МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования

**СЕВЕРО-КАВКАЗСКАЯ ГОСУДАРСТВЕННАЯ АКАДЕМИЯ**

О.И. Шапошникова

Л.Г. Темирова

**ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ**

Практикум для обучающихся3 курса направления подготовки

01.03.04Прикладная математика

Черкесск

2021

УДК 519.1

ББК 22.176

Ш23

Рассмотрено на заседании кафедры «Математика».

Протокол № 2 от «20» сентября 2020 г.

Рекомендовано к изданию редакционно-издательским советом СКГА.

Протокол № 18 от «30» сентября 2020 г.

**Рецензент:**

Кочкаров А. М. – д. ф.-м. н., профессор кафедры «Математика»

Ш23 **Шапошникова, О. И.** Исследование операций: учебно-методическое пособие по выполнению практических работ для обучающихся3 курса направления подготовки01.03.04 Прикладная математика. /О. И. Шапошникова, Л.Г. Темирова. – Черкесск: БИЦ СКГА, 2021. – 44 с.

Настоящее пособие возникло как результат проведения практических занятий по дисциплине «Исследование операций». Пособие охватывает такие разделы исследования операций как теория расписаний, динамическое программирование, теория игр, сетевое планирование и управление. Каждый раздел снабжен кратким теоретическим материалом, задачами для практических занятий разного уровня сложности. К каждому разделу есть индивидуальные задания по 10 вариантов.

**УДК 519.1**

**ББК 22.176**

© ШапошниковаО. И., ТемироваО. И., 2021

© ФГБОУ ВО СКГА, 2021

СОДЕРЖАНИЕ

|  |  |
| --- | --- |
| Введение | 4 |
| **1 Линейное программирование**  1.1 Постановка задачи линейного программирования | 5 |
| 1.2 Графический метод решения простейших задач линейного программирования | 5 |
| 1.3 Варианты индивидуальных заданий | 9 |
| **2 Комбинаторные задачи теории расписаний** | 10 |
| 2.1 Задача инвестора | 10 |
| 2.2 Задача Джонсона | 13 |
| 2.3 Варианты индивидуальных заданий | 14 |
| **3 Динамическое программирование** | 16 |
| 3.1. Принцип оптимальности динамического программирования | 16 |
| 3.2. Решение методом ДП задачи о распределении средств | 18 |
| 3.3. Задача замены автомобиля | 22 |
| 3.4 Варианты индивидуальных заданий задачи распределения средств | 24 |
| 3.5 Варианты индивидуальных заданий задачи замены автомобиля | 28 |
| **4 Теория игр** | 30 |
| 4.1 Решение игры в чистых стратегиях | 30 |
| 4.2 Решение игры в смешанных стратегиях | 31 |
| 4.3 Варианты индивидуальных заданий | 32 |
| **5 Сетевое планирование и управление** | 33 |
| 5.1 Вычислительные схемы сетевого планирования и управления | 33 |
| 5.2 Варианты индивидуальных заданий | 38 |
| Список используемых источников и литературы | 42 |

**Введение**

Исследование операций (ИСО) - это математический подход к решению задач организационного управления. Термин «математический подход» означает пользование количественных методов, включая математическое моделирование. Термин «операция» означает любую совокупность действий (планирование, управление регулирование, конструирование и т.п.), направленных на достижение определенных целей.

Формулировка конкретной задачи ИСО исходит от лица, принимающего решение или лиц, принимающих решение (ЛПР). ЛПР является заказчиком для исследования операций (ИО). ИО сам не принимает окончательного решения, а обеспечивает для ЛПР научную основу для принятия решения.

Процесс решения достаточно сложной задачи ИСО обычно разделяется на 4 этапа:

1. содержательное описание проблемы и возможных вариантов ее решения на языке той области деятельности, в которой возникла данная проблема;
2. математическая постановка задачи, т.е. построение математической модели операций;
3. анализ поставленной задачи математическими моделями и нахождение в том или ином смысле наилучшего решения;
4. содержательная смысловая интерпретация полученного решения и разработка программы или рабочего плана реализации его на практике.

Типичным для математика является активное участие в реализации второго и третьего этапов. Заметим, что термин «математическая модель» является частным случаем более общего понятия «модель».

От того, насколько удачно выбрана или построена модель, зачастую зависит успех дела. Широко распространено мнение, что построение модели - это искусство. Это мнение является верным лишь отчасти. Причем в первую очередь в силу того, что при моделировании действует две противоречивые тенденции. С одной стороны, исследователь стремится дать возможно более полное описание, учитывающее все факторы. Это нужно для того, чтобы обеспечить адекватность модели действительности. С другой стороны, модель не может быть через чур громоздкой, ибо становится невозможным ее анализ с достаточной степенью точности по причине непреодолимой вычислительной трудоемкости.

Таким образом, основная задача курса ИСО является двоякой:

а) изучение совокупности существующих математических методов анализа задач ИСО;

б) обучение принципу выбора и построения моделей и аналитической работы с ним.

**1 Линейное программирование**

**1.1 Постановка задачи линейного программирования**

Предметом *линейного программирования (ЛП)* является нахожде­ние экстремумов линейных функций при условии, что подлежащие определению переменные подчинены линейным ограничениям (ра­венствам или нестрогим неравенствам). В терминах ЛП формулиру­ется большое число экономических, технических, военных и других задач управления и планирования.

Задача ЛП может быть задана в следующей форме:

*Общая форма* задачи ЛП (с ограничениями неравенствами и уравнениями). Найти вектор , доставляющий макси­мум (минимум) функции



(1.1)



при ограничениях

(1.2)



Функция (1.1) называется *целевой функцией*, а система (1.2) – *системой ограничений* задачи ЛП. Все вели­чины предполагаются заданными числами.



Вектор , при подстановке координат которого в систему ограничений (1.2) каждое из ее ограничений (уравнение или неравенство) обращается в верное числовое ограни­чение (соответственно равенство или неравенство), называется *допустимым решением* задачи ЛП. Множество всех допустимых ре­шений задачи ЛП называется ее *областью допустимых решений (ОДР).*



Система ограничений (1.2) называется *совместной*, если она имеет хотя бы одно (допуститмое) решение, и *несовместной* – в противном случае.

ОДР задачи ЛП с несовместной системой ограничений пустое множество.

Допустимое решение, на котором достигается наибольшее (или наименьшее) в ОДР значение целевой функции , называется *оптимальным решением* задачи ЛП.



**1.2 Графический метод решения простейших задач линейного программирования**

Задачи ЛП с числом переменных могут быть решены *графически*.



Пусть задана следующая задача ЛП:

. (1.3)



Графическое решение задачи (1.3) можно выполнять в такой последовательности:

1. Построение ОДР как пересечения замкнутых полуплоскостей, заданных неравенствами системы ограничений задачи (1.3).



1. Построение вектора , обычно он откладывается из начала координат.



1. Построение одной из линий уровня (прямой, перпендикулярной вектору ) так, чтобы она имела общие точки с ОДР.



1. Мысленное параллельное перемещение линии уровня в направлении вектора (если задача на максимум) или в противоположном направлении (если задача на минимум) до достижения оптимальной точки – точки, через которую линия уровня выходит из ОДР. Если такой точки не существует, то задача не имеет оптимального решения, если таких точек бесконечно много, то все они – оптимальные решения (случай *альтернативного оптимума*).



1. Вычисление координат оптимальной точки и соответствующего значения целевой функции. Запись ответа.

Пример . Предприятие производит продукцию трех видов I, II и III, используя при этом сырье трех сортов A, B и C. Расходы сырья на единицу каждого вида продукции, его запасы, прибыль от реализации единицы каждого вида продукции указаны в следующей таблице:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| Продук-  ция  Сырье | I | II | III | Запасы  сырья |
| А | 4 | 2 | 10 | 2000 |
| В | 2 | 2 | 4 | 1000 |
| С | 1 | 1 | 0 | 450 |
| Прибыль | 60 | 50 | 40 |  |

Составить план производства, обеспечивающий максимум прибыли, если по условию комплектности продукции I должно быть в два раза больше, чем продукции II.

Обозначим количества единиц продукции соответственно I, II и III видов, планируемые для выпуска данным предприятием. Прибыль при этом будет равна . Подсчет затрат сырья на данный план с учетом его запасов приводит к следующим неравенствам:



кроме того, одно ограничение (уравнение) дает условие комплектности продукции .



Переменные по их смыслу должны быть неотрицательными. В результате получаем задачу ЛП в общей форме:



. (1.4)



Так как число переменных задачи равно трем, то ее графическое решение затруднительно. С другой стороны, система ограничений содержит одно уравнение и, следовательно, задачу можно привести к основной форме с числом переменных, равным двум. Для этого выразим переменную через остальные и подставим ее в целевую функцию и неравенства системы ограничений. В результате преобразований получим следующую эквивалентную задачу в основной форме:



. (1.5)



Эту задачу мы и будем решать графически.

1. Построим ОДР задачи (1.5) как пересечение пяти замкнутых полуплоскостей.

а) Заметим, во-первых, что условия выделяют первую четверть в системе координат



б) Построим теперь замкнутую полуплоскость.



Строим сначала граничную прямую . В простейших случаях удобно выбирать точки прямой, лежащие на координатных осях: или , . Расположение полуплоскости удобно определить с помощью “пробной” точки – любой точки, не лежащей на прямой , например, точки . Подстановка ее координат показывает, что это неравенство обращается в верное числовое неравенство, следовательно, замкнутая полуплоскость лежит с той же стороны, что и точка . Полуплоскость, не содержащая ОДР, отсекается (показано штриховкой).



Аналогично строим две оставшиеся замкнутые полуплоскости:, граничная прямая проходит через точки и , и , граничная прямая или – вертикальная прямая, проходящая через точку . Пересечением всех пяти замкнутых полуплоскостей является не заштрихованная часть плоскости – пятиугольник *ОАВСD* – ОДР задачи.



2. По коэффициентам целевой функции задачи строим вектор , а еще лучше, по соображениям наглядности, вектор , откладываем его из начала координат.



*250*



*A*

*100 B*

*(85;20)C*



*O 100 OD*



*150*



*ЛУ*



Рис. 1.1. Рис. 1.2.

3. Строим одну из линий уровня – прямую, перпендикулярную вектору , чтобы она имела общие точки с ОДР, на рис. 1.2 она изображена пунктиром и подписана *ЛУ*.



4. Так как задача на максимум, то мысленно параллельно перемещаем построенную линию уровня в направлении вектора до достижения точки, через которую она выходит из ОДР. Эта точка, очевидно, точка *С*.



5. Так как точка *С* находится на пересечении прямых и , то ее координаты находятся из системы уравнений этих прямых



откуда получаем . Таким образом, оптимальная точка , соответствующее значение целевой функции . Задача решена.



Для решения исходной задачи следует найти значение переменной : . Тогда оптимальное решение задачи .



Экономически содержательный ответ будет следующим: для получения максимальной прибылиследует произвести ед. продукции I, ед. продукции II и ед. продукции III.



**1.3 Варианты индивидуальных заданий**

Решить графическим методом задачу линейного программирования

**В-1**. **В-2.**



**В-3**. **В-4**. 



**В-5**. **В-6**. 



**В-7.****В-8**. 



**В-9**. **В-10**. 



**2 Комбинаторные задачи теории расписаний**

**2.1 Задача инвестора**

Теория расписаний (ТР) - это раздел ИСО, в котором строятся и анализируются математические модели календарного планирования (т. е. упорядочения во времени различных видов целенаправленных действий). В качестве примеров можно говорить о составлении расписаний учебных занятий, о разработке графиков движения транспорта и т. д. При этом расписание, т. е. календарный план должен удовлетворять, во - первых, технологическим требованиям и, во - вторых**,** наличным ресурсам. Термин *«ресурсы»* означает машины, материалы, живых исполнителей и т. д..

Математическая постановка задачи инвестора состоит в следующем. Рассматриваются  инвестируемых объектов, пронумерованных индексом . - продолжительность инвестиционного периода для i-гообъекта,  - ожидаемая прибыль за единицу времени от i-го объекта после сдачи его в эксплуатацию,  – директивный срок, после истечения которого, за каждую просроченную единицу времени начисляется штраф в количестве  единиц.

Всякое допустимое решение представляет собой одну из  перестановок чисел .  - множество допустимых решений (МДР) этой задачи. На множестве  всех перестановок  определена 2-критериальная векторно-целевая функция(ВЦФ) вида *«инвестор - заемщики»*:(1), где критерий инвестора  имеет вид MINSUM, а критерий заемщиков  - вид MINMAX:

(2), (3), где,.

Полагаем, что  определяется в базовых ценах.

Известно простое правило нахождения оптимума в случае, когда все директивные сроки совпадают с началом календарного периода, т.е., .Тогда критерий (2) принимает вид(4), где .

Для задачи инвестора искомое решение, оптимальное по критерию (4), определяется упорядочением инвестируемых объектов в порядке убывания значений дробей ,: …(5). Ряд (5) называется решающим правилом (РП).



Для задачи с критерием вида MINMAX (3), действие которого направлено на оптимизацию издержек объекта, оказавшегося в наихудшем положении по сравнению с другими объектами, известен полиномиальный алгоритм. Он находит оптимальное по критерию (3) решение, которое строится с определения , т.е.  строится в порядке, обратном к последовательности (5). Для описания алгоритма нахождения x введем новые обозначения, в которых фигурируют индексы  , .

, , ,…,...,; ; .

Алгоритм нахождения оптимума состоит в последовательном вычислении следующих величин: ,,…,,..., , .

Элементы оптимального порядка инвестирования определяются индексами .



**Пример.** Решить задачу инвестора.

Дано:

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| i | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| Ti | 4 | 1 | 3 | 20 | 1 | 4 | 6 |
| αi | 2 | 2 | 2 | 4 | 2 | 2 | 3 |
| di | 2 | 4 | 7 | 4 | 6 | 8 | 2 |

где i=1,2,…,n - n объектов инвестирования, Ti – длительность строительства i-того объекта, αi – удельная прибыль от i-того объекта, т.е. прибыль за единицу времени, di – директивный срок, после которого начинается начисление штрафа или потерь от запаздывания ввода i-того объекта.

Для решения необходимо а) найти последовательность  оптимальную по критерию , где  (di=0)

Искомое решение определяется упорядочением инвестируемых объектов в порядке убывания значений дробей ,:  … - решающим правилом.

, ,, , , , . , значение целевой функции ;

б) найти последовательность  оптимальную по критерию , где ,  (di>0).

Время окончания строительства всех семи объектов .



Последним будет проинвестирован шестой объект .



;



Вторым с конца будет проинвестирован третий объект .



.



Третим с конца будет проинвестирован пятый объект .



Четвертым с конца будет проинвестирован второй объект .



Пятым с конца будет проинвестирован первый объект .



Шестым с конца будет проинвестирован седьмой объект .



Седьмым с конца или первым будет проинвестирован четвертый объект .Значение целевой функции .



**2.2 Задача Джонсона**

Имеются работ (деталей) должны быть выполнены (обработаны) на машинах причем, порядок прохождения работ (деталей) через машины (станки) для них один и тот же, т. е. в порядке нумерации. Задача построения расписания состоит в указании порядка, в котором должны выполняться работы, чтобы суммарное время простоя всех машин было минимальным.

Минимум простоя машин означает достижение наименьшей длины расписания, т. е. наименьший отрезок времени от начала выполнения работ до их завершения.

Приведем ограничительные условия, которые определяют собой МДР, т. е. множество допустимых расписаний:

1. в любой момент времени на машине не может выполняться больше одной работы;
2. одна работа в фиксированный момент времени может занимать только одну машину.

К настоящему времени эффективный метод решения задачи Джонсона разработан лишь для частного случая 2-х машин. Для этого случая Джонсоном разработан следующий алгоритм.

В задаче двух станков требуется за минимальное время закончить обработку  деталей. Каждая деталь  обрабатывается сначала на первом станке (*первая операция*), длительность обработки равна , затем обрабатывается на втором станке (*вторая операция*) длительность обработки .

Для построения оптимального расписания используем следующее решающее правило: пусть имеется  таких деталей , что . Тогда если , для , и, кроме того при  и,  для  и, кроме того,  при  , то  оптимальна.

Иными словами - сначала выбираем детали , у которых первая операция  короче . Эти детали упорядочиваем в порядке возрастания . Остальные детали обрабатываются в порядке убывания .

Пример. Построить оптимальное расписание  обработки 9 деталей на двух станках.

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| a | 8 | 3 | 3 | 8 | 9 | 12 | 1 | 11 | 4 |
| b | 8 | 4 | 2 | 6 | 7 | 2 | 4 | 1 | 2 |

Решение:

1. Отмечаем значком () детали , для которых .
2. Упорядочиваем их в порядке возрастания 
3. Отмечаем значком () детали , для которых .
4. Упорядочиваем их в порядке убывания .

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| a |  |  | 3 | 8 | 9 | 12 |  | 11 | 4 |
| b | 8 | 4 | 2\* | 6\* | 7\* | 2\* | 4 | 1\* | 2\* |

Получаем оптимальное расписание; .

**2.3 Варианты индивидуальных заданий**

1. Применить известные решающие правила для задачи инвестора

а) с нулевыми директивными сроками и критерием вида MINSUM

б) с ненулевыми директивными сроками и критерием вида MINMAX

2. Найти оптимальное расписание обработки деталей на двух станках. Построить графики Ганта для оптимальной последовательности и для данной последовательности.

**Вариант 1**

1. 2.



**Вариант 2**

1. 2.



**Вариант 3**

1. 2.



**Вариант 4**

1. 2.



**Вариант 5**

1. 2.



**Вариант 6**

1. 2.

**Вариант 7**



1. 2.



**Вариант 8**

1. 2.



**Вариант 9**



. 1. 2.



**Вариант 10**

1. 2.



**3 Динамическое программирование**

**3.1 Принцип оптимальности динамического программирования**

Термин «динамическое программирование» (ДП) означает раздел математического программирования, относящийся к многошаговым задачам оптимизации. При этом «многошаговость» может вводиться в задачу искусственно. Естественное свойство многошаговости присуще таким моделям ИСО, как управление запасами, замена оборудования и др.

Пусть имеется система , которая последовательно по шагам изменяет своё состояние в результате соответствующих решений . Каждое решение должно удовлетворять как ограничениям, определяющим систему , так и ограничениям, которые возникли за счет ранее сделанных выборов . Принципиальная возможность применить метод ДП появляется тогда, когда общий эффект за шагов можно представить в виде суммы эффектов от отдельных шагов.



Исторически ДП разрабатывалось как метод оптимизации для операций, в которых процесс построения допустимого решения можно представить поэтапно, т.е. решение строится по шагам . Принятое на шаге решение (управление) переводит систему из начального состояния в первое «промежуточное» состояние . К началу шага система находилась в состояниях . Если на шаге принято соответственно решение (управление) , то его результат есть переход системы из состояния в состояние . Этот факт символически представляется выражением, . (1)



По своей сути (1) означает «отсутствие последствия».

Таким образом получаемое методом ДП решение представляется как управление , которое последовательно по приводит систему в состояния . Здесь есть начальное (конечное) состояние системы. Одна из особенностей задач ДП заключается в том, что их ЦФ аддитивны от показателя эффективности каждого шага, т.е.



|  |  |
| --- | --- |
| . | (2) |

Суть конкретного алгоритма ДП сводится к определению управления , переводящего по шагам данную систему из состояния в состояние , при котором ЦФ (2) принимает требуемое экстремальное значение.



Перечислим принципиальные особенности математических моделей ДП:

1. Задача оптимизации интерпретируется как -шаговый процесс управления.



1. Целевая функция равна сумме ЦФ каждого шага.
2. Выбор управления на шаге зависит только от состояния системы к этому шагу, т.е. он не влияет на предшествующие шаги или, иначе говоря нет обратной связи.



1. Состояние после шага управления зависит только от предшествующего состояния и управления , т.е. отсутствует последствие.



1. На каждом шаге управление зависит от конечного числа управляющих переменных, а состояние от конечного числа параметров.



**3.2 Решение методом ДП задачи о распределении средств**

Пусть систему составляют 4 предприятия ; распределение начальных средств усл. ед. представляется целочисленным вектором



|  |  |
| --- | --- |
| , ,, . | (3) |

Средства , выделенные предприятию приносят прибыль, равную и ЦФ (2) имеет вид



|  |  |
| --- | --- |
|  | (4) |

где значения определены таблицей 1.



Таблица 1 – Прибыль предприятий

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |
| 1 | 8 | 6 | 3 | 4 |
| 2 | 10 | 9 | 4 | 6 |
| 3 | 11 | 11 | 7 | 8 |
| 4 | 12 | 13 | 11 | 13 |
| 5 | 18 | 15 | 18 | 16 |

В этой задаче многошаговость вводится искусственно: число шагов равно количеству предприятий . Уравнение состояний имеет вид



|  |  |
| --- | --- |
|  | (5) |

Где параметр состояния - это количество средств, оставшихся нераспределенными после шага.



Определим условную оптимальную прибыль , получаемую от предприятий в случае, когда оставшиеся после шага единиц средств распределены между этими предприятиями оптимально. Рассматривая допустимые уравнения на шаге, учитываем условие . Тогда уравненияпримут вид:



|  |  |
| --- | --- |
| , | (6) |

|  |  |
| --- | --- |
|  | (7) |
|  | (8) |
|  | (9) |

Последовательно решая уравнения (6), (7), (8) и (9), найдем оптимальные значения ЦФ и оптимальные управления на каждом шаге



Шаг из таб.1. (правая колонка) видно, что для шага , т.е. для 4-го предприятия прибыль монотонно возрастает с ростом . Поэтому все оставшиеся к последнему шагу средства следует вложить в 4-е предприятие. Т.е. для возможных значений искомые оптимумы имеют вид



|  |  |
| --- | --- |
| , | (10) |

Процесс решения уравнений (6)-(9), относящихся к шагам представлены в таблице 2. Здесь промежуточные вычисления на каждом шаге выполнены для возможных значений , в пределах которых варьируются значения и под знаком операции «max» в (6)-(9).



Таблица 2 – Алгоритм динамического программирования

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  | | | | | | | |
|  | | | |  | |  | |
| 1 | 2 | 3 | 4 | | | | 5 | | 6 | |
| 0 | 0 | 0 | 0 | | | | 0 | | 0 | |
| 1 | 0  1 | 1  0 | 0+4=4  3+0=3 | | | | 4 | | 0 | |
| 2 | 0  1  2 | 2  1  0 | 0+6=6  3+4=7  4+0=4 | | | | 7 | | 1 | |
| 3 | 0  1  2  3 | 3  2  1  0 | 0+8=8  3+6=9  4+4=8  7+0=7 | | | | 9 | | 1 | |
| 4 | 0  1  2  3  4 | 4  3  2  1  0 | 0+13=13  3+8=11  4+6=10  7+4=11  11+0=11 | | | | 13 | | 0 | |
| 5 | 0  1  2  3  4  5 | 5  4  3  2  1  0 | 0+16=16  3+13=16  4+8=12  7+6=13  11+4=15  18+0=18 | | | | 18 | | 5 | |
|  | | | | | |  | | | | |
|  | | | |  |  |  | |  | |  |
| 7 | | | | 8 | 9 | 10 | | 11 | | 12 |
| 0 | | | | 0 | 0 | 0 | | 0 | | 0 |
| 0+4=4  6+0=6 | | | | 6 | 1 | 0+6=6  8+0=8 | | 8 | | 1 |
| 0+7=7  6+4=10  9+0=9 | | | | 10 | 1 | 0+10=10  8+6=14  10+0=10 | | 14 | | 1 |
| 0+9=9  6+7=13  9+4=13  11+0=11 | | | | 13 | 1  2 | 0+13=13  8+10=18  10+6=16  11+0=11 | | 18 | | 1 |
| 0+13=13  6+9=15  9+7=16  11+4=15  13+0=13 | | | | 16 | 2 | 0+16=16  8+13=21  10+10=20  11+6=17  12+0=12 | | 21 | | 1 |
| 0+18=18  6+13=19  9+9=18  11+7=18  13+4=17  15+0=15 | | | | 19 | 1 | 0+19=19  8+16=24  10+13=23  11+10=21  12+6=18  18+0=18 | | 24 | | 1 |

Сначала отметим, что к началу шага остаток средств может принимать любое значение Здесь в том случае, если все единиц средств отданы 1-му и 2-му предприятиям. Если же эти предприятия ничего не получили, то . На этом шаге в (7) фигурирует величина , где допустимые значения .



Процесс решения уравнения (7) состоит из следующих действий. Последовательно при фиксированных для различных допустимых (с учетом равенства ) записываем в колонку 4 различные значения суммы . Для каждого значения наибольшее значение этой суммы и есть искомый условный оптимум , который записывается в колонку 5 таблицы 2 для . По своему смыслу величина и есть условная оптимальная прибыль, получаемая при оптимальном распределении единиц средств между предприятиями 3 и 4. В 6-ю колонку записывается оптимальное на шаге управление .



Шаг .Аналогично предыдущему шагу осуществляется решение уравнения (8), при различных значениях с учетом равенства . В колонке 7 записываем значения суммы для различных допустимых и . Найденные условные оптимумы и записываются соответственно в колонки 8 и 9; значения выбираются из таблицы 1, а вторые слагаемые выбираются из 5 колонки таблицы 2 для каждого значения .



Шаг **.** Аналогично предыдущим шагам осуществляется решение уравнения (9) для начального значения . Сам процесс решения состоит в том, что последовательно для каждого значения определяются значения и , а их сумма + заносится в колонку 10 таблицы 2. Опишем начало этого процесса более подробно.



Если , то , т.е. все средства распределены между предприятиями 2,3,4,5. Следовательно, первое предприятие имеет нулевую прибыль ,а для остальных 4-х предприятий 5 единиц средств распределяются оптимально, в результате чего получается оптимальная величина прибыли , которая уже вычислена и представлена в колонке 8 таблицы 2 для : . Отсюда в колонку 10 записываем .



Далее в ряду (16) переходим к значению , которое определяет . Для этого значения оптимальная величина прибыли предприятий 2,3,4,5 уже вычислена и представлена в колонке 8 для : . Выбирая из таблицы 1 значение , получаем сумму +, которая заносится в колонку 10.



Переходя в (16) к значениям 2,3,4,5, аналогично рассмотренному выше случаю получаем:

при , сумму +;



при , сумму +;



при , сумму +;



при , сумму +.



Сравнивая все 6 подчеркнутых чисел, получим решение уравнения (9) т.е. искомый оптимум , который достигается при ; эти значения заносим соответственно в колонки 11 и 12. На этом заполнение всех колонок и строк таблицы завершается. Представленные в таблице 2 данные позволяют с помощью соотношения (5) полностью определить оптимальное распределение единиц средств между 4-мя предприятиями . Действительно, используя уравнение состояний (5) и представленное выше оптимальное значение для первого шага, далее получим , для которого в колонке 9 таблицы 2 находим . Далее согласно (5) находим оптимальное значение , на основании чего в колонке 6 находим оптимальное значение . Наконец согласно (5) вычисляем и в таблице 2 находим , т.е. искомое оптимальное решение .



**3.3 Задача замены автомобиля**

Для представления математической модели (ММ) задачи ЗА, вводятся следующие обозначения:

-протяженность планового периода, единицей измерения которого является единичный отрезок (год, полугодие и т.д.);

- индекс, которым занумерованы начала этих отрезков, ; решение о замене, т.е. продаже старого и покупка нового автомобиля принимается в календарные моменты , ;

 - ограничение сверху на срок эксплуатации автомобиля, т.е. если автомобиль куплен в момент , то он заменяется на новый не позже, чем в момент времени ;

- стоимость нового автомобиля в начале *i-*го года, точнее, в начале *i-*го единичного отрезка времени;

- эксплуатационные расходы в течение *k*-го года;

 - ликвидационная стоимость автомобиля в начале *j*-го года при условии, что он куплен в начале *i*-го года, например, может вычисляться по формуле:

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

 - суммарные затраты на покупку, содержание и ликвидацию автомобиля в случае, если он покупается в начале года *i* и ликвидируется в начале года **; все эти суммарные затраты вычисляются с учетом по формуле

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  |  |

Задача о ЗА состоит в том, чтобы указать такие  лет

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

Замены автомобиля, для которых суммарные за  лет затраты  были бы минимальными. При этом учитывается условие: автомобиль может находиться в эксплуатации не более  лет, т.е. для всякой пары индексов вида  в (19) должно выполняться неравенство

|  |  |
| --- | --- |
| , , , |  |

Математическая модель задачи о ЗА базируется на взвешенном *n*-вершинном ориентированном графе (орграфе) ,, в котором множество дуг  определяется следующим образом: для всякой пары вершин *i, j* дуга *e=(i, j)* включается в множество *Е*  в том, и только в том случае, если выполняются два неравенства *i<j, j-i≤τ.* Если дуга *e=(i,j)∈E,* то ей приписывается вес , который вычисляется согласно.

Всякий простой путь

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

на графе,, определяет собой допустимую последовательность  лет, в которые осуществляется замена автомобиля. При этом, считаем, что первая покупка автомобиля была в начале года . Множество всех простых путей вида (21) есть МДР  задачи о ЗА. На  определена ЦФ . Внутренние вершины  кратчайшего пути

|  |  |
| --- | --- |
| , |  |

определяют собой оптимальные сроки замены автомобиля.

Искомое решение можно найти с помощью алгоритма Дейкстры, который базируется на принципах ДП.

**Задача.**

Пусть автомобиль эксплуатируется =6 лет. Автомобиль работает безотказно =4 года. Зная ежегодную стоимость автомобиля и эксплуатационные расходы, найти оптимальный график замены оборудования при условии минимальных суммарных затрат.

Таблица 1.- Стоимость автомобиля

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| i-год | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|  | 5000 | 5500 | 6050 | 6655 | 7321 | 8053 |

Таблица 2.- Эксплуатационные расходы на автомобиль (10⁒ от стоимости автомобиля)

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| k-год | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|  | 500 | 550 | 605 | 666 | 732 | 805 |

**Решение:**

1. Строим -вершинный граф возможных замен автомобиля



1. Находим ликвидационные расходы в начале *j*-го года при условии, что он куплен в начале *i*-го года по формуле и заносим результаты в таблицу



|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| i\j | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| 1 | 4166 | 3333 | 2500 | 1666 |  |  |
| 2 |  | 4583 | 3666 | 2750 | 1833 |  |
| 3 |  |  | 5042 | 4033 | 3025 | 2017 |
| 4 |  |  |  | 5546 | 4437 | 3328 |
| 5 |  |  |  |  | 6101 | 4881 |
| 6 |  |  |  |  |  | 6711 |

1. Находим суммарные расходы на покупку, содержание и ликвидацию автомобиля в случае, если он покупается в начале года *i* и ликвидируется в начале года по формуле и заносим результаты в таблицу



|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| i\j | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| 1 | 1334 | 2717 | 4155 | 5655 |  |  |
| 2 |  | 1467 | 2989 | 4571 | 6220 |  |
| 3 |  |  | 1613 | 3288 | 5028 | 6841 |
| 4 |  |  |  | 1775 | 3616 | 5530 |
| 5 |  |  |  |  | 1952 | 3977 |
| 6 |  |  |  |  |  | 2147 |

1. На построенный граф наносим вычисленные суммарные затраты в виде веса.
2. Применим алгоритм Дейкстры для нахождения кратчайшего пути



0+1334=1334 1→2



1→3



1→4



1→5



2→6



3→7



Таким образом, оптимальный план замены автомобиля 1→3→7. Купить вначале первого года, продать и купить новый автомобиль вначале третьего года эксплуатации, продать вначале седьмого года.

**3.4 Варианты индивидуальных заданий задачи распределения средств**

**Вариант-1**

Пусть систему  составляют 3 предприятия ; распределение начальных средств усл. ед. представляется целочисленным вектором

|  |  |
| --- | --- |
| , ,, . |  |

Средства , выделенные предприятию  приносят прибыль, равную  и ЦФ (2) имеет вид

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

где значения  определены таблицей 1.

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |
| 1 | 7 | 5 | 4 |
| 2 | 9 | 9 | 5 |
| 3 | 11 | 10 | 7 |
| 4 | 14 | 13 | 11 |

**Вариант-2**

Пусть систему  составляют 3 предприятия ; распределение начальных средств усл. ед. представляется целочисленным вектором

|  |  |
| --- | --- |
| , ,, . |  |

Средства , выделенные предприятию  приносят прибыль, равную  и ЦФ (2) имеет вид

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

где значения  определены таблицей 1.

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |
| 1 | 6 | 4 | 5 |
| 2 | 9 | 9 | 7 |
| 3 | 10 | 11 | 10 |
| 4 | 13 | 15 | 14 |

**Вариант-3**

Пусть систему  составляют 3 предприятия ; распределение начальных средств усл. ед. представляется целочисленным вектором

|  |  |
| --- | --- |
| , ,, . |  |

Средства , выделенные предприятию  приносят прибыль, равную  и ЦФ (2) имеет вид

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

где значения  определены таблицей 1.

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |
| 1 | 2 | 5 | 3 |
| 2 | 6 | 8 | 4 |
| 3 | 9 | 10 | 7 |
| 4 | 16 | 15 | 13 |

**Вариант-4**

Пусть систему  составляют 3 предприятия ; распределение начальных средств усл. ед. представляется целочисленным вектором

|  |  |
| --- | --- |
| , ,, . |  |

Средства , выделенные предприятию  приносят прибыль, равную  и ЦФ (2) имеет вид

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

где значения  определены таблицей 1.

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |
| 1 | 5 | 5 | 3 |
| 2 | 9 | 7 | 5 |
| 3 | 11 | 9 | 9 |
| 4 | 14 | 13 | 15 |

**Вариант-5**

Пусть систему  составляют 3 предприятия ; распределение начальных средств усл. ед. представляется целочисленным вектором

|  |  |
| --- | --- |
| , ,, . |  |

Средства , выделенные предприятию  приносят прибыль, равную  и ЦФ (2) имеет вид

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

где значения  определены таблицей 1.

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |
| 1 | 6 | 5 | 5 |
| 2 | 9 | 8 | 7 |
| 3 | 12 | 11 | 10 |
| 4 | 13 | 15 | 14 |

**Вариант-6**

Пусть систему  составляют 3 предприятия ; распределение начальных средств усл. ед. представляется целочисленным вектором

|  |  |
| --- | --- |
| , ,, . |  |

Средства , выделенные предприятию  приносят прибыль, равную  и ЦФ (2) имеет вид

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

где значения  определены таблицей 1.

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |
| 1 | 2 | 5 | 3 |
| 2 | 6 | 8 | 4 |
| 3 | 9 | 10 | 7 |
| 4 | 16 | 15 | 13 |

**Вариант-7**

Пусть систему  составляют 3 предприятия ; распределение начальных средств усл. ед. представляется целочисленным вектором

|  |  |
| --- | --- |
| , ,, . |  |

Средства , выделенные предприятию  приносят прибыль, равную  и ЦФ (2) имеет вид

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

где значения  определены таблицей 1.

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |
| 1 | 7 | 5 | 4 |
| 2 | 8 | 8 | 5 |
| 3 | 11 | 11 | 7 |
| 4 | 14 | 13 | 13 |

**Вариант-8**

Пусть систему  составляют 3 предприятия ; распределение начальных средств усл. ед. представляется целочисленным вектором

|  |  |
| --- | --- |
| , ,, . |  |

Средства , выделенные предприятию  приносят прибыль, равную  и ЦФ (2) имеет вид

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

где значения  определены таблицей 1.

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |
| 1 | 6 | 3 | 5 |
| 2 | 7 | 9 | 7 |
| 3 | 11 | 13 | 9 |
| 4 | 13 | 15 | 14 |

**Вариант-9**

Пусть систему  составляют 3 предприятия ; распределение начальных средств усл. ед. представляется целочисленным вектором

|  |  |
| --- | --- |
| , ,, . |  |

Средства , выделенные предприятию  приносят прибыль, равную  и ЦФ (2) имеет вид

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

где значения  определены таблицей 1.

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |
| 1 | 2 | 5 | 3 |
| 2 | 6 | 8 | 4 |
| 3 | 9 | 10 | 7 |
| 4 | 16 | 15 | 13 |

**Вариант-10**

Пусть систему  составляют 3 предприятия ; распределение начальных средств усл. ед. представляется целочисленным вектором

|  |  |
| --- | --- |
| , ,, . |  |

Средства , выделенные предприятию  приносят прибыль, равную  и ЦФ (2) имеет вид

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

где значения  определены таблицей 1.

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |
| 1 | 9 | 5 | 5 |
| 2 | 12 | 11 | 12 |
| 3 | 16 | 13 | 13 |
| 4 | 18 | 17 | 18 |

**3.5 Варианты индивидуальных заданий задачи замены автомобиля**

**Вариант-1**

Построить ориентированный граф и найти оптимальный план покупки и замены старого автомобиля, если 

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|  | 4 | 5 | 7 | 6 | 8 | 8 | 9 |
|  | 0.4 | 0.5 | 0.7 | 0.6 | 0.8 | 0.8 | 0.9 |

**Вариант-2**

Построить ориентированный граф и найти оптимальный план покупки и замены старого автомобиля, если 

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|  | 3 | 5 | 6 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|  | 0.3 | 0.5 | 0.6 | 0.6 | 0.7 | 0.8 | 0.9 |

**Вариант-3**

Построить ориентированный граф и найти оптимальный план покупки и замены старого автомобиля, если 

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|  | 3 | 4 | 6 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|  | 0.3 | 0.4 | 0.6 | 0.6 | 0.7 | 0.8 | 0.9 |

**Вариант-4**

Построить ориентированный граф и найти оптимальный план покупки и замены старого автомобиля, если 

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|  | 1 | 3 | 4 | 6 | 7 | 8 |
|  | 0.1 | 0.3 | 0.4 | 0.6 | 0.7 | 0.8 |

**Вариант-5**

Построить ориентированный граф и найти оптимальный план покупки и замены старого автомобиля, если 

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|  | 1 | 3 | 7 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|  | 0.1 | 0.3 | 0.7 | 0.6 | 0.7 | 0.8 | 0.9 |

**Вариант-6**

Построить ориентированный граф и найти оптимальный план покупки и замены старого автомобиля, если 

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|  | 4 | 6 | 7 | 7 | 8 | 9 |
|  | 0.4 | 0.6 | 0.7 | 0.7 | 0.8 | 0.9 |

**Вариант-7**

Построить ориентированный граф и найти оптимальный план покупки и замены старого автомобиля, если 

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|  | 4 | 5 | 7 | 6 | 8 | 8 |
|  | 0.4 | 0.5 | 0.7 | 0.6 | 0.8 | 0.8 |

**Вариант-8**

Построить ориентированный граф и найти оптимальный план покупки и замены старого автомобиля, если 

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|  | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 9 |
|  | 0.2 | 0.3 | 0.4 | 0.5 | 0.6 | 0.6 | 0.9 |

**Вариант-9**

Построить ориентированный граф и найти оптимальный план покупки и замены старого автомобиля, если 

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|  | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 8 |
|  | 0.2 | 0.3 | 0.4 | 0.5 | 0.6 | 0.8 |

**Вариант-10**

Построить ориентированный граф и найти оптимальный план покупки и замены старого автомобиля, если 

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|  | 3 | 5 | 6 | 6 | 7 | 8 |
|  | 0.3 | 0.5 | 0.6 | 0.6 | 0.7 | 0.8 |

**4 Теория игр**

**4.1 Решение игры в чистых стратегиях**

Рассмотрим игру "Городок". Пусть в нашем распоряжении имеется три способа попадания в фигуру: у противника - три типа фигур: . Наша цель - попасть в фигуру, цель противника - сохранить фигуру целой. В заданной платежной матрицы элемент означает вероятность попадания способом в фигуру . Мы стремимся максимизировать выигрыш, т.е. вероятность попадания в фигуру, противник - минимизировать этот выигрыш.

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  | В1 | В2 | В3 |
| А1 | 0,2 | 0,3 | 0,5 |
| А2 | 0,6 | 0,4 | 0,5 |
| А3 | 0,4 | 0,2 | 0,3 |



Рассмотрим, как будет действовать игрок и переберем все его стратегии. На противник нам ответит, конечно, и мы выиграем 0,2; на и мы выиграем 0,4; на - снова и выигрываем 0,2. Заметно, что некоторое преимущество над другими имеет стратегия -при ней нам гарантирован наибольший выигрыш - 0,4.



Станем теперь на точку зрения противника. Пусть он выберет - мы ответим ему стратегией и он отдаст 0,6; на - ответим и он отдаст 0,4; на и он отдаст 0,5. Поскольку он хочет отдать поменьше, то, естественно, предпочтет *В2*, чтобы отдать только 0,4.



Видим, что в данном примере стратеги и с выигрышем 0,4 являются наивыгоднейшими сразу для обеих сторон. Выбором соответственно стратегией и как бы достигается положение равновесия, то есть максимальный выигрыш как бы совпадает с минимальным проигрышем . Можно указать такие стратегии и , что если выберет , то не может найти лучшего выхода, чем , и наоборот, если выберет стратегию , то а не может найти лучшего выхода, чем . В нашем примере , . Из платежной матрицы получаем: .Здесь минимаксные стратегии являются устойчивыми: если один из игроков придерживается своей минимаксной (максиминной) стратегии, то другой игрок никак не может улучшить свое положение, отступая от своей. Таким образом, существуют игры, для которых нижняя цена игры равна верхней: , т.е. в матрице существует элемент, являющийся одновременно минимальным в своей строке и максимальным в своем столбце. Такой элемент называется седловой точкой, а общее значение нижней и верхней цены игры называется чистой ценой игры.



Седловая точка определяется парой минимаксных стратегий , , которые называются оптимальными, а их совокупность – решением игры.



**4.2 Решение игр в смешанных стратегиях**

Рассмотрим второй случай, когда игра седловой точки не имеет и при этом нижняя цена игры не равна верхней: .Решение игры, т.е. пара оптимальных смешанных стратегий находится следующим образом.



Поскольку по условию здесь седловой точки нет, то обе стратегии противника являются активными.

Согласно теореме об активных стратегиях, если мы будем придерживаться своего оптимума , то независимо от образа действий противника выигрыш будет оставаться равным цене игры . Значит, противник может, не меняя выигрыша, применить любую из своих чистых стратегий, откуда получим два уравнения:



Из этого с учетом условия *р1+р2=1* получим , . Цену игры найдем, подставляя значения в любое из уравнений системы: .



Аналогично находим оптимальную стратегию стороны . Из уравнений: получим



Опишем графический метод решения. Пусть имеется игра *2*×*2* с матрицей , *i,j=1,2.*



На оси абсцисс рассмотрим отрезок [0,1]. Точке 0 припишем стратегию А1, точке 1 – стратегию А2. Всякой точке взаимооднозначно соответствует смешанная стратегия , где , .













Перпендикулярно к абсциссе в точках *А1*и *А2* проведем оси I-I и II-II. На оси I-I отложим выигрыш стратегии *А1: а11* и *а12*, на оси II-II – выигрыши стратегии *А2: а21* и *а22*.

Пусть противник применяет стратегию *В1*. Она дает при *р1=1* на оси I-I точку а11, при *р2=1* – на оси II-II точку *а21*. Очевидно, при любой смешанной стратегии наш выигрыш выразится точкой N на прямой В1В1, соответствующей точке на оси абсцисс, делящей отрезок в отношении .



Аналогичным образом строим прямую *В2В2*, представляющую все исходы игры при применении противником только стратегии *В2*. По построению ломаной *В1NВ2* (отмеченной жирной линией) есть нижняя граница нашего выигрыша при стратегии противника *В1, В2*, т.е. на этой границе лежит минимальный выигрыш игрока *А* при любой его смешанной стратегии. Точка *N*, в которой этот выигрыш достигает максимума, определяет решение и цену игры .



**4.3 Варианты индивидуальных заданий**

**Вариант № 1**

1. Найти седловую точку;
2. Решить игру аналитически;
3. Решить игру графически.

1. ; 2. ; 3. .



**Вариант № 2**

1. Найти седловую точку;

1. Решить игру аналитически;
2. Решить игру графически.

1. ; 2. ; 3. .



**Вариант № 3**

1. Найти седловую точку;
2. Решить игру аналитически;
3. Решить игру графически.

1. ; 2. ; 3. .



**Вариант № 4**

1. Найти седловую точку;
2. Решить игру аналитически;
3. Решить игру графически.

1. ; 2. ; 3. .



**Вариант № 5**

1. Найти седловую точку;
2. Решить игру аналитически;
3. Решить игру графически.

1. ; 2. ; 3. .



**Вариант № 6**

1. Найти седловую точку;
2. Решить игру аналитически;
3. Решить игру графически.

1. ; 2. ; 3. .



**Вариант № 7**

1. Найти седловую точку;
2. Решить игру аналитически;
3. Решить игру графически.

1.  ; 2.  ; 3. .

**Вариант № 8**

1. Найти седловую точку;

1. Решить игру аналитически;
2. Решить игру графически.

1.  ; 2.  ; 3. .

**Вариант № 9**

1. Найти седловую точку;
2. Решить игру аналитически;
3. Решить игру графически.

1.  ; 2.  ; 3. .

**Вариант № 10**

1. Найти седловую точку;
2. Решить игру аналитически;
3. Решить игру графически.

1.  ; 2.  ; 3. .

**5 Сетевое планирование и управление**

**5.1 Вычислительные схемы сетевого планирования и управления**

***Алгоритм правильной нумерации событий сети***

Сетевое моделирование обычно начинается с получения так называемой правильной нумерации событий сети , .



Нумерация вершин множества V называется правильной, если для всякой дуги номера ее начальной вершины *i* и ее конечной вершины *j* удовлетворяют неравенству .



Алгоритм правильной нумерации обозначим через . Он состоит из следующих друг за другом этапов, каждый из которых, в свою очередь, состоит из отдельных шагов.



Присваивая очередной вершине «правильный» номер, условимся называть ее помеченной.

Этап 1 алгоритма присваивает номер *i=1*  начальному событию данного сетевого графика. Этап 1 заканчивает свою работу вычеркиванием помеченной вершины *i=1*, а также всех дуг, которые из нее исходят. Полученный граф обозначим через .



Пусть по завершению очередного этапа s получен непустой граф , у которого число вершин . Пусть также на этапе s вычеркнуты из предшествующего графа ks штук вершин, которым перед их вычеркиванием присвоены номера . Если граф содержит ks+1 начальных вершин, то на этапе (s+1) им в произвольном порядке присваиваются номера . Этап (s+1) заканчивается тем, что из вычеркиваются как помеченные вершины, так и дуги, которые исходят из этих вершин. Полученный граф обозначаем через .



Если число его вершин , то единственной вершине присваиваем номер n и алгоритм заканчивает свою работу.



Если же число вершин , то следует переход к этапу s+2. Этап s>2 повторяет работу этапа s=1 с той лишь разницей, что применяется к подграфу .



Описанный выше процесс поэтапной и пошаговой нумерации вершин данного графа продолжается до тех пор, когда представляющей конечное событие вершине графа G будет приписан номер .



Примечание 1. В процессе назначения событиям-вершинам данной сети, т.е. данного СГ «правильных номеров» осуществляется проверка корректности СГ. Всякий СГ должен удовлетворять следующим условиям:

1. в сети не должно быть событий (кроме исходного), в которые не входит ни одна дуга.
2. в сети не должно быть событий (кроме завершающего), из которых не выходит ни одной дуги.
3. Сеть не должна содержать контуров.
4. Любая пара событий (вершин) должна быть соединена не более, чем одной дугой, т.е. в СГ не должно быть кратных дуг.

***Построение СГ для данного списка работ***

Построение данного СГ начинается конкретно с составления списка работ (операций), подлежащих выполнению в рамках моделируемого проекта. Последовательность и обозначение работ в списке произвольная. Чаще всего работы обозначаются или нумеруются в соответствии с последовательностью их записи в списке. При этом каждая строка списка представляет собой запись следующего вида: сначала пишется наименование работы, далее следует перечень тех работ непосредственно после завершения которых может выполнятся данная работа. При этом принять говорить, что данная работа опирается на следующие работы.



Построить СГ выполнения комплекса работ по реконструкции цеха. Список работ представлен таблицей.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Работа | Наименование работы | Опирается на работы |
| Е1 | Подготовительные работы | - |
| Е2 | Демонтаж старого оборудования | - |
| Е3 | Ремонтные строительно-монтажные работы | Е1 |
| Е4 | Подготовка фундамента под новое оборудование | Е1 Е2 |
| Е5 | Подготовка к монтажу нового оборудования | Е1 |
| Е6 | Электротехнические работы | Е1 |
| Е7 | Монтаж нового оборудования | Е4 Е5 |
| Е8 | Подключение оборудования к электросети | Е6 Е7 |
| Е9 | Наладка и технологические испытания оборудования | Е8 |
| Е10 | Отделочные работы | Е3 Е6 Е7 |
| Е11 | Приемка цеха в эксплуатацию | Е9 Е10 |

***Алгоритм нахождения критического пути СГ***

Пусть сетевой график с правильной нумерацией вершин-событий , где 1 – номер начальной вершины, - номер конечной вершины. Каждой дуге приписан вес , означающий длительность соответствующей работы . Введем обозначения:



- множество всех таких вершин, из которых исходят дуги в вершину k;



- множество всех таких вершин, в которые исходят дуги из вершины k;



- минимальное или наиболее раннее время свершения события k из V, при условии, что время наступления начального события ;



- максимальное или наиболее позднее время свершения события k из V. Заметим, что для СГ с правильной нумерацией вершин для начального и конечного событий всегда выполняются соотношения: , , .



Значения вычисляются в порядке возрастания (убывания) индекса k по формулам: , .



Условимся через обозначать критический путь данного СГ, т.е. путь от1 до n, имеющий наибольшую сумму продолжительностей работ, ему принадлежащих. Работы и события, принадлежащие называются соответственно критическими работами и критическими событиями. Критическое время .



Для данного СГ событие является критическим тогда и только тогда, когда . Дуга является критической только в том случае, когда инцидентные ей вершины-события являются критическими. Путь от 1 до n является критическим только тогда, когда он состоит из критических дуг.



**Пример.**

Найти критический путь для сетевого графика, изображенного на рисунке.

3

6

2

1

7

3

2

9

2

3

Для каждой вершины-события найдем .



Критическими событиями () являются 1, 3, 4, 6. Дуги, соединяющие критические события есть критические работы. Следовательно, критический путь , на рисунке выделено жирной линией, с критическим временем 16.



**5.2 Варианты индивидуальных заданий**

**Вариант №1,2**

Построить сетевой граф по данному списку работ:

|  |  |
| --- | --- |
| работа | Ей предшествует |
| *е1* | - |
| *е2* | - |
| *е3* | - |
| *е4* | *е1* |
| *е5* | *е1* |
| *е6* | *е2 е4 е7* |
| *е7* | *е5 е3* |
| *е8* | *е5 е3* |
| *е9* | *е5 е3* |
| *е10* | *е9* |

**Вариант №3,4**

Построить сетевой граф по данному списку работ:

|  |  |
| --- | --- |
| работа | Ей предшествует |
| *е1* | - |
| *е2* | - |
| *е3* | *е1  е6* |
| *е4* | *е2* |
| *е5* | е2 |
| *е6* | *е5* |
| *е7* | *е5* |
| *е8* | *е5* |
| *е9* | *е8* |

**Вариант №5,6,7**

Построить сетевой граф по данному списку работ:

|  |  |
| --- | --- |
| работа | Ей предшествует |
| *е1* | - |
| *е2* | - |
| *е3* | е1 |
| *е4* | *е1* |
| *е5* | *е2* е4 |
| *е6* | *е2 е4* |
| *е7* | *е5 е8* |
| *е8* | *е6 е3* |
| *е9* | *е6 е3* |

**Вариант №8,9,10**

Построить сетевой граф по данному списку работ:

|  |  |
| --- | --- |
| работа | Ей предшествует |
| *е1* | - |
| *е2* | - |
| *е3* | - |
| *е4* | *е1* |
| *е5* | *е1* |
| *е6* | *е3* |
| *е7* | *е4 е2* |
| *е8* | *е4 е2* |
| *е9* | *е5 е6 е8* |

а) Применить алгоритм правильной нумерации вершин

б) Найти критический путь

**Вариант №1**

4

3

8

4

6

2

3

5

1

1

**Вариант №2**

6

5

1

1

3

4

3

5

1

2

**Вариант №3**

3

4

3

2

2

1

8

3

4

2

2

**Вариант – 4**

6

3

2

1

4

8

2

1

3

**Вариант–5.**

9

6

8

7

5

9

8

7

6

4

**Вариант–6.**

10

4

77

3

5

4

9

3

6

8

7

**Вариант–7**

4

3

27

10

8

9

7

9

10

6

5

**Вариант–8**

5

6

67

4

3

5

4

4

7

**Вариант–9**

7

4

67

7

8

5

6

9

7

5

**Вариант–10**

8

3

7

8

5

7

8

8

6

7

2

**Список использованных источников и литературы**

1. Исследование операций [Электронный ресурс]: учебное пособие (практикум)/. — Электрон. текстовые данные. — Ставрополь: Северо-Кавказский федеральный университет, 2015. — 178 c. — 2227-8397. — Режим доступа: http://www.iprbookshop.ru/63239.html
2. Ловянников, Д.Г. Исследование операций [Электронный ресурс]: учебное пособие/ Д.Г. Ловянников, И.Ю. Глазкова. — Электрон. текстовые данные. — Ставрополь: Северо-Кавказский федеральный университет, 2017. — 110 c. — 2227-8397. — Режим доступа: http://www.iprbookshop.ru/69386.html
3. Минько, Э.В. Методы прогнозирования и исследования операций [Электронный ресурс]: учебное пособие/ Э.В. Минько, А.Э. Минько. — Электрон. текстовые данные. — Саратов: Ай Пи Эр Медиа, 2017. — 316 c. — 978-5-4486-0035-7. — Режим доступа: http://www.iprbookshop.ru/70613.html
4. Сеславин, А.И. Исследование операций и методы оптимизации [Электронный ресурс]: учебное пособие/ А.И. Сеславин, Е.А. Сеславина. — Электрон. текстовые данные. — М.: Учебно-методический центр по образованию на железнодорожном транспорте, 2015. — 200 c. — 978-5-89035-827-1. — Режим доступа: http://www.iprbookshop.ru/45261.html
5. Стронгин, Р.Г. Исследование операций. Модели экономического поведения [Электронный ресурс]/ Р.Г. Стронгин. — Электрон. текстовые данные. — М.: Интернет-Университет Информационных Технологий (ИНТУИТ), 2016. — 245 c. — 978-5-94774-547-4. — Режим доступа: <http://www.iprbookshop.ru/52203.html>
6. Васин, А.А. Исследование операций [Текст]: учеб. пособие для студ. вузов/ А.А. Васин, П.С. Краснощеков, В.В. Морозов.- М.: Академия, 2008.- 464 с.
7. Вентцель, Е.С. Исследование операций. Задачи, принципы, методология [Текст]: учеб. пособие для вузов/ Е.С. Вентцель.- 2-е изд., стер.- М.: Высш.шк., 2001.- 208 с.
8. Конюховский, П.В. Математические методы исследования операций [Текст]/ П.В. Конюховский.- СПб.: Питер, 2001.- 192 с.

ШАПОШНИКОВА Ольга Ивановна

ТЕМИРОВА Лилия Гумаровна

**ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ**

Практикум для обучающихся3 курса направления подготовки

01.03.04Прикладная математика

Корректор Чагова О.Х.

Редактор Чагова О.Х.

Сдано в набор 17.06.2021г.

Формат 60х84/16

Бумага офсетная

Печать офсетная

Усл. печ. л. 2,55

Заказ № 4416

Тираж 100 экз.

Оригинал-макет подготовлен

в Библиотечно-издательском центре СКГА

369000, г. Черкесск, ул. Ставропольская, 36