{3}+x\right)=\sin 3x$;

2) $\cos 3x\cos 6x\cos 12x=\dfrac{\sin 24x}{8\sin 3x}$.

2. Уравнения.

1321 Решить уравнение:

1) $\dfrac{3x-16}{12}+1=\dfrac{x+6}{4}-\dfrac{x+3}{6}$;

2) $\dfrac{5}{3}(x-7)-3x-\dfrac{6(x-8)}{7}=-\left(x+\dfrac{43}{3}\right)$.

1322 При каком значении a уравнение $a(x-3)+8=13(x+2)$ имеет корень, равный 0?

1323 При каком значении b уравнение $1-b(x+4)=2(x-8)$ имеет корень, равный 1?

Решить уравнение (1324—1335).

1324 1) $x(x+1)-(x+2)(x+3)+9=x(x+4)-(x+5)(x+2)$;

2) $2(x+3)(x+1)+8=(2x+1)(x+5)$.

1325 1) $\dfrac{3}{x+3}-\dfrac{2}{x-3}=\dfrac{4}{x^2-9}$; 2) $\dfrac{5}{x-2}+\dfrac{2}{x-4}=\dfrac{11}{x^2-6x+8}$.

1326 1) $(a-b)x=a^2+(a+b)x$; 2) $a^2x=a+b+b^2x$.

1327 1) $x^2-2x-15=0$; 2) $3x^2+4x-4=0$.

1328 1) $(x-3)(x-2)=6(x-3)$; 2) $x^2-\dfrac{11x}{6}+\dfrac{1}{2}=0$.

1329 1) $\frac{x}{x+1}+\frac{x}{x-1}=0$; 2) $\frac{3x^2}{3x+1}-2=\frac{2x+1}{3x+1}$.

1330 1) $\frac{3x-1}{x+2}-\frac{7}{2+x}=\frac{7x^2-28}{x^2-4}+\frac{18}{2-x}$; 2) $\frac{x+1}{x+3}-\frac{12}{x^2-9}=\frac{2x-1}{3-x}$.

1331 $\frac{2}{x^2-x+1}-\frac{1}{x+1}=\frac{2x-1}{x^3+1}$.

1332 1) $x-4+\frac{1}{x}=0$; 2) $\frac{4x^2}{x+2}-\frac{10}{x+2}+4=0$.

1333 1) $x^4-11x^2+30=0$; 2) $2x^4-5x^2+2=0$.

1334 1) $2x^{-2}+4x^{-1}+3=0$; 2) $(x^2-x)^2+12=8(x^2-x)$.

1335 1) $x^2+ax-b^2+\frac{a^2}{4}=0$; 2) $\frac{2x}{2x-a}-\frac{x}{2x+a}=\frac{5a^2}{4x^2-a^2}$.

1336 При каком условии трёхчлен ax^2+bx+c является квадратом двучлена?

1337 Доказать, что корни уравнения $ax^2+bx+a=0$ есть взаимно обратные числа, если $a \neq 0$.

Решить уравнение (1338—1339).

1338 1) $|2x-3|=7$; 2) $|x+6|=2x$; 3) $2x-7=|x-4|$.

1339 1) $|6-2x|=3x+1$; 2) $2|x-2|=|x|-1$.

1340 Найти наименьший корень уравнения $|x^2-3x-6|=2x$.

1341 Найти наибольший рациональный корень уравнения

$$|x^2-8x+5|=2x.$$

Решить уравнение (1342—1358).

1342 1) $\sqrt{2x+7}=x+2$; 2) $x=2-\sqrt{2x-5}$.

1343 1) $3^{x-7}=81$; 2) $2^{x^2-5x+6,5}=\sqrt{2}$; 3) $\left(\frac{1}{4}\cdot 4^x\right)^x=2^{2x+6}$.

1344 1) $9^{5x}-9^{5x-1}=8$; 2) $2^{x+4}-2^x=120$.

1345 1) $5^{2x+1}\cdot 7^{2x+1}=35^{\frac{1}{2}(x+8)}$; 2) $0{,}2^{x^2}\cdot 5^{2x+2}=\left(\frac{1}{5}\right)^6$.

1346 1) $2{,}4^{3-2x}=2{,}4^{3x-2}$; 2) $\left(\frac{5}{3}\right)^x=\left(\frac{3}{5}\right)^{x-2}$; 3) $\frac{1}{\sqrt{8}}=\left(\frac{1}{16}\right)^{x-1}$.

1347 1) $\left(\frac{4}{9}\right)^x\cdot\left(\frac{27}{8}\right)^{x-1}=\frac{2}{3}$; 2) $\sqrt[3]{2^x}\cdot\sqrt[3]{3^x}=216$.

1348 1) $5^{x+1}+5^x+5^{x-1}=155$;
2) $3^{2x}-2\cdot 3^{2x-1}-2\cdot 3^{2x-2}=1$;
3) $7^x-7^{x-1}=6$; 4) $3^{x+2}+3^x=10$.

1349 1) $3^{2x}-3^x=72$; 2) $4^x-2^{x+1}=48$.

1350 1) $(\log_2 x)^2 - 3\log_2 x + 2 = 0$; 2) $(\log_3 x)^2 + 5 = 2\log_3 x^3$.

1351 1) $\ln\frac{2}{x+1} = \ln(x+2)$; 2) $\log_2\sqrt{3x-6} - \log_2\sqrt{x-3} = 1$.

1352 1) $\lg\left(\frac{1}{2}+x\right) = \lg\frac{1}{2} - \lg x$; 2) $2\lg x = -\lg\frac{1}{6-x^2}$.

1353 1) $\log_2(2x-18) + \log_2(x-9) = 5$;
2) $\lg(x^2+19) - \lg(x+1) = 1$.

1354 1) $5^{\log_5 x^2} - 6\cdot 5^{\log_5 x} + 5 = 0$; 2) $25^{\log_5 x} - 4\cdot 5^{\log_5 x+1} = 125$.

1355 1) $x^{\lg x} = 10$; 2) $x^{\log_3 x} = 9x$;
3) $x^{\lg x} - 1 = 10(1 - x^{-\lg x})$; 4) $x^{\sqrt{x}} = \sqrt{x^x}$.

1356 1) $7\cdot 4^{x^2} - 9\cdot 14^{x^2} + 2\cdot 49^{x^2} = 0$;
2) $5^{x+4} + 3\cdot 4^{x+3} = 4^{x+4} + 4\cdot 5^{x+3}$.

1357 1) $\log_4(2+\sqrt{x+3}) = 1$; 2) $\log_{\frac{1}{3}}\sqrt{x^2-2x} = -\frac{1}{2}$;
3) $\frac{1}{2}\log_3(x+1) = \log_3\sqrt{x+4} - 2\log_9\sqrt{2}$.

1358 1) $x^{1+\lg x} = 10x$; 2) $x^{\lg x} = 100x$;
3) $\log_2(17-2^x) + \log_2(2^x+15) = 8$;
4) $\log_2(3+2^x) + \log_2(5-2^x) = 4$.

1359 Могут ли корни уравнения $(x-m)(x-n) = k^2$ быть чисто мнимыми, если m, n и k — действительные числа?

1360 Решить уравнение (z — комплексное число):
1) $z^2 + 4z + 19 = 0$; 2) $z^2 - 2z + 3 = 0$.

1361 Решить графически уравнение:
1) $0{,}5^x = 2x + 1$; 2) $2^x = 3 - x^2$; 3) $\log_3 x = 4 - x$;
4) $\log_{\frac{1}{3}} x = 4x^2$; 5) $2^x = \log_{0,5} x$; 6) $\left(\frac{1}{3}\right)^x = \log_3 x$.

1362 Используя графики синуса или косинуса, найти все корни уравнения, принадлежащие промежутку $[-\pi; 3\pi]$:
1) $\cos x = -\frac{1}{2}$; 2) $\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Решить уравнение (1363—1385).

1363 1) $\sin 2x = \frac{1}{2}$; 2) $\cos 3x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$; 3) $2\,\mathrm{tg}\, x + 5 = 0$.

1364 1) $3\cos^2 x - 5\cos x - 12 = 0$; 2) $3\,\mathrm{tg}^2 x - 4\,\mathrm{tg}\, x + 5 = 0$.

1365 1) $(3 - 4\sin x)(3 + 4\cos x) = 0$;
2) $(\mathrm{tg}\, x + 3)(\mathrm{tg}\, x + 1) = 0$.

1366 1) $\sin 2x = 3\sin x\cos^2 x$; 2) $\sin 4x = \sin 2x$,
3) $\cos 2x + \cos^2 x = 0$; 4) $\sin 2x = \cos^2 x$.

1367 1) $\sin 2x = 3\cos x$; 2) $\sin 4x = \cos^4 x - \sin^4 x$;
3) $2\cos^2 x = 1 + 4\sin 2x$; 4) $2\cos x + \cos 2x = 2\sin x$.

1368 1) $\cos x + \cos 2x = 0$; 2) $\cos x - \cos 5x = 0$;
3) $\sin 3x + \sin x = 2\sin 2x$; 4) $\sin x + \sin 2x + \sin 3x = 0$.

1369 1) $2\cos x + \sin x = 0$; 2) $\sin x + \sqrt{3}\cos x = 0$.

1370 1) $4\sin^4 x + \sin^2 2x = 2$; 2) $\sin^4 \frac{x}{3} + \cos^4 \frac{x}{3} = \frac{5}{8}$.

1371 1) $\sqrt{3}\sin 2x - \cos 2x = \sqrt{3}$; 2) $6\sin x + 5\cos x = 6$.

1372 1) $\mathrm{tg}^3 x + \mathrm{tg}^2 x - 2\,\mathrm{tg}\, x - 2 = 0$;
2) $1 - \cos x = \mathrm{tg}\, x - \sin x$.

1373 1) $\sin x + \sin 2x = \cos x + 2\cos^2 x$;
2) $2\cos 2x = \sqrt{6}(\cos x - \sin x)$.

1374 $\dfrac{\cos 2x}{1 - \sin 2x} = \cos x + \sin x$.

1375 1) $\sin^3 x + \cos^3 x = 0$; 2) $2\sin^2 x + \sin^2 2x = 2$;
3) $8\sin x\cos 2x\cos x = \sqrt{3}$;
4) $4\sin x\cos x\cos 2x = \cos 4x$.

1376 1) $\sin^4 x - \cos^4 x + 2\cos^2 x = \cos 2x$;
2) $2\sin^2 x - \cos^4 x = 1 - \sin^4 x$.

1377 1) $\sin^3 x\cos x + \cos^3 x\sin x = \cos 2x$;
2) $2 + \cos^2 x + 3\sin x\cos x = \sin^2 x$.

1378 1) $4\sin^2 x - 8\sin x\cos x + 10\cos^2 x = 3$;
2) $3\sin^2 x - 2\sin x\cos x = 1$.

1379 1) $\sin 5x = \sin 3x$; 2) $\cos 6x + \cos 2x = 0$;
3) $\sin 3x + \cos 7x = 0$; 4) $\sin x = \cos 5x$.

1380 1) $\sin x + \sin 5x = \sin 3x$; 2) $\cos 7x - \cos 3x = 3\sin 5x$.

1381 1) $\cos x\sin 9x = \cos 3x\sin 7x$;
2) $\sin x\cos 5x = \sin 9x\cos 3x$.

1382 1) $5 + \sin 2x = 5(\sin x + \cos x)$;
2) $2 + 2\cos x = 3\sin x\cos x + 2\sin x$.

1383 1) $\sin x + \sin 2x + \sin 3x + \sin 4x = 0$;
2) $\cos x + \cos 2x + \cos 3x + \cos 4x = 0$.

1384 1) $\mathrm{tg}^2 3x - 4\sin^2 3x = 0$; 2) $\sin x\,\mathrm{tg}\, x = \cos x + \mathrm{tg}\, x$;
3) $\mathrm{ctg}\, x\left(\mathrm{ctg}\, x + \dfrac{1}{\sin x}\right) = 1$; 4) $4\,\mathrm{ctg}^2 x = 5 - \dfrac{9}{\sin x}$.

1385 1) $\operatorname{tg} 2x = 3 \operatorname{tg} x$; 2) $\operatorname{ctg} 2x = 2 \operatorname{ctg} x$;

3) $\operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{4}\right) + \operatorname{tg}\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 2$; 4) $\operatorname{tg}(2x + 1) \operatorname{ctg}(x + 1) = 1$.

1386 Решить графически уравнение:

1) $\cos x = 3x - 1$; 2) $\sin x = 0{,}5x^3$;

3) $\cos x = \sqrt{x}$; 4) $\cos x = x^2$.

3. Неравенства.

Решить неравенство (1387—1388).

1387 1) $x + 8 > 4 - 3x$; 2) $3x + 1 - 2(3 + x) < 4x + 1$.

1388 1) $\frac{4 - 3x}{8} - \frac{5 - 2x}{12} < 2$; 2) $\frac{5x - 7}{6} - \frac{x + 8}{7} \geqslant 2$.

1389 При каких значениях x положительна дробь:

1) $\frac{5x - 4}{7x + 5}$; 2) $\frac{3x + 10}{40 - x}$; 3) $\frac{x + 2}{5 - 4x}$; 4) $\frac{8 - x}{6 + 3x}$?

1390 При каких значениях x отрицательна дробь:

1) $\frac{3 - 2x}{3x - 2}$; 2) $\frac{10 - 4x}{9x + 2}$; 3) $\frac{18 - 7x}{-4x^2 - 1}$?

Решить неравенство (1391—1394).

1391 1) $\frac{5x + 4}{x - 3} < 4$; 2) $\frac{2}{x - 4} < 1$; 3) $\frac{2}{x + 3} \leqslant 4$.

1392 1) $8x^2 - 2x - 1 < 0$; 2) $5x^2 + 7x \leqslant 0$.

1393 1) $\frac{x^2 - 9}{x^2 - 4} < 0$; 2) $(2x^2 + 3)(x + 4)^3 > 0$.

1394 1) $\frac{3x - 15}{x^2 + 5x - 14} \geqslant 0$; 2) $\frac{x - 1}{x^2 + 4x + 2} < 0$; 3) $\frac{x^2 + 2x - 8}{x^2 - 2x - 3} > 0$.

1395 При каких значениях x выражение $\lg(x^2 + 8x + 15)$ не имеет смысла?

1396 При каком наименьшем целом значении m уравнение

$$(m - 1)x^2 - 2(m + 1)x + m - 3 = 0$$

имеет два различных действительных корня?

1397 При каких целых значениях m уравнение

$$(m - 7)x^2 + 2(m - 7)x + 3 = 0$$

не имеет действительных корней?

1398 При каком наибольшем целом значении x выражение $\frac{\frac{1}{2}x^2 + 3}{x^2 - 9x + 14}$ принимает отрицательное значение?

1399 При каком наименьшем целом значении x выражение $\frac{x^2 - x - 6}{-7 - x^2}$ принимает положительное значение?

Решить неравенство (**1400—1415**).

1400 1) $|2x - 3| < x$; 2) $|4 - x| > x$;
3) $|x^2 - 7x + 12| \leqslant 6$; 4) $|x^2 - 3x - 4| > 6$;
5) $|2x^2 - x - 1| \geqslant 5$; 6) $|3x^2 - x - 4| < 2$.

1401 1) $2{,}5^{1-x} > 2{,}5^{-3x}$; 2) $0{,}13^{x-4} \geqslant 0{,}13^{2-x}$;
3) $\left(\frac{4}{9}\right)^{2x} \leqslant \left(\frac{3}{4}\right)^{x-1}$; 4) $3^{4x} > \sqrt{3}$.

1402 1) $2^{-x+5} < \frac{1}{4}$; 2) $\left(\frac{1}{3}\right)^{|x-2|} > \frac{1}{27}$;

1403 1) $5^{x^2+3x+1,5} < 5\sqrt{5}$; 2) $0{,}2^{x^2-6x+7} > 1$.

1404 1) $3^{x+1} \cdot 9^{x-\frac{1}{2}} \geqslant \sqrt[3]{3}$; 2) $3^{x+1} + 3^{x-1} < 10$.

1405 1) $2^{2x} - 4^{x-1} + 8^{\frac{2}{3}x} \cdot 2^{-4} > 52$;
2) $2^{x+2} - 2^{x+3} + 5^{x-2} > 5^{x+1} + 2^{x+4}$.

1406 1) $3{,}3^{x^2+6x} < 1$; 2) $\left(\frac{1}{4}\right)^{x-x^2} > \frac{1}{2}$; 3) $8{,}4^{\frac{x-3}{x^2+6x+11}} < 1$;
4) $2^{2x+1} - 21 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{2x+3} + 2 \geqslant 0$;
5) $3^{4-3x} - 35\left(\frac{1}{3}\right)^{2-3x} + 6 \geqslant 0$.

1407 1) $3^{\log_3 \frac{x-1}{x+2}} < \frac{1}{9}$; 2) $5^{\log_5 (x^2-4x+3,5)} > \frac{1}{5}$.

1408 1) $\log_6 (2 - x) < \log_6 (2x + 5)$; 2) $\log_{\frac{1}{3}} (x^2 - 2) \geqslant -1$.

1409 1) $\sqrt{\lg x} < \frac{1}{2}$; 2) $\log_{\frac{1}{2}} x < \log_{\frac{1}{2}} (2x + 6) + 2$.

1410 1) $\log_{0,5} (1 + 2x) > -1$; 2) $\log_3 (1 - 2x) < -1$.

1411 1) $\log_{0,5} (x^2 - 5x + 6) > -1$; 2) $\log_8 (x^2 - 4x + 3) \leqslant 1$.

1412 1) $\log_{\frac{1}{3}} \left| \log_{\frac{1}{2}} \frac{3x+1}{x-1} \right| \leqslant 0$; 2) $\log_{\frac{1}{3}} (\log_4 (x^2 - 5)) > 0$.

1413 1) $(x^2-4)\log_{0,5} x > 0$; 2) $(3x-1)\log_2 x > 0$.

1414 1) $x^{1+\lg x} < 0,1^{-2}$; 2) $\sqrt{x^{4\lg x}} < 10x$;
3) $x+3 > \log_3(26+3^x)$; 4) $3-x < \log_5(20+5^x)$.

1415 1) $\cos(-3x) \geqslant \frac{\sqrt{3}}{2}$; 2) $\cos\left(2x-\frac{\pi}{3}\right) < -\frac{1}{2}$.

1416 С помощью графика решить неравенство:
1) $\sin x < \frac{1}{4}$; 2) $\sin x > -\frac{1}{4}$; 3) $\operatorname{tg} x - 3 \leqslant 0$; 4) $\cos x > \frac{1}{3}$.

1417 Используя графики тригонометрических функций, найти все решения неравенства, заключённые в промежутке $[-3\pi; \pi]$:
1) $2\cos x - \sqrt{3} < 0$; 2) $\sqrt{2}\sin x + 1 \geqslant 0$;
3) $\sqrt{3} + \operatorname{tg} x \leqslant 0$; 4) $3\operatorname{tg} x - 2 > 0$.

Доказать неравенство (**1418—1420**).

1418 1) $ab \leqslant \frac{a^2+b^2}{2}$;
2) $\frac{a^3+b^3}{2} > \left(\frac{a+b}{2}\right)^3$, если $a>0$, $b>0$, $a \neq b$.

1419 1) $(a+b)(ab+1) \geqslant 4ab$, если $a>0$, $b>0$;
2) $a^4+6a^2b^2+b^4 > 4ab(a^2+b^2)$, если $a \neq b$.

1420 1) $\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a} \geqslant 3$, если $a>0$, $b>0$, $c>0$;
2) $2a^2+b^2+c^2 \geqslant 2a(b+c)$.

4. Системы уравнений и неравенств.

Решить систему уравнений (**1421—1422**).

1421 1) $\begin{cases} 5x-7y=3, \\ 6x+5y=17; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 2x-y-13=0, \\ x+2y+1=0. \end{cases}$

1422 1) $\begin{cases} \frac{x-y}{5}-\frac{x+y}{2}=10, \\ \frac{x}{5}+\frac{y}{2}=10; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \frac{x+y}{2}+\frac{x-y}{3}=6, \\ \frac{x+y}{4}-\frac{x-y}{3}=0. \end{cases}$

Найти действительные решения системы уравнений (**1423—1425**).

1423 1) $\begin{cases} y+5=x^2, \\ x^2+y^2=25; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} xy=16, \\ \frac{x}{y}=4; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x^2+2y^2=96, \\ x=2y. \end{cases}$

1424 1) $\begin{cases} x^2-y^2=13, \\ x-y=1; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x^2-3y=-5, \\ 7x+3y=23. \end{cases}$

1425 1) $\begin{cases} \dfrac{x}{y} - \dfrac{y}{x} = \dfrac{3}{2}, \\ x^2 + y^2 = 20; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \dfrac{y}{x} + \dfrac{x}{y} = 3\dfrac{1}{3}, \\ x^2 - y^2 = 8; \end{cases}$

3) $\begin{cases} x^2 = 13x + 4y, \\ y^2 = 4x + 13y; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} 3x^2 + y^2 - 4x = 40, \\ 2x^2 + y^2 + 3x = 52. \end{cases}$

Решить систему уравнений (1426—1431).

1426 1) $\begin{cases} 2^{x+y} = 32, \\ 3^{3y-x} = 27; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 3^x - 2^{2y} = 77, \\ 3^{\frac{x}{2}} - 2^y = 7; \end{cases}$

3) $\begin{cases} 3^x \cdot 2^y = 576, \\ \log_{\sqrt{2}} (y - x) = 4; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} \lg x + \lg y = 4, \\ x^{\lg y} = 1000. \end{cases}$

1427 1) $\begin{cases} \log_4 x - \log_2 y = 0, \\ x^2 - 5y^2 + 4 = 0; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x^2 + y^4 = 16, \\ \log_2 x + 2\log_2 y = 3. \end{cases}$

1428 1) $\begin{cases} \sqrt{x} + \sqrt{y} = 16, \\ \sqrt{x} - \sqrt{y} = 2; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \sqrt{x} - \sqrt{y} = 1, \\ \sqrt{x} + \sqrt{y} = 19. \end{cases}$

1429 1) $\begin{cases} \sqrt{x + y - 1} = 1, \\ \sqrt{x - y + 2} = 2y - 2; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \sqrt{3y + x + 1} = 2, \\ \sqrt{2x - y + 2} = 7y - 6. \end{cases}$

1430 1) $\begin{cases} \sin x + \cos y = 1, \\ \sin^2 x + 2\sin x \cos y = \dfrac{3}{4}; \end{cases}$

2) $\begin{cases} \sin x + \sin y = \dfrac{1}{2}, \\ \cos^2 x + 2\sin x \sin y + 4\cos^2 y = 4. \end{cases}$

1431 1) $\begin{cases} \sin x \cos y = -\dfrac{1}{2}, \\ \operatorname{tg} x \operatorname{ctg} y = 1; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \sin x \sin y = \dfrac{1}{4}, \\ 3\operatorname{tg} x = \operatorname{ctg} y. \end{cases}$

1432 Найти наименьшее и наибольшее целые решения системы

$$\begin{cases} \dfrac{2x-3}{2} - \dfrac{3x+5}{3} - \dfrac{x}{6} < 3 - \dfrac{x+4}{2}, \\ 1 - \dfrac{2x-8}{3} + \dfrac{4-3x}{2} < 2x - \dfrac{x+2}{3}. \end{cases}$$

1433 Решить систему неравенств $\begin{cases} \dfrac{x+1}{5} - \dfrac{x+2}{4} < \dfrac{x-3}{3} + \dfrac{x-4}{2}, \\ \dfrac{x-2}{3} > 1 + \dfrac{x-5}{15}. \end{cases}$

5. Текстовые задачи.

1434 Пассажир поднимается по неподвижному эскалатору за 3 мин, а по движущемуся за 45 с. За какое время поднимает эскалатор неподвижно стоящего на нём пассажира?

1435 Теплоход прошёл расстояние между двумя пристанями по течению реки за 7 ч, а против течения за 9 ч. Определить расстояние между пристанями, если скорость течения реки 2 км/ч.

1436 Теплоход должен был пройти некоторое расстояние за 2,25 суток, но оказалось, что он проходил за каждый час на 2,5 км больше, чем предполагалось, а потому прошёл намеченный путь за 2 суток. Какое расстояние должен был пройти теплоход?

1437 Один рабочий выполняет некоторую работу за 24 дня, другой рабочий ту же работу может выполнить за 48 дней. За сколько дней будет выполнена эта работа, если рабочие будут работать вместе?

1438 При уборке урожая было собрано 4556 ц яровой пшеницы с общей площади 174 га, причём на целинных землях собрано по 30 ц с 1 га, а на остальной площади — по 22 ц. Сколько гектаров целинных земель было освоено?

1439 Разность двух чисел относится к их произведению как 1 : 24, а сумма этих чисел в 5 раз больше их разности. Найти эти числа.

1440 Сумма трёх чисел равна 1. Разность первого и второго чисел равна третьему числу. Сумма первых двух чисел в 5 раз больше третьего числа. Найти эти числа.

1441 Бригада рабочих должна была к определённому сроку изготовить 360 деталей. Перевыполняя дневную норму на 9 деталей, бригада за день до срока перевыполнила плановое задание на 5%. Сколько деталей изготовит бригада к сроку, если будет продолжать работать с той же производительностью труда?

1442 Катер направился от речного причала вниз по реке и, пройдя 36 км, догнал плот, отправленный от того же причала за 10 ч до начала движения катера. Если бы катер отправился одновременно с плотом, то, пройдя 30 км и повернув обратно, встретил бы плот на расстоянии 10 км от речного причала. Найти собственную скорость катера.

1443 Две организации приобрели театральные билеты. Первая организация израсходовала на билеты 3000 р., а вторая, купившая на 5 билетов меньше и заплатившая за каждый билет на 30 р. меньше первой организации, уплатила за билеты 1800 р. Сколько театральных билетов купила каждая организация?

1444 От пристани отправился по течению реки плот. Через 5 ч 20 мин вслед за плотом с той же пристани отправилась моторная лодка, которая догнала плот, пройдя 17 км. Какова скорость плота, если известно, что скорость моторной лодки по течению больше скорости плота на 48 км/ч?

1445 При уборке урожая с каждого из двух участков собрано по 210 ц пшеницы. Площадь первого участка была на 0,5 га меньше площади второго участка. Сколько центнеров пшеницы собрано с одного гектара на каждом участке, если урожай пшеницы на первом участке был на 1 ц с 1 га больше, чем на втором?

1446 Расстояние от дома до школы 700 м. Сколько шагов делает ученик, проходя путь от дома до школы, если его старший брат, шаг которого на 20 см длиннее, делает на 400 шагов меньше?

1447 Найти четыре числа, являющиеся последовательными членами геометрической прогрессии, если третье число больше первого на 9, а второе больше четвёртого на 18.

1448 Найти сумму первых двенадцати членов арифметической прогрессии, если сумма первых трёх её членов равна нулю, а сумма четырёх первых членов равна 1.

1449 Найти четыре числа, зная, что первые три из них являются тремя последовательными членами геометрической прогрессии, а последние три — арифметической прогрессии. Сумма первого и четвёртого чисел равна 16, а второго и третьего равна 12.

1450 Сумма первых пяти членов геометрической прогрессии равна 62. Известно, что пятый, восьмой и одиннадцатый её члены являются соответственно первым, вторым и десятым членами арифметической прогрессии. Найти первый член геометрической прогрессии.

1451 Произведение пятого и шестого членов арифметической прогрессии в 33 раза больше произведения её первого и второго членов. Во сколько раз пятый член прогрессии больше второго, если известно, что все члены прогрессии положительны?

1452 В треугольнике, площадь которого равна 12 см^2, середины сторон соединены отрезками. Во вновь полученном треугольнике точно так же образован новый треугольник и т. д. Найти сумму площадей всех получающихся таким построением треугольников.

6. Функции и графики.

1453 График линейной функции $y=-\frac{5}{2}x+b$ проходит через точку $(-2;\ 3)$. Найти b.

1454 График линейной функции $y = kx + 3$ проходит через точку $(-1;\ 4)$. Найти k.

1455 Найти коэффициенты k и b линейной функции $y = kx + b$, если её график проходит через точки A и B:

1) $A(-1;\ -2)$, $B(3;\ 2)$;　　2) $A(2;\ 1)$, $B(1;\ 2)$;

3) $A(4;\ 2)$, $B(-4;\ -3)$;　　4) $A(-2;\ -2)$, $B(3;\ -2)$.

1456 Через точку $A(-3;\ 2)$ проходит прямая, параллельная прямой, проходящей через точки $B(-2;\ 2)$ и $C(3;\ 0)$. Записать формулы, задающие линейные функции, графиками которых являются данные прямые.

1457 Выяснить, принадлежит ли прямой $x+\frac{y}{2}=1$ точка A:

1) $A(-1;\ 4)$;　　2) $A(0;\ 3)$;　　3) $A(1;\ 0)$;　　4) $A\left(\frac{3}{2};\ -1\right)$.

1458 Линейная функция задана формулой $y=-\frac{3}{4}x+2$. Найти:

1) точки A и B пересечения её графика с осями координат;
2) длину отрезка AB;
3) расстояние от начала координат до прямой $y=-\frac{3}{4}x+2$.

1459 Найти значения x, при которых график функции $y = 3x - 1$ расположен:

1) выше оси Ox;　　2) ниже оси Ox.

1460 Найти значения x, при которых значения функции $y = -2x + 1$:

1) положительны;　　2) отрицательны.

1461 Найти значения x, при которых график функции $y = 2x - 1$ лежит ниже графика функции $y = 3x - 2$.

1462 Найти значения x, при которых график функции

$$y=(\sqrt{3}-2)\,x-\sqrt{3}$$

лежит выше графика функции $y=(1+\sqrt{3})\,x+2\sqrt{3}$.

1463 Доказать, что функция $y = 2x - 3$ возрастает.

1464 Доказать, что функция $y=-\sqrt{3}\,x-3$ убывает.

1465 Выяснить, пересекаются ли графики функций:

1) $y = 3x - 2$ и $y = 3x + 1$;　　2) $y = 3x - 2$ и $y = 5x + 1$.

1466 Построить график функции:

1) $y = 2 - |x|$; 2) $y = |2 - x|$; 3) $y = |2 - x| + |x - 3|$.

Выяснить, пересекает ли график каждой из данных функций прямую $y = 3$. В случае утвердительного ответа найти координаты точек пересечения.

1467 Дана функция $y = x^2 - 2x - 3$.

1) Построить её график и найти значения x, при которых $y(x) < 0$.

2) Доказать, что функция возрастает на отрезке $[1; 4]$.

3) Найти значение x, при котором функция принимает наименьшее значение.

4) Найти значения x, при которых график функции $y = x^2 - 2x - 3$ лежит выше графика функции $y = -2x + 1$.

5) Записать уравнение касательной к параболе $y = x^2 - 2x - 3$ в точке с абсциссой, равной 2.

1468 Дана функция $y = -2x^2 + 3x + 2$.

1) Построить её график и найти значения x, при которых $y(x) < 0$.

2) Доказать, что функция убывает на отрезке $[1; 2]$.

3) Найти значение x, при котором функция принимает наибольшее значение.

4) Найти значения x, при которых график данной функции лежит ниже графика функции $y = 3x + 2$.

5) Записать уравнения касательных к параболе $y = -2x^2 + 3x + 2$ в точках с ординатой, равной 3.

1469 Выяснить, пересекаются ли графики функций:

1) $y = x^2$ и $y = x + 6$; 2) $y = \frac{3}{x}$ и $y = 4(x + 1)$;

3) $y = \frac{1}{8}x^2$ и $y = \frac{1}{x}$; 4) $y = 2x - 1$ и $y = \frac{1}{x}$.

Выяснить, является ли функция чётной, нечётной или не является ни чётной, ни нечётной (**1470—1472**).

1470 1) $y = 2^x + 2^{-x}$; 2) $y = 3^x - 3^{-x}$;

3) $y = \ln \frac{3 + x}{3 - x}$; 4) $y = \left|\ln \frac{5 + x}{5 - x}\right|$.

1471 1) $y = 2x^2 - 1$; 2) $y = x - x^3$; 3) $y = x^5 - \frac{1}{x}$; 4) $y = \frac{\sin x}{x}$.

1472 1) $y = x \sin x$; 2) $y = x^2 \cos 2x$;

3) $y = x + \sin x$; 4) $y = x + \cos x$.

Найти наименьший положительный период функции (1473—1474).

1473 1) $y = \cos\frac{3x}{2}$; 2) $y = 2\sin 0{,}6x$.

1474 1) $y = \cos 3x$; 2) $y = \sin\frac{x}{6}$; 3) $y = \sin x + \operatorname{tg} x$.

1475 Исследовать функцию на чётность и нечётность и построить её график:

1) $y = -x^4 + 4x^2 - 5$; 2) $y = x^3 - 4x$.

1476 Найти наибольшее или наименьшее значение функции $y = ax^2 + bx - 4$, если $y(1) = 0$ и $y(4) = 0$.

1477 Найти наибольшее и наименьшее значения функции:

1) $y = \sin 2x - \sqrt{3}\cos 2x$; 2) $y = 2\cos 2x + \sin^2 x$.

1478 Найти точки пересечения графика квадратичной функции с осями координат:

1) $y = 2x^2 - 5x + 6$; 2) $y = 2x^2 - 5x + 2$.

1479 Построить график функции $y = ax^2 + bx + c$, если $y(-2) = 15$, $y(3) = 0$, $y(0) = -3$.

1480 Построить график функции $y = \sqrt{25 - x^2}$. Указать по графику промежутки монотонности функции. Доказать, что график данной функции симметричен относительно оси Oy.

1481 Построить график функции $y = \frac{5}{x-2}$. Доказать, что функция убывает на промежутках $(-\infty; 2)$ и $(2; +\infty)$. В какой точке график функции пересекает ось ординат?

1482 Выяснить основные свойства функции и построить её график:

1) $y = 3^x + 1$; 2) $y = \log_2(x + 1)$; 3) $y = \log_{\frac{1}{3}}(x - 1)$.

1483 Построить график функции:

3) $y = 2^{x-1} - 3$; 2) $y = \log_2(x + 2) + 3$.

Найти область определения функции (1484—1487).

1484 1) $y = 2^x + \lg(6 - 3x)$; 2) $y = 3^{-x} - 2\ln(2x + 4)$; 3) $y = \operatorname{tg}\frac{x}{4}$.

1485 1) $y = \sqrt{\frac{x-3}{x+3}}$; 2) $y = \sqrt{\log_3\frac{2x+1}{x-6}}$.

1486 1) $y = \sqrt{\frac{x^2 - 6x - 16}{x^2 - 12x + 11}}$; 2) $y = \sqrt{\log_{\frac{1}{2}}(x-3) - 1}$.

1487 1) $y = \sqrt{\log_{0,8}(x^2 - 5x + 7)}$; 2) $y = \sqrt{\log_{0,5}(x^2 - 9)}$.

Найти множество значений функции (1488—1489).

1488 1) $y = x^2 + 6x + 3$; 2) $y = -2x^2 + 8x - 1$; 3) $y = 2 + \frac{2}{x}$.

1489 1) $y = 0{,}5 + \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$; 2) $y = 0{,}5 \cos x + \sin x$.

1490 Найти угловой коэффициент касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке с абсциссой x_0:

1) $f(x) = \sin x + \cos x$, $x_0 = \frac{\pi}{2}$; 2) $f(x) = \cos 3x$, $x_0 = \frac{\pi}{6}$.

1491 Найти угол между осью Ox и касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке с абсциссой x_0:

1) $f(x) = \frac{1}{4x^2} - \sqrt{x}$, $x_0 = 1$; 2) $f(x) = 2x\sqrt{x}$, $x_0 = \frac{1}{3}$.

1492 Написать уравнение касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке с абсциссой x_0:

1) $f(x) = \frac{3}{4x\sqrt{x}}$, $x_0 = \frac{1}{4}$; 2) $f(x) = 2x^4 - x^2 + 4$, $x_0 = -1$.

1493 Найти угловой коэффициент касательной к графику функции $y = x^3 - x + 1$ в точке пересечения его с осью Oy.

1494 Найти угловой коэффициент касательной к графику функции $y = 3x^3 - 1$ в точке с ординатой $y = 2$.

1495 Прямая $y = 4x - 3$ является касательной к параболе $y = 6 - 2x + x^2$. Найти координаты точки касания.

1496 Найти точки, в которых касательные к графику функции $y = 4x^3 - 9x^2 + 6x + 1$ параллельны оси абсцисс.

1497 Касательная к параболе $y = 3x^2 + 7x + 1$ в точке M образует с осью абсцисс угол $\frac{\pi}{4}$. Найти координаты точки M.

1498 Написать уравнение касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке с абсциссой x_0:

1) $f(x) = x \ln 2x$, $x_0 = 0{,}5$; 2) $f(x) = 2^{-x}$, $x_0 = 1$.

1499 Найти угол между осью Ox и касательной к графику функции $y = x^3 - x^2 - 7x + 6$ в точке $M\ (2; -4)$.

1500 Найти тангенс угла, который касательная к графику функции $y = x^2 \cdot e^{-x}$ в точке с абсциссой $x = 1$ образует с осью Ox.

1501 Найти угол между осью Ox и касательной к графику функции $y = \frac{2}{3}\cos\left(3x - \frac{\pi}{6}\right)$ в точке с абсциссой $x = \frac{\pi}{3}$.

1502 Записать уравнение касательной к графику функции $f(x) = \frac{x^3 + 1}{3}$ в точке его пересечения с осью Ox.

1503 Записать уравнение касательной к графику функции $f(x)=\sqrt{x^3}+1$ в точке с абсциссой $x=4$.

1504 Найти промежутки монотонности функции:

1) $y=\frac{x^2+1}{x^2-1}$; 2) $y=\frac{x^2-1}{x}$.

Найти точки экстремума функции (1505—1506).

1505 1) $y=(x-1)^3(x-2)^2$; 2) $y=4+(6-x)^4$.

1506 1) $y=\frac{3x^2+4x+4}{x^2+x+1}$; 2) $y=\frac{x^2+6x+3}{3x+4}$.

Найти наибольшее и наименьшее значения функции (1507—1509).

1507 $y=2\sin x+\cos 2x$ на отрезке $\left[0;\ \frac{\pi}{2}\right]$.

1508 $y=\sin x+2\sqrt{2}\cos x$ на отрезке $\left[0;\ \frac{\pi}{2}\right]$.

1509 $y=x\sqrt{1-x^2}$ на отрезке $[0;\ 1]$.

1510 Периметр осевого сечения цилиндра 6 дм. При каком радиусе основания цилиндра его объём будет наибольшим?

1511 Найти наибольший возможный объём цилиндра, площадь полной поверхности которого равна 54π см^2, если известно, что радиус основания не меньше 2 см и не больше 4 см.

1512 В правильной пирамиде $SABC$ из вершины S проведена высота SO. Найти сторону основания пирамиды, если объём пирамиды является наибольшим при условии, что $SO+AC=9$ и $1\leqslant AC\leqslant 8$.

1513 В правильной четырёхугольной призме диагональ равна $2\sqrt{3}$. При какой высоте призмы её объём наибольший?

1514 Для функции $f(x)=x^2+\cos x$ найти первообразную, график которой проходит через точку $M\left(0{,}5\pi;\ -\frac{2}{\pi}\right)$.

1515 Найти наибольшее и наименьшее значения функции $f(x)=x^2(2x-3)-12(3x-2)$ на отрезке $[-3;\ 6]$.

1516 Найти наибольшее и наименьшее значения функции $f(x)=2\ln^3 x-9\ln^2 x+12\ln x$ на отрезке $\left[e^{\frac{3}{4}};\ e^3\right]$.

1517 На параболе $y=x^2$ найти точку, расстояние от которой до точки $A\left(2;\ \frac{1}{2}\right)$ является наименьшим.

1518 На координатной плоскости даны точки $A(3; -1)$ и $D(4; -1)$. Рассматриваются трапеции, у которых отрезок AD является одним из оснований, а вершины другого основания лежат на дуге параболы $y = 1 - x^2$, заданной на отрезке $[-1; 1]$. Среди этих трапеций выбрана та, которая имеет наибольшую площадь. Найти эту площадь.

1519 На координатной плоскости дана точка $K(3; 6)$. Рассматриваются треугольники, у которых две вершины симметричны относительно оси Oy и лежат на дуге параболы $y = 4x^2$, заданной на отрезке $[-1; 1]$, а точка K является серединой одной из сторон. Среди этих треугольников выбран тот, который имеет наибольшую площадь. Найти эту площадь.

1520 Каковы должны быть коэффициенты p и q квадратичной функции $y = x^2 + px + q$, чтобы при $x = 5$ она имела минимум, равный 1?

1521 Какой должна быть высота конуса с образующей в 20 дм, чтобы его объём был наибольшим?

1522 Какую наименьшую площадь поверхности имеет цилиндр, если его объём равен V?

1523 Найти радиус основания цилиндра, вписанного в шар радиуса R и имеющего наибольшую площадь боковой поверхности.

1524 Найти высоту цилиндра наибольшего объёма, вписанного в шар радиуса R.

1525 Найти высоту конуса наибольшего объёма, вписанного в шар радиуса R.

1526 В конус с заданным объёмом V вписана пирамида, в основании которой лежит равнобедренный треугольник с углом при вершине, равным α. При каком значении α объём пирамиды будет наибольшим?

1527 Из всех цилиндров, у которых периметр осевого сечения равен p, выбран цилиндр наибольшего объёма. Найти этот объём.

1528 Из всех цилиндров, которые можно поместить внутри сферы радиуса R, найти цилиндр наибольшего объёма.

1529 Консервная жестяная банка заданного объёма должна иметь форму цилиндра. При каком соотношении между радиусом основания и высотой расход жести будет наименьшим?

1530 Из всех правильных треугольных призм, которые вписаны в сферу радиуса R, выбрана призма наибольшего объёма. Найти высоту этой призмы.

1531 Из всех цилиндров, вписанных в конус с радиусом основания R и высотой H, найти цилиндр наибольшего объёма.

1532 Найти точки экстремума функции:

1) $f(x) = x^3 + 3x^2 - 9x + 4$; 2) $f(x) = x^4 - 2x^5 + 5$.

1533 Исследовать с помощью производной функцию $y = x^3 - 3x + 2$ и построить её график. Найти точки, в которых касательные к графику параллельны оси Ox.

1534 Исследовать с помощью производной функцию $y = x^3 - 5x^2 - x + 5$ и построить её график. Записать уравнение касательной к графику этой функции в точке с абсциссой, равной 4.

Исследовать функцию $y = f(x)$ и построить её график (**1535—1537**).

1535 1) $f(x) = 4x^3 + 6x^2$; 2) $f(x) = 3x^2 - 2x^3$.

1536 1) $y = -\frac{x^4}{4} + x^2$; 2) $y = x^4 - 2x^2 - 3$.

1537 1) $y = \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 3x + 9$; 2) $y = -x^4 + 6x^2 - 9$.

Найти площадь фигуры, ограниченной линиями (**1538—1542**).

1538 1) $y = \sqrt{x - 1}$, $y = 3 - x$, $y = 0$; 2) $y = -\frac{1}{x}$, $y = x^2$, $y = \frac{x^2}{8}$.

1539 1) $y = 4x - x^2$, $y = 5$, $x = 0$, $x = 3$;

2) $y = x^2 - 2x + 8$, $y = 6$, $x = -1$, $x = 3$;

3) $y = \sin x$, $y = 0$, $x = \frac{2\pi}{3}$, $x = \pi$;

4) $y = \cos x$, $y = 0$, $x = -\frac{\pi}{6}$, $x = \frac{\pi}{6}$.

1540 1) $y = \sqrt{x}$, $y = 2$, $x = 9$; 2) $y = x^2 + 3$, $y = x + 5$.

1541 1) $y = 9 - x^2$, $y = (x - 1)^2 - 4$; 2) $y = x^2$, $y = \sqrt[3]{x}$.

1542 1) $y = \cos x$, $x = \frac{\pi}{4}$, $y = 0$; 2) $y = 3^x$, $x = -1$, $x = 1$, $y = 0$.

7. Производная и интеграл.

1543 Найти значение производной функции $f(x)$ в точке x_0:

1) $f(x) = x^3 - \frac{x^2}{2} + x$, $x_0 = \frac{1}{3}$; 2) $f(x) = \frac{\ln x}{x}$, $x_0 = 1$;

3) $f(x) = x^{-3} - \frac{2}{x^2} + 3x$, $x_0 = 3$; 4) $y = \frac{\cos x}{\sin x}$, $x_0 = \frac{\pi}{4}$.

Найти значения x, при которых значение производной функции $f(x)$ равно 0 (**1544—1545**).

1544 1) $f(x) = \sin 2x - x$; 2) $f(x) = \cos 2x + 2x$.

1545 1) $f(x) = (2x - 1)^3$; 2) $f(x) = (1 - 3x)^5$.

1546 Найти значения x, при которых значения производной функции $f(x) = x^3 - 1{,}5x^2 - 18x + \sqrt{3}$ отрицательны.

1547 Пуля вылетает из пистолета вверх со скоростью 360 м/с. Найти скорость пули в момент $t = 10$ с и определить, сколько времени пуля поднимается вверх. Уравнение движения пули $h = v_0 t - 4{,}9t^2$.

1548 Колесо вращается так, что угол поворота прямо пропорционален кубу времени. Первый оборот был сделан колесом за 2 с. Определить угловую скорость колеса через 4 с после начала вращения.

1549 Показать, что $f'(1) = f'(0)$, если $f(x) = (2x - 3)(3x^2 + 1)$.

Найти производную функции (1550—1553).

1550 1) $y = \dfrac{x^5 - 3x^3 + 2x^2 - x + 3}{x^3}$; 2) $y = \dfrac{6x\sqrt[3]{x}}{\sqrt{x}}$.

1551 1) $y = \dfrac{3x^2 - 2x + 1}{x + 1}$; 2) $y = \dfrac{2x^2 - 3x + 1}{2x + 1}$.

1552 1) $y = (2x + 1)^2\sqrt{x - 1}$; 2) $y = x^2\sqrt[3]{(x + 1)^2}$.

1553 1) $y = \sin 2x \cos 3x$; 2) $y = x \cos 2x$.

1554 Найти значения x, для которых производная функции $f(x) = (x - 1)(x - 2)(x - 3)$ равна -1.

1555 Определить знак числа $f'(2)$, если:

1) $f(x) = e^{3 - 2x} \cdot x^2$; 2) $f(x) = \dfrac{x^2}{e^{1 - x}}$.

1556 Дана функция $f(x) = \dfrac{1 + \sin 2x}{1 - \sin 2x}$. Найти $f'(0)$, $f'\left(\dfrac{\pi}{6}\right)$.

1557 Найти значения x, при которых $f'(x) \leqslant g'(x)$, если $f(x) = x^3 + x^2 + x\sqrt{3}$, $g(x) = x\sqrt{3} + 1$.

1558 Для функции $f(x) = \cos 4x$ найти первообразную $F(x)$, если $F\left(\dfrac{\pi}{24}\right) = -1$.

1559 Найти первообразную функции:

1) $y = \dfrac{1}{x + 1} - \dfrac{1}{x - 1}$; 2) $y = \dfrac{3}{4x - 1}$.

Задачи для внеклассной работы

Решить уравнение (1560—1566).

1560 1) $\sqrt{x^2+4x+4}-\sqrt{x^2-6x+9}=6$;

2) $\sqrt[3]{(8-x)^2}-\sqrt[3]{(8-x)(27+x)}+\sqrt[3]{(27+x)^2}=7$;

3) $\sqrt[4]{8-x}+\sqrt[4]{89+x}=5$.

1561 1) $16^{\sin^2 x}+16^{\cos^2 x}=10$;

2) $\left(\sqrt{3+\sqrt{8}}\right)^x+\left(\sqrt{3-\sqrt{8}}\right)^x=34$.

1562 1) $x^3-3x^2+x=3$; 2) $x^3-3x^2-4x+12=0$;

3) $x^4-3x^3-2x^2-6x-8=0$.

1563 1) $\operatorname{tg} x+\operatorname{ctg} x=2\operatorname{ctg} 4x$;

2) $\dfrac{\sin 4x}{\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}=\sqrt{2}\,(\sin x+\cos x)$.

1564 1) $\dfrac{\sin 3x}{\cos 2x}+\dfrac{\cos 3x}{\sin 2x}=\dfrac{2}{\sin 3x}$; 2) $\operatorname{tg} 2x+\operatorname{ctg} x=8\cos^2 x$.

1565 $\dfrac{\sin 3x}{\sin x}-\dfrac{\sin x}{\sin 3x}=2\cos 2x$.

1566 $\log_2(4\cos x+3)\log_6(4\cos x+3)=\log_2(4\cos x+3)+$
$+\log_6(4\cos x+3)$.

1567 Пересекает ли график функции $y = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$ ось Ox в точках, абсциссы которых являются целыми числами?

1568 Уравнение $2x^3 + mx^2 + nx + 12 = 0$ имеет корни $x_1 = 1$, $x_2 = -2$. Найти третий корень этого уравнения.

1569 Решить систему уравнений и установить, при каких значениях параметров a и b она имеет решение:

1) $\begin{cases} \log_y x + \log_x y = \dfrac{5}{2}, \\ x + y = a + a^2; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x^2 + y^2 = a^2, \\ \log_b x + \log_b y = 2. \end{cases}$

1570 Для всех значений параметра a решить систему уравнений

$$\begin{cases} a^2 - 2\sqrt{3|a|}\,y + x^2 + 2xy - y^2 - 2 = 0, \\ x^2 + y^2 - 2y - \cos(xy) + 11 - 6a + a^2 = 0. \end{cases}$$

Решить систему уравнений **(1571—1573)**.

1571 1) $\begin{cases} x^y = y^x, \\ x^3 = y^2; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x^{\sqrt{y}} = y, \\ y^{\sqrt{y}} = x^4; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x - y = -\dfrac{1}{3}, \\ \cos^2 \pi x - \sin^2 \pi y = \dfrac{1}{2}. \end{cases}$

1572 $\begin{cases} 6 \sin x \cos y + 2 \cos x \sin y = -3, \\ 5 \sin x \cos y - 3 \cos x \sin y = 1. \end{cases}$

1573 $\begin{cases} 3^{\log_x 2} = y^{\log_3 y}, \\ 2^{\log_y 3} = x^{\log_2 x}. \end{cases}$

Решить неравенство **(1574—1578)**.

1574 1) $x^{\lg^2 x - 3\lg x + 1} > 1000$; 2) $3^{\lg x + 2} < 3^{\lg x^2 + 5} - 2$.

1575 $\log_{|2x+2|}(1 - 9^x) < \log_{|2x+2|}(1 + 3^x) + \log_{|2x+2|}\left(\dfrac{5}{9} + 3^{x-1}\right)$.

1576 $\dfrac{x^3 + x^2 - 4x - 4}{x^3 + 6x^2 + 5x - 12} > 0$.

1577 1) $\sqrt{2x - 7} \leqslant \sqrt{6x + 13}$; 2) $\sqrt{3 - x} < \sqrt{3x - 5}$.

1578 $\dfrac{\sqrt{3x^3 - 22x^2 + 40x}}{x - 4} \geqslant 3x - 10$.

1579 При всех a решить неравенство $|x - 5a| \leqslant 4a - 3$ и указать все значения a, при которых решения этого неравенства являются решениями неравенства $x^2 - 4x - 5 < 0$.

Построить график функции (1580—1583).

1580 1) $y = \frac{\sqrt{x^2}}{x}$; 2) $y = \frac{2}{1-2x}$; 3) $y = \frac{3x+2}{2x-3}$; 4) $y = \frac{2x}{2-|x|}$.

1581 1) $y = \frac{2}{(x-1)(x-3)}$; 2) $y = \frac{1}{\cos x}$; 3) $y = \frac{1}{\ln x}$.

1582 Доказать тождество $\log_b a \cdot \log_c b \cdot \log_d c = \log_d a$.

1583 Вычислить:

1) $\cos\left(\arcsin\frac{3}{5}\right)$; 2) $\sin\left(\arccos\left(-\frac{5}{13}\right)\right)$.

1584 Доказать, что при $-1 \leqslant x \leqslant 1$ сумма $\arcsin x + \arccos x$ равна C, где C — постоянная. Найти C.

1585 Найти все значения b, при каждом из которых функция $f(x) = \sin 2x - 8(b+2)\cos x - (4b^2 + 16b + 6)x$ является убывающей на всей числовой прямой и при этом не имеет стационарных точек.

1586 Найти все значения x, при которых касательные к графикам функций $y = 3\cos 5x$ и $y = 5\cos 3x + 2$ в точках с абсциссой x параллельны.

1587 Через точку $A\left(2; -\frac{12}{5}\right)$ проведена касательная к параболе $y = -\frac{3}{5}x^2$, пересекающая ось абсцисс в точке B, а ось ординат в точке C. Найти радиус окружности, вписанной в треугольник BOC (O — начало координат).

1588 Через точку $A(3; -4)$ проведена касательная l к гиперболе $y = -\frac{12}{x}$. Найти радиус окружности с центром на оси ординат, касающейся прямой l и оси абсцисс.

1589 Сигнал с корабля можно различить в море на расстоянии 1 мили. Корабль A идёт на юг, делая 3 мили в час, и в настоящее время находится в 5 милях к западу от корабля B, который идёт на запад со скоростью 4 мили в час. Будут ли корабли на расстоянии, достаточном для приёма сигнала?

1590 Графику функции $y = -x^3 + ax^2 + bx + c$ принадлежат точки A и B, симметричные относительно прямой $x = 2$. Касательные к этому графику в точках A и B параллельны между собой. Одна из этих касательных проходит через точку $(0; 2)$, а другая — через точку $(0; 6)$. Найти значения a, b, c.

1591 Графику функции $y = x^3 + ax^2 + bx + c$ принадлежат точки A и B, симметричные относительно прямой $x = -2$. Касательные к этому графику в точках A и B параллельны между собой. Одна из этих касательных проходит через точку $(0; 1)$, а другая — через точку $(0; 5)$. Найти значения a, b, c.

1592 Найти площадь фигуры, ограниченной параболой $y = 0{,}5x^2 - 2x + 2$ и касательными к ней, проведёнными через точки $A\left(1; \frac{1}{2}\right)$ и $B\ (4; 2)$.

1593 Через точку графика функции $y = \sqrt{x}$ с абсциссой a, где $\frac{1}{2} \leqslant a \leqslant 2$, проведена касательная к этому графику. Найти значение a, при котором площадь треугольника, ограниченного этой касательной, осью Ox и прямой $x = 3$, будет наименьшей, и вычислить эту наименьшую площадь.

1594 Дана фигура, ограниченная кривой $y = \sin x$ и прямыми $y = 0$, $x = \frac{\pi}{2}$ $\left(0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}\right)$. Под каким углом к оси Ox нужно провести прямую через точку $(0; 0)$, чтобы эта прямая разбивала данную фигуру на две фигуры равной площади?

1595 Решить уравнение:

1) $\sqrt{x+3} - \sqrt{2x-4} = \sqrt{3x-2}$;

2) $\dfrac{1}{1-\sqrt{1-x}} + \dfrac{1}{1+\sqrt{1-x}} = \dfrac{2\sqrt{2}}{\sqrt{1-x}}$.

1596 Найти все действительные корни уравнения
$|2\sqrt{x} + 1 - x| + |x - 2\sqrt{x} + 2| = 7$.

Решить уравнение (1597—1601).

1597 1) $9 \cdot 4^{\frac{1}{x}} + 5 \cdot 6^{\frac{1}{x}} = 4 \cdot 9^{\frac{1}{x}}$;

2) $\log_2 (x^2 - 3) - \log_2 (6x - 10) + 1 = 0$;

3) $2 \log_3 x - 2 \log_2 \frac{1}{\sqrt{2}} = 3\sqrt{\log_2 x}$;

4) $\log_x (2x^2 - 3x - 4) = 2$.

1598 1) $1 + \log_x (5 - x) = \log_7 4 \cdot \log_x 7$;

2) $(\log_9 (7 - x) + 1) \log_{3-x} 3 = 1$.

1599 1) $\cos x + \cos 2x + \cos 3x = 0$;

2) $\cos^3 x - 3\cos^2 x + \cos x + \sin 2x = 2\cos\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\sin\left(\frac{3x}{2} - \frac{\pi}{4}\right)$;

3) $\sin^2 x + \cos^2 3x = 1$;

4) $\operatorname{ctg} x + \sin 2x = \operatorname{ctg} 3x$.

1600 1) $\sin x + \cos x = \sqrt{1 + \operatorname{tg} x}$;

2) $\sqrt{5 \sin 2x - 2} = \sin x - \cos x$.

1601 $\dfrac{2 \sin x}{\cos x - \cos 3x} - \dfrac{1}{3} = 4 \sin^2 \left(x + \dfrac{\pi}{4} \right)$.

1602 Найти все корни уравнения $\cos x + (1 + \cos x) \operatorname{tg}^2 x - 1 = 0$, удовлетворяющие неравенству $\operatorname{tg} x > 0$.

1603 Найти все корни уравнения $\sin^4 x + \sin^4 \left(x + \dfrac{\pi}{4} \right) = \sin^2 \dfrac{25\pi}{6}$, удовлетворяющие неравенству $\lg (x - \sqrt{2x + 24}) > 0$.

1604 Найти наибольший на интервале $\left(-\dfrac{\pi}{6}; \dfrac{\pi}{2} \right)$ корень уравнения $\cos \left(5x + \dfrac{\pi}{2} \right) + 2 \sin x \cos 2x = 0$.

1605 Найти все значения a, при которых уравнение $\sin^6 x + \cos^6 x = a$ имеет корни, и решить это уравнение.

Решить систему уравнений (1606—1608).

1606 1) $\begin{cases} x - 3y = -5, \\ \dfrac{x}{3y} - \dfrac{2y}{x} = -\dfrac{23}{6}; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \dfrac{x+y}{x-y} + \dfrac{x-y}{x+y} = \dfrac{10}{3}, \\ x^2 + y^2 = 5. \end{cases}$

1607 1) $\begin{cases} 6^x - 2 \cdot 3^y = 2, \\ 6^x \cdot 3^y = 12; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 7 \cdot 2^x + 6y = 2, \\ 3 \cdot 2^{x+1} - 5y = 93. \end{cases}$

1608 1) $\begin{cases} 27 \cdot 3^{2x-y} + 3^{x^2} = 4\sqrt{3}, \\ \lg (y - 4x) = 2 \lg (2 + 2x - y) - \lg y; \end{cases}$

2) $\begin{cases} 8 \cdot 2^{x-2y} + 2^{y^2} = 3\sqrt{2}, \\ \lg (x + 4y) = 2 \lg (2 - x - 2y) - \lg x. \end{cases}$

1609 При каких значениях a система уравнений

$$\begin{cases} \log_3 (y - 3) - 2 \log_9 x = 0, \\ (x + a)^2 - 2y - 5a = 0 \end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение?

1610 Решить неравенство:

1) $\dfrac{2x - 3}{4 - x} > \dfrac{1}{x}$; 2) $\dfrac{2x + 5}{|x + 1|} \geqslant 1$.

1611 Найти все значения a, при которых является верным при всех значениях x неравенство:

1) $\dfrac{8x^2 - 4x + 3}{4x^2 - 2x + 1} \leqslant a$; 2) $\dfrac{3x^2 - 4x + 8}{9x^2 - 12x + 16} \geqslant a$.

Решить неравенство (1612—1615).

1612 1) $\left(\frac{2}{5}\right)^{x^2-5x+6} < 1$; 2) $5^x - 3^{x+1} > 2\left(5^{x-1} - 3^{x-2}\right)$.

1613 1) $\log_{\frac{1}{2}}(1+x) - \sqrt{x^2-4} \leqslant 0$;

2) $\frac{1}{\log_5(3-2x)} - \frac{1}{4-\log_5(3-2x)} < 0$.

1614 1) $\log_{|2x+1|} x^2 \geqslant 2$; 2) $\log_{x^2} |3x+1| < \frac{1}{2}$.

1615 $\frac{7-3x+\sqrt{x^2+3x-4}}{x-3} < -1$.

1616 Найти все значения a, при которых неравенство

$$\log_{\frac{1}{2}}(x^2+ax+1) < 1$$

выполняется для всех x из промежутка $(-\infty; 0)$.

1617 На параболе $y = 2x^2 - 3x + 8$ найти точки, касательные в которых проходят через начало координат.

1618 При каком значении k площадь фигуры, заключённой между параболой $y = x^2 + 2x - 3$ и прямой $y = kx + 1$, наименьшая?

1619 Парабола $y = x^2 + px + q$ пересекает прямую $y = 2x - 3$ в точке с абсциссой 1. При каких значениях p и q расстояние от вершины параболы до оси Ox является наименьшим? Найти это расстояние.

1620 Найти все значения x, при которых функция $y = 6\cos^2 x + 6\sin x - 2$ принимает наибольшее значение.

1621 Найти все значения a, при которых наименьшее значение функции $y = x^2 + (a+4)x + 2a + 3$ на отрезке $[0; 2]$ равно -4.

1622 Найти все значения a, при каждом из которых наименьшее значение квадратичной функции $y = 4x^2 - 4ax + a^2 - 2a + 2$ на отрезке $[0; 2]$ равно 3.

1623 Найти все значения параметра a, при которых вершины двух парабол $y = 4x^2 + 8ax - 9$ и $y = 4ax^2 - 8x + a - 2$ лежат по одну сторону от прямой $y = -5$.

1624 Найти наибольшее и наименьшее значения функции

$$y = \frac{2\cos^4 x + \sin^2 x}{2\sin^4 x + 3\cos^2 x}.$$

Ответы и указания

1. 2) 0,(72); 4) −0,75; 6) 0,(13). **2.** 2) 1,(282051); 4) 0,49(6); 6) 1,3(2). **3.** 2) $1\frac{5}{9}$; 4) $-\frac{8}{9}$; 6) $-2\frac{329}{990}$. **4.** 1) 4; 2) $4\frac{3}{4}$. **5.** 2) 5,8. **8.** 2) $|x|=-x$; 3) $|x|=x$. **9.** 2) Иррациональное; 4) рациональное; 6) иррациональное. **10.** 2) 10; 4) $\frac{2}{3}$. **11.** 2) $\sqrt{11}-\sqrt{2,1}>\sqrt{10}-\sqrt{3,1}$. **12.** 2) 3; 3) $2+\sqrt{3}$. **13.** 2) Да. **14.** 2) 341. **16.** 2) Да; 4) да. **17.** 2) 0; 4) −2. **18.** 2) 1,5; 4) $-\frac{2}{3}$. **19.** 2) $-31\frac{1}{4}$. **20.** 2) $\frac{8}{9}$; 4) $\frac{23}{90}$. **21.** 2) Нет; 4) да. **22.** 2) $2\sqrt{3}(2+\sqrt{3})$. **23.** 2) $y=\frac{1}{3}$. **24.** 1) −1; 2) 9; 3) 1. **25.** 2a. **26.** $R_n=\frac{1}{2^n-1}R_1$. **28.** 2) 2; 4) 16. **29.** 2) 81; 4) $\frac{1}{81}$. **30.** 2) −1; 4) −4; 6) −8. **31.** 2) $x=-\frac{1}{2}$; 4) $x_1=-2$, $x_2=2$. **32.** 2) 5; 4) −11; 5) $\frac{1}{30}$. **33.** 2) 48; 3) 20. **34.** 2) 33; 4) 7. **35.** 2) 0,2; 4) 2. **36.** 2) 50; 4) 16. **37.** 2) a^2b^3; 4) a^2b^3. **38.** 2) $3ab$; 4) $\frac{2}{3}$. **39.** 2) $\frac{2}{3}$; 4) $\frac{3}{2}$. **40.** 2) $\frac{2}{5}$; 4) 2; 6) 4. **41.** 2) $3x$; 4) $2\cdot\frac{b}{a}$. **42.** 2) $\frac{1}{3}$; 4) $\frac{1}{4}$. **43.** 2) 2; 4) 5. **44.** 2) y^2; 4) a^8b^9; 6) $3a$. **45.** 2) $x>-3$; 4) $\frac{2}{3}\leqslant x<2$. **46.** 2) 2. **47.** 2) 6; 4) $\frac{1}{2}$; 6) 4. **48.** 2) ab^2c. **49.** 2) $3x$; 3) 0; 4) $a-1$. **50.** 2) 7; 3) 1. **51.** 2) $(3-x)^3$ при $x\leqslant 3$, $(x-3)^3$ при $x>3$; 4) $-3x-5$. **52.** 2) $\sqrt[3]{7}+\sqrt{15}<\sqrt{10}+\sqrt[3]{28}$. **54.** 3) 1. **57.** 2) 3; 4) 27; 6) $\frac{1}{27}$. **58.** 2) 5; 4) $\frac{1}{2}$; 6) $\frac{1}{2}$. **59.** 2) 49; 4) 125. **60.** 2) 121; 4) 150. **61.** 2) 3; 4) 2,7. **62.** 2) b; 4) a; 6) $y^{-1\frac{1}{6}}$. **63.** 2) $a^{\frac{1}{3}}\left(b^{\frac{1}{3}}+c^{\frac{1}{3}}\right)$; 4) $3x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}}\left(4x^{\frac{1}{2}}-y^{\frac{1}{2}}\right)$. **64.** 2) $\left(y^{\frac{1}{3}}-1\right)\left(y^{\frac{1}{3}}+1\right)$; 4) $\left(x^{\frac{1}{2}}-y^{\frac{1}{2}}\right)\left(x^{\frac{1}{2}}+y^{\frac{1}{2}}\right)$;

6) $\left(0{,}1m^{\frac{1}{12}}-n^{\frac{1}{12}}\right)\left(0{,}1m^{\frac{1}{12}}+n^{\frac{1}{12}}\right)$. **65.** 2) $\left(x^{\frac{1}{2}}-y^{\frac{1}{2}}\right)\left(x+x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}}+y\right)$; 4) $\left(3a^{\frac{1}{3}}+c^{\frac{1}{6}}\right)\times$
$\times\left(9a^{\frac{2}{3}}-3a^{\frac{1}{3}}c^{\frac{1}{6}}+c^{\frac{1}{3}}\right)$. **66.** 1) $a^{\frac{1}{4}}+b^{\frac{1}{4}}$; 3) $\sqrt{c}-1$. **67.** $3c$. **68.** 2) 1; 4) $\frac{1}{16}$. **69.** 2) 3; 3) $\frac{1}{5}$; 4) $-\frac{624}{625}$. **70.** 2) 9; 4) 8. **71.** 2) 18; 4) 0,75.
72. 2) $\left(\frac{1}{3}\right)^{\sqrt{3}}<\left(\frac{1}{3}\right)^{\sqrt{2}}$; 4) $2^{\sqrt{3}}>2^{1,7}$; 6) $\left(\frac{1}{9}\right)^{\pi}<\left(\frac{1}{9}\right)^{3,14}$. **73.** 2) $(0{,}013)^{-1}>1$;
4) $27^{1,6}>1$; 6) $\left(\frac{1}{2}\right)^{\sqrt{3}}<1$; 8) $\left(\frac{1}{3}\right)^{\sqrt{8}-3}>1$. **74.** 2) $a^{2\sqrt{8}}$; 3) b. **75.** 2) $\sqrt[6]{5}<\sqrt[4]{7}$.
76. 2) $9\frac{5}{12}$; 4) $10\frac{19}{27}$. **77.** 2) a^2b. **78.** 2) 1; 4) $a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}}$. **79.** 2) 3.
80. 2) $b^{\frac{1}{2}}$; 4) $a+b$. **81.** 2) $\frac{\sqrt[3]{ab}}{\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}}$; 4) $2\sqrt{b}$. **82.** 2) y; 4) $4a^{-1}-\frac{1}{9}b^{-2}$.
83. 2) $m^{\frac{1}{2}}$; 4) a^{-2}. **84.** 2) $x=-\frac{1}{2}$; 4) $x=2\pi$. **85.** 2) $x=\frac{3\sqrt{2}}{8}$; 4) $x=1$.
86. 2) $\sqrt[4]{5}<\sqrt[3]{7}$; 4) $\sqrt[4]{13}>\sqrt[5]{23}$. **87.** 2) $2y$; 4) $2\sqrt[3]{b}$. **88.** 2) $2\sqrt[3]{b}$; 4) $-\frac{2\sqrt[3]{b}}{a+b}$.
89. 2) $2\left(a^{\frac{1}{2}}-b^{\frac{1}{2}}\right)$; 3) $\frac{x^{\frac{1}{3}}}{x+1}$. **90.** 5306 р. 4 к. **91.** 2168 р. 90 к. **92.** 2) 2.
93. 2) $\frac{309}{90}$; 4) $\frac{34}{99}$. **94.** 1) 1; 0,01; $\frac{3}{2}$; $37\frac{1}{27}$; $\frac{25}{36}$; $\frac{16}{81}$; 3) 2; 9; 10; 4; $\frac{1}{8}$; $\frac{9}{16}$. **95.** 2) 64; 10; 5; 2; 3) $\frac{1}{25}$; $\frac{1}{7}$; $11\frac{1}{9}$. **96.** 2) 15; 4) 1000;
6) $\frac{81}{256}$. **97.** 2) $\frac{3}{2}$; 4) $\frac{3}{2}$; 6) 4. **98.** 2) 98^0; $32^{\frac{1}{5}}$; $\left(\frac{3}{7}\right)^{-1}$. **99.** 2) $\left(\frac{5}{12}\right)^{-\frac{1}{4}}<$
$<(0{,}41)^{-\frac{1}{4}}$; 4) $\left(\frac{11}{12}\right)^{-\sqrt{5}}>\left(\frac{12}{13}\right)^{-\sqrt{5}}$. **100.** 2) a^{-1}; 4) $a^{\frac{5}{7}}$. **101.** 2) a^2.
102. 2) $\sqrt[5]{\left(1\frac{1}{4}-1\frac{1}{5}\right)^3}>\sqrt[5]{\left(1\frac{1}{6}-1\frac{1}{7}\right)^3}$. **103.** 2) $x=3$; 4) $x=2$; 5) $x=-2$.
104. 2) $a^{\frac{3}{5}}+b^{\frac{2}{5}}$. **105.** 2) $\frac{a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}}}{a-b}$. **107.** 2) $\frac{2681}{24\,750}$. **108.** $\frac{81}{2}$. **109.** 10.
110. $a=2-\sqrt{5}$, $a<0$. **111.** 2) $a<b$; 4) $a<b$. **112.** 2) $\frac{\sqrt{5}-\sqrt{2}}{3}$; 4) $\frac{2\sqrt[4]{3}}{3}$;
6) $\frac{11(\sqrt[3]{9}-\sqrt[3]{6}+\sqrt[3]{4})}{5}$; 8) $\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{2}$. **113.** 2) 7. **114.** 2) $2\sqrt[3]{xy}$; 4) $\frac{x+y}{\sqrt{xy}}$.
115. 2) $(\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b})^2$; 4) a^2+b^2. **116.** 2) $1-\frac{2b^2}{a(a-b)}$. **117.** 3) 1. **121.** 2) Наименьшее значение $y=-128$ при $x=-2$, наибольшее значение $y=2187$ при $x=3$; 4) наименьшее значение $y=\frac{1}{16}$ при $x=4$; наибольшее значение $y=1$

при $x = 1$. **122.** 2) $0{,}2^3 < 1$; 4) $\sqrt{3}^{22} > 1$. **123.** 2) $x \in R$; $y \in R$, $y \geqslant 2$; убывает на $(-\infty; -3]$, возрастает на $[-3; +\infty)$; не является ограниченной; наименьшее значение $y = 2$ при $x = -3$. **124.** 2) $\left(\frac{10}{11}\right)^3 < \left(\frac{12}{11}\right)^3$; 4) $2{,}5^7 < 2{,}6^2$; 6) $\left(\frac{14}{15}\right)^{-6} < \left(\frac{15}{16}\right)^{-6}$; 8) $(2\sqrt[3]{6})^{-5} > (6\sqrt[3]{2})^{-5}$. **125.** 2) $y = x^4$: область определения — $x \in R$, множество значений — все числа $y \geqslant 0$; $y = x^{\frac{1}{4}}$: область определения — все числа $x \geqslant 0$, множество значений — все числа $y \geqslant 0$; 4) $y = x^5$: область определения — $x \in R$, множество значений — $y \in R$; $y = x^{-5}$: область определения — $x \neq 0$, множество значений — $y \neq 0$. **126.** 2) Выше при $0 < x < 1$, ниже при $x > 1$. **127.** 2) $x \in R$, $y \geqslant 0$, возрастает на $[-1; +\infty)$, убывает на $(-\infty; -1]$, ограничена снизу. **128.** 2) Выше при $x > 1$, ниже при $0 < x < 1$. **129.** 2) $x \in R$, $y \geqslant 0$, возрастает при $x \geqslant 0$, убывает при $x \leqslant 0$, ограничена снизу; 4) $x \in R$, $y \geqslant -2$, возрастает при $x \geqslant 0$, убывает при $x \leqslant 0$, ограничена снизу; 6) $x \neq 0$, $y > 0$, убывает при $x > 0$, возрастает при $x < 0$, ограничена снизу. **130.** 2) $(0; 0)$, $(1; 1)$. **132.** 2) $y = \frac{4-x}{5}$; 4) $y = \frac{2x+1}{3}$; 6) $y = \sqrt[3]{x+3}$. **133.** 2) Все действительные числа; 4) все действительные числа; 6) $x \neq 0$, $y \neq 4$. **135.** 2) Нет; 4) да. **136.** 2) $y = (-x)^{\frac{5}{2}}$; 4) $y = -x^3$. **137.** 2) Все действительные числа; 4) $y = (x-1)^2$, $x \geqslant 1$, $y \geqslant 0$, $y = \sqrt{x}+1$: $x \geqslant 0$, $y \geqslant 1$; 6) $y = (x-1)^3$: все действительные числа; $y = \sqrt[3]{x}+1$: все действительные числа; 8) $y = \sqrt{x}+1$: $x \geqslant 0$, $y \geqslant 1$; $y = (x-1)^2$: $x \geqslant 1$, $y \geqslant 0$. **138.** 2) Нет корней; 4) нет корней. **139.** 2) Равносильны; 4) не равносильны; 6) равносильны. **140.** 2) Равносильны; 4) не равносильны. **141.** 2) Второе. **142.** 2) Нет корней; 4) $x = 4$. **143.** 2) $3{,}5 < x < 5$. **144.** 2) Равносильны. **145.** 2) Равносильны; 4) равносильны. **146.** 2) Оба. **147.** $x = 3$. **148.** 2) $x = 6$. **149.** 2) $-2 < x < 1$, $x > 2$. **152.** 2) $x = 27$; 3) $x = 5$. **153.** 2) $x = -7$; 3) $x_1 = 3$, $x_2 = -\frac{1}{3}$. **154.** 2) $x = 5$; 4) $x_1 = -3$, $x_2 = 4$. **155.** 2) $x = 4$; 4) $x = -1$. **156.** 2) $x = 5$; 4) $x_1 = -3$, $x_2 = 1$. **157.** 2) $x_1 = -1$, $x_2 = 0$, $x_3 = 1$. **158.** 2) $x = -3$; 4) $x = 18$. **159.** 1) $x = -4$; 2) $x = 5$. **160.** 2) $x = 10$; 4) $x_{1,2} = \pm\sqrt{17}$, $x_{3,4} = \pm\sqrt{2}$. **161.** 2) $x_1 = -1$, $x_2 = -3$. **162.** 2) Два; 4) один. **163.** 1) $x_1 = 0$, $x_{2,3} = \pm 2$; 2) $x_1 = 0$, $x_2 = 2$; 3) $x_1 = -4$; $x_2 = 1$; 4) $x_1 = -6$, $x_2 = 1$. **164.** 2) $x = 5$. **165.** 1) $1 \leqslant x \leqslant 1{,}5$; 3) $x < -5$. **166.** 2) $0 \leqslant x < 9$; 4) $x < 13{,}5$; 6) $0 \leqslant x \leqslant 2$. **167.** 2) $2 \leqslant x < 3$; 4) $x < -5$; 6) $x \geqslant -\frac{5}{9}$; 8) $-\frac{5}{4} \leqslant x \leqslant -\frac{19}{16}$. **168.** 2) $-1 \leqslant x < 0$, $0 < x \leqslant 1$; 4) $-5 \leqslant x < -3$, $3 < x \leqslant 5$. **169.** 2) $-1 \leqslant x \leqslant 2$; 4) $x < -1$, $x > 2$; 6) $0 \leqslant x \leqslant 4$. **170.** 2) $x \geqslant -1$; 4) $\frac{2}{3} \leqslant x < 6$; 6) $2 < x \leqslant 3$. **171.** 1) $x > \frac{2}{\sqrt{3}}$; 2) $-3 \leqslant x < 6$. **174.** 1) $x < -\frac{7}{9}$; 2) $x < \frac{15-\sqrt{290}}{4}$, $x \geqslant 4$. **177.** 2) $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{\pi}$, $(\sqrt{2})^{\pi}$, $(1{,}9)^{\pi}$, π^{π}; 4) $\pi^{-\frac{2}{3}}$, $(\sqrt{2})^{-\frac{2}{3}}$, $(1{,}3)^{-\frac{2}{3}}$, $(0{,}5)^{-\frac{2}{3}}$. **178.** 2) $x_1 = -1$, $x_2 = 1$.

179. 2) $-\sqrt{2} \leqslant x \leqslant \sqrt{2}$; 4) $x \leqslant -1$, $x \geqslant 2$. **180.** 2) $y = \frac{2}{x} + 3$, $x \neq 0$, $y \neq 3$; 4) $y = \sqrt[3]{x+1}$, все действительные числа. **182.** 2) Являются; 3) являются. **183.** 2) $x = 21$; 4) $x_1 = \frac{1}{2}$, $x_2 = \frac{1}{3}$; 6) $x_{1,2} = \pm 8$. **185.** 2) Являются; 4) не являются. **186.** 2) $y = x^2 - 4x$, $x \leqslant 2$, $y \geqslant -4$; 4) $y = 6x - x^2 - 8$, $x \geqslant 3$, $y \leqslant 1$. **187.** 2) $x = 1$; 4) $x = 0$. **188.** 2) $x = 259$; 4) $x_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{13}}{2}$; 5) $x = -\frac{12}{5}$; 6) $2 \leqslant x \leqslant 7$. **189.** 2) $x < 0$; 4) $x \geqslant -\frac{1}{2}$. **190.** 1) $6 < x \leqslant 8$; 2) $x < -4$, $\frac{1}{2} \leqslant x < \frac{5}{7}$; 3) $1 < x < 6$; 4) $-6 < x \leqslant 3$. **191.** 1) Если $a \leqslant 2$, то решений нет; если $a > 2$, то $6 \leqslant x < \frac{a^4 + 16a^2 + 16}{4a^2}$; 2) $-\frac{|a|}{\sqrt{5}} < x \leqslant |a|$ при $a \neq 0$, нет корней при $a = 0$. **196.** 2) Больше 1; 4) больше 1. **197.** 2) $x = -1$; 4) $x = -2$. **200.** 2) $x > 0$; 4) $x < -1$. **206.** 88,4 г, 22,1 г. **207.** $4{,}87 \cdot 10^5$ м^3. **208.** 2) $x = \frac{2}{3}$; 4) $x = -\frac{2}{3}$. **209.** 2) $x = -0{,}5$; 4) $x = 4$. **210.** 2) $x = 2{,}5$; 4) $x = 9$; 6) $x = 0{,}4$. **211.** 2) $x = 1$; 4) $x = 3$. **212.** 2) $x = 0$; 4) $x = 0$. **213.** 2) $x_1 = 0$, $x_2 = 2$; 4) $x = 1$. **214.** 2) $x_1 = 2$, $x_2 = 5$; 4) $x = -\frac{1}{3}$. **215.** 2) $x_1 = 1$, $x_2 = -3$; 4) $x_1 = 0{,}5$, $x_2 = -3$. **216.** 2) $x = 0{,}8$; 4) $x = -1$. **217.** 2) $x_1 = 0{,}3$, $x_2 = -0{,}2$; 4) $x = 4$. **218.** 2) $y = 3$; 4) $x = 2$. **219.** 2) $x = 3$; 4) $x = 3$. **220.** 2) $x = -1$; 4) $x = 1$. **221.** 2) $x = 3$; 4) $x = \frac{1}{2}$. **222.** 2) $x = -3$; 4) $x = 4$. **223.** 2) $x = -1$; 4) $x_1 = 1$, $x_2 = -1$; 6) $x = -1$. **224.** $x = 4$. **225.** 1) $x = -3$; 2) $x = 2$; 3) $x_1 = 0$, $x_2 = \frac{1}{2}$; 4) $x = 3{,}25$. **226.** 2) $x_1 = 0$, $x_2 = 2$; 4) нет корней. **228.** 2) $x < 2$; 4) $x < -0{,}5$; 6) $x \geqslant 3$. **229.** 2) $x > 4$; 4) $-3 < x < 3$. **230.** 2) $x = 1$; 4) $x = 2$. **231.** 2) $\frac{1}{2} \leqslant x \leqslant 1$; 4) $-\frac{2}{3} \leqslant x \leqslant \frac{1}{2}$. **232.** 2) $x > 1$; 4) $x \leqslant 1$. **233.** 2) $x < 2$, $(-3; -2; -1; 0; 1)$; 4) $x < -1$, $(-2; -3)$. **234.** 2) $x \geqslant 0$. **235.** При $x > -2$. **238.** 1) $-6 \leqslant x < 3$; 2) $5 < x \leqslant 30$. **239.** 1) $x < -1$; 2) $-2 < x < 1$; 3) $x < 0$, $x > 1$; 4) $-\frac{4}{3} < x < 2$. **240.** 2) $(0; -2)$, $(-1; -3)$; 4) $\left(3\frac{2}{3}; -\frac{1}{3}\right)$. **241.** 2) $\left(\frac{2}{3}; -1\right)$. **242.** 2) $(1; 1)$. **243.** 2) $(3; -2)$; 4) $(0; 1)$; 6) $(0; 2)$. **244.** 1) $x = 1\frac{2}{3}$; 2) $x = \frac{1}{5}$. **245.** 1) $(7; 3)$; 2) $(2; 1{,}5)$. **246.** 2) $2^{\sqrt{3}} > 2^{1{,}7}$; 4) $\left(\frac{1}{5}\right)^{\pi} < \left(\frac{1}{5}\right)^{3{,}14}$. **247.** 2) $\left(\frac{1}{2}\right)^{\sqrt{3}} < 1$; 4) $\left(\frac{1}{3}\right)^{\sqrt{8}-3} > 1$. **249.** 2) $0{,}04 \leqslant y \leqslant 5$. **250.** 2) $x = -2$; 4) $x_1 = 3$, $x_2 = -1$. **251.** 2) $x = 0$; 4) $x = 2$. **252.** 2) $x = 1$; 4) $x = 3$. **253.** 2) $x < -1$; 4) $-2 < x < 2$. **256.** $a(1 + 0{,}01p)^{n-1}$. **258.** 2) $x = 24$. **259.** 2) $x = 9$; 4) $x = 1$. **260.** 2) $x = 0$; 4) $x = -0{,}5$. **261.** 2) $-3 < x < 1$; 4) $-1 < x \leqslant 1$. **262.** 2) $(1; 1)$. **264.** 2) $x = 4$; 4) $x = 1$. **265.** 2) $x < -3$, $x > 1$; 4) $x < -1\frac{1}{3}$, $x > 4$. **266.** 1; 2; 3; 4; 0; -1; -2; -5; $\frac{1}{3}$; $-1\frac{1}{2}$; $2\frac{1}{4}$. **267.** 2) 6; 4) 0. **268.** 2) -3; 4) $-\frac{1}{4}$.

269. 2) 4; 4) 0. **270.** 2) −1; 4) $-\frac{1}{4}$. **271.** 2) −2; 4) 1; 6) $-\frac{1}{3}$. **272.** 2) 3; 4) −3. **273.** 2) −3; 4) −2. **274.** 2) 16; 4) 6. **275.** 2) 64; 4) 3. **276.** 2) 144; 4) 1. **277.** 2) $x = 625$, 4) $x = 25$; 5) $x = 5{,}5$. **278.** 2) $x < 7$; 4) $x > \frac{1}{2}$; 6) $x < 0$. **279.** 2) −1,5; 4) $-1\frac{2}{3}$. **280.** 2) $\frac{1}{4}$; 4) 5^{12}; 6) $1\frac{2}{7}$. **281.** 2) 1; 4) $\frac{1}{6}$; 5) 2. **282.** 2) $x = 7$; 3) $x = \frac{1}{\sqrt[8]{5}}$. **283.** 2) $x < -3$, $x > 2$. **284.** 2) $x > -2$; 4) $-2 < x < 0$, $x > 1$. **285.** 2) $x = \log_{1,2} 4$; 4) $x = \frac{1}{2}(1 - \log_7 2)$. **286.** 2) $x = \log_3 4$; 4) $x_1 = -1$, $x_2 = \log_{\frac{1}{3}} 2$. **287.** 1) $x_1 = 0$, $x_2 = \log_{1,5} 3$; 2) $x = \log_{0,6} 2$. **288.** 1) $\frac{1}{2} < x < 1$, $x > 1$; 2) $1 < x < 2$, $x > 2$. **289.** Если $a > 0$, $a = -1$, то $x = \log_3 a^2$; если $a < 0$, $a \neq -1$, то $x_1 = \log_3 a^2$, $x_2 = \log_3(-a)$. **290.** 2) 3; 4) 2. **291.** 2) 2; 4) −3. **292.** 2) $\frac{2}{3}$; 4) $-1\frac{1}{6}$. **293.** 2) 1,5; 4) −4. **294.** 2) 1,5; 4) −3. **295.** 2) 11. **296.** 2) $1\frac{1}{3}$; 4) 0. **297.** 2) $x = \frac{a^2}{b^3}$; 4) $x = \sqrt[4]{a} \cdot \sqrt[7]{b^4}$. **298.** 1) 3; 2) 19; 3) 475; 4) 22,5. **299.** 2) 1. **300.** 1) $2(a + b - 1)$; 2) $2a + \frac{1}{2}$. **301.** 2) 0,9451; 4) −0,178. **302.** 2) 0,683; 4) −0,154. **303.** 2) 1,29; 4) −0,42. **304.** 2) 1,3; 4) −15,42. **305.** 2) $\frac{\log_7 6}{\log_7 10}$; 4) $\frac{\log_7 \frac{1}{3}}{\log_7 5}$; 6) $\frac{1}{\log_7 3}$. **306.** 1) 25; 2) $-\frac{1}{2}$. **307.** 2) $x = 8$; 4) $x = 3$; 6) $x = 2$. **308.** $\frac{1}{2} + m$. **309.** $\frac{m+1}{m+n}$. **310.** $\frac{2+m}{1+2m}$. **311.** $1 - \frac{2}{3}m$. **312.** 1) −2; 2) −3. **313.** 2) $x_1 = \frac{1}{4}$, $x_2 = \sqrt{2}$; 4) $x_1 = 9$, $x_2 = 27$. **314.** 2) 1. **315.** 9 лет. **316.** 3052 качания. **317.** 2) 2,0933; 4) 2,7182819. **318.** 2) $\log_{\frac{1}{3}} 9 > \log_{\frac{1}{3}} 17$; 4) $\log_2 \frac{\sqrt{5}}{2} > \log_2 \frac{\sqrt{3}}{2}$. **319.** 2) $\log_3 0{,}45 < 0$; 4) $\log_{0,3} 9{,}6 < 0$. **320.** 2) $0 < x < 1$; 3) $x > 1$. **325.** 2) $x \geqslant \frac{1}{8}$; 4) $x > 0{,}5$. **326.** 2) $0 < x < 0{,}16$; 4) $x \geqslant 0{,}16$. **327.** 2) $x = 8$; 4) $x = 46$; 6) $x = -1{,}6$. **328.** 2) $x > -1$; 4) $-2 < x < 2$. **330.** 2) $\frac{\lg 5 + \lg \sqrt{7}}{2} < \lg \frac{5 + \sqrt{7}}{2}$; 4) $\lg \lg \lg 50 < \lg^3 50$. **331.** 2) $-1 < x < 6$; 4) $x > 4$; 6) $x > 3$. **332.** 2) $x > -1$, $y \in R$; 4) $x > 0$, $y \in R$; 5) $x > 1$, $y \in R$. **333.** 2) $x = 2$; 4) $x \approx 2$. **334.** 1) $x > 0$, $y \geqslant 0$; убывает при $0 < x \leqslant 1$, возрастает при $x > 1$, 2) $x \neq 0$, $y \in R$, убывает при $x < 0$, возрастает при $x > 0$; 3) $x \neq 3$, $y \in R$, убывает при $x < 3$, возрастает при $x > 3$; 4) $x > 0$, $y \geqslant 0$, убывает при $0 < x \leqslant 2$, возрастает при $x > 2$. **335.** 1) $x \neq 2$, $x \neq 3$; 2) $-1 < x < \frac{1}{2}$. **336.** 2) Каждое из двух — следствие другого; 3) второе. **337.** 2) $x = 3$; 4) $x = \sqrt{2}$. **338.** 2) Корней нет; 3) $x = 2$. **339.** 2) $x = 5$. **340.** 2) Корней нет. **341.** 2) $x = 1$; 4) $x_1 = 3$, $x_2 = 5$. **342.** 2) (1; 9). **343.** 2) $x_{1,2} = \pm 8$; 4) $x = 16$; 6) $x = 3$. **344.** 2) $x = 3$; 4) $x_1 = 4$, $x_2 = -8$. **345.** 2) $x = 9$;

4) $x_1 = 100$, $x_2 = 1000$. **346.** 2) Да. **347.** 2) $\left(8; \frac{1}{4}\right)$. **348.** 2) $x_1 = 4$, $x_2 = \sqrt{2}$; 3) $x_1 = 3$, $x_2 = 9$; 4) $x_1 = 27$, $x_2 = \frac{1}{9}$. **349.** 2) $x = \frac{2}{7}$. **350.** 2) $x = -4$. **351.** 1) $x_1 = \sqrt{2}$, $x_2 = 3$; 2) $x_1 = \frac{4}{3}$, $x_2 = 2$. **352.** 1) $x = 5^{\frac{1}{3}}$; 2) $x = 4$. **353.** $a > 0$, $a \neq 1$, $a \neq 5^{-\frac{1}{3}}$, $x = 5^{\frac{a \log_5 a}{3 \log_5 a + 1}}$. **354.** 2) $x < \frac{7}{5}$; 4) $-2 < x < 2$. **355.** 2) $x \leqslant -30$; 4) $1 < x \leqslant 10$; 6) $x < -0{,}05$. **356.** 2) $x > 25$; 4) $\frac{5}{3} < x < 3$. **357.** 2) $2 < x \leqslant 3$; $11 \leqslant x < 12$. **358.** 2) $-\frac{2}{3} < x < 1$; 4) $x \geqslant \sqrt{2}$. **359.** 2) $x > 7$; 4) решений нет. **360.** 2) $x \leqslant -1$, $x \geqslant 4$; 4) $x < -0{,}5$, $x > 3$. **361.** 2) $x < 2$, $x > 3$; 4) $-2 \leqslant x < -1$, $6 < x \leqslant 7$. **362.** 2) $-\sqrt{2} < x < -\frac{3}{2\sqrt{2}}$, $\frac{3}{2\sqrt{2}} < x < \sqrt{2}$. **363.** 2) $x > 2$. **364.** 2) $0 < x < 0{,}1$, $x > 10\,000$. **365.** 2) $\log_3 \frac{1}{2} < x < \log_3 \frac{2}{3}$, $x > \log_3 2$; 4) $x < \frac{\sqrt{6}-1}{2}$, $\frac{6}{5} < x < \frac{\sqrt{6}}{2}$. **366.** $-\log_3 2 \leqslant x < 0$, $\log_3 \sqrt{2} < x \leqslant 1$. **367.** $2 - \log_4 5 < x \leqslant 1$. **368.** 2) 4; 4) -3. **369.** 2) -4; 4) 6. **370.** 2) 1; 4) $\frac{2}{3}$. **371.** 2) $\frac{1}{4}$; 4) 4. **372.** 2) $-2{,}2$. **373.** 2) 2,26; 4) $-1{,}73$. **375.** 2) Возрастающая; 4) убывающая. **377.** 2) $x < 0$, $x > 2$. **378.** 1) $x = \frac{3}{8}$; 2) $x = 2$. **379.** 2) $x_1 = 1$, $x_2 = -\frac{3}{2}$; 4) $x_1 = 4$, $x_2 = 8$. **380.** 2) $x = -4$; 4) $x = 2$. **381.** 2) $x < 4$; 4) $x < -1$. **382.** 2) Решений нет. **383.** 2) $x < -8$, $x > 1$. **384.** 2) $-4{,}5$; 4) 36; 6) 2. **385.** 2) $2^{2 \log_2 5 + \log_{\frac{1}{9}} 9} > \sqrt{8}$. **386.** 1,223. **387.** 0,756. **388.** 2) $0 < x < 1$. **390.** 2) $x = \frac{1}{3} \log_2 3$; 4) $x = \frac{1}{4}\left(\log_{\frac{1}{3}} 1{,}5 - 5\right)$; 6) $x = \log_5 3$. **391.** 2) $x = 27$; 4) $x_1 = 27$, $x_2 = \frac{1}{27}$. **392.** 2) $x = -4$; 4) $x_1 = 14$, $x_2 = 6$. **393.** 2) Корней нет. **394.** 2) $x = 4{,}5$. **395.** 2) $x_1 = 2$, $x_2 = 5$; 4) корней нет. **396.** 2) $5 < x \leqslant 6$; 4) $x > 4$; 6) $-4 < x < -3$. **397.** 2) $0 < x < 1$, $x = \sqrt{3}$. **399.** 2, 10, 50 или 50, 10, 2. **401.** 2) $x_1 = 10$, $x_2 = 0{,}1$. **402.** 2) $x_1 = 23$, $x_2 = -1{,}8$. **403.** 2) $x = 2 - \sqrt{2}$; 3) $x = 0$; 4) $x = 2$. **404.** 2) $x \leqslant 0$, $\log_6 5 \leqslant x < 1$. **405.** 5. **406.** $\frac{1}{a} < x < \frac{1}{\sqrt{a}}$, $\sqrt{a} < x < a$, если $a > 1$; $\frac{1}{\sqrt{a}} < x < \frac{1}{a}$, $a < x < \sqrt{a}$, если $0 < a < 1$. **407.** 2) $\frac{2\pi}{3}$; 3) $\frac{5\pi}{6}$; 5) $\frac{5\pi}{4}$; 6) $\frac{7\pi}{9}$. **408.** 2) $20°$; 3) $135°$; 5) $\left(\frac{540}{\pi}\right)°$; 6) $\left(\frac{64{,}8}{\pi}\right)°$. **410.** 0,4 м. **411.** 2 рад. **412.** $\frac{3\pi}{8}$ см^2. **413.** 2 рад. **416.** 2) (0; 1); 3) (0; -1); 5) $\left(\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$; 6) $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}; -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$. **420.** 2) (0; 1); 4) (-1; 0); 6) (0; 1). **421.** 2) (0; 1); 4) (0; 1). **422.** 2) $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}; -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$;

4) (1; 0), (−1; 0). **423.** 2) $\pi + 2\pi k$, где k — любое целое число; 4) $-\frac{\pi}{2} + 2\pi k$, где k — любое целое число. **424.** 2) Вторая; 4) четвёртая. **425.** 1) $x = 1{,}8\pi$, $k = 4$; 2) $x = \frac{4}{3}\pi$, $k = 3$; 4) $x = \frac{5}{3}\pi$, $k = 2$. **427.** 2) (0; 1); 4) (0; −1). **428.** 2) $-\frac{3\pi}{4} + 2\pi k$, $k \in Z$; 4) $-\frac{5\pi}{6} + 2\pi k$, $k \in Z$. **430.** 2) −1; 4) −1; 6) 1. **431.** 2) 0, 1; 4) 1, 0; 6) 0, −1. **432.** 2) 2; 4) −1. **433.** 2) 0; 4) −1. **434.** 2) −7; 4) $-\frac{1}{4}$. **435.** 2) $x = \frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in Z$; 4) $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$, $k \in Z$. **436.** 2) Да; 4) нет. **437.** 2) $-\frac{5}{4}$; 4) $\frac{1+\sqrt{2}}{2}$. **438.** 2) 2,75; 4) $1\frac{1}{12}$. **439.** 2) $x = \pi + 2\pi k$, $k \in Z$; 4) $x = \pi + 2\pi k$, $k \in Z$; 6) $x = -\frac{4}{25}\pi + \frac{2\pi k}{5}$, $k \in Z$. **440.** 2) Верно; 4) неверно. **441.** 2) 0,09; 4) 0,7; 6) −0,22; 8) 0,36. **442.** 2) Во второй; 3) в третьей; 5) во второй; 6) в четвёртой; 8) в третьей. **443.** 2) В третьей; 4) во второй; 6) во второй. **444.** 2) $\sin\left(-\frac{33\pi}{7}\right) < 0$; 3) $\sin\left(-\frac{4\pi}{3}\right) > 0$; 4) $\sin(-0{,}1\pi) < 0$; 5) $\sin 5{,}1 < 0$; 6) $\sin(-470°) < 0$. **445.** 2) $\cos\frac{7}{6}\pi < 0$; 3) $\cos\left(-\frac{2}{5}\pi\right) > 0$; 4) $\cos 4{,}6 < 0$; 5) $\cos(-5{,}3) > 0$; 6) $\cos(-150°) < 0$. **446.** 2) $\operatorname{tg}\frac{12}{5}\pi > 0$; 3) $\operatorname{tg}\left(-\frac{3}{4}\pi\right) < 0$; 4) $\operatorname{tg} 3{,}7 > 0$; 5) $\operatorname{tg}(-1{,}3) < 0$; 6) $\operatorname{tg} 283° < 0$. **447.** 2) $\sin\alpha < 0$, $\cos\alpha > 0$, $\operatorname{tg}\alpha < 0$; 4) $\sin\alpha > 0$, $\cos\alpha > 0$, $\operatorname{tg}\alpha > 0$. **448.** 2) $\sin 3 > 0$, $\cos 3 < 0$, $\operatorname{tg} 3 < 0$; 4) $\sin(-1{,}3) < 0$, $\cos(-1{,}3) > 0$, $\operatorname{tg}(-1{,}3) < 0$. **449.** 2) $\cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) < 0$; 4) $\operatorname{tg}\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right) < 0$; 6) $\sin(\pi - \alpha) > 0$. **450.** 2) $\sin\alpha > 0$, $\cos\alpha < 0$, $\operatorname{tg}\alpha < 0$, $\operatorname{ctg}\alpha < 0$. **451.** Знаки совпадают для $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ и для $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$, знаки различны для $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ и для $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$. **452.** 2) $\cos\frac{2\pi}{3}\cos\frac{\pi}{6} < 0$; 3) $\operatorname{tg}\frac{5\pi}{4} + \sin\frac{\pi}{4} > 0$. **453.** 2) $\cos 1{,}3 > \cos 2{,}3$. **454.** 2) $x = -\frac{5\pi}{2} + k\pi$, $k \in Z$; 4) $x = \pi + 2\pi k$, $k \in Z$. **455.** 2) Во второй. **456.** 0,03 — да, $\frac{2}{3}$ — да, $\frac{5}{3}$ — нет, $\frac{11}{13}$ — да, $-\frac{13}{11}$ — нет, $\sqrt{2}$ — нет. **457.** 2) Могут; 3) не могут; 4) не могут. **458.** 2) $\cos\alpha = -\frac{\sqrt{21}}{5}$, $\operatorname{tg}\alpha = \frac{2\sqrt{21}}{21}$, $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{\sqrt{21}}{2}$. **459.** 2) $\cos\alpha = -0{,}6$, $\operatorname{tg}\alpha = -\frac{4}{3}$, $\operatorname{ctg}\alpha = -\frac{3}{4}$; 4) $\sin\alpha = -\frac{1}{\sqrt{10}}$, $\cos\alpha = \frac{3}{\sqrt{10}}$, $\operatorname{tg}\alpha = -\frac{1}{3}$; 6) $\cos\alpha = \frac{12}{13}$, $\operatorname{tg}\alpha = -\frac{5}{12}$, $\operatorname{ctg}\alpha = -\frac{12}{5}$; 8) $\sin\alpha = -\frac{24}{25}$, $\cos\alpha = -\frac{7}{25}$, $\operatorname{tg}\alpha = \frac{24}{7}$. **460.** 2) $\pm\frac{2}{\sqrt{5}}$; 4) $\pm\frac{\sqrt{5}}{3}$. **461.** 2) Не могут. **462.** $\cos\alpha = \frac{9}{11}$, $\operatorname{tg}\alpha = \frac{2\sqrt{10}}{9}$. **463.** 2) $\frac{1}{3}$; 4) 2. **464.** 2) $\frac{11}{16}$. **466.** 2) 0; 4) $1 + \sin\alpha$. **467.** 2) 4; 4) 2. **469.** 2) 0; 4) $\operatorname{tg}^2\alpha$.

471. $\frac{8}{25}$. **472.** $\frac{37}{125}$. **473.** 7. **474.** 2) $x=\frac{\pi}{2}+\pi k$, $k\in Z$; 4) $x=\frac{\pi}{2}+2\pi k$.
475. 2) $\frac{1}{3}$; 4) -3; 6) 2. **476.** 2) $2\cos\alpha$; 4) 2. **477.** 2) 0,5. **478.** 2) $-2\cos\alpha$.
480. 2) $x=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi k}{2}$, $k\in Z$; 4) $x=\frac{\pi k}{2}$, $k\in Z$; 6) $x=\frac{\pi}{2}+\pi k$, $k\in Z$. **481.** 2) $-\frac{1}{2}$;
4) $-\frac{1}{2}$. **482.** 2) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; 4) -1. **483.** 2) $\frac{4-\sqrt{2}}{6}$. **484.** 2) $\cos 3\beta$; 4) -1. **485.** 2) $\frac{\sqrt{3}}{2}$;
4) 1. **486.** 2) $\frac{-\sqrt{14}-2}{6}$. **487.** 2) $-\cos\beta\sin\alpha$; 4) $\sin\alpha\cos\beta$. **488.** $\frac{84}{85}$, $\frac{36}{85}$.
489. $-\frac{63}{65}$. **490.** $2\frac{5}{36}$. **491.** 2) $\frac{1}{2}\cos^2\alpha$; 4) $\sin\alpha\sin 3\alpha$. **493.** 2) 1; 4) $\sqrt{3}$.
494. 2) $\frac{1}{7}$. **495.** $\sqrt{3}\operatorname{tg}\alpha$. **496.** 2) $\sin 2\beta$. **497.** 2) $x=\frac{\pi}{4}+\pi k$, $k\in Z$;
4) $x=4\pi k$, $k\in Z$. **499.** 2) $2\sin\left(\frac{\pi}{8}+\frac{\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{8}+\frac{\beta}{2}\right)$; 4) $\cos^2\left(\frac{3\pi}{4}+\frac{\alpha}{2}\right)-$
$-\sin^2\left(\frac{3\pi}{4}+\frac{\alpha}{2}\right)$; 6) $\cos^2\frac{\alpha}{2}-\sin^2\frac{\alpha}{2}$. **500.** 2) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; 4) $\frac{1}{2}$. **501.** 2) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; 4) -1.
502. 2) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$; 4) -2. **503.** 1) $-\frac{24}{25}$. **504.** 2) $\frac{7}{25}$. **505.** $\frac{1}{3}$. **506.** 2) $\sin 50°$;
4) $\cos^2 2\alpha$. **507.** 2) $\operatorname{ctg}^2\alpha$. **509.** 2) $\frac{8}{9}$. **512.** 2) $x=\pi k$, $k\in Z$; 4) $x=\frac{\pi}{2}+\pi k$,
$k\in Z$; 6) $x=\frac{\pi}{2}+\pi k$, $k\in Z$. **513.** 2) $\frac{1+\cos\frac{1}{2}}{2}$; 4) $\frac{1+\sin 2\alpha}{2}$. **514.** 2) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; 4) 1.
515. 2) $\sqrt{0,8}$; 4) 2. **516.** 2) $\sqrt{0,1}$; 4) $\frac{1}{3}$. **522.** $\cos 4\alpha$. **523.** 2) $x=4\pi k$,
$x=\pi+2\pi k$, $k\in Z$; 4) $x=\frac{\pi k}{2}$, $x=\frac{\pi}{8}+\frac{\pi k}{4}$, $k\in Z$; 5) $\frac{\pi}{2}+\pi k$, $k\in Z$; 6) $x=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi k}{2}$,
$k\in Z$. **524.** 2) $\alpha=60°$; 4) $\alpha=40°$; 6) $\alpha=\frac{3\pi}{10}$; 8) $\alpha=\frac{\pi}{6}$. **525.** 2) $\frac{\sqrt{2}}{2}$;
4) $\frac{1}{2}$; 6) $-\frac{1}{2}$; 8) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$. **526.** 2) $-\frac{1}{2}$; 4) $-\frac{\sqrt{3}}{3}$; 6) $\frac{1}{2}$; 8) 1. **527.** 2) -1.
528. 2) $\frac{1}{\cos\alpha}$. **529.** 2) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; 4) $-\frac{1}{2}$; 6) 1; 8) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$. **530.** 2) $-\sqrt{2}$; 4) $\frac{\sqrt{3}}{3}-1$.
531. 2) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$; 4) -1. **535.** 2) $x=\pi+2\pi k$, $k\in Z$; 4) $x=\pi+2\pi k$, $k\in Z$;
6) $x=\frac{\pi}{6}+\frac{\pi k}{3}$, $k\in Z$. **537.** 2) $\sqrt{2}\sin\beta$; 4) $\sin 2\alpha$. **538.** 2) 0; 4) $\sqrt{3}$;
6) $\frac{\sqrt{6}}{2}$. **541.** 2) $2\sin\alpha$. **543.** 2) $2\sqrt{3}\sin\frac{5\pi}{24}\sin\frac{\pi}{8}$. **546.** 2) $\frac{2\sqrt{5}}{5}$; 4) $-\frac{\sqrt{6}}{3}$.
547. 2) $\operatorname{ctg}^2\alpha$. **548.** 2) 1; 4) $-\frac{1}{\sqrt{2}}$. **549.** 2) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$; 4) $-\frac{2+\sqrt{2}}{2}$.
550. 2) $2\sin\alpha$. **551.** 2) $-\operatorname{ctg}\alpha$. **553.** 2) $\frac{1}{4}$. **554.** 2) $\frac{\sqrt{2}}{4}$. **557.** $-4\sin 2\alpha$.
560. 2. **561.** $1\frac{5}{6}$. **562.** $-\frac{4}{9}$. **568.** 2) 0; 4) $\frac{\pi}{3}$; 6) $\frac{3\pi}{4}$. **569.** 2) 2π; 4) 8π.

570. 2) $\arccos\left(-\frac{3}{4}\right) < \arccos(-1)$; 3) $\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) > \arccos\left(-\frac{1}{2}\right)$. **571.** 2) $x = \pm\frac{5\pi}{6} + 2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$; 3) $x = \pm\frac{3\pi}{4} + 2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$. **572.** 1) $x = \pm\arccos\frac{3}{4} + 2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$. **573.** 2) $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$; 4) $x = \pm\frac{\pi}{2} + 6\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$; 6) $x = \frac{3\pi}{8} + \frac{\pi n}{2}$, $n \in \boldsymbol{Z}$. **574.** 2) $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$. **575.** 2) Да; 4) нет; 5) да. **576.** 2) $x = \pm\frac{\pi}{6} + \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$; 4) $x = \pm\frac{\pi}{8} + \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$; 6) $x = 2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$; 8) $x = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n$, $x = \pm\arccos\left(-\frac{2}{3}\right) + 2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$. **577.** $x = \pm\frac{\pi}{3} + \pi k$, $k = 0;\ 1;\ 2$. **578.** $x = \pm\frac{\pi}{16}$. **579.** 2) $x = -2{,}5$. **580.** 2) $-\frac{2}{3}$; 4) $\frac{1}{3}$; 6) $\frac{1}{3}$. **581.** 2) 6; 4) $2\pi - 4$. **582.** 2) $\frac{24}{25}$. **583.** $2a^2 - 1$. **585.** 2) $x \approx \pm 1{,}84 + 2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$. **586.** 2) $\frac{\pi}{2}$; 4) $\frac{\pi}{6}$; 6) $-\frac{\pi}{3}$. **587.** 2) 0; 4) $-\frac{\pi}{2}$. **588.** 2) $\arcsin\left(-\frac{1}{4}\right) > \arcsin(-1)$. **589.** 2) $x = (-1)^n \times \frac{\pi}{4} + \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$. **590.** 1) $x = (-1)^n \cdot \arcsin\frac{2}{7} + \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$; 3) $x = (-1)^n \times \arcsin\frac{\sqrt{5}}{3} + \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$. **591.** 2) $x = -\frac{\pi}{4} + \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$; 4) $x = (-1)^n \cdot \frac{2\pi}{3} + 2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$; 6) $x = -\frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}$, $n \in \boldsymbol{Z}$. **592.** 2) $x = \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$. **593.** 2) Да; 4) нет; 6) нет. **594.** 2) $x = (-1)^{n+1}\frac{\pi}{6} + \frac{\pi n}{2}$, $n \in \boldsymbol{Z}$; 4) $x = (-1)^n \frac{3}{2}\arcsin\frac{1}{4} + \frac{3\pi n}{2}$, $n \in \boldsymbol{Z}$. **595.** 2) $x = \frac{\pi}{6} + \frac{2\pi n}{3}$, $n \in \boldsymbol{Z}$. **596.** 1) $x = (-1)^{n+1}\frac{\pi}{6} + \pi n$, $x = (-1)^n \arcsin\frac{3}{4} + \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$; 2) $x = (-1)^n \frac{1}{3}\arcsin\frac{1}{4} + \frac{\pi n}{3}$, $n \in \boldsymbol{Z}$. **597.** $\frac{\pi}{12}$, $\frac{5\pi}{12}$, $\frac{13\pi}{12}$, $\frac{17\pi}{12}$. **598.** $\frac{14\pi}{3}$. **601.** 2) $\frac{3}{5}$; 4) $\frac{\sqrt{15}}{4}$. **602.** 2) $\frac{\sqrt{3}}{2}$. **603.** 2) $\frac{7}{25}$. **604.** 2) $x = \frac{6 + \sqrt{2}}{4}$. **606.** 2) $x \approx (-1)^{n+1}\, 0{,}32 + \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$. **607.** 2) $-\frac{\pi}{4}$; 4) $\frac{\pi}{3}$. **608.** 2) 0; 3) $-\frac{47\pi}{12}$. **609.** 4) $\mathrm{arctg}\,(-5) < \mathrm{arctg}\ 0$. **610.** 2) $x = \frac{\pi}{3} + \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$; 4) $x = -\frac{\pi}{4} + \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$; 6) $x = -\mathrm{arctg}\ 5 + \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$. **611.** 1) $x = \frac{\pi n}{3}$, $n \in \boldsymbol{Z}$. **612.** 2) $x = \frac{\pi}{3} + \pi n$, $x = -\frac{\pi}{6} + \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$; 4) $x = \mathrm{arctg}\ 4{,}5 + \pi n$, $x = (-1)^{n+1}\frac{\pi}{6} + \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$; 6) $x = \frac{\pi}{4} + \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$. **613.** $\frac{\pi}{6}$, $-\frac{5\pi}{6}$. **614.** 2) $\frac{3 - \sqrt{3}}{5}$. **615.** 2) $-0{,}3$; 4) -6. **616.** 2) 2; 4) $13 - 4\pi$. **617.** 2) $-\frac{\pi}{4}$; 4) $\frac{\pi}{3}$. **619.** 2) $x \approx -1{,}44 + \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$. **620.** 2) $x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}$; 3) $x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $x = (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$; 4) корней нет. **621.** 2) $x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $x = (-1)^n \arcsin\frac{2}{3} + \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$; 4) $x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$. **622.** 2) $x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}$,

$n \in Z$; 3) $x = -\frac{\pi}{4} + \pi n$, $x = \operatorname{arctg} 4 + \pi n$, $n \in Z$; 4) корней нет. **623.** 2) $x = -\frac{\pi}{4} + \pi n$, $x = \operatorname{arctg} 3 + \pi n$, $n \in Z$; 4) $x = \operatorname{arctg} 3 + \pi n$, $x = -\operatorname{arctg} \frac{1}{2} + \pi n$, $n \in Z$. **624.** 2) $x = \frac{\pi}{4} + \pi n$, $n \in Z$; 4) $x = -\operatorname{arctg} \frac{1}{2} + \pi n$, $n \in Z$. **625.** 2) $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $x = 2\pi n$, $n \in Z$; 4) $x = \frac{\pi}{12} + \frac{2\pi n}{3}$, $n \in Z$. **626.** 2) $x = \frac{\pi n}{2}$, $x = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi n}{3}$, $n \in Z$; 4) $x = \frac{\pi}{4} + \pi n$, $x = -\frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{2}$, $n \in Z$. **627.** 2) $x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{4}$, $x = (-1)^n \frac{\pi}{12} + \frac{\pi n}{3}$, $n \in Z$; 4) $x = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi n}{3}$, $n \in Z$. **628.** 2) $x = -\frac{\pi}{6} + \pi n$, $x = \pi + 8\pi n$, $n \in Z$; 4) $x = \operatorname{arctg} 3 + \pi n$, $x = \pi + 2\pi n$, $n \in Z$. **629.** 2) $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$, $x = (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n$, $n \in Z$; 4) $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$, $x = -\frac{\pi}{4} + \pi n$, $n \in Z$. **630.** 2) $x = \frac{\pi}{16} + \frac{\pi n}{4}$, $n \in Z$; 4) $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$, $x = (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n$, $n \in Z$. **631.** 2) $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $x = 2\pi n$, $n \in Z$; 4) $x = \pi + 2\pi n$, $x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $n \in Z$. **632.** 2) $x = -\frac{\pi}{4} + \pi n$, $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $x = 2\pi n$, $n \in Z$. **633.** 2) $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in Z$. **634.** 2) Корней нет; 4) $x = \pi n$, $n \in Z$. **635.** 2) $x = \pi n$; 4) $x = \frac{\pi n}{5}$, $n \in Z$. **636.** 2) $x = \operatorname{arctg} 2 + \pi n$, $x = \operatorname{arctg} \frac{1}{3} + \pi n$, $n \in Z$; 4) корней нет. **637.** 2) $x = \pi n$, $x = \pm \arccos \frac{1}{3} + 2\pi n$, $n \in Z$. **638.** 2) $x = -\frac{\pi}{4} + \pi n$, $x = -\frac{\pi}{4} + (-1)^n \arcsin \frac{2-\sqrt{3}}{\sqrt{2}} + \pi n$, $n \in Z$. **639.** 2) $x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}$, $n \in Z$. **640.** 2) $x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}$, $n \in Z$. **641.** 2) $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$, $k \in Z$. **642.** 2) $x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $n \in Z$. **643.** 2) $x_1 = \frac{\pi}{2} + \pi n$, $x_2 = \pm \frac{2\pi}{3} + 2\pi n$, $n \in Z$. **644.** 2) $x = \pi k$, $x = \pm \frac{\pi}{4} + \pi k$, $k \in Z$. **645.** 1) $x = \frac{\pi}{4} + \frac{3\pi n}{2}$, $y = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{2} k$, $n, k \in Z$; 2) $x = (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n$, $y = (-1)^{k+1} \frac{\pi}{6} + \pi k$, $n, k \in Z$. **646.** $|a| \leqslant 2$, $x = \pm \arccos \frac{a}{2} + 2\pi k$, $k \in Z$; $|a| > 2$, корней нет. **648.** 2) $\frac{\pi}{6} + 2\pi n < x < \frac{11\pi}{6} + 2\pi n$, $n \in Z$; 4) $\frac{3\pi}{4} + 2\pi n \leqslant x \leqslant \frac{5\pi}{4} + 2\pi n$, $n \in Z$. **649.** 4) $x = \pi + 2\pi n$, $n \in Z$. **650.** 2) $-\frac{5\pi}{4} + 2\pi n \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{4} + 2\pi n$, $n \in Z$; 4) $-\frac{\pi}{3} + 2\pi n < x < \frac{4\pi}{3} + 2\pi n$, $n \in Z$. **651.** 4) $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $n \in Z$. **652.** 2) $-\frac{\pi}{18} + \frac{2\pi n}{3} < x < \frac{4\pi}{9} + \frac{2\pi n}{3}$, $n \in Z$; 4) $2\pi n \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{3} + 2\pi n$, $n \in Z$. **653.** 2) $12 - 3\pi + 8\pi n < x < 12 - \pi + 8\pi n$, $n \in Z$. **654.** 2) $-\frac{\pi}{2} + 2\pi n < x < 2\pi n$, $2\pi n < x < \frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $n \in Z$. **656.** 2) $x = -2 \pm \frac{\pi}{4} + \frac{2\pi n}{3}$, $n \in Z$; 4) $x = \frac{\pi}{9} + \frac{\pi}{18} + \frac{2\pi n}{3}$, $n \in Z$. **657.** 2) $x = \frac{\pi}{3} + 4\pi n$, $n \in Z$; 4) $x = \frac{1}{2} + (-1)^n \frac{1}{2} \times$

$\times \arcsin\frac{2}{5}+\frac{\pi n}{2}$, $n \in Z$. **658.** 2) $x=\pm\frac{\pi}{4}+2\pi n$, $x=-\frac{\pi}{8}+\frac{\pi n}{2}$, $n \in Z$. **659.** 2) $x=\frac{5\pi}{36}+\frac{\pi n}{3}$, $n \in Z$; 4) $x=\frac{3\pi}{28}+\pi n$, $n \in Z$. **660.** 2) $x=(-1)^{n+1}\arcsin\frac{1}{3}+\pi n$, $n \in Z$; 4) $x=\pm\arccos\frac{1}{3}+2\pi n$, $n \in Z$. **661.** 2) $x=(-1)^n\arcsin\frac{\sqrt{39}-3}{4}+\pi n$, $n \in Z$. **662.** 2) $x=-\frac{\pi}{4}+\pi n$, $x=\operatorname{arctg} 1{,}5+\pi n$, $n \in Z$; 4) $x=\frac{\pi}{4}+\pi n$, $n \in Z$. **663.** 2) $x=-\frac{1}{3}\operatorname{arctg}\frac{5}{4}+\frac{\pi n}{3}$, $n \in Z$. **664.** 2) Корней нет. **665.** 2) $x=\frac{\pi}{6}+\frac{\pi n}{3}$, $x=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2}$, $x=\pi n$, $n \in Z$; 4) $x=\frac{\pi n}{5}$, $x=\frac{\pi}{6}+\frac{\pi n}{3}$, $n \in Z$. **666.** 1) $\frac{1}{2}$; 3) 1. **667.** 4) 0. **668.** 2) $x=\frac{\pi}{4}+\pi n$, $x=\operatorname{arctg}\frac{1}{2}+\pi n$, $n \in Z$. **669.** 2) $x=\operatorname{arctg}\frac{1}{2}+\pi n$, $x=-\operatorname{arctg} 2+\pi n$, $n \in Z$. **670.** 2) $x=\frac{\pi}{4}+\pi n$, $n \in Z$. **671.** 2) $x=\pi n$, $x=\pm\frac{\pi}{4}+2\pi n$, $n \in Z$. **672.** 2) $x=(-1)^n\frac{\pi}{12}+\frac{\pi n}{2}$, $n \in Z$. **673.** 2) $x=\pi n$, $x=\pm\frac{\pi}{3}+\pi n$, $n \in Z$; 4) $x=\frac{\pi}{2}+2\pi n$, $x=\frac{3\pi}{22}+\frac{2\pi n}{11}$, $n \in Z$. **674.** 2) $x=\pi n$, $n \in Z$; 4) $x=\frac{\pi}{2}+\pi n$, $x=\pm\frac{2\pi}{3}+2\pi n$, $n \in Z$; 5) $x=\frac{\pi}{2}+\pi n$, $x=(-1)^n\frac{\pi}{6}+\pi n$, $n \in Z$. **675.** 1) $x=\frac{\pi n}{2}$, $x=\pm\frac{2\pi}{3}+2\pi n$, $n \in Z$; 2) $x=\pi n$, $x=\frac{\pi}{5}+\frac{2\pi n}{5}$, $2n \neq 5m-1$, $m \in Z$, $n \in Z$. **676.** 2) $-\frac{1}{4}$; 4) $-\frac{2}{3}$. **677.** 1) $\frac{5}{4}$; 2) 2. **678.** 2) $x=\pm\frac{\pi}{3}+\pi n$, $n \in Z$; 4) $x=\pm\frac{\pi}{6}+\pi n$, $n \in Z$; 6) корней нет. **679.** 2) Корней нет. **680.** 2) $x=-\frac{\pi}{4}+\pi n$, $x=2\pi n$, $x=-\frac{\pi}{2}+2\pi n$, $x=\frac{\pi}{4}+(-1)^n\arcsin\frac{\sqrt{2}}{4}+\pi n$, $n \in Z$. **681.** 2) $x=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2}$, $n \in Z$. **682.** $x=\pm\frac{\pi}{3}+\pi n$, $x=\frac{\pi}{8}+\frac{\pi n}{4}$, $n \in Z$. **683.** $x=\arcsin\frac{1}{4}+\pi(2n+1)$, $n \in Z$. **684.** $x=2\pi n$, $x=\frac{\pi}{2}+\pi n$, $x=\frac{\pi}{6}+\pi n$, $n \in Z$. **685.** 2) $x=\frac{\pi}{6}+2\pi(n+k)$, $y=\frac{5\pi}{6}+2\pi k$, $n \in Z$, $k \in Z$. **687.** $\frac{1}{2} \leqslant a \leqslant 1$, $x=\pm\frac{1}{4}\arccos(4a-3)+\frac{\pi n}{2}$, $n \in Z$. **688.** $\frac{1}{16} \leqslant a \leqslant 1$. **689.** При $-\frac{1}{3} \leqslant a \leqslant \frac{1}{3}$ $x=-\frac{\pi}{4}+(-1)^n\arcsin 3a+\pi n$, $x=-\frac{\pi}{4}+(-1)^{n+1}\arcsin a+\pi n$, $n \in Z$; при $\frac{1}{3}<|a|\leqslant 1$ $x=-\frac{\pi}{4}+(-1)^{n+1}\arcsin a+\pi n$, $n \in Z$; при $|a|>1$ нет корней. **690.** 2) $\frac{\pi}{3}+2\pi n<x<\frac{5\pi}{3}+2\pi n$, $n \in Z$. **692.** 2) $0 \leqslant y \leqslant 2$; 6) $-1{,}25 \leqslant y \leqslant -0{,}75$. **693.** 2) $x \neq \pi n$, $n \in Z$; 4) $x \neq \frac{\pi}{10}+\frac{\pi n}{5}$, $n \in Z$. **694.** 2) $x=2\pi n$, $n \in Z$; 3) $2\pi n<x<\pi+2\pi n$, $n \in Z$; 6) $-\frac{\pi}{2}+2\pi n<x<\frac{\pi}{2}+2\pi n$, $n \in Z$. **695.** 2) $x \neq \frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2}$, $n \in Z$; 4) $x \neq \frac{\pi}{2}+\pi n$, $n \in Z$. **696.** 2) $-1 \leqslant y \leqslant 1$; 4) $1 \leqslant y \leqslant 10$; 6) $-\sqrt{3} \leqslant y \leqslant \sqrt{3}$. **697.** 5 и -5. **698.** $-\sqrt{26} \leqslant y \leqslant \sqrt{26}$. **699.** $1 \leqslant y \leqslant 11$.

700. 2) Нечётная; 4) нечётная; 6) чётная. **701.** 2) Не является чётной и нечётной; 4) чётная; 6) чётная. **704.** 2) Чётная; 4) нечётная; 6) чётная. **705.** 2) $\frac{4\pi}{3}$; 4) π. **706.** 2) 2π. **710.** 2) $\left[-\frac{\pi}{2}; 0\right]$, $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$; 4) $[-\pi; 0]$, $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$. **711.** 2) $\cos\frac{8\pi}{7} < \cos\frac{10\pi}{7}$; 4) $\cos\left(-\frac{8\pi}{7}\right) < \cos\left(-\frac{9\pi}{7}\right)$; 6) $\cos 4 < \cos 5$. **712.** 2) $\frac{\pi}{4}$, $\frac{7\pi}{4}$, $\frac{9\pi}{4}$; 4) $\frac{2\pi}{3}$, $\frac{4\pi}{3}$, $\frac{8\pi}{3}$. **713.** 2) $0 \leqslant x \leqslant \frac{2\pi}{3}$, $\frac{4\pi}{3} \leqslant x \leqslant \frac{8\pi}{3}$; 4) $\frac{\pi}{6} < x < \frac{11\pi}{6}$, $\frac{13\pi}{6} < x \leqslant 3\pi$. **714.** 2) $\sin\frac{\pi}{7} < \cos\frac{\pi}{7}$; 4) $\sin\frac{3\pi}{5} > \cos\frac{\pi}{5}$; 6) $\cos\frac{\pi}{8} > \sin\frac{3\pi}{10}$. **715.** 2) $-\frac{\pi}{18}$, $\frac{\pi}{18}$, $\frac{11\pi}{18}$, $\frac{13\pi}{18}$, $\frac{23\pi}{18}$, $\frac{25\pi}{18}$. **716.** 2) $-\frac{\pi}{18} < x < \frac{\pi}{18}$, $\frac{11\pi}{18} < x < \frac{13\pi}{18}$, $\frac{23\pi}{18} < x < \frac{25\pi}{18}$. **718.** 2) $-\frac{\sqrt{2}}{2} < y < \frac{\sqrt{2}}{2}$. **722.** 2) $\left[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$, $\left[\frac{3\pi}{2}; 2\pi\right]$; 4) $\left[-2\pi; -\frac{3\pi}{2}\right]$, $\left[-\frac{3\pi}{2}; -\pi\right]$. **723.** 2) $\sin\frac{13\pi}{7} > \sin\frac{11\pi}{7}$; 3) $\sin\left(-\frac{8\pi}{7}\right) > \sin\left(-\frac{9\pi}{8}\right)$; 4) $\sin 7 > \sin 6$. **724.** 2) $\frac{\pi}{4}$, $\frac{3\pi}{4}$, $\frac{9\pi}{4}$, $\frac{11\pi}{4}$; 4) $\frac{4\pi}{3}$, $\frac{5\pi}{3}$. **725.** 2) $0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{4}$, $\frac{3\pi}{4} \leqslant x \leqslant \frac{9\pi}{4}$, $\frac{11\pi}{4} \leqslant x \leqslant 3\pi$; 4) $\frac{4\pi}{3} < x < \frac{5\pi}{3}$. **726.** 2) $\sin\frac{9\pi}{8} > \cos\frac{9\pi}{8}$; 4) $\sin\frac{\pi}{8} < \cos\frac{3\pi}{10}$. **727.** 2) $-\frac{11\pi}{9}$, $-\frac{10\pi}{9}$, $-\frac{5\pi}{9}$, $-\frac{4\pi}{9}$, $\frac{\pi}{9}$, $\frac{2\pi}{9}$, $\frac{7\pi}{9}$, $\frac{8\pi}{9}$. **728.** 2) $-\frac{3\pi}{2} \leqslant x < -\frac{11\pi}{9}$, $-\frac{10\pi}{9} < x < -\frac{5\pi}{9}$, $-\frac{4\pi}{9} < x < \frac{\pi}{9}$, $\frac{2\pi}{9} < x < \frac{7\pi}{9}$, $\frac{8\pi}{9} < x \leqslant \pi$. **730.** 2) $-\frac{\sqrt{2}}{2} \leqslant y \leqslant \frac{\sqrt{2}}{2}$. **735.** 2) $\operatorname{tg}\frac{7\pi}{8} < \operatorname{tg}\frac{8\pi}{9}$; 4) $\operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{6}\right) < \operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{7}\right)$; 6) $\operatorname{tg} 1 < \operatorname{tg} 1{,}5$. **736.** 2) $-\frac{2\pi}{3}$, $\frac{\pi}{3}$, $\frac{4\pi}{3}$; 4) $-\frac{\pi}{4}$, $\frac{3\pi}{4}$, $\frac{7\pi}{4}$. **737.** 2) $-\pi \leqslant x < -\frac{5\pi}{6}$, $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{6}$, $\frac{\pi}{2} < x < \frac{7\pi}{6}$, $\frac{3\pi}{2} < x < 2\pi$; 4) $-\pi < x < -\frac{\pi}{2}$, $-\frac{\pi}{3} \leqslant x < \frac{\pi}{2}$, $\frac{2\pi}{3} \leqslant x < \frac{3\pi}{2}$, $\frac{5\pi}{3} \leqslant x < 2\pi$; **738.** 2) $\frac{\pi}{3} + \pi n \leqslant x < \frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in Z$; 4) $-\frac{\pi}{4} + \pi n < x < \frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in Z$. **739.** 2) $-\operatorname{arctg} 2 + \pi$, $-\operatorname{arctg} 2 + 2\pi$, $-\operatorname{arctg} 2 + 3\pi$. **740.** 2) $-\frac{\pi}{2} + \pi n < x \leqslant \operatorname{arctg} 5 + \pi n$, $n \in Z$; 4) $-\operatorname{arctg} 5 + \pi n \leqslant x < \frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in Z$. **741.** 2) $0 \leqslant x < \operatorname{arctg} 4$, $\frac{\pi}{2} < x < \operatorname{arctg} 4 + \pi$, $\frac{3\pi}{2} < x < \operatorname{arctg} 4 + 2\pi$, $\frac{5\pi}{2} < x \leqslant 3\pi$; 4) $0 \leqslant x < \frac{\pi}{2}$, $-\operatorname{arctg} 3 + \pi < x < \frac{3\pi}{2}$, $-\operatorname{arctg} 3 + 2\pi < x < \frac{5\pi}{2}$, $-\operatorname{arctg} 3 + 3\pi < x \leqslant 3\pi$. **742.** 2) $-\frac{5\pi}{12}$, $-\frac{\pi}{12}$, $\frac{\pi}{4}$, $\frac{7\pi}{12}$, $\frac{11\pi}{12}$. **743.** 2) $-\frac{\pi}{2} < x < -\frac{4\pi}{9}$, $-\frac{\pi}{6} < x < -\frac{\pi}{9}$, $\frac{\pi}{6} < x < \frac{2\pi}{9}$, $\frac{\pi}{2} < x < \frac{5\pi}{9}$, $\frac{5\pi}{9} < x < \pi$. **745.** 2) $y > -1$; 4) $y \geqslant 1$, $y \leqslant -1$. **749.** 2) $-\frac{\pi}{2} + \pi n < x \leqslant -\frac{\pi}{3} + \pi n$, $\frac{\pi}{3} + \pi n \leqslant x < \frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in Z$; 4) $\pi n < x < \frac{\pi}{6} + \pi n$, $n \in Z$. **750.** 1) $\arcsin\frac{1}{\sqrt{3}} < \arcsin\frac{2}{\sqrt{10}}$;

2) $\arcsin\left(-\frac{2}{3}\right) > \arcsin\left(-\frac{3}{4}\right)$. **751.** 1) $\arccos\frac{1}{\sqrt{3}} < \arccos\frac{1}{\sqrt{5}}$; 2) $\arccos\left(-\frac{4}{5}\right) > \arccos\left(-\frac{1}{3}\right)$. **752.** 1) $\operatorname{arctg} 2\sqrt{3} < \operatorname{arctg} 3\sqrt{2}$; 2) $\operatorname{arctg}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) < \operatorname{arctg}\left(-\frac{1}{\sqrt{5}}\right)$. **753.** 2) $x = \frac{6-\sqrt{2}}{4}$; 4) $x = -3-\sqrt{3}$. **754.** 2) $x = -\frac{1}{3}$; 4) $x = -1$. **755.** 2) $x = 1$; 4) $x = 1$. **756.** 1) $1 \leqslant x \leqslant 5$; 2) $\frac{1}{3} \leqslant x \leqslant 1$; 3) $1 \leqslant x \leqslant 4$; 4) $-2 \leqslant x \leqslant -1$, $1 \leqslant x \leqslant 2$. **758.** 2) $x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in Z$; 4) $-\frac{\pi}{2} + 2\pi n \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $n \in Z$; 6) $x \neq \pi n$, $x \neq (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n$, $n \in Z$. **759.** 2) $-1 \leqslant y \leqslant 1$; 4) $5 \leqslant y \leqslant 7$; 6) $-4 \leqslant y \leqslant -2$. **760.** 2) Нечётная; 4) не является чётной и нечётной. **761.** 2) 14π. **762.** 2) $\frac{\pi}{3}$, $\frac{2\pi}{3}$, $\frac{7\pi}{3}$, $\frac{8\pi}{3}$; 4) π, 3π. **763.** 2) $-\frac{11\pi}{6} < x < -\frac{7\pi}{6}$; 4) $\operatorname{arctg}\frac{1}{2} - 2\pi \leqslant x < -\frac{3\pi}{2}$. **765.** 2) $\pi n \leqslant x < \frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in Z$. **766.** 2) $\frac{1}{2}$ и $-\frac{1}{2}$; 4) 1 и -2. **767.** 2) Чётная; 3) нечётная. **768.** 2) 4π. **770.** 1) $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$, $x = 2\pi n$, $n \in Z$; 2) $x = \frac{2\pi n}{3}$, $x = \frac{\pi}{4} + \pi n$, $x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $n \in Z$. **771.** $-\frac{2\pi}{3} + 2\pi n < x < \frac{2\pi}{3} + 2\pi n$, $n \in Z$. **772.** $-\frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2} < x < \frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{2}$, $n \in Z$. **774.** 2) $-1 \leqslant y \leqslant \frac{5}{4}$. **775.** 2) $\pi n < x < \frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in Z$. **776.** 2) $v_{ср} = 3$. **777.** 2) $v_{ср} = 2{,}2$. **778.** 2) $v(t) = -3$. **779.** 2) $v(4) = 0{,}25$, $v(8) = 0{,}25$. **780.** 2) $f'(x) = 5$; 4) $f'(x) = -6x$. **781.** 1) $f'(x) = 4$; 3) $f'(x) = -5$. **782.** 2) $v(t) = 10t$. **783.** 2) $v(10) = 20$. **784.** $v_{ср} = 1{,}5$; $v_{ср} = 1$; $v_{ср} = 0{,}5$. **785.** $v_{ср} = -\frac{1}{2}$, $v_{ср} = 2$, $v_{ср} = 2$. **787.** 2) $7x^6$; 4) $13x^{12}$. **788.** 2) $-3x^{-4}$; 4) $-7x^{-8}$. **789.** 2) $\frac{2}{3} x^{-\frac{1}{3}}$; 4) $\sqrt{3}\, x^{\sqrt{3}-1}$. **790.** 2) $-\frac{9}{x^{10}}$; 4) $\frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$; 6) $-\frac{3}{4x\sqrt[4]{x^3}}$. **791.** 2) $-15(5x+2)^{-4}$; 4) $-20(2-5x)^3$; 6) $2500x^3$. **792.** 2) $-\frac{3}{4\sqrt[4]{(7-3x)^3}}$; 4) $\frac{\sqrt{5}}{3\sqrt[3]{x^2}}$. **793.** 2) $-\frac{2}{27}$; 4) $\frac{1}{12}$; 6) $-\frac{3}{16}$. **795.** $y = x^3$. **796.** 2) $\frac{6}{(3-2x)^4}$; 4) $-\frac{4}{\sqrt[7]{(3-14x)^5}}$; 6) $\frac{4}{3(1-2x)\sqrt[3]{(1-2x)^2}}$. **797.** 2) $x = \frac{8}{27}$. **798.** $\frac{1}{4}$. **799.** 2) $-\frac{2}{3}$, $\frac{7}{3}$. **801.** $2\frac{5}{6}$. **802.** 2) $2x-1$; 4) $-34x$; 6) $1{,}5x^2$; 8) $16x$. **803.** 2) $10x+6$; 4) $5x^4-6x$; 6) $-6x^2+18$; 8) $-9x^2+4x-1$. **805.** 2) $3x^2 - \frac{2}{x^3}$; 4) $\frac{1}{2\sqrt[6]{x^5}} + \frac{1}{2\sqrt[10]{x^{11}}}$. **806.** 2) $f'(0) = -2$, $f'(2) = 10$; 4) $f'(0) = 1$, $f'(2) = 5$. **807.** 2) $f'(3) = \frac{1}{2\sqrt{3}} - \frac{1}{9}$, $f'(1) = -\frac{1}{2}$; 4) $f'(3) = \frac{14\sqrt{3}}{9}$, $f'(1) = 3$. **808.** 2) Нет;

4) да. **809.** 2) $x = 1,5$; 4) $x_1 = 1$, $x_2 = -\frac{7}{3}$; 6) $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_3 = -4$.
810. 1) $5x^4 - 4x^3 + 3x^2 - 2x$; 3) $\frac{3x-1}{2\sqrt{x}}$. **811.** 2) 192; 4) 31,5. **812.** Да.
813. $x_1 = 3$, $x_2 = -0,4$, $x_3 = 1\frac{5}{11}$. **814.** 2) $\frac{2\sqrt{x}(x^2-2x-1)-x-1}{2\sqrt{x}(x-1)^2}$. **815.** 1) 1;
2) $-\frac{5}{18}$. **816.** 2) $F(x) = \sqrt{\ln x}$. **817.** 2) $f(y) = \sin y$, $y = g(x) = x^2 + 1$.
818. 1) $2x + 1 - \frac{16}{x^2}$; 2) $1 + \frac{2}{\sqrt[3]{x}} - \frac{6}{x\sqrt[3]{x}}$. **819.** 1) $\frac{3x^2+4}{2x\sqrt{x}}$; 2) $\frac{x+1}{2x\sqrt{x}}$.
820. 2) $(x-1)^3(x+1)^6(11x-3)$; 4) $\frac{4(2x-3)^2(10x+3)}{3\sqrt[3]{(2x+1)^2}}$. **821.** 2) $\frac{6x^2+6x+4}{(2x+1)^2}$;
3) $\frac{(x-2)(5x-x^2-4)}{2x\sqrt{x}(2-x)^2}$. **822.** $x_1 = -1$, $x_2 = 2$. **823.** $x_1 = 0$, $x_2 = -2$. **825.** 2) $-1 <$
$< x < 0$, $x > 2$; 4) $x > 1$. **826.** 2) $x \neq 1,5$; 4) $x > 0,5$. **827.** 3,5 рад/с.
828. 902,5 Дж. **829.** 2) 103 г/см. **830.** $\frac{2x-5}{2\sqrt{(x-2)(x-3)}}$. **831.** 2) $e^x + 2x$;
4) $-3e^{-3x} + \frac{1}{2\sqrt{x}}$. **832.** 2) $\frac{1}{2}e^{\frac{1}{2}x-1} - \frac{1}{2\sqrt{x-1}}$; 4) $-e^{1-x} - 3x^{-4}$; 6) $6x^2e^{2x^3}$.
833. 2) $3^x\ln 3 + 2x^{-3}$; 4) $3e^{3x} + 4x$; 6) $2x \cdot 3^{x^2+x}\ln 3$. **834.** 2) $3^x\ln 3 -$
$- 2e^{2x}$; 4) $-e^{3-x} - \frac{4}{x^5}$. **835.** 2) $\frac{3}{x} - 2^x\ln 2$; 4) $-9x^{-4} - \frac{1}{x\ln 3}$; 6) $\frac{3x(1+2\ln x)}{\ln 3}$
$- \frac{2}{x\ln 3}$. **836.** 2) $-\sin x$; 4) $\cos x - 2^x\ln 2$. **837.** 2) $-\sin(x+2)$; 3) $-\cos(3-x)$;
4) $-3x^2\sin x^3$. **838.** 2) $\frac{1}{3}\cos\left(\frac{x}{3}+3\right) + 2^x\ln 2$; 3) $-12\sin 4x + \frac{1}{2x^2}$.
839. 2) $\frac{3^x(\ln 3\sin x - \cos x)}{\sin^2 x}$; 4) $\frac{1}{x\ln 3}\sin 2x + 2\log_3 x\cos 2x$. **840.** 2) 0;
4) $-\frac{1}{\ln 2} - 3\ln 3$. **841.** 2) $x = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n$, $n \in Z$; 4) $x = -0,5$; 6) $x_1 = 4$, $x_2 = -1$.
842. 2) $x < 0$; 4) $x > 0$. **843.** 2) $-\frac{1}{2\sqrt{6-6x}} + \frac{10}{2-5x}$; 4) $-e^{\frac{3-x}{3}} - \frac{1}{2}\cos\frac{1+x}{4}$.
844. 1) $\frac{\sqrt{3}}{3(2-x)\sqrt[3]{2-x}} + \sin\frac{x-2}{3}$; 2) $-\frac{3}{2(x+2)\sqrt[4]{(x+2)^3}} - e^{\frac{x-4}{5}}$.
845. 2) $\frac{5}{2\sqrt{x}}(1-2x)e^{-x}$; 3) $2e^{3-2x}(\sin(3-2x) - \cos(3-2x))$.
846. 2) $\frac{e^{\sqrt{3+x}}}{2\sqrt{3+x}}$; 4) $\operatorname{ctg} x$. **847.** 2) $0,5^{1+\sin x}\ln 0,5\cos x$; 4) $\frac{\cos(\ln x)}{x}$.
848. 2) $\frac{\cos x}{3\sqrt[3]{\sin^2 x}}$; 4) $\frac{1}{2\sqrt{\log_2 x}\cdot x\ln 2}$. **849.** 2) $\frac{\sqrt{3}(1+3^x)-2x\sqrt{3}\,3^x\ln 3}{2\sqrt{x}(3^x+1)^2}$;
4) $\frac{5^{2x}(2\ln 5\sin 3x + 14\ln 5 - 3\cos 3x)}{(\sin 3x+7)^2}$. **850.** 2) $\frac{2^x\ln 2(x\ln 2-1)+\ln x-1}{x^2\ln^2 2}$.

851. 2) $\sin x + \cos x$. 852. 2) $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $x = 2\pi n$, $x = (-1)^{n+1} \times \arcsin \frac{6}{5\sqrt{2}} - \frac{\pi}{4} + \pi n$, $n \in Z$. 853. 2) 2. 854. $2 + 2\pi$. 855. 2) $f'(x) = 0$ при $x = e^{-1}$, $f'(x) > 0$ при $x > e^{-1}$, $f'(x) < 0$ при $0 < x < e^{-1}$; 4) $f'(x) = 0$ при $x = 1$, $f'(x) > 0$ при $x > 1$, $f'(x) < 0$ при $0 < x < 1$. 856. $\frac{2x-5}{x^2-5x+6}$.

Указание. Записать данную функцию при $x > 3$ в виде $\ln(x-3) + \ln(x-2)$, а при $x < 2$ в виде $\ln(3-x) + \ln(2-x)$. 857. 2) $k = 1$, $b = 5$; 4) $k = -\frac{\sqrt{3}}{3}$, $b = -1 - \frac{\sqrt{3}}{3}$. 858. 2) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; 4) 3. 859. 2) $-\frac{\pi}{4}$; 4) $-\frac{\pi}{3}$; 6) $\operatorname{arctg} \frac{2}{5}$. 860. 2) $y = -11x + 12$; 4) $y = -\frac{1}{4}x - 1$; 6) $y = x + 1$; 8) $y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$.

862. 1) $y = 1$; 2) $y = x$. 863. 2) $\frac{\pi}{2}$; 3) $\frac{\pi}{4}$. 864. 2) $\frac{\pi}{2}$; 4) $\frac{\pi}{2}$. 865. 2) $y = 0$; 4) $y = 2x$. 866. 2) $(1; 2)$; 4) $(\pi + 2\pi n; \pi + 2\pi n)$, $n \in Z$. 867. $(0; -1)$, $(4; 3)$. 868. $(1; -1)$, $y = 2x - 3$; $(1; 0)$, $y = 2x - 2$. 869. 2) $-5x^4 + 6x^2 - 6x$; 4) $-\frac{6}{x^4} - \frac{2}{\sqrt[4]{x^3}}$; 6) $-21(4-3x)^6$; 8) $\frac{2}{(1-4x)\sqrt{1-4x}}$. 870. 2) $-\sin x - \frac{1}{x}$; 4) $24x^3 - 9e^x$; 6) $-\frac{1}{x^4} + \frac{1}{2x}$. 871. 2) $2e^{2x} - \frac{1}{x}$; 4) $4\cos\frac{2x}{3} + 3e^{1-3x}$.

872. 2) $x^2(1 + 3\ln x)$; 4) $\sin 2x + 2x\cos 2x$; 6) $e^x(\cos x - \sin x)$. 873. 2) $\frac{2x - x^4}{(x^3+1)^2}$; 4) $\frac{1 - x + x\ln x}{x(1-x)^2}$. 874. 2) $-8^{\cos x} \ln 8 \sin x$; 4) $\frac{3}{x}$.

875. 2) $f'(x) = 0$ при $x = 0$ и при $x = \frac{4}{9}$, $f'(x) > 0$ при $0 < x < \frac{4}{9}$, $f'(x) < 0$ при $x < 0$ и при $x > \frac{4}{9}$; 4) $f'(x) = 0$ при $x = 4$, $x = -3$ и $x = 1{,}2$, $f'(x) > 0$ при $x < -3$, $-3 < x < 1{,}2$, $x > 4$, $f'(x) < 0$ при $1{,}2 < x < 4$; 6) $f'(x) = 0$ при $x = 1$, $f'(x) > 0$ при $x > 1$, $f'(x) < 0$ при $x < 0$, $0 < x < 1$. 876. 2) e; 4) 0,5. 877. 2) $y = 30x - 54$; 4) $y = -\frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{2} + \frac{\pi\sqrt{3}}{6}$. 878. $s(4) = 22$ м, $v(4) = 7$ м/с. 879. 2) $3x^2\cos 2x - 2(x^3+1)\sin 2x$; 4) $\frac{1}{2}\sin x$; 6) $\frac{x^4-1}{3\sqrt[3]{(x-1)^2}} + 4x^3\sqrt[3]{x-1}$. 880. 2) $-\frac{x+8}{8x^2\sqrt{x+4}}$; 4) $\frac{2}{\sin 2x - 1}$. 881. 2) $\frac{3\ln^2 x}{x\ln^3 2}$; 4) $-\sin 3^x \times 3^x \ln 3$. 883. 2) $f'(x) = 0$ при $x = 0$, $f'(x) > 0$ при $x > 0$, $f'(x) < 0$ при $x < 0$; 4) $f'(x) > 0$ при $x > -\frac{1}{2}$; 6) $f'(x) = 0$ при $x = 3$, $f'(x) > 0$ при $x > 3$, $f'(x) < 0$ при $-1 < x < 3$. 884. $a \geqslant 3$. 885. $a \leqslant -12$. 886. 2) $a \leqslant 0$; 4) $a > 12$. 887. 2) $a \geqslant 0$; 4) $a \leqslant 0$. 888. 2) $\frac{\pi}{4}$. 889. 2) $y = -\frac{1}{8}\ln 2x + \frac{3}{16} + \frac{1}{4}\ln 2$; 4) $y = (1 + e^{-1})x$. 890. $y = 6x + \frac{19}{6}$, $y = 6x - 54$. 891. 8 кв. ед. 892. $2k$ кв. ед.

893. При $p = 0{,}5$. 894. $(1; 0)$. 895. $\frac{1}{e}$. 896. $a = e^2$. 897. $y = -1$ и $y = 2x - 6$.

898. $\frac{8}{3}$, $\frac{8}{\sqrt[3]{3}}$. 900. 2) Возрастает на промежутке $(0{,}3; +\infty)$, убывает на про-

межутке $(-\infty; 0{,}3)$; 4) возрастает на промежутке $(-6; +\infty)$, убывает на промежутке $(-\infty; -6)$; 6) возрастает на промежутках $\left(-\frac{2}{\sqrt{3}}; 0\right)$ и $\left(\frac{2}{\sqrt{3}}; +\infty\right)$, убывает на промежутках $\left(-\infty; -\frac{2}{\sqrt{3}}\right)$ и $\left(0; \frac{2}{\sqrt{3}}\right)$. 8) возрастает на промежутках $(-\infty; 0)$ и $(4; +\infty)$, убывает на интервале $(0; 4)$. **902.** 2) Убывает на промежутках $(-\infty; 0)$ и $(0; +\infty)$; 4) возрастает на промежутке $(5; +\infty)$. **903.** 2) Возрастает на промежутке $(0; 3{,}2)$, убывает на промежутках $(-\infty; 0)$ и $(3{,}2; +\infty)$; 4) возрастает на промежутке $\left(-\infty; \frac{1}{3}\right)$, убывает на промежутке $\left(\frac{1}{3}; +\infty\right)$. **904.** 2) Возрастает на промежутке $\left(\frac{1}{2}; +\infty\right)$, убывает на промежутке $\left(-\infty; \frac{1}{2}\right)$. **905.** 2) Возрастает на интервалах $\left(-\frac{7\pi}{18} + \frac{2\pi n}{3}; \frac{\pi}{18} + \frac{2\pi n}{3}\right)$, $n \in Z$. **907.** 2) $a \geqslant 1$. **908.** $a > \frac{1}{3}$. **909.** $a \leqslant -1{,}5$. **910.** $x_1 = -5$, $x_2 = 5$ — точки максимума, $x_3 = 3$, $x_4 = -2$ — точки минимума. **911.** -7; -4; -3; $[-2; -1]$; 1; 3; 4. **912.** 2) $x_1 = 2$, $x_2 = 3$; 4) $x = -\frac{\pi}{4} + \pi n$, $n \in Z$. **913.** 2) $x_{1,2} = \pm\sqrt{3}$; 4) $x_1 = -\frac{1}{2}$. **914.** 2) $x = -6$ — точка минимума; 4) $x = -8$ — точка максимума, $x = 8$ — точка минимума. **915.** 2) $x = 0$ — точка максимума, $y(0) = 3$, $x = -2$, $x = 2$ — точки минимума, $y(-2) = y(2) = -13$; 4) $x = \frac{\pi}{6} + 2\pi n$, $n \in Z$, — точки максимума, $y\left(\frac{\pi}{6} + 2\pi n\right) = \sqrt{3} + \frac{\pi}{6} + 2\pi n$, $n \in Z$, $x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi n$ — точки минимума, $y\left(\frac{5\pi}{6} + 2\pi n\right) = -\sqrt{3} + \frac{5\pi}{6} + 2\pi n$, $n \in Z$. **916.** 2), 4) нет. **918.** 2) $x_{1,2} = \pm 1$, $x_{3,4} = \pm\sqrt{3}$, $x_5 = 0$; 4) $x_{1,2} = \pm\frac{1}{2}$, $x_3 = 0$. **919.** 2) Точек экстремума нет; 4) точек экстремума нет. **920.** 2) $x = -1$ — точка максимума, $y(-1) = 0{,}25$, $x = 0$, $x = 4$ — точки минимума, $y(0) = 0$, $y(4) = 10\frac{2}{3}$; 4) $x = \frac{\pi}{3} + 2\pi n$, $n \in Z$, — точки максимума, $y\left(\frac{\pi}{3} + 2\pi n\right) = \frac{3\sqrt{3}}{4}$, $x = -\frac{\pi}{3} + 2\pi n$, $n \in Z$, — точки минимума, $y\left(-\frac{\pi}{3} + 2\pi n\right) = -\frac{3\sqrt{3}}{4}$. **922.** Если n — нечётное число, то $x = n - 1$ — точка максимума; если n — чётное число, то $x = n - 1$ — точка максимума, $x = -1$ — точка минимума. **929.** $x_1 = -6$, $x_2 = -3$, $x_3 = 1$, $x_4 = 4$, $x_5 = 6$. **934.** 2) 2. **935.** Один корень при $c < \frac{4}{9}$, $c > 4$, два корня при $c = \frac{4}{9}$, $c = 1$, $c = 4$, три корня при $\frac{4}{9} < c < 1$, $1 < c < 4$. Указание. Дополнительно к общему исследованию функции сравнить значения функции с числом 1. **936.** 6) Наибольшее значение функции равно 3, наименьшее значение функции равно -9; г) наибольшее значение функции равно 4, наименьшее значение функции равно -2. **937.** 2) Наибольшее значение равно 68, наименьшее значение равно -31. **938.** 2) Наибольшее значение равно -2, наименьшее равно $-2{,}5$; 3) наибольшее значение равно -1, наименьшее равно $-\sqrt{2}$. **939**. 2) Наибольшее значение равно -3. **940**. $25 + 25$. **941**. $25 \cdot 25$. **942**. Квадрат со стороной $\frac{p}{4}$. **943**. Квадрат со стороной 3 см. **944**. 2) Наибольшее значение равно $2 + e^{-1}$, наименьшее равно 1; 3) наибольшее значение равно 1,5, наименьшее равно -3. **945**. 2) 1. **946**. 2) 1. **947**. 2) 3; 4) 1. **948**. $\frac{a}{6}$. **949**. $x = a$. **950**. 2. **951**. (1; 1). **952**. $\frac{2}{3}\pi$. **953**. 2) $(6x - x^3)\sin x + 6x^2\cos x$; 4) $12x^2 - 18x$. **954**. 2) Выпукла вниз на интервалах $(-\infty; -1)$ и $(1; +\infty)$, выпукла вверх на интервале $(-1; 1)$; 4) выпукла вверх на интервале $(0; 1)$, выпукла вниз на интервале $(1; +\infty)$. **955**. 2) 2; 4) $\arccos\frac{1}{4}$. **956**. 2) Возрастает на промежутках $(-\infty; -1]$ и $[2; +\infty)$, убывает на интервале $(-1; 2)$; 4) убывает на промежутках $(-\infty; 3)$ и $(3; +\infty)$. **957**. 2) $x_1 = 0$, $x_{2,3} = \pm 0{,}5$; 4) $x = \pi n$, $x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi n$, $n \in Z$. **958**. 2) $x = 1$ — точка минимума. **959**. 2) $x = 0$ — точка максимума, $y(0) = -3$, $x = 2$ — точка минимума, $y(2) = -12{,}6$. **962**. 2) Наибольшее значение равно 0, наименьшее значение равно -4; 4) наибольшее значение равно 14, наименьшее равно -11. **964**. Равносторонний треугольник со стороной $\frac{p}{3}$. **965**. Куб с ребром 10 см. **968**. 2) $x = -1$ — точка минимума; 3) $x = -3$ — точка максимума, $x = 4{,}5$ — точка минимума. **969**. Рис. 148, *б*. 1) Функция возрастает при $-10 < x < -8$, $-4 < x < -2$, $0 < x < 4$, $6 < x < 7$, убывает при $-8 < x < -4$, $-2 < x < 0$, $4 < x < 6$; 2) $x_1 = -8$, $x_2 = -4$, $x_3 = -2$, $x_4 = 0$, $x_5 = 4$, $x_6 = 6$. 3) $x_1 = -6$, $x_2 = -3$, $x_3 = -1$, $x_4 = 2$, $x_5 = 5$. **971**. 2) Наибольшее значение равно $\frac{3\sqrt{3}}{2}$, наименьшее — $-\frac{3\sqrt{3}}{2}$. **972**. Катеты $\frac{l}{3}$ и $\frac{l}{\sqrt{3}}$, гипотенуза $\frac{2l}{3}$. **973**. 20 и 20. **974**. $\frac{a^2}{2}$. **975**. 2) $x = -\frac{1}{4}$. **976**. R^2. **977**. 16. **978**. $\frac{\pi p^3}{216}$. **979**. $5\sqrt{\frac{S}{15}}$, $2\sqrt{\frac{S}{15}}$. **980**. $x = -\sqrt{2}$ — точка максимума, $x = \sqrt{2}$ — точка минимума. **982**. $\operatorname{arctg} k$. **985**. 2) $\frac{x^4}{4} + C$; 4) $2\sqrt{x} + C$. **986**. 1) $\frac{x^2}{2} + \frac{5}{2}$; 2) $\frac{2}{3}x\sqrt{x} - 8$. **988**. 2) $x^5 + \frac{x^4}{2}$; 4) $-\frac{1}{x^2} - 3\ln x$; 5) $2x^3 - 2x^2 + 3x$; 6) $3x\sqrt[3]{x} - 4x\sqrt{x}$. **989**. 2) $2\sin x - 5\cos x$; 4) $3e^x + \cos x$; 6) $x + 3e^x - 4\sin x$; 8) $8\sqrt{x} + 3\ln x + 2e^{-x}$. **990**. 2) $\frac{1}{4}(x-2)^4$; 4) $\frac{9}{2}\sqrt[3]{(x+3)^2}$; 6) $3\ln(x-3) + 2\cos(x-1)$. **991**. 2) $\frac{1}{3}\sin(3x+4) + C$; 4) $-4\cos\left(\frac{x}{4} + 5\right) + C$; 6) $\frac{1}{3}e^{3x-5} + C$; 8) $\frac{1}{3}\ln(3x-1) + C$. **992**. 2) $2x^2 - x$; 4) $\frac{1}{3}\sin 3x$. **993**. 2) $4e^{\frac{x}{4}} - \frac{1}{2}\cos 2x$; 3) $-10\cos\frac{x}{5} - \frac{5}{2}e^{2x+\frac{1}{3}}$; 4) $21\sin\frac{x}{7} + \frac{2}{3}e^{3x-\frac{1}{2}}$; 5) $\frac{2x\sqrt{x}}{3\sqrt{5}} - \cos(4x+2)$; 6) $\frac{8}{3}\sqrt{3x+1} - \frac{3}{2}\ln(2x-5)$.

994. 2) $\frac{3x^4-3x^2+4x}{10}$; 4) $2x^3-\frac{5}{2}x^2-6x$. **995.** 2) $\left(\frac{9}{7}x-\frac{3}{2}\right)x\sqrt[3]{x}$; 4) $\left(\frac{1}{3}x-3\right)\times$ $\times 2\sqrt{x}$. **996.** 2) $\frac{1}{2}\cos 2x$. **997.** $6\sin\frac{x}{2}-\frac{2}{5}\cos 5x-2{,}8$. **998.** 2) $\ln(x+2)$, $x\neq 1$. 4) $\frac{1}{4}\cos 2x-\frac{1}{16}\cos 8x$. **1000.** 2) $12\frac{1}{3}$; 4) 6; 6) $\frac{1}{2}$. **1001.** 2) $1\frac{1}{3}$. **1002.** 2) $12\frac{2}{3}$. **1003.** 2) 18. **1004.** 2) 9; 4) 5; 6) $\frac{3}{8}$; 8) 2. **1005.** 2) 1; 4) 2; 6) 0. **1006.** 2) 11; 4) $2\frac{2}{3}$; 5) 10. **1007.** 2) 68; 3) e^6-e^2. **1008.** 2) $-\frac{11}{12}$; 4) 5. **1009.** 2) $4\sqrt{3}$; 3) 8. **1010.** 2) $\frac{4}{3}\ln 2{,}5$; 3) 0,5. **1011.** 1) π; 2) 0,5; 3) 0,5; 4) $\frac{3\pi}{4}$; 5) $16\frac{16}{105}$; 6) $1{,}5+\ln 2$. **1012.** $b=2$. **1013.** 1) $8\frac{2}{3}$; 2) $1\frac{2}{3}$; 3) $2\ln 4$. **1014.** 2) $6\frac{1}{6}$; 4) 4. **1015.** 2) $\frac{11}{12}$. **1016.** 2) $1\frac{1}{3}$. **1017.** 2) $\frac{1}{6}$; 3) $\frac{1}{6}$. **1018.** 2) 8. **1019.** 2) $2-\sqrt{2}$. **1020.** 2) 4,5. **1021.** 2) $\frac{\pi}{2}-1$. **1022.** 2) $\frac{8\sqrt{2}}{3}$; 4) 6,75. **1023.** 1) 18; 2) $\ln 2-\frac{5}{8}$. **1024.** (0,5; 1,25). **1025.** 2) $21\frac{1}{3}$ м. **1026.** $10\frac{2}{3}$. **1027.** 2) $y=2x^3-4x^2+x+C$; 4) $y=2\sin 2x+C$; 6) $y=\sin x+$ $+\cos x+C$. **1028.** 2) $y=2\sin x+1$; 4) $y=2x+x^2-x^3+2$; 6) $y=$ $=3-e^{-x}$. **1030.** $\frac{10\ln 0{,}5}{\ln 0{,}999}\approx 6927$ лет. **1031.** 0,09 Дж. **1032.** 0,96 Дж. **1033.** 2) $-\cos x-1$; 4) e^x+1; 6) $2x-x^2+3$. **1034.** 2) 12; 4) -2; 6) $-\frac{3}{8}$; 7) 2. **1035.** 2) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; 4) $1\frac{151}{192}$. **1036.** 2) 15; 4) -3; 6) $8\frac{2}{3}$. **1037.** 2) $-\frac{1}{6}$; 4) $2\sin 12$. **1038.** 2) 1; 4) $1\frac{1}{3}$. **1039.** 2) $2\frac{2}{3}$; 4) $\frac{8}{9}$. **1040.** 1) $\frac{1}{3}$; 2) $4\ln 3-2$. **1041.** 1) 1,75; 2) $3\frac{8}{15}$. **1042.** $k=p$.

1043. 2) 6; 4) 12; 6) 9. **1044.** 2) 8; 4) 4. **1045.** 2) 6; 4) 24. **1046.** 2) 16; 4) 81. **1047.** 12. **1048.** 8. **1049.** 2) 240 способами. **1050.** 120 способами. **1051.** 720 способами. **1052.** 120 способами. **1053.** 4896 способами. **1054.** 6840 способами. **1055.** 2) 80 000. **1056.** 64 800. **1057.** 648 000. **1058.** 2) 144. **1059.** 2) 5040; 4) 40 320. **1060.** 24. **1061.** 120. **1062.** 2) 362 880. **1063.** 2) 24; 4) 6; 6) 12. **1064.** 2) 11!; 4) 12!; 6) $k!$; 8) $k!$; 10) $(k-1)!$. **1065.** 2) 32; 4) 182; 6) $\frac{3}{7}$; 8) 55. **1066.** 2) $n+2$; 4) $m+3$. **1067.** 2) $n=3$; 4) $n=3$. **1068.** P_{11}. **1069.** P_5. **1070.** P_5. **1071.** 2) $P_6\cdot P_3$. **1072.** 2) 5; 4) 12; 6) 720; 8) 336. **1073.** 2) 20 160. **1074.** 2) 120. **1075.** 6840. **1076.** 2) 81; 4) $\frac{10}{21}$. **1077.** 2) $m=8$; 4) $m=6$; 6) $m=8$; 8) $m_1=7$, $m_2=15$. **1078.** 2) $\frac{1}{182-13n}$. **1079.** 2) 336. **1080.** 2) 6; 4) 21; 6) 56; 8) 10; 10) 1; 12) 1; 14) 780; 16) 1770. **1081.** 2) 126. **1082.** 2) 220. **1083.** 2) 120. **1084.** 2) 78. **1085.** 2) 220. **1086.** 2) 70. **1087.** 2) 324. **1088.** 2) 200. **1089.** 2) 140. **1090.** 2) 105; 4) 190;

6) 54 740. **1091.** 2) $x=6$; 4) $x_1=3$, $x_2=14$; 6) $x=4$. **1092.** 2) $x^7+7x^6+21x^5+35x^4+35x^3+21x^2+7x+1$; 4) $y^{10}-10y^9+45y^8-120y^7+210y^6-252y^5+210y^4-120y^3+45y^2-10y+1$; 6) $x^6+12x^5+60x^4+160x^3+240x^2+192x+64$; 8) $32a^5+240a^4+720a^3+1080a^2+810a+243$; 10) $81x^4-36x^3+6x^2-\frac{4}{9}x+\frac{1}{81}$. **1093.** 2) $1+5\sqrt{3}+30+30\sqrt{3}+45+9\sqrt{3}$; 4) $b^6-3b^4+\frac{15}{4}b^2-\frac{5}{2}+\frac{15}{16}b^{-2}-\frac{3}{16}b^{-4}+\frac{1}{64}b^{-6}$. **1094.** 2) $-364x^{\frac{25}{2}}$; 4) $165x^{-5}$; 6) $56b^{2,7}$. **1095.** 2) 64; 4) 126; 6) 1024. **1096.** 2) $8008x^3$. **1097.** 2) $5\frac{4}{5}$; 4) 132; 6) 12. **1098.** 2) $n(n+1)(n+2)$; 4) $\frac{n}{n+1}$; 6) $\frac{n^2+3n+3}{n+2}$. **1099.** 2) 5; 4) $42\frac{1}{2}$. **1100.** 2) $x=7$; 4) $x=13$; 6) $x=9$; 8) $n_1=4$, $n_2=9$. **1101.** 2) 5040. **1102.** 2) 84. **1103.** 2) 336. **1104.** 2) 6840. **1105.** 2) 66; 4) 330. **1106.** 2) $x^4-8x^3+24x^2-32x+16$; 4) $243+405a+270a^2+90a^3+15a^4+a^5$; 6) $1-7x+21x^2-35x^3+35x^4-21x^5+7x^6-x^7$; 8) $64a^6+96a^5+60a^4+20a^3+\frac{15}{4}a^2+\frac{3}{8}a+\frac{1}{64}$. **1107.** 2) 15 015. **1108.** 2) 20. **1109.** 2) 30; 4) 64; 6) 924; 8) 735 471; 10) 495. **1110.** 2) 36. **1111.** 1 000 000. **1112.** 13 800 000. **1113.** 2) $x^6+18x^5+135x^4+540x^3+1215x^2+2430x+729$; 4) $\frac{a^5}{243}-\frac{5a^4}{81}+\frac{10a^3}{27}-\frac{10a^2}{9}+\frac{5a}{3}-1$; 6) $\frac{1}{10\,000\,000}b^7-\frac{7}{100\,000}b^6+\frac{21}{1000}b^5-\frac{35}{10}b^4+350b^3-21\,000b^2+700\,000b-10\,000\,000$; 8) $\frac{256}{c^8}+\frac{512}{c^6}+\frac{448}{c^4}+\frac{224}{c^2}+70+14c^2+\frac{7}{4}c^4+\frac{7}{64}c^6+\frac{1}{256}c^8$. **1114.** 2) $C_{14}^9x^2$; 4) $C_{23}^6x^{-0,6}$. **1115.** 2) Невозможным; 4) достоверным; 6) случайным. **1116.** 2) Появилось число 1; число 2; число 3; число 4 — события равновозможные; 4) круг; отрезок — в общем случае события не являются равновозможными; 6) пять элементарных событий, определяемых цветом каждого из шаров, — события равновозможные. **1117.** 2) Не являются; 4) являются. **1118.** Изъятие либо карты с картинкой, либо карты червовой масти; изъятие карты с картинкой червовой масти. **1119.** Выбрана карточка с одним из чисел 4, 6, 8, 12, 16, 18, 20; выбрана карточка с числом 12. **1120.** Попадание по мишени хотя бы при одном из двух выстрелов; попадание по мишени при обоих выстрелах. **1121.** На первой кости выпало число 5, а на второй — любое число, или на первой кости выпало любое число, а на второй — одно из чисел 5 или 6; на первой кости выпало 5 очков, а на второй — одно из чисел 5 или 6. **1122.** 2) Выпало одно из чисел 1, 3, 4, 5, 6 (не выпало число 2); 4) выпало одно из чисел 4, 5, 6 (выпало число, большее трёх); 6) извлечена карта, отличная от шестёрки (извлечена не шестёрка); 8) число 6 не появилось ни на одной из костей; 10) студент получил оценку, отличающуюся от оценки «отлично». **1123.** 2) $C\overline{D}$; 4) $\overline{CD}$; 6) $C\overline{D}+\overline{C}D$. **1124.** 2) $\frac{1}{6}$. **1125.** 2) $\frac{1}{36}$; 4) $\frac{1}{18}$; 6) $\frac{1}{9}$; 8) $\frac{2}{9}$; 10) $\frac{5}{36}$; 12) $\frac{8}{9}$. **1126.** 2) $\frac{1}{31}$; 4) 0; 6) $\frac{3}{31}$; 8) $\frac{13}{31}$. **1127.** 2) $\frac{1}{3}$; 4) $\frac{5}{9}$; 6) $\frac{7}{9}$; 8) 0. **1128.** 2) $\frac{1}{20}$. **1129.** 2) $\frac{1}{36}$; 4) $\frac{1}{36}$; 6) $\frac{1}{12}$; 8) $\frac{1}{6}$; 10) $\frac{2}{9}$; 12) $\frac{1}{12}$; 14) $\frac{1}{6}$; 16) $\frac{1}{18}$;

18) $\frac{1}{12}$. **1130.** 2) $\frac{51}{190}$; 3) $\frac{68}{95}$. **1131.** 1) $\frac{2}{35}$; 2) $\frac{44}{105}$. **1132.** 2) $\frac{1}{36}$; 4) $\frac{1}{72}$. **1133.** 2) $\frac{1}{18}$. **1134.** 2) $\frac{2}{9}$; 4) $\frac{11}{36}$. **1135.** 2) $\frac{2}{3}$. **1136.** 2) $\frac{7}{13}$. **1137.** $\frac{5}{6}$. **1138.** $\frac{3}{4}$. **1139.** 0.6. **1140.** 0,99999. **1141.** $\frac{21}{22}$. **1142.** 2) $\frac{21}{22}$. **1143.** 2) $\frac{784244}{784245}$. **1144.** 2) $\frac{501}{506}$. **1145.** 2) Являются; 4) не являются. **1146.** 2) Не являются. **1148.** 1) 0,09; 2) 0,49; 3) 0,51. **1149.** 2) 0,0015; 4) 0,0785. **1150.** 2) $\frac{7}{12}$; 4) $\frac{5}{12}$. **1151.** 2) $\frac{27}{140}$; 4) $\frac{3}{4}$. **1152.** 0,8. **1153.** $\frac{2}{9}$. **1154.** 2) 0,992. **1155.** 2) 0,504; 4) 0,496. **1156.** 2) 2,2%. **1157.** 0,49; 0,177; 0,93; 0,245. **1158.** 0,8; 0,68; 0,73; 0,69; 0,71; 0,70; $P \approx 0.7$. **1160.** 2) Любое натуральное число от 1 до 30 — равновозможные элементарные события; 4) орёл — орёл, орёл — решка, решка — орёл, решка — решка — равновозможные элементарные события; 6) ППП, ППН, ПНП, НПП, ПНН, НПН, ННП, ННН — равновозможные элементарные события. **1161.** 1) Вынут дубль; вынута костяшка «два – два»; 2) вынута карта с картинкой; вынут король. **1162.** 2) Вынута карточка с одним из чисел 1, 2, 3, 6, 12; вынута карточка с числом 6; 4) вынута карточка с любым числом; вынута карточка с числом 8; 6) вынута карточка с числом, кратным трём; вынута карточка с числом, кратным шести. **1163.** 2) Выпало число, не кратное 5 (т. е. одно из чисел 1, 2, 3, 4, 6); 4) ни на одном из кубиков не появилось число 1; 6) шашка легла не на чёрную клетку. **1165.** 2) $\frac{1}{3}$; 4) $\frac{5}{6}$. **1166.** 2) $\frac{5}{8}$; 4) $\frac{7}{8}$; 6) $\frac{3}{4}$. **1167.** 2) $\frac{1}{18}$; 4) $\frac{1}{9}$; 6) $\frac{5}{9}$; 8) $\frac{5}{36}$; 10) $\frac{8}{9}$. **1168.** 2) 0,99997. **1169.** 2) Не являются. **1170.** 2) Являются. **1171.** 2) 0,93; 4) 0,48. **1172.** 2) 0,49; 4) 0,91. **1173.** 2) 0,055; 4) 0,115. **1175.** 2) PPO, POP, OPP, PPP. **1176.** 2) PPP. **1177.** 2) $\frac{1}{12}$; 4) $\frac{1}{9}$; 6) $\frac{5}{18}$. **1178.** 2) $\frac{3}{11}$; 4) $\frac{8}{11}$. **1179.** 2) $\frac{7}{26}$; 4) $\frac{19}{26}$. **1180.** 2) $\frac{7}{44}$; 4) $\frac{7}{22}$. **1181.** 2) $\frac{1}{1157625}$. **1182.** 2) $\frac{45}{187}$; 4) $\frac{54}{187}$; 6) $\frac{139}{187}$. **1183.** $\frac{1}{36}$.

1184. 2)

X	2	3	4	5
P	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$

1185.

X	2	3	4	5	6	7	8
P	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$

1186.

X	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
P	$\frac{1}{48}$	$\frac{1}{24}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{5}{48}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{5}{48}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{24}$	$\frac{1}{48}$

1187. 2)

X	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
M	2	4	3	6	3	2	2	1	2	3

1189.

X	97	98	99	100	101	102
M	2	3	3	6	4	2
W	0,1	0,15	0,15	0,3	0,2	0,1

1190.

Y	158	159	160	161	162	163	164	165	166
M	1	2	2	3	4	6	5	4	3
W	$\frac{1}{15}$	$\frac{1}{15}$	$\frac{1}{15}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{2}{15}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{15}$	$\frac{1}{10}$

1193. 3). **1194.** 2) 9; 4) 6 и 8. **1195.** 2) 20; 4) 10,5. **1196.** 2) 4,4; 4) 1,2. **1197.** 2) Моды выборка не имеет; 1,5; $1\frac{2}{3}$. **1198.** 2) $1\frac{1}{11}$; 4) 0,4. **1199.** 2) 1; 0; $\frac{2}{11}$. **1200.** 1) [illegible]; 2) [illegible]. **1201.** 2) 24. **1202.** 2) 2,5 $г^2$; 4) 9,2 $м^2$. **1203.** 2) 4,96. **1204.** 2) $\sigma \approx 1,9$ м. **1205.** 2) $D_1 > D_2$. **1206.** 2) $\sigma \approx 2,9$. **1207.** 2) $D_1 > D_2$. **1208.** Второй игрок более стабилен. **1209.** Первый футболист более стабилен.

1210. 2)

X	1	2
P	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$

4)

X	1	2	3	4
P	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$

1211.

Y	2	3	4
P	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

1212.

X	1	2	3	4	5	6	7	8	9
M	2	2	3	2	1	2	3	3	2

1214. 2) 15; 12; 12; 11. **1215.** 2) 13; −4 и 9; 1; 2. **1216.** 2) 23; −6 и 13; −1; $1\frac{1}{3}$. **1217.** 2) 24; −2; 4; 4,125. **1218.** 2) $D \approx 5,69$, $\sigma \approx 2,38$; 4) $D \approx 2,24$, $\sigma \approx 1,50$; 6) $D \approx 12,56$, $\sigma \approx 3,54$. **1219.** 2) 6; 0 и 2; 0; $\frac{11}{13}$.

1220.

X	148	149	150	151	152	153	154
M	2	9	10	8	9	8	4
W	0,04	0,18	0,2	0,16	0,18	0,16	0,08

1221. 2) $D \approx 5{,}4$, $\sigma \approx 2{,}3$. **1222.** 2) $D_1 = 4\frac{2}{3}$, $D_2 = 6{,}56$, $D_1 < D_2$. **1223.** 2) $D_{I} = 0{,}8$, $D_{II} = \frac{2}{3}$; так как $D_{I} > D_{II}$, то второй рабочий имеет более стабильную производительность труда. **1224.** $D_2 < D_1$. **1225.** $D_X = 2{,}44$, $D_Y = 2{,}45$, $D_Z = 5{,}5$; меньший разброс имеет совокупность значений величины X. **1227.** 2) 0,5.

Упражнения для итогового повторения курса алгебры и начал математического анализа

1228. 0,08. **1229.** 30. **1230.** $3\frac{1}{3}\%$. **1231.** 400%. **1232.** 45. **1233.** 13,5. **1234.** 62%. **1235.** 30%, 10%, 60%. **1236.** 3650 р. **1237.** 21%. **1238.** 8. **1239.** 600. **1240.** 636 р. 54 к., 655 р. 64 к. **1241.** 408 р. 85 к. **1242.** 2) 1,02. **1243.** 2) 2. **1244.** 2) 0,5; 3) 20,8. **1245.** 1083. **1246.** 2) 3. **1247.** 2) 0. **1248.** 2) 64. **1249.** 2) 160. **1250.** 2) $0{,}2^{\frac{2}{3}} > 0{,}2^{\frac{3}{4}}$; 4) $\log_{0,3}\frac{4}{5} < \log_{0,3}\frac{3}{4}$. **1251.** 2) $(0; 1)$; 4) $(0; 1)$; 6) $(1; +\infty)$. **1252.** 2) Первое. **1253.** 2) $3 < \log_2 10 < 4$. **1254.** 2) 0. **1255.** 2) $|b| \cdot (2b^2 + 1)$. **1256.** 2) $3(\sqrt{6} - \sqrt{5})$; 4) $\sqrt{11} - \sqrt{3}$. **1257.** 1) $\frac{1}{2\sqrt{5}}$; 2) $\frac{3}{\sqrt{6}}$; 3) $\frac{1}{\sqrt{7} + \sqrt{5}}$. **1258.** 2) $2\frac{7}{9}$; 4) $1\frac{4}{11}$; 6) $\frac{16}{75}$. **1259.** 2) 2,(1); 4) 5,(18). **1260.** 2) Да. **1263.** 2) Имеют; 4) не имеют. **1265.** 2) $2\,\mathrm{arctg}\,0{,}5625 \approx 58{,}7^\circ$. **1266.** $120\,\mathrm{tg}\,36^\circ \approx 87$ м. **1267.** $130\,(\mathrm{tg}\,22^\circ + \mathrm{tg}\,44^\circ) \approx 178$ м. **1268.** 2) $\cos\alpha = \frac{12}{13}$, $\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{5}{12}$; 4) $\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{24}{7}$, $\sin\alpha = \frac{24}{25}$, $\cos\alpha = \frac{7}{25}$. **1269.** $\frac{7}{9}$. **1270.** $-0{,}5$. **1271.** 2) 4π. **1272.** 2) $-\frac{3}{4}$. **1273.** 2) 0; 4) -1; 5) 0. **1274.** 2) 1; 4) $\frac{1}{2}$; 6) $\frac{1}{2}$. **1275.** 2) 1. **1276.** 2) $-\frac{1}{9}$. **1277.** 2) $\frac{b-4}{2b}$. **1278.** 2) 0. **1279.** 2) $\frac{1}{\sqrt{2}}$. **1280.** 2) 4,8. **1281.** 2) $1 + \sqrt{m}$. **1282.** 2) $\sqrt{a} - 1$. **1283.** 2) $1 - \sqrt{b}$. **1284.** $a^{\frac{2}{3}} + b^{\frac{2}{3}}$. **1285.** 2) $\frac{1}{ab}$. **1286.** $16a^2$. **1287.** $-6\sqrt{b}$. **1288.** 2) 2. **1290.** 2) $2\cos^2\alpha$. **1291.** $-\mathrm{tg}\,2\alpha$. **1293.** 2) $2\sqrt{2}\sin\frac{\alpha}{2}\sin\left(\frac{\alpha}{2} - \frac{\pi}{4}\right)$; 4) $4\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{3}\right)\sin\left(\alpha - \frac{\pi}{3}\right)$. **1295.** 2) $\frac{3}{8}$. **1296.** 7. **1297.** 2) $\frac{4\cos 2\alpha}{\sin^2 2\alpha}$. **1298.** 2) 2; 4) $\sqrt{3}\,\mathrm{ctg}\,\alpha$. **1299.** 2) $\mathrm{tg}\,\alpha$. **1300.** 2) $\frac{1}{\cos^2\alpha}$; 4) 4. **1301.** 2) $\mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{2}$; 4) $\mathrm{ctg}^2\alpha$. **1302.** 2) $-\sin\alpha - \cos\alpha$. **1304.** $\frac{5}{\cos 2\alpha}$. **1305.** $\cos^2 x$. **1306.** 2) $-\cos 2\alpha\cos 4\beta$. **1307.** 2) $2\cos\alpha$. **1308.** 2) $\mathrm{ctg}\,\alpha\,\mathrm{ctg}\,3\alpha$. **1309.** 2) $1 + \frac{1}{\cos x}$. **1310.** $1\frac{5}{7}$. **1311.** $-\frac{1}{2}$. **1321.** 2) $x = 8$. **1322.** $a = -6$. **1323.** $b = 3$. **1324.** 2) $x = 3$. **1325.** 2) $x = 5$. **1326.** 2) $x = \frac{1}{a-b}$.

1327. 2) $x_1 = -2$, $x_2 = \frac{2}{3}$. **1328.** 2) $x_1 = \frac{1}{3}$, $x_2 = \frac{3}{2}$. **1329.** 2) $x = 3$. **1330.** 2) $x = 2$. **1331.** $x = 2$. **1332.** 2) $x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{3}}{2}$. **1333.** 1) $x_{1,2} = \pm\sqrt{5}$, $x_{3,4} = \pm\sqrt{6}$; 2) $x_{1,2} = \pm\sqrt{2}$, $x_{3,4} = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$. **1334.** 2) $x_{1,2} = \pm 2$, $x_3 = -1$, $x_4 = 3$. **1335.** 1) $x_{1,2} = -\frac{a}{2} \pm b$; 2) $x_1 = a$, $x_2 = -2{,}5a$. **1336.** $a > 0$, $b^2 = 4ac$. **1338.** 2) $x = 6$; 3) $x = 3\frac{2}{3}$. **1339.** 2) $x_1 = 3$, $x_2 = \frac{5}{3}$. **1340.** $x = 3$. **1341.** $x = 5$. **1342.** 2) Корней нет. **1343.** 2) $x_1 = 3$, $x_2 = 2$; 3) $x_1 = 3$, $x_2 = -1$. **1344.** 2) $x = 3$. **1345.** 2) $x_1 = 4$, $x_2 = -2$. **1346.** 2) $x_1 = 1$; 3) $x = -\frac{3}{8}$. **1347.** 2) $x = 9$. **1348.** 2) $x = 1$; 4) $x = 0$. **1349.** 2) $x = 3$. **1350.** 2) $x_1 = 3$, $x_2 = 243$. **1351.** 2) $x = 3{,}5$. **1352.** 2) $x = \sqrt{3}$. **1353.** 2) $x_1 = 1$, $x_2 = 9$. **1354.** 2) $x = 9$. **1355.** 2) $x_1 = \frac{1}{3}$, $x_2 = 9$; 4) $x_1 = 1$, $x_2 = 4$. **1356.** 2) $x = -3$. **1357.** 2) $x_1 = -1$, $x_2 = 3$; 3) $x = 0$. **1358.** 2) $x_1 = 100$, $x_2 = 0{,}1$, 4) $x = 0$. **1359.** Нет. **1360.** 2) $z_{1,2} = 1 \pm i\sqrt{2}$. **1362.** 2) $-\frac{2\pi}{3}$, $-\frac{\pi}{3}$, $\frac{4\pi}{3}$, $\frac{5\pi}{3}$. **1363.** 2) $x = \pm\frac{\pi}{4} + \frac{2\pi n}{3}$, $n \in Z$; 3) $x = -\operatorname{arctg} 2{,}5 + \pi n$, $n \in Z$. **1364.** 1) Корней нет; 2) корней нет. **1365.** 2) $x = -\frac{\pi}{4} + \pi n$, $x = -\operatorname{arctg} 3 + \pi n$, $n \in Z$. **1366.** 2) $x = \frac{\pi n}{2}$, $x = \pm\frac{\pi}{6} + \pi n$, $n \in Z$; 4) $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$, $x = \operatorname{arctg}\frac{1}{2} + \pi n$, $n \in Z$. **1367.** 2) $x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}$, $x = (-1)^n \frac{\pi}{12} + \frac{\pi n}{2}$, $n \in Z$; 4) $x = \frac{\pi}{4} + \pi n$, $n \in Z$. **1368.** 2) $x = \frac{\pi n}{3}$, $x = \frac{\pi n}{2}$, $n \in Z$; 4) $x = \frac{\pi n}{2}$, $x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi n$, $n \in Z$. **1369.** 2) $x = -\frac{\pi}{3} + \pi n$, $n \in Z$. **1370.** 2) $x = \pm\frac{\pi n}{2}$, $\frac{3\pi n}{2}$, $n \in Z$. **1371.** 2) $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $x = 2\operatorname{arctg}\frac{1}{11} + 2\pi n$, $n \in Z$. **1372.** 2) $x = 2\pi n$, $x = \frac{\pi}{4} + \pi n$, $n \in Z$. **1373.** 2) $x = \frac{\pi}{4} + \pi n$, $x = \frac{\pi}{12} + 2\pi n$, $x = \frac{5\pi}{12} + 2\pi n$, $n \in Z$. **1374.** $x = -\frac{\pi}{4} + \pi n$, $x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $x = 2\pi n$, $n \in Z$. **1375.** 2) $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$, $x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}$, $n \in Z$; 4) $x = \frac{\pi}{16} + \frac{\pi n}{4}$, $n \in Z$. **1376.** 2) $x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}$, $n \in Z$. **1377.** 2) Корней нет. **1378.** 2) $x = \operatorname{arctg}\frac{1 \pm \sqrt{3}}{2} + \pi n$, $n \in Z$. **1379.** 2) $x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}$, $x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{4}$, $n \in Z$; 4) $x = \frac{\pi}{12} + \frac{\pi n}{3}$, $x = \frac{3\pi}{8} + \frac{\pi n}{2}$, $n \in Z$. **1380.** 2) $x = \frac{\pi n}{5}$, $n \in Z$. **1381.** 2) $x = \frac{\pi n}{8}$, $n \in Z$. **1382.** 2) $x = \pi + 2\pi n$, $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $x = \frac{\pi}{4} + (-1)^n \arcsin\frac{1}{3\sqrt{2}} + \pi n$, $n \in Z$. **1383.** 2) $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$, $x = \frac{\pi}{5} + \frac{2\pi n}{5}$, $n \in Z$. **1384.** 2) $x = (-1)^{n+1}\frac{\pi}{6} + \pi n$, $n \in Z$; 4) $x = (-1)^{n+1}\arcsin\frac{1}{3} + \pi n$, $n \in Z$. **1385.** 2) Корней нет; 4) $x = \pi n$, $n \in Z$.

1387. 2) $x > -2$. **1388.** 2) $x \geqslant 5$. **1389.** 2) $-3\frac{1}{3} < x < 40$; 4) $-2 < x < 8$. **1390.** 1) $x < \frac{2}{3}$, $x > \frac{3}{2}$; 2) $x < -\frac{2}{9}$, $x > \frac{5}{2}$; 3) $x < 2\frac{4}{7}$. **1391.** 1) $-16 < x < 3$; 2) $x < 4$, $x > 6$; 3) $x < -3$, $x \geqslant -2{,}5$. **1392.** 2) $-1{,}4 \leqslant x \leqslant 0$. **1393.** 2) $x > -4$. **1394.** 1) $-7 < x < 2$, $x \geqslant 5$; 2) $x < -2-\sqrt{2}$, $-2+\sqrt{2} < x < 1$; 3) $x < -4$, $-1 < x < 2$, $x > 3$. **1395.** $-5 \leqslant x \leqslant -3$. **1396.** $m = 2$. **1397.** $m = 8$, $m = 9$. **1398.** $x = 6$. **1399.** $x = -1$. **1400.** 2) $x < 2$; 4) $x < -2$, $1 < x < 2$, $x > 5$, 6) $\frac{1-\sqrt{73}}{6} < x < -\frac{2}{3}$, $-\frac{2}{3} < x < 1$, $1 < x < \frac{1+\sqrt{73}}{6}$. **1401.** 2) $x \leqslant 3$; 4) $x < -\frac{1}{8}$. **1402.** 2) $-1 < x < 5$. **1403.** 2) $3-\sqrt{2} \leqslant x \leqslant 3+\sqrt{2}$. **1404.** 2) $x < 1$. **1405.** 2) Решений нет. **1406.** 2) $x \in \boldsymbol{R}$; 3) $x < 3$; 5) $x < 1 - \frac{1}{3}\log_3 5$. **1407.** 2) $x < 1$, $x > 3$. **1408.** 2) $-\sqrt{5} \leqslant x < -\sqrt{2}$, $\sqrt{2} < x \leqslant \sqrt{5}$. **1409.** 2) $x > 3$. **1410.** 2) $\frac{1}{3} < x < \frac{1}{2}$. **1411.** 2) $-1 \leqslant x < 1$, $3 < x \leqslant 5$. **1412.** 2) $-3 < x < -\sqrt{6}$, $\sqrt{6} < x < 3$. **1413.** 2) $0 < x < \frac{1}{3}$, $x > 1$. **1414.** 2) $\frac{1}{\sqrt{10}} < x < 10$. **1415.** 2) $\frac{\pi}{2} + \pi n < x < \frac{5\pi}{6} + \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$. **1416.** 2) $-\arcsin\frac{1}{4} + 2\pi n < x < \arcsin\frac{1}{4} + \pi + 2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$; 4) $-\arccos\frac{1}{3} + 2\pi n < x < \arccos\frac{1}{3} + 2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$. **1417.** 2) $-3\pi \leqslant x \leqslant -\frac{11\pi}{4}$, $-\frac{9\pi}{4} \leqslant x \leqslant -\frac{3\pi}{4}$, $-\frac{\pi}{4} \leqslant x \leqslant \pi$; 4) $\operatorname{arctg}\frac{2}{3} - 3\pi < x < -\frac{5\pi}{2}$, $\operatorname{arctg}\frac{2}{3} - 2\pi < x < -\frac{3\pi}{2}$, $\operatorname{arctg}\frac{2}{3} - \pi < x < -\frac{\pi}{2}$, $\operatorname{arctg}\frac{2}{3} < x < \frac{\pi}{2}$. **1421.** 1) $(2; 1)$; 2) $(5; -3)$. **1422.** 1) $(-1200; 500)$; 2) $(7; 1)$. **1423.** 2) $(-8; -2)$, $(8; 2)$; 3) $(8; 4)$, $(-8; -4)$. **1424.** 1) $(7; 6)$; 2) $(2; 3)$, $\left(-9; 28\frac{2}{3}\right)$. **1425.** 2) $(3; 1)$, $(-3; -1)$; 4) $(3; -5)$, $(3; 5)$, $(4; 2\sqrt{2})$, $(4; -2\sqrt{2})$. **1426.** 2) $(4; 1)$; 4) $(10; 1000)$, $(1000; 10)$. **1427.** 2) $(\sqrt{8}; \sqrt[4]{8})$. **1428.** 2) $(100; 81)$. **1429.** 2) $(0; 1)$. **1430.** 2) $\left(\pi n; (-1)^m\frac{\pi}{6} + \pi m\right)$, $m \in \boldsymbol{Z}$, $n \in \boldsymbol{Z}$, $\left((-1)^n\arcsin\frac{5}{7} + \pi n; (-1)^{m+1} \times \arcsin\frac{3}{14} + \pi m\right)$, $m \in \boldsymbol{Z}$, $n \in \boldsymbol{Z}$. **1431.** 2) $\left(\frac{\pi}{6} + \pi(k+m); \frac{\pi}{6} + \pi(m-k)\right)$, $m \in \boldsymbol{Z}$, $n \in \boldsymbol{Z}$, $\left(-\frac{\pi}{6} + \pi(k+m); -\frac{\pi}{6} + \pi(m-k)\right)$, $m \in \boldsymbol{Z}$, $k \in \boldsymbol{Z}$. **1432.** 2; 12. **1433.** $x > 5$. **1434.** 1 мин. **1435.** 126 км. **1436.** 1080 км. **1437.** 16 дв. **1438.** 91 га. **1439.** 12, 8. **1440.** $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{6}$. **1441.** 432 детали. **1442.** 18 км/ч. **1443.** 25 и 20 билетов или 20 и 15 билетов. **1444.** 3 км/ч. **1445.** 21 ц, 20 ц. **1446.** 1400 шагов. **1447.** 3, −6, 12, −24. **1448.** 27. **1449.** 1, 3, 9, 15 или 16, 8, 4, 0. **1450.** 2 или $12\frac{2}{5}$. **1451.** В 3 раза. **1452.** 16 см^2. **1453.** $b = -2$. **1454.** $k = -1$. **1455.** 2) $k = -1$, $b = 3$; 4) $k = 0$, $b = -2$. **1456.** $y = -\frac{2}{5}x + \frac{4}{5}$, $y = -\frac{2}{5}x + \frac{6}{5}$. **1457.** 2) Нет; 4) да. **1458.** 2) $3\frac{1}{3}$. **1459.** 2) $x < \frac{1}{3}$. **1460.** 2) $x > 0{,}5$.

1461. $x > 1$. **1462.** $x < -\sqrt{3}$. **1465.** 2) Да. **1466.** 2) $(-1; 3)$, $(5; 8)$. **1467.** 4) $x < -2$, $x > 2$. **1468.** 4) $x \neq 0$. **1470.** 2) Нечетная; 4) чётная. **1471.** 2) Нечётная; 4) чётная. **1472.** 4) Не является чётной и не является нечётной. **1473.** 2) $\frac{10\pi}{3}$. **1474.** 2) 10π; 3) 2π. **1476.** 2,25 — наибольшее. **1477.** 2) 2 и -1. **1478.** 2) $(0; 2)$, $(2; 0)$, $(0,5; 0)$. **1484.** 2) $x > -2$; 3) $x \neq 2\pi + 4\pi n$, $n \in Z$. **1485.** 2) $x \leqslant -7$, $x > 6$. **1486.** 2) $3 < x \leqslant 3\frac{1}{2}$. **1487.** 2) $-\sqrt{10} \leqslant x < -3$, $3 < x \leqslant \sqrt{10}$. **1488.** 2) $y \leqslant 7$; 3) $y \neq 2$. **1489.** 2) $-\sqrt{1,25} < y < \sqrt{1,25}$. **1490.** 2) -3. **1491.** 2) $\frac{\pi}{3}$. **1492.** 2) $y = -6x - 1$. **1493.** -1. **1494.** 9. **1495.** $(3; 9)$. **1496.** $(1; 2)$, $(0,5; 2,25)$. **1497.** $(-1; -3)$. **1498.** 2) $y = 0,5\,(1 + \ln 2 - x\ln 2)$. **1499.** $\frac{\pi}{4}$. **1500.** e^{-1}. **1501.** $-\frac{\pi}{4}$. **1502.** $y = x + 1$. **1503.** $y = 3x - 3$. **1504.** 2) Возрастает на промежутках $(-\infty; 0)$ и $(0; +\infty)$. **1505.** 2) $x = 6$ — точка минимума. **1506.** 2) $x = 0$ — точка минимума, $x = -\frac{8}{3}$ — точка максимума. **1507.** 1,5 и 1. **1508.** 3 и 1. **1509.** 0,5 и 0. **1510.** 1 дм. **1511.** 54π см^3. **1512.** 6. **1513.** 2. **1514.** $\sin x - \frac{1}{x} - 1$. **1515.** 132, -57. **1516.** 9, 4. **1517.** $(1; 1)$. **1518.** $\frac{49}{27}$. **1519.** $4\sqrt{2}$. **1520.** $p = -10$, $q = 26$. **1521.** $\frac{20\sqrt{3}}{3}$ дм. **1522.** $3\sqrt[3]{2\pi V^2}$. **1523.** $\frac{R}{\sqrt{2}}$. **1524.** $\frac{2R}{\sqrt{3}}$. **1525.** $\frac{4R}{3}$. **1526.** $\frac{\pi}{3}$. **1527.** $\frac{\pi a^3}{216}$. **1528.** $r = R\sqrt{\frac{2}{3}}$, $H = \frac{2R}{\sqrt{3}}$. **1529.** $2R - H$. **1530.** $\frac{2R}{\sqrt{3}}$. **1531.** $r = \frac{2R}{3}$, $h = \frac{H}{3}$. **1532.** 2) $x = 0$ — точка минимума, $x = 0,4$ — точка максимума. **1533.** $(1; 0)$, $(-1; 4)$. **1534.** $y = 7x - 48$. **1538.** 2) $\ln 2$. **1539.** 2) $9\frac{1}{3}$; 4) 1. **1540.** 2) 4,5. **1541.** 2) $\frac{5}{12}$. **1542.** 2) $\frac{8}{3\ln 3}$. **1543.** 3) $3\frac{1}{9}$; 4) -2. **1544.** 2) $x = \frac{\pi}{4} + \pi n$, $n \in Z$. **1545.** 2) $x = \frac{1}{3}$. **1546.** $-2 < x < 3$. **1547.** $v(10) = 262$ м/с, $t \approx 37$ с. **1548.** 12π. **1550.** 2) $6x^{-\frac{1}{6}}$. **1551.** 2) $\frac{4x^2 + 4x - 5}{(2x+1)^2}$. **1552.** 2) $\frac{2x(4x+3)}{3\sqrt[3]{x+1}}$. **1553.** 2) $\cos 2x - 2x\sin 2x$. **1554.** $x = 2$. **1555.** 2) $f'(2) > 0$. **1556.** $f'(0) = 4$, $f'\left(\frac{\pi}{6}\right) = 8(7 + 4\sqrt{3})$. **1557.** $-\frac{2}{3} \leqslant x \leqslant 0$. **1558.** $\frac{1}{8}(2\sin 4x - 9)$. **1559.** 2) $\frac{1}{4}\ln|4x - 1| + C$.

Задачи для внеклассной работы

1560. 2) Указание. Ввести обозначение $y = \sqrt[3]{8 - x}$, $z = \sqrt[3]{27 + x}$, откуда $y^3 + z^3 = 35$ (1). Исходное уравнение записать так: $y^2 - yz + z^2 = 7$ (2). Поделив уравнение (1) на (2), получить $y + z = 5$ (3). Решая систему уравнений (2), (3), найти значение y и далее использовать введённые обозначения; 3) $x_1 = -73$, $x_2 = -8$. **1561.** 2) $x_1 = 4$, $x_2 = -4$. **1562.** 2) $x_{1,2} = \pm 2$,

$x_3 = 3$; 3) $x_1 = -1$, $x_2 = 4$, $x_{3,4} = \pm\sqrt{2}$. **1563.** 2) $x = -\frac{\pi}{4} + \pi n$, $x = (-1)^{n+1}\frac{\pi}{12} + \frac{\pi n}{2}$, $n \in Z$. **1564.** 2) $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$, $x = (-1)^n \frac{\pi}{24} + \frac{\pi n}{4}$, $n \in Z$. **1565.** $x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}$, $n \in Z$. **1566.** $x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi n$, $n \in Z$. **1567.** Пересекает (в т. 1, 2, 3). **1568.** $x_3 = 3$.

1569. 1) $(a; a^2)$, $(a^2; a)$, если $a > 0$ и $a \neq 1$; $(-a-1; (a+1)^2)$, $((a+1)^2; -a-1)$, если $a < -1$ и $a \neq -2$. **1570.** При $a \neq 3$ нет решений, при $a = 3$ — $(0; 1)$. Указание. Записать второе уравнение системы в виде $x^2 + (y-1)^2 + (a-3)^2 + 1 - \cos(xy) = 0$. **1571.** 2) $(1; 1)$, $(2; 4)$; 3) $\left(-\frac{1}{6} + n; \frac{1}{6} + n\right)$, $n \in Z$. **1572.** $\left(-\frac{\pi}{4} + (-1)^k \frac{\pi}{12} + \frac{\pi k}{2} + \pi n; -\frac{\pi}{4} + (-1)^{k+1}\frac{\pi}{12} - \frac{\pi k}{2} + \pi n\right)$, $n \in Z$, $k \in Z$. Указание. Решить систему как линейную относительно u и v, где $u = \cos x \cos y$, $v = \sin x \sin y$. **1573.** $\left(7^{(\log_5 3 \log_7 2)^{\frac{1}{3}}}; 5^{(\log_5 3 \log_7 2)^{\frac{1}{3}}}\right)$. **1574.** 2) $x > 0{,}01$. **1575.** $-\frac{3}{2} < x < -1$, $-\frac{1}{2} < x < 0$. **1576.** $x < -4$, $-3 < x < -2$, $-1 < x < 1$, $x > 2$. **1577.** 2) $2 < x \leqslant 3$. **1578.** $0 \leqslant x \leqslant \frac{8}{3}$, $x = \frac{10}{3}$, $4 < x \leqslant 5$.

1579. Если $a < \frac{3}{4}$, то решений нет; если $a = \frac{3}{4}$, то $x = \frac{15}{4}$; если $a > \frac{3}{4}$, то $a + 3 < x < 9a - 3$. Решения первого неравенства являются решениями второго при $\frac{3}{4} \leqslant a < \frac{6}{9}$. **1583.** 2) $\frac{12}{13}$. **1584.** $C = \frac{\pi}{2}$. **1585.** $b > \sqrt{3} - 1$, $b < -3 - \sqrt{3}$.

1586. $x = \pi n$, $x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{4}$, $n \in Z$. **1587.** $\frac{2}{5}$. **1588.** 3 или 12. **1589.** Нет, так как наименьшее расстояние между кораблями будет равно 3 милям через 48 мин. **1590.** $a = 6$, $b = -11$, $c = 6$. Указание. Так как точки A и B симметричны относительно прямой $x = 2$, то $A(x_1; y_0)$, $B(x_2; y_0)$, где $x_1 = 2 - t$, $x_2 = 2 + t$, $t > 0$. Из условия $f'(x_1) = f'(x_2)$ следует, что $a = 6$ и $f'(x_1) = f'(x_2) = -3t^2 + 12 + b$, а равенство $f(x_1) = f(x_2)$ можно записать в виде $b = t^2 - 12$ (так как $t > 0$), откуда $f'(x_1) = f'(x_2) = -2t^2 < 0$. **1591.** $a = 6$, $b = 11$, $c = 5$. **1592.** $1\frac{1}{8}$. **1593.** $a = 1$, $S = 4$. **1594.** $\operatorname{arctg}\frac{4}{\pi^2}$.

1595. 2) $x = \frac{1}{2}$; $x = -\frac{8}{3}$. **1596.** $x = 9$. **1597.** 2) $x = 2$; 4) $x = 4$.

1598. 2) $x = -9$. **1599.** 2) $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$, $x = 2\pi n$, $n \geqslant 3$; 4) $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in Z$.

1600. 2) $x = \frac{5\pi}{12} + 2\pi n$, $x = \frac{\pi}{12} + (2n+1)\pi$, $n \in Z$. **1601.** $x = \frac{1}{2}\left((-1)^n \times \times \arcsin\frac{1}{3} + \pi n\right)$, $n \in Z$. **1602.** $x = \frac{\pi}{3} + (2n+1)\pi$, $n \in Z$. **1603.** $x = \pi n$, $x = -\frac{\pi}{4} + \pi n$, $n \in Z$, $n \neq 0$, $n \neq 1$, $n \neq 2$. **1604.** $x = \frac{\pi}{3}$. **1605.** Если $\frac{1}{8} \leqslant a \leqslant 1$, то $x = \pm\frac{1}{4}\arccos\left(4\sqrt{2(1+a)} - 7\right) + \frac{\pi n}{2}$, $n \in Z$. **1606.** 1) $(1; 2)$, $\left(-4; \frac{1}{3}\right)$; 2) $(-2; 1)$, $(-2; -1)$, $(2; -1)$, $(2; 1)$. **1607.** 1) $(1; \log_3 2)$; 2) $(3; -9)$.

1608. 1) $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{3}{2} + \sqrt{2}\right)$, $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{3}{2} - \sqrt{2}\right)$; 2) $\left(\frac{3}{2} - \sqrt{2}; \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, $\left(\frac{3}{2} + \sqrt{2}; -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

1609. $-\frac{7}{3} \leqslant a < 6$. **1610.** 1) $-1 < x < 0$, $2 < x < 4$; 2) $-2 \leqslant x < -1$, $x > -1$. **1611.** 1) $a \geqslant \frac{10}{3}$; 2) $a \leqslant \frac{1}{3}$. **1612.** 1) $x < 2$, $x > 3$; 2) $x > 3$. **1613.** 1) $x \geqslant 2$; 2) $-311 < x < -11$, $1 < x < 1{,}5$. **1614.** 1) $-\frac{1}{3} \leqslant x < 0$; 2) $-1 < x < -\frac{1}{2}$, $-\frac{1}{4} < x < 0$, $0 < x < 1$. **1615.** $x \leqslant -4$, $1 \leqslant x < 3$, $x > 5$. **1616.** $a < \sqrt{2}$. **1617.** $(-2;\ 22)$, $(2;\ 10)$. **1618.** $h = 2$. **1619.** $p = -2$, $q = 0$, $d = 1$. **1620.** $x = (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n$, $n \in Z$. **1621.** $a = -3{,}5$. **1622.** $a = 1 - \sqrt{2}$, $a = 5 + \sqrt{10}$. **1623.** $a < -4$, $-\frac{1}{4} < a < 0$. **1624.** $\frac{2}{3}$; $\frac{7}{15}$.

Ответы к заданиям «Проверь себя!»

Глава I. **1.** 1) 135; 2) $5\frac{11}{48}$; 3) $4\frac{1}{2}$. **2.** 1) $\frac{a^2b}{c}$; 2) a^{-1}. **3.** $\frac{a^{\frac{3}{4}} - 3a^{\frac{1}{2}}}{7}$. **4.** $\sqrt[5]{\left(\frac{2}{9}\right)^3} < \sqrt[5]{\left(\frac{1}{4}\right)^3}$. **5.** $2\sqrt[3]{ab}$.

Глава II. **1.** 1) $x \neq 1$; 2) $x \geqslant 4$, $x \leqslant -1$. **2.** 1) x — любое действительное число, $y > 0$ при $x > -1$; 2) $x \neq 0$, $y > 0$ при $x \neq 0$; 3) x — любое действительное число. **3.** 1) $x = 128$; 2) $x = 1$.

Глава III. **2.** $\left(\frac{1}{5}\right)^{0,2} > \left(\frac{1}{5}\right)^{1,2}$; $5^{-0,2} > 5^{-1,2}$. **3.** 1) $x = 2$; 2) $x_1 = 1$, $x_2 = -5$; 3) $x = 1$; 4) $x_1 = 0$, $x_2 = -2$. **4.** 1) $x > 4$; 2) $-2 \leqslant x \leqslant 2$.

Глава IV. **1.** 3; -2; 3; 49; 2. **3.** 1) $\log_{0,2} 3 < \log_{0,2} 25$; 2) $\log_2 0{,}7 < \log_2 1{,}2$. **4.** 1) $x = 8$; 2) $x = 1$; 3) $x_1 = 0$, $x_2 = 9$. **5.** $(15;\ 5)$. **6.** 1) $1 < x \leqslant 10$; 2) $-3 < x < 2$.

Глава V. **1.** $\sin\alpha = \frac{3}{5}$; $\operatorname{tg}\alpha = -\frac{3}{4}$; $\cos 2\alpha = \frac{7}{25}$. **2.** 1) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$; 2) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; 3) $\sqrt{3}$; 4) $\frac{\sqrt{6}}{2}$. **4.** 1) $\sin\alpha\cos\beta$; 2) $\cos 2\alpha$; 3) $\cos(\alpha - \beta)$.

Глава VI. **1.** 1) 0; 2) 0. **2.** 1) $x = \frac{\pi}{4} + \pi n$, $n \in Z$; 2) $x = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n$, $n \in Z$; 3) $x = \pm\frac{\pi}{3} + \pi n$, $n \in Z$; 4) $x = \pi n$, $x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}$, $n \in Z$; 5) $x = \pi n$, $x = \pi + 2\pi n$, $n \in Z$.

Глава VII. **1.** $x \neq \frac{\pi}{8}(1 + 2n)$, $n \in Z$; нет. **2.** $\sin x = 1$ при $x = \frac{\pi}{2}$; $\cos x = 1$ при $x = 0$, 2π; $\sin x = -1$ при $x = -\frac{\pi}{2}$, $\frac{3\pi}{2}$; $\cos x = -1$ при $x = -\pi$, π; $\sin x = 0$ при $x = 0$, π, 2π; $\cos x = 0$ при $x = -\frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{2}$, $\frac{3\pi}{2}$; $\sin x > 0$ при $0 < x < \pi$; $\cos x > 0$ при $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$, $\frac{3\pi}{2} < x < 2\pi$; $\sin x < 0$ при $-\pi < x < 0$, $\pi < x < 2\pi$; $\cos x < 0$ при $-\pi < x < \frac{\pi}{2}$, $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{2}$; возрастают: $\sin x$ при

$-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$, $\frac{3\pi}{2} < x < 2\pi$, $\cos x$ при $-\pi < x < 0$, $\pi < x < 2\pi$; убывают: $\sin x$ при $-\pi < x < -\frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{2}$, $\cos x$ при $0 < x < \pi$. 3. $\operatorname{tg} x = 0$ при $x = -\pi$, 0; $\operatorname{tg} x > 0$ при $-\pi < x < -\frac{\pi}{2}$, $0 < x < \frac{\pi}{2}$; $\operatorname{tg} x = 0$ при $-\frac{3\pi}{2} < x < -\pi$, $-\frac{\pi}{2} < x < 0$.

4. $-\frac{\pi}{4} + \pi n \leqslant x < \frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in \mathbf{Z}$.

Глава VIII. 1. 85. 2. 1) $-\frac{3}{x^2} + \frac{1}{\sqrt{x}} - e^x$; 2) $12(3x-5)^3$, 3) $6\cos 2x \cos x - 3\sin 2x \sin x$; $\frac{x^4+15x^2}{(x^2+5)^2}$. 3. $k = -3$. 4. $\alpha = -\frac{\pi}{4}$.

Глава IX. 1. Возрастает при $-1 < x < 1$, убывает при $x < -1$, $x > 1$. 2. Точка максимума $x = -3$; точка минимума $x = 3$. 3. См. рис. 190. 4. Наибольшее $y(5) = 5\frac{4}{5}$, наименьшее $y(2) = 4$. 5. 2 м.

Глава X. 2. $F(x) = x^3 + x^2 - 3x - 1$. 3. 1) $11\frac{1}{4}$; 2) $\frac{1}{4}$; 3) 1; 4) -1. 4. 1) $20\frac{5}{6}$ кв. ед.; 2) 36 кв. ед.

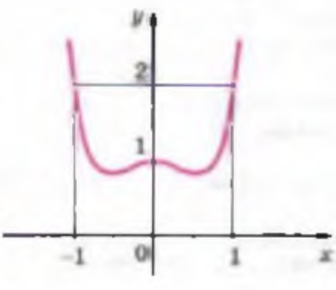
Глава XI 1. 21. 2. 720 способами. 3. 9240. 4. 48. 5. $1 - 6x + 15x^2 - 20x^3 + 15x^4 - 6x^5 + x^6$.

Глава XII 1. 1) Названо одно из чисел 2, 3, 4, 6, 8, 9, 10, 12, 14, 15, 16, 18; 2) названо одно из чисел 6, 12, 18; 3) названо одно из чисел 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17; 4) названо одно из чисел 1, 2, 4, 5, 7, 8, 10, 11, 13, 14, 16, 17. 2. $\frac{1}{12}$. 3. 0,88.

Глава XIII 1.

X	2	3	4	5	6	7	8
P	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{12}$

2. 13; 3; 1,5; 1. 3. 4,56.



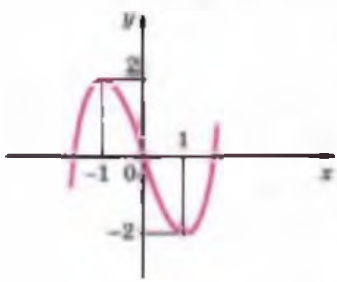


Рис. 190

Предметный указатель

ОГЛАВЛЕНИЕ

Учебное издание

Алимов Шавкат Арифджанович
Колягин Юрий Михайлович
Ткачёва Мария Владимировна
Фёдорова Надежда Евгеньевна
Шабунин Михаил Иванович

МАТЕМАТИКА:
алгебра и начала математического анализа, геометрия

АЛГЕБРА И НАЧАЛА МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

10—11 классы

Базовый и углублённый уровни

Учебник

Центр математики, физики и астрономии
Ответственный за выпуск *Э. А. Мазурова*
Редакторы *Н. Н. Сорокина, Т. Ю. Акимова*
Младший редактор *Е. А. Андреенкова*
Художники *В. А. Андрианов, В. В. Костин, Е. В. Соганова*
Художественный редактор *Т. В. Глушкова*
Техническое редактирование и компьютерная вёрстка *Е. В. Саватеевой*
Корректоры *И. П. Ткаченко, А. К. Райхчин, С. В. Николаева*

Подписано в печать 21.11.2023. Формат 60×90/16. Гарнитура Школьная.
Уч.-изд. л. 23,88 + 0,48 форз. Усл. печ. л. 29. Тираж 5000 экз.
Заказ № 1201ТДЛ.

Акционерное общество «Издательство «Просвещение».
Российская Федерация, 127473, г. Москва, ул. Краснопролетарская,
д. 16, стр. 3, помещение 1Н.

Адрес электронной почты «Горячей линии» — **vopros@prosv.ru**.

Отпечатано в филиале «Тверской полиграфический комбинат
детской литературы» АО «Издательство «Высшая школа»
Российская Федерация, 170040, г. Тверь, проспект Николая Корыткова, д. 46
Тел.: +7 (4822) 44-85-98, e-mail: sales@tpkdl.ru

Учебник имеет электронную форму

БАЗОВЫЙ И УГЛУБЛЁННЫЙ УРОВНИ

ISBN 978-5-09-112136-0

9 785091 121360

Учебно-методический комплект по алгебре и началам математического анализа для 10—11 классов:

- Сборник примерных рабочих программ (на сайте)
- **Учебник**
  (авторы Ш. А. Алимов, Ю. М. Колягин, М. В. Ткачёва и др.)
- Дидактические материалы
  (авторы М. И. Шабунин, М. В. Ткачёва, Н. Е. Фёдорова)
- Методические рекомендации (на сайте)
  (авторы Н. Е. Фёдорова, М. В. Ткачёва)
