МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

СЕВЕРО-КАВКАЗСКАЯ ГОСУДАРСТВЕННАЯ АКАДЕМИЯ

О. И. Шапошникова

ДИСКРЕТНАЯ МАТЕМАТИКА

Учебно-методическое пособие для обучающихся I курса направления подготовки 01.03.02 Прикладная математика и информатика

Черкесск
2024

УДК 519.1
ББК 22.176
Ш 23

Рассмотрено на заседании кафедры «Математика».
Протокол № 1 от «31» 08. 2023 г.
Рекомендовано к изданию редакционно-издательским советом СКГА.
Протокол № 26 от «29» 09. 2023 г.

Рецензенты:
Темирова Л. Г. – к. ф.-м. н., доцент кафедры «Математика»

Ш23 **Шапошникова, О. И.** Дискретная математика: учебно-методическое пособие по выполнению практических работ для обучающихся I курса направления подготовки 01.03.02 Прикладная математика и информатика. / О. И. Шапошникова. – Черкесск: БИЦ СКГА, 2024. –40 с.

Настоящее пособие возникло как результат проведения практических занятий по дисциплине «Дискретная математика». Пособие охватывает такие разделы дискретной математики как комбинаторика, теория графов, рекуррентные соотношения. Каждый раздел снабжен кратким теоретическим материалом, задачами для практических занятий разного уровня сложности и задачами для самостоятельного решения. К каждому разделу есть лабораторная работа по 10 вариантов.

УДК 519.1
ББК 22.176

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Традиционно к дискретной математике относят такие области знаний, как комбинаторика, теория чисел, общая алгебра, математическая логика, комбинаторный анализ, теория графов, теория кодирования, целочисленное программирование, теория автоматов и пр. Дискретная математика всегда была очень динамичной областью, т.к. она непосредственно связана с различными прикладными науками.

Наиболее значимой областью применения методов дискретной математики является область компьютерных технологий. При всех своих огромных возможностях компьютер может работать только с конечным множеством объектов, причем на этом множестве должно быть определено отношение порядка. Потребности программирования определяют развитие «стыка» информатики и математики. Эта область знаний не исчерпывается дискретной математикой, однако, она является характерной, основополагающей.

Дискретная математика и примыкающие к ней дисциплины изучаются во всех университетах, где осуществляется подготовка специалистов в областях программирования, математики, экономики, а также по техническим и гуманитарным дисциплинам.

Учебно-методическое пособие состоит из 4 разделов.

В первом разделе рассмотрены основные принципы комбинаторики, алгоритмы формирования выборок, размещений и сочетаний. Рассмотрен бином Ньютона в качестве коэффициентов которого используются сочетания. Приведены примеры доказательства комбинаторных тождеств.

Во втором разделе рассмотрены линейные рекуррентные соотношения, как пример – числа Фибоначчи, а также методы исчисления конечных сумм при помощи производящих функций.

Третий раздел посвящен теории графов. Приведены основные понятия теории графов, определение дерева, формулы подсчета числа остовных деревьев как в полном графе, так и не полном. Приведены алгоритмы построения минимального остова.

В конце каждого раздела приведены задачи различного уровня сложности, а также задачи для самостоятельного решения.

Четвертый раздел это лабораторные работы, по темам разделов. В каждой работе 10 вариантов. Студент должен самостоятельно решить задачи и произвести расчеты.

РАЗДЕЛ 1. КОМБИНАТОРИКА

1.1. Сочетания, размещения и перестановки

В комбинаторном анализе рассматриваются задачи о расположениях элементов в соответствии с точно определенными требованиями и выясняется, сколькими различными вариантами такие расположения могут быть осуществлены. При этом необходимо однозначно определить, какие решения считаются различными.

При подсчете числа различных комбинаций используются следующие два общих правила:

1. *Правило произведения.* Если объект A_1 может быть выбран n_1 способами и после каждого из таких выборов объект A_2 в свою очередь может быть выбран n_2 способами (независимо от выбора объекта A_1), то выбор « A_1 и A_2 » в указанном порядке может быть осуществлен $n_1 \cdot n_2$ способами.

2. *Правило суммы.* Если объект A_1 может быть выбран n_1 способами, а объект A_2 может быть выбран другими n_2 способами, то выбор « A_1 или A_2 » может быть осуществлен $n_1 + n_2$ способами.

Одними из основных средств для подсчета числа решений комбинаторных задач являются выборки, к которым относятся размещения, сочетания и перестановки.

Рассмотрим множество $A = \{a_i\},\ i = 1,..., n$.

Определение. Набор элементов $a_{i_1}, a_{i_2},..., a_{i_k}$ из A называется выборкой объема k из n элементов или (n, k) – выборкой.

Выборки могут отличаться друг от друга как составом, так и порядком расположения элементов.

Выборка называется упорядоченной, если порядок элементов в ней задан.

Если порядок следования элементов не является существенным, то выборка называется неупорядоченной.

В выборке могут допускаться или не допускаться повторения элементов.

Положим n=3, k=2 и рассмотрим множество $A = \{1,2,3\}$, представим для него все случаи (3,2)-выборок.

(1) неупорядоченные без повторения (1,2) ; (1,3); (2,3);

(2) неупорядоченные с повторениями (1,1); (1,2); (2,2); (1,3); (3,3); (2,3);

(3) упорядоченные без повторений (1,2); (2,1); (1,3); (3,1); (2,3); (3,2);

(4) упорядоченные с повторениями

(1,2); (2,1); (1,3); (3,1); (2,3); (3,2); (1,1); (2,2); (3,3);

Определение 2. Упорядоченная (n, k) – выборка без повторений называется размещением из n элементов по k или кратко (n, k) – размещением.

Определение 3. Упорядоченная (n, k) – выборка с повторениями называется размещением с повторениями из n элементов по k или кратко (n, k) – размещением с повторениями.

Определение 4. Неупорядоченная (n, k) – выборка без повторений называется сочетанием из n элементов по k или кратко (n, k) – сочетанием.

Определение 5. Неупорядоченная (n, k) – выборка с повторениями называется сочетанием с повторениями из n элементов по k или кратко (n, k) – сочетанием с повторениями.

Определение 6. Если n=k, то (n, n) – размещение называется перестановкой n элементов.

Число всех *(n, k)* – размещений обозначается символом P_n^k или $P(n,k)$ и вычисляется по формуле $P_n^k = \dfrac{n!}{(n-k)!} = n(n-1)\ldots(n-k+1)$.

Действительно, размещение k элементов можно представить как заполнение некоторых k позиций элементами множества A. При этом первую позицию можно заполнить n различными способами. После того как 1-я позиция заполнена, элемент для заполнения 2-й позиции можно выбрать *(n-1)* способами. Если продолжить этот процесс, то после заполнения позиций с 1-й по *(k -1)*-ю будем иметь *(n-k+1)* способов заполнения последней, k-й позиции. Перемножая эти числа, получим формулу $P_n^k = \dfrac{n!}{(n-k)!} = n(n-1)\ldots(n-k+1)$.

Число всех *(n, k)* – размещений с повторениями обозначается символом $\hat{P}_n^k$ или $\hat{P}(n,k)$ и вычисляется по формуле $\hat{P}_n^k = n^k$.

Действительно, размещение k элементов можно представить как заполнение некоторых k позиций элементами множества A. При этом первую позицию можно заполнить n различными способами. После того как 1-я позиция заполнена, элемент для заполнения 2-й позиции можно выбрать тоже n способами. Если продолжить этот процесс, то для заполнения последней, k-й позиции будем иметь тоже n способов. Перемножая эти числа, получим формулу $\hat{P}_n^k = n^k$.

Число всех перестановок n элементов обозначается символом P_n или P(n,n) и вычисляется по формуле $P_n = n!$.

Действительно, $P_n = P_n^n = \dfrac{n!}{(n-n)!} = n(n-1)(n-2)\ldots 3\cdot 2\cdot 1 = n!$.

Число всех *(n, k)* – сочетаний обозначается символом C_n^k или $C(n,k)$ и вычисляется по формуле $C_n^k = \dfrac{n!}{(n-k)!k!}$.

В каждом из C_n^k сочетаний имеется k различных элементов, поэтому на базе каждого сочетания можно получить P_k перестановок. Совокупность всех выборок, полученных путем построения всех перестановок на базе каждого из C_n^k сочетаний, представляет собой число размещений P_n^k, т.е. $C_n^k \cdot P_k = P_n^k$ откуда $C_n^k = \dfrac{n!}{(n-k)!k!}$.

Число всех *(n, k)* – сочетаний с повторениями обозначается символом $\hat{C}_n^k$ или $\hat{C}(n,k)$ и вычисляется по формуле $\hat{C}_n^k = C_{n+k-1}^{n-1} = \dfrac{(n+k-1)!}{k!(n-1)!}$.

Число перестановок любого мультимножества (множества с повторениями элементов) или перестановок с повторениями равно полиномиальному коэффициенту:

$$P(n;n_1,n_2,..n_k) = \frac{n!}{n_1!\cdot n_2!\cdot\ldots\cdot n_k!}.$$

Перестановки с повторениями имеют тесную связь с сочетаниями. Определим их количество: из всех n элементов перестановки n_1 место занимают элементы первого типа. Выбор мест для них можно сделать из $C_n^{n_1}$ способами. Из оставшихся $n-n_1$ мест элементы второго типа занимают n_2 место, которое можно выбрать $C_{n-n_1}^{n_2}$ способами…

Согласно правилу прямого произведения, число перестановок с повторениями равно:

$$P(n;n_1,n_2,..n_k) = C_n^{n_1}\cdot C_{n-n_1}^{n_2}\cdot C_{n-n_1-n_2}^{n_3}\cdot\ldots\cdot C_{n-n_1-\ldots-n_{k-1}}^{n_k} = \frac{n!}{n_1!\cdot n_2!\cdot\ldots\cdot n_k!}$$

Пример. Сколько различных четырехзначных чисел можно образовать из цифр 1, 2, …, 9, если все цифры в каждом четырехзначном числе различны?

$P_n^k = \dfrac{n!}{(n-k)!}$, n=9, k=4. $P_9^4 = \dfrac{9!}{(9-4)!} = \dfrac{9!}{5!} = 6\cdot 7\cdot 8\cdot 9 = 3024$.

Пример 2. На тренировках занимаются 12 баскетболистов. Сколько может быть образовано тренером разных стартовых пятерок?

$C_n^k = \dfrac{n!}{(n-k)!k!}$, n=12, k=5. $C_{12}^5 = \dfrac{12!}{(12-5)!5!} = \dfrac{12!}{7!5!} = 792$.

Пример 3. Сколько различных наборов по 8 пирожных в каждом можно составить используя 4 сорта пирожных?

$\hat{C}_n^k = C_{n+k-1}^{n-1} = \dfrac{(n+k-1)!}{k!(n-1)!}$, n=4, k=8. $\hat{C}_4^8 = C_{4+8-1}^{4-1} = \dfrac{(4+8-1)!}{8!(4-1)!} = \dfrac{11!}{3!8!} = 165$.

Пример 4. Буквы азбуки Морзе образуются как последовательность точек и тире. Сколько различных букв можно образовать, если использовать 5 символов?

$\hat{P}_n^k = n^k$, n=2, k=5. $\hat{P}_2^5 = 2^5 = 32$.

Пример 5. Семь девушек водят хоровод. Сколькими различными способами они могут встать в круг?

$P_n = n!$ n=7. $P_7 = 7! = 5040$

Пример 6. Для полета на Марс необходимо укомплектовать следующий экипаж космического корабля: командир, первый его помощник, второй помощник, два бортинженера и один врач. Командующая тройка может быть отобрана из числа 25 готовящихся к полету летчиков, два бортинженера – из числа 20 специалистов, врач – из числа 8 медиков. Сколькими способами можно укомплектовать экипаж?

Решение: командующая тройка - P_{25}^3 т.к. важен порядок, у бортинженеров обязанности одинаковые - C_{20}^2, врач - C_8^1. Весь экипаж - P_{25}^3 и C_{20}^2 и C_8^1, что соответствует $P_{25}^3 \cdot C_{20}^2 \cdot C_8^1 = 20976000$ способами.

Пример 7. Сколько существует различных телефонных номеров, если считать, что каждый номер содержит не более семи цифр (телефонный номер может начинаться с 0)?

Решение:

$$P_{10}^1 + P_{10}^2 + P_{10}^3 + \ldots + P_{10}^7 = 10 + 10^2 + 10^3 + \ldots + 10^7 = \frac{10(1-10^7)}{1-10} = \frac{10(10^7-1)}{9}.$$

Воспользовались формулой суммы геометрической прогрессии при q>1: $S_n = \dfrac{b_1(1-q^n)}{1-q}$.

Пример 8. Сколько существует различных перестановок из букв слова «уссури»?

$$P(6;2_у,2_с,1_р,1_и) = \frac{6!}{2!\cdot 2!\cdot 1!\cdot 1!} = 180.$$

1.2. Бином Ньютона

Биномом называется какой-либо двучлен, например, x+y или a-b. Возведение двучлена в степень n производится по формуле бинома Ньютона:

$$\left(a+b\right)^n = a^n + C_n^1 a^{n-1} b + \ldots + C_n^k a^{n-k} b^k + \ldots + b^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-k} b^k \qquad (1)$$

$$\left(a-b\right)^n = a^n - C_n^1 a^{n-1} b + \ldots + (-1)^k C_n^k a^{n-k} b^k + \ldots + (-1)^n b^n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k C_n^k a^{n-k} b^k \quad (2)$$

Например,

$$\left(a+b\right)^4 = a^4 + 4a^3 b + 6a^2 b^2 + 4ab^3 + b^4,$$

$$\left(a+b\right)^5 = a^5 + 5a^4 b + 10a^3 b^2 + 10a^2 b^3 + 5ab^4 + b^5.$$

Главные свойства формулы бинома Ньютона:

1. Число членов разложения (1) или (2) равно n+1.
2. Сумма показателей у ab в каждом члене разложения равна n.
3. Биномиальные коэффициенты, равноотстоящие от концов разложения, равны между собой, т.е. $C_n^k = C_n^{n-k}$ для всякого $k = \overline{0,n}$.

4. Сумма биномиальных коэффициентов, стоящих на четных местах, равна сумме биномиальных коэффициентов, стоящих на нечетных местах. Отсюда справедливо равенство $1 - C_n^1 + C_n^2 - \ldots + (-1)^k C_n^k + \ldots + (-1)^n C_n^n = 0$.

В комбинаторике наиболее часто используются следующие свойства биномиальных коэффициентов:

1. Значение C_n^k возрастает по *n* при фиксированном *k*, а значение C_{n-r}^{k-r} убывает по *r* при фиксированных *n* и *k*.

2. Если *n* фиксировано, то C_n^k возрастает по *k* при $k \le \left[\frac{n}{2}\right]$ и убывает при $k > \left]\frac{n}{2}\right[$, откуда $\max\limits_{0 \le k \le n} C_n^k = \binom{n}{n/2}$.

3. Если *n* простое число, то для всякого $k \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$ число C_n^k кратно *n*.

Задачи

1. Выписать все возможные выборки из 5 по 2.
2. Выписать все возможные выборки из 5 по 3.
3. Выписать все возможные выборки из 5 по 4.
4. Сколькими способами можно расставить на полке 10 различных книг?
5. В турнире принимают участие 8 команд. Сколько различных предсказаний относительно распределения первых трех мест можно сделать?
6. Сколько различных трех буквенных слов можно составить из 32 букв алфавита, не обращая внимание на то, имеют ли смысл эти слова?
7. В числовом лото надо выбрать 5 из 90. Сколько существует способов?
8. Из 15 солдат надо 3 отправить в разведку. Сколько способов для выбора?
9. На плоскости дано n точек, расположенных так, что никакие 3 из них не лежат на одной прямой. Сколько прямых можно провести через эти точки?
10. Состоялся шахматный турнир в котором приняли участие несколько шахматистов, причем каждый из них сыграл с остальными по 1 партии. Всего состоялось 45 партий. Сколько человек приняли участие в турнире?
11. Расписание одного дня содержит 5 различных уроков. Определить количество таких расписаний при выборе из 11 дисциплин.
12. Сколькими способами можно выбрать трех дежурных из группы в 20 человек?
13. В вазе стоят 10 красных и 4 розовых гвоздики. Сколькими способами можно выбрать 3 цветка из вазы?
14. Номера трамвайных маршрутов иногда обозначают двумя цветными фонарями. Какое количество различных маршрутов можно обозначить, если использовать фонари 8 цветов?

15. Команда из 5 человек выступает в соревнованиях по плаванию, в которых выступают еще 20 спортсменов. Сколькими способами могут распределиться первые места занятые членами этой команды?

16. Сколько различных десятизначных чисел можно написать используя цифры 0, 1, 2?

17. Сколько существует различных семизначных телефонных номеров?

18. Семь девушек водят хоровод. Сколькими различными способами они могут встать в круг?

19. Группе из пяти сотрудников выделено три путевки. Сколько существует способов распределения путевок, если: а) все путевки различны; б) все путевки одинаковые?

20. 4 спортсмена должны поразить 8 мишеней. Сколькими способами они могут распределить их между собой? (по 2)

21. На полке стоят 30 книг. Сколькими способами можно разместить их, причем 1 и 2 тома не должны стоять рядом; тома 3 и 4 стояли рядом ?

22. В группе из 12 человек нужно выбрать 2 дежурных на 6 дней, причем каждый должен дежурить 1 раз.

23. Чемпионат, в котором участвуют 16 команд, проводится в два круга (т.е. каждая команда дважды встречается с любой другой). Определить какое количество встреч следует провести?

24. Сколько существует различных телефонных номеров если считать, что каждый номер содержит не более семи цифр (телефонный номер может начинаться с 0)?

25. Сколько различных аккордов можно взять на десяти выбранных клавишах рояля, если каждый аккорд содержит от трех до десяти звуков?

26. Собрание из 40 человек избирает председателя, секретаря и 5 членов некоторой комиссии. Сколько различных комиссий может быть составлено?

27. Алфавит X состоит из двух символов. Сколько существует слов алфавита X, длины которых не превосходят 4?

28. Автомобильные номера данного региона состоят из трех цифр (всего 10 цифр) и трех букв алфавита X={A, B, C, D, E, H, K, M, O, P, T, X, Y}. Сколько автомобилей может быть занумеровано различными номерами?

29. Во взводе 3 сержанта и 30 солдат. Сколько существует способов выделения одного сержанта и трех солдат для патрулирования?

30. Сколько четырехзначных чисел, делящихся на 5, можно составить из цифр 0, 1, 3, 5, 7, если каждое число не должно содержать одинаковых цифр?

31. В вазе стоят 10 красных и 5 розовых гвоздик. Сколькими способами можно выбрать из вазы пять гвоздик одного цвета?

32. Сколькими способами из колоды в 52 карты (из них 4 туза и 4 короля) можно вынуть 6 карт, содержащих туза и короля одной масти?

33. Сколькими способами при бросании 12 игральных костей каждое из значений 1, 2, 3, 4, 5, 6 выпадает дважды?

34. У англичан принято давать детям несколько имен. Сколькими способами можно назвать ребенка, если ему дают не более трех имен, а общее число имен равно 300 (2 способа, различающиеся лишь порядком имен, различны)?

35. Двенадцати ученикам выданы 2 варианта контрольных работ. Сколькими способами их можно посадить в два ряда, чтобы рядом не было одинаковых вариантов, а у сидящих друг за другом был один и тот же вариант?

36. Лифт, в котором находятся 9 пассажиров, может останавливаться на десяти этажах. Пассажиры выходят группами в два, три и четыре человека. Сколькими способами это может произойти?

37. При игре в домино 4 игрока делят поровну 28 костей. Сколькими способами они могут это сделать?

38. Сколькими способами из 28 костей домино можно выбрать две кости так, чтобы их можно было приложить друг к другу?

39. Применяя формулу бинома Ньютона записать:

а) $(a+b)^3$; б) $(a+b)^4$; в) $(a-b)^3$; г) $(a-b)^4$.

40. Доказать известные тождества для биномиальных коэффициентов:

1) $\sum\limits_{k=0}^{n} C_n^k = 2^n$, 2) $\sum\limits_{k=0}^{n} (-1)^k C_n^k = 0$,

3) $\sum\limits_{k=1}^{n} k(-1)^k C_n^k = 0,\ \text{для}\ \ \forall n \ge 1$, 4) $\sum\limits_{k=r}^{n} (-1)^{k-r} C_k^r C_n^k = 0,\ \ n \ge r$.

Примечание. Для получения соотношений 1) и 2) полагаем в формуле $(1+x)^n = \sum\limits_{k=0}^{n} C_n^k x^k$ $x=1$ и $x=-1$ соответственно; для получения соотношения 3) продифференцируем формулу по x и положим $x=-1$; для получения соотношения 4) продифференцируем формулу r раз по x, разделим на r! и положим $x=-1$.

41. Доказать тождества для биномиальных коэффициентов

а) $\sum\limits_{k=1}^{n} kC_n^k = n2^{n-1}$; г) $C_n^k + C_n^{k-1} = C_{n+1}^k$;

б) $\sum\limits_{k=2}^{n} k(k-1)C_n^k = n(n-1)2^{n-2}$; д) $C_n^k \cdot C_k^r = C_{n-r}^{k-r} \cdot C_n^r$;

в) $\sum\limits_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \frac{1}{k} C_n^k = 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}$; е) $C_n^k = C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1}$.

42. Упростить выражение $P_1 + 2P_2 + 3P_3 + \ldots + nP_n$.

43. Решить уравнения:

а) $P_x^2 \cdot C_x^{x-1} = 48$; в) $C_{x+1}^{x-2} + 2C_{x-1}^3 = 7(x-1)$;

б) $C_x^1 + 6C_x^2 + 6C_x^3 = 9x^2 - 14x$; г) $P_x^3 + C_x^{x-2} = 14x$.

44. Найти член разложения $\left(x + \frac{1}{x^4}\right)^{10}$, не содержащий x (т.е. содержащий x в нулевой степени).

45. Найти шестой член разложения $\left(y^{\frac{1}{2}}+x^{\frac{1}{3}}\right)^{n}$ если биномиальный коэффициент третьего от конца члена равен 45.

46. Чему равен коэффициент при x^{60} в выражении $(1+x)^{100}$?

Задачи для самостоятельного решения

1. Каково число матриц из n строк и m столбцов с элементами из множества {0, 1}?

2. Найти число всех таких слов длины mn в n-буквенном алфавите, в которых каждая буква алфавита встречается m раз?

3. (Задача мажордома). К обеду за круглый стол приглашены n пар враждующих рыцарей ($n \geq 2$). Требуется рассадить их так, чтобы два врага не сидели рядом. Показать, что это можно сделать.

4. Сколько существует различных 9-битовых строк?

5. Сколько можно составить различных паролей из 30 цифр?

6. В матрице 5×5 записаны по одному разу числа от 1 до 25. Сколько существует различных матриц такого вида?

7. Шестизначный телефонный номер не может начинаться с цифр 0, 8, 9. Сколько существует различных шестизначных номеров?

8. В урне 17 красных шаров, 11 синих и 13 черных. Сколько существует различных способов выбрать два шара разного цвета?

9. Сколько существует положительных целых чисел, меньших 10000, содержащих цифры 3, 7 и 9?

10. Сколько существует способов рассадить 5 мудрецов за круглым столом, если имеет значение только порядок соседей?

11. Сколько всего существует результатов опыта, заключающегося в подбрасывании 2 одинаковых игральных костей?

12. Сколько существует способов взять 13 из 52 игральных карт, содержащих 7 карт одной масти?

13. В разложении найти коэффициент при множителе:

1) $(2x+3y)^{10}$, x^6y^4; 2) $(3x-4y)^{13}$, x^8y^5;

3) $(x+2y^2)^{14}$, x^6y^{16}; 4) $(x^3-3y^2)^{10}$, x^9y^{14}.

14. Компания из двадцати друзей разделяется на три группы: в первую входят три человека, во вторую – шесть, в третью – одиннадцать. Сколькими способами это можно сделать?

15. Сколькими способами дизайнер сможет покрасить пять елок в серебристый, зеленый и синий цвета, если количество краски у него не ограничено, а каждую елку он красит только одним из цветов.

РАЗДЕЛ 2. ЛИНЕЙНЫЕ РЕКУРРЕНТНЫЕ СООТНОШЕНИЯ

2.1. Решение рекуррентных уравнений

Формула рекуррентна (от французского recurrente – возвращаться к началу), если для вычисления последующего члена последовательности необходимо знать ее предыдущие члены. Формула нерекуррентна, если n-й член последовательности вычисляется непосредственно без обращения к предыдущим членам последовательности.

Последовательность $u_1, u_2, u_3, \ldots, u_n, \ldots$ называется *рекуррентной* порядка d, если существует формула $u_{n+d} = f(u_{n+d-1}, u_{n+d-2}, \ldots, u_n)$, с помощью которой элемент u_{n+d} последовательности вычисляется по d предыдущим элементам $u_{n+d-1}, u_{n+d-2}, \ldots, u_n$. Эта формула называется рекуррентным соотношением (рекуррентным уравнением) порядка d. Первые d элементов последовательности должны быть известны.

Говорят, что члены последовательности $\{u_n\}$ связаны линейным рекуррентным соотношением, если существуют такие постоянные коэффициенты $a_1, a_2, \ldots, a_d$, что $\forall n \ge 1$ справедливо равенство

$$u_{n+d} = a_1 \cdot u_{n+d-1} + a_2 \cdot u_{n+d-2} + \ldots + a_{d-1} \cdot u_{n+1} + a_d \cdot u_n \qquad (1)$$

Величина d в этом случае называется *глубиной* или *порядком* рекуррентного соотношения.

Последовательность $\{u_n\}$ будет однозначно определена, если задано соотношение (1) и последовательные d членов последовательности.

Пример 1. Дана геометрическая прогрессия

$u_1 = a,\ u_2 = a \cdot q,\ u_3 = a \cdot q^2, \ldots, u_n = a \cdot q^{n-1}, \ldots$. Можно записать $u_{n+1} = q \cdot u_n,\ d = 1,\ a_1 = q$. Геометрическая прогрессия является рекуррентной последовательностью первого порядка.

Пример 2. Арифметическая прогрессия

$u_1 = a,\ u_2 = a + d,\ u_3 = a + 2d, \ldots, u_n = a + (n-1)d, \ldots$. Или $u_{n+1} = u_n + d$.

Запишем две формулы $u_{n+2} = u_{n+1} + d$ и $u_{n+1} = u_n + d$, вычтем из первого второе: $u_{n+2} - u_{n+1} = u_{n+1} - u_n$, или $u_{n+2} = 2u_{n+1} - u_n$. Получаем $d = 2,\ a_1 = 2,\ a_2 = -1$. Арифметическая прогрессия является рекуррентной последовательностью второго порядка.

Пример 3. Для последовательности 1, 4, 9, 16, 25, 36, … нерекуррентная формула имеет вид $u_n = n^2,\ n = 1,2,3,\ldots$. Запишем $u_{n+1} = (n+1)^2 = n^2 + 2n + 1 = u_n + 2n + 1 (n = 0,1,2,\ldots)$. Увеличивая n на единицу, получаем $u_{n+2} = (n+2)^2 = n^2 + 4n + 4 = u_{n+1} + 2n + 3$. После вычитания $u_{n+2} - u_{n+1} = u_{n+1} - u_n + 2$, или $u_{n+2} = 2u_{n+1} - u_n + 2$. Увеличивая в равенстве n на единицу, получаем: $u_{n+3} = 2u_{n+2} - u_{n+1} + 2$. Откуда

$u_{n+3}-u_{n+2}=2u_{n+2}-3u_{n+1}+u_n$, или $u_{n+3}=3u_{n+2}-3u_{n+1}+u_n$. Получили рекуррентную формулу третьего порядка.

Характеристическим уравнением для линейного рекуррентного соотношения (1) называется уравнение вида:

$$x^d-a_1\cdot x^{d-1}-a_2\cdot x^{d-2}-...-a_{d-1}\cdot x-a_d=0. \qquad (2)$$

Пусть $x_1,x_2,...,x_{d-1},x_d$ - корни характеристического уравнения (2). В зависимости от корней характеристического уравнения различают две ситуации.

1. Если характеристическое уравнение (2) имеет различные корни, то общий член последовательности $\{u_n\}$можно представить в виде

$$u_n=c_1\cdot x_1^{n-1}+c_2\cdot x_2^{n-1}+...+c_d\cdot x_d^{n-1}. \qquad (3)$$

При этом коэффициенты $c_k,\ k=1,2,...,d$, однозначно определяются из системы:

$$\begin{cases} u_1= c_1+ c_2+...+c_d \\ u_2=c_1\cdot x_1+c_2\cdot x_2+...+c_d\cdot x_d \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ u_d=c_1\cdot x_1^{d-1}+c_2\cdot x_2^{d-1}+...+c_d\cdot x_d^{d-1} \end{cases}$$

2. Если характеристическое уравнение (2) имеет кратные корни, $x_1,x_2,...,x_m,\ m\le d$, то общий член последовательности $\{u_n\}$ можно представить в виде

$$u_n=P_1(n-1)\cdot x_1^{n-1}+P_2(n-1)\cdot x_2^{n-1}+...+P_m(n-1)\cdot x_m^{n-1}, \qquad (4)$$

где $P_k(n-1)$ - многочлен степени r_k-1 относительно $n-1$, r_k - кратность корня x_k, $k=1,2,...,m$, $r_1+r_2+...+r_m=d$.

2.2. Числа Фибоначчи

В книге «Liber Abaci», появившейся в 1202 году, итальянский математик Фибоначчи среди многих других задач привел следующую:

«Пара кроликов приносит раз в месяц приплод из двух крольчат (самки и самца), причем новорожденные крольчата через два месяца после рождения уже приносят приплод. Сколько кроликов появится через год, если в начале года была одна пара кроликов?»

Из условия задачи следует, что через месяц будет 2 пары кроликов. Через два месяца приплод даст только первая пара кроликов, и получится 3 пары. А еще через месяц приплод дадут и исходная пара кроликов, и пара кроликов, появившаяся два месяца тому назад. Поэтому всего будет 5 (3+2) пар кроликов. Рассуждая аналогичным образом, можно определить количество пар кроликов через любое количество месяцев.

Пусть u_1 – число пар кроликов в начальный момент, u_2 - число пар кроликов через 1 месяц. Тогда u_{n+1} означает число пар кроликов через n месяцев.

Для последовательности $\{u_n\}$ имеем следующее рекуррентное соотношение

$$u_{n+2} = u_{n+1} + u_n,\ \text{при этом}\ u_1 = 1,\ u_2 = 2\ . \qquad (5)$$

Последовательность, определяемая соотношениями (5), называется последовательностью Фибоначчи, а ее члены

$1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 601, \ldots$ числами Фибоначчи.

Заметим, что ответом в задаче Фибоначчи является $u_{13} = 377$.

Поскольку числа Фибоначчи задаются линейным рекуррентным соотношением (5), то применяя выше изложенный метод решения линейных рекуррентных соотношений, найдем общий член последовательности Фибоначчи.

Корнями характеристического уравнения $x^2 - x - 1 = 0$ для соотношения (5) являются $x_1 = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$, $x_2 = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$.

Корни различные, тогда согласно случая 1, имеем $u_n = c_1 \cdot x_1^{n-1} + c_2 \cdot x_2^{n-1}$.

Коэффициенты c_1, c_2 найдем из системы $\begin{cases} 1 = c_1 + c_2 \\ 2 = c_1 \cdot \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} + c_2 \cdot \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} \end{cases}$

Отсюда $\begin{cases} c_1 = \dfrac{3+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}} = \dfrac{1}{\sqrt{5}} \cdot \left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 \\ c_2 = \dfrac{-3+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}} = -\dfrac{1}{\sqrt{5}} \cdot \left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2 \end{cases}$.

Таким образом, общий член последовательности Фибоначчи имеет вид

$$u_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} \right). \qquad (6)$$

Формула (6) носит название формулы Бинэ.

Свойства чисел Фибоначчи.

1. $u_n \approx \dfrac{1}{\sqrt{5}} \cdot \left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}$.
2. $u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_{n-1} + u_n = u_{n+2} - 2$.
3. $u_1 + u_3 + u_5 + \ldots + u_{2n-1} = u_{2n} - 1$.
4. $u_2 + u_4 + u_6 + \ldots + u_{2n} = u_{2n+1} - 1$.
5. $u_n = C_n^0 + C_{n-1}^1 + C_{n-2}^2 + \ldots + C_{n-p}^p$, где p есть целая часть от $\dfrac{n}{2}$.
6. Любое натуральное число N можно единственным образом представить в виде суммы несоседних чисел Фибоначчи:

$N = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cdot u_k$, где $a_k = 0$ или $a_k = 1$ и $a_k \cdot a_{k+1} = 0$.

2.3. Производящие функции

Для решения рекуррентных соотношений и выполнения комбинаторных подсчетов в ряде случаев удобно использовать аппарат производящих функций. Последовательности $u_0, u_1, u_2, \ldots$ поставим в соответствие формальный ряд

$$U(x) = \sum_{k=0}^{\infty} u_k x^k , \tag{7}$$

называемый *производящей функцией* для данной последовательности. Термин «формальный ряд» означает лишь то, что формула трактуется как удобная запись последовательности и для каких значений x он сходится несущественно. Вопрос о вычислении значения такого ряда для конкретного значения x не ставится. Используются формальные операции над рядами и определяются коэффициенты при конкретных степенях переменной x.

Операции над рядами:

1) сложение рядов $U(x) = \sum_{k=0}^{\infty} u_k x^k$ и $V(x) = \sum_{k=0}^{\infty} v_k x^k$

$$U(x) + V(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (u_k + v_k) x^k ;$$

2) умножение на число

$$pU(x) = \sum_{k=0}^{\infty} p u_k x^k ;$$

3) произведение рядов

$$U(x) \cdot V(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k ,$$

где $c_k = u_0 v_k + u_1 v_{k-1} + \ldots + u_k v_0 = \sum_{i=0}^{k} u_i v_{k-i}$;

4) сдвиг начала. Последовательность

$$v_k = \begin{cases} 0 & \textit{для } \ k = 0,1,\ldots,i-1, \\ u_{k-i} & \textit{для } \ k = i, i+1,\ldots.. \end{cases}$$

имеет производящую функцию $V(x) = U(x) \cdot x^i$. Аналогично, последовательность $v_k = u_{k+i}$ для $k = 0,1,2,\ldots$ имеет производящую функцию $V(x) = \left[U(x) - \sum_{k=0}^{i-1} u_k x^k \right] \cdot x^{-i}$. Действительно,

$$V(x) = \sum_{k=0}^{\infty} v_k x^k = \sum_{k=0}^{\infty} u_{k+i} x^k = x^{-i} \sum_{k=0}^{\infty} u_{k+i} x^{k+i} = x^{-i} \sum_{k=i}^{\infty} u_k x^k = x^{-i} \left[\sum_{k=0}^{\infty} u_k x^k - \sum_{k=0}^{i-1} u_k x^k \right] =$$

$$= \left[U(x) - \sum_{k=0}^{i-1} u_k x^k \right] x^{-i}.$$

Ряд (7) может сходиться в некоторой окрестности нуля (из математического анализа). В этом случае его сумма выражается аналитической функцией $U(x)$, а ряд является рядом Тейлора в окрестности

$x=0$ с коэффициентами $u_k=\dfrac{U^{(k)}(0)}{k!}$, $k=0,1,2,\dots$, где $U^{(k)}(0)$ есть k-я производная функции $U(x)$ при $x=0$. Для аналитических функций также справедливы рассмотренные выше операции. В методе производящих функций делается следующий шаг – формальный ряд (7) отождествляется с определенной через него аналитической функцией для рядов, сходящихся в окрестности нуля. Итак, мы имеем цепочку: последовательность → формальный ряд → аналитическая функция. Какой в этом смысл? Он заключается в том, что по функции последовательность восстанавливается, а многим операциям над последовательностями соответствуют простые алгебраические или аналитические операции над функциями. Другими словами, мы производим какие-то действия с функциями, а затем по результату восстанавливаем последовательность. Запишем наиболее известные из математического анализа ряды и их аналитические выражения (функции):

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^k=(1-x)^{-1},\quad \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}x^k=e^x,\quad \sum_{k=0}^{\infty}C_n^k x^k=(1+x)^n,$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{k}x^k=\ln(1+x),\quad \sum_{k=0}^{\infty}C_{n+k-1}^k x^k=\frac{1}{(1-x)^n}.$$

Пример 4. Дана последовательность $1,2,4,8,\dots,2^k,\dots$. Имеем $\sum_{k=0}^{\infty}2^k x^k=\sum_{k=0}^{\infty}(2x)^k=(1-2x)^{-1}$. Это производящая функция для исходной последовательности.

Пример 5. Решить рекуррентное уравнение $u_n=u_{n-1}+3,\quad u_0=5$.

Положим $U(x)=\sum_{k=0}^{\infty}u_k x^k$. В соответствии с уравнением $u_n-u_{n-1}-3=0$ запишем

$$U(x)-xU(x)-\frac{3}{1-x}=(u_0-3)+(u_1-u_0-3)x+(u_2-u_1-3)x^2+\dots+(u_n-u_{n-1}-3)x^n+$$
$$+\dots=u_0-3=5-3=2$$

Так как $u_n-u_{n-1}-3=0$ при всех $n\ge 1$, то сумма равна 2. Имеем уравнение

$U(x)-xU(x)-\dfrac{3}{1-x}=2$. Решаем его относительно $U(x)$, получаем

$$U(x)(1-x)=2+\frac{3}{1-x},$$

$$U(x)=\frac{3}{(1-x)^2}+\frac{2}{1-x}=3\Big(\sum_{k=0}^{\infty}C_{2+k-1}^k x^k\Big)+2\Big(\sum_{k=0}^{\infty}x^k\Big)=$$
$$=3(1+2x+3x^2+\dots+(n+1)x^n+\dots)+2(1+x+x^2+\dots+x^n+\dots)=5+8x+11x^2+$$
$$+14x^3+\dots+(3n+5)x^n+\dots$$

Т.о., $u_n=3n+5$.

Задачи.

1. Найти общий член последовательности
$u_{n+2}=5u_{n+1}-6u_n, \quad u_2=6,\ u_3=10.$
2. Найти общий член последовательности
$u_{n+2}=6u_{n+1}-9u_n, \quad u_1=1,\ u_2=3.$
3. Решить рекуррентное соотношение
$u_{n+3}=3u_{n+2}-3u_{n+1}+u_n, \quad u_1,u_2,u_3$ задать произвольно.
4. Решить рекуррентные уравнения
а) $u_n=u_{n-1}+6u_{n-2}, \quad u_1=1,\ u_2=8;$
б) $u_n=7u_{n-1}-12u_{n-2}, \quad u_1=2,\ u_2=5.$
5. Какому рекуррентному соотношению соответствует последовательность $u_n=2^n-1$?
6. Какому рекуррентному соотношению соответствует последовательность $u_n=(n-1)\cdot(2^n+3^n)$?
7. Какому рекуррентному соотношению соответствует последовательность $u_n=n^2-n+1$?
8. Рассмотрим перестановки из n элементов, в которых каждый элемент $k,\ 1\le k\le n$, стоит либо на «своей» позиции, либо на одной из соседних, то есть: 1 может стоять либо на первой позиции, либо на второй; n может стоять либо на последней позиции, либо на предпоследней; $k,\ 2\le k\le n-1$, может стоять либо на позиции k, либо на $k-1$, либо на $k+1$. Найти число таких перестановок для любого n.
9. Доказать, что два соседних числа Фибоначчи взаимно просты.
10. Пусть $\{u_n\}$ – последовательность Фибоначчи. Доказать, что для любых m и $n=k\cdot m$ число u_n делится на u_m.

Задачи для самостоятельного решения.

1. Решить рекуррентное уравнение
$u_n=5u_{n-1}-6u_{n-2}+6\cdot 3^n, \quad u_1=4,\ u_2=5.$
2. Дано $x_0=3,\ x_1=5,\ x_2=6 \quad x_n=\frac{3}{2}x_{n-1}-\frac{1}{2}x_{n-2},\ n=2,3,\ldots$. Найти предел последовательности x_n.
3. Решить систему рекуррентных соотношений
$\varphi_{n+1}=\varphi_n+\eta_n,$
$\eta_{n+1}=\eta_{n-1}+\varphi_{n+1}-\varphi_{n-1},$
$\varphi_1=5,\ \eta_1=4,\ \eta_2=8.$
4. Рассмотрим последовательности длины n, состоящие из 0 и 1, в которых никакие две единицы не стоят рядом. Найти число таких последовательностей для любого n.

5. Пусть $\{u_n\}$ - последовательность Фибоначчи. Доказать, что $u_{n+m} = u_{n-1} \cdot u_m + u_n \cdot u_{m+1}$.

6. Найти общее решение для следующих рекуррентных уравнений:

1) $u_n = 5u_{n-1} - 6u_{n-2}$; 2) $u_n = 7u_{n-1} - 12u_{n-2}$;

3) $u_n = 2u_{n-1} - 8u_{n-2}$; 4) $u_n = 3u_{n-1} - 2u_{n-2}$.

7. Найти производящую функцию для нахождения количества способов выбора t шаров из:

а) 5 красных, 6 синих, 4 зеленых и 3 белых;

б) 5 красных, 6 синих, 4 зеленых и 3 белых при условии, что выбирается не менее одного шара каждого цвета;

в) 5 красных, 6 синих, 4 зеленых и 3 белых при условии, что выбирается не менее трех красных шаров и четное количество как синих, так и зеленых шаров;

г) 5 красных, 6 синих, 4 зеленых и 3 белых при условии, что количество шаров каждого цвета является нечетным.

РАЗДЕЛ 3. ТЕОРИЯ ГРАФОВ

3.1. Основные понятия

Рассмотрим конечное множество V, $|V| = n$ и множество $V^2 = V \times V$ всех его 2-х элементных множеств. Для произвольных подмножеств $E \subseteq V^2$ называем термином граф всякую пару $G = (V, E)$.

Элементы множества V, $|V| = n$ называются вершинами, элементы множества E ребрами. Вершины и ребра графа называются его *элементами.* Число $|V| = n$ вершин графа G называется его *порядком* и обозначается через $|G|$. Если $|G| = n,$ $|E| = m$, то G называют *(n, m)*-графом.

Говорят, что две вершины u и v графа *смежны,* если множество $e = (u, v)$ является ребром, и *не смежны* в противном случае, вершины u и v называют его *концами.*

Два ребра называются *смежными,* если они имеют общий конец.

Вершина u и ребро e называются *инцидентными,* если v является концом ребра e, т. е. $e = (u, v)$, и *не инцидентными* в противном случае.

Заметим, что смежность есть отношение между однородными элементами графа, тогда как инцидентность является отношением между разнородными элементами.

Графы удобно изображать в виде рисунков, состоящих из точек и линий, соединяющих некоторые из этих точек. При этом точки соответствуют вершинам графа, а соединяющие пары точек линии — ребрам.

Граф G называется *полным,* если любые две его вершины смежны, т. е. $E = V^2 = V \times V$. Полный граф порядка n обозначается символом K_n, число ребер в нем равно $\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$.

Граф называется *пустым,* если в нем нет ребер. Пустой граф порядка n обозначается через O_n.

Матрицы, ассоциированные с графом.

Матрица, каждый элемент которой равен 0 или 1, называется *бинарной.*

Пусть G – помеченный граф порядка n, $V = \{1,2,\dots,n\}$. Определим бинарную $n \times n$-матрицу $A = A(G)$, положив

$$\mathrm{a}_{\mathrm{ij}} = \begin{cases} 1, \text{если вершины i и j смежны,} \\ 0 \text{ в противном случае.} \end{cases}$$

$A = A(G)$ называется *матрицей смежности* графа G. Это симметрическая матрица с нулями на диагонали. Число единиц в строке равно степени соответствующей вершины.

Аналогично определяются *матрицы смежности* мульти- и псевдографов: a_{ij} равно числу ребер, соединяющих вершины i и j (при этом петля означает два ребра).

Так же определяется *матрица смежности* $A(G)$ ориентированного графа G:

$$(A(G))_{ij} = \begin{cases} 1, \text{если дуга } \mathrm{e} = (\mathrm{i, j}) \in \mathrm{E}, \\ 0 \text{ в противном случае.} \end{cases}$$

Очевидно, что любая квадратная бинарная матрица является матрицей смежности некоторого ориентированного графа.

Определим матрицу инцидентности графа. Пусть $G = (V, E)$ граф, $V = \{1,2,\dots,n\}$, $E = \{e_1, e_2, \dots, e_m\}$. Определим бинарную $n \times m$ -матрицу $B = B(G)$ условиями:

$$b_{kl} = \begin{cases} 1, \text{если вершина } k \text{ и ребро } e_l \text{ инцидентны ,} \\ 0 \text{ в противном случае.} \end{cases}$$

Матрица $B = B(G)$ называется *матрицей инцидентности* графа G. В каждом ее столбце ровно две единицы, равных столбцов нет.

Для ориентированных графов определение матрицы инцидентности $B = B(G)$ видоизменяется:

$$b_{kl} = \begin{cases} 1, \text{если вершина } k \text{ начало дуги } e_l, \\ \text{-1, если вершина } k \text{ конец дуги } e_l, \\ 0, \text{если вершина } k \text{ и дуга } e_l \text{ не инцидентны .} \end{cases}$$

3.2. Метрические характеристики графа. Инварианты графа

Пусть G связный граф, а u и v — две его несовпадающие вершины. Длина кратчайшей (u, v) – простой цепи называется *расстоянием между вершинами* u и v и обозначается через $\rho(u,v)$. Очевидно, что введенное таким образом расстояние удовлетворяет следующим *аксиомам метрики:*

1) $\rho(u,v) \geq 0$,
2) $\rho(u,v) = 0$ тогда и только тогда, когда $u = v$,
3) $\rho(u,v) = \rho(v,u)$,
4) $\rho(u,v) + \rho(v,w) \geq \rho(u,w)$ (*неравенство треугольника*).

Для фиксированной вершины u величина $\varepsilon(u) = \max\limits_{v \in V} \rho(u,v)$ называется *эксцентриситетом* вершины u.

Максимальный среди всех эксцентриситетов вершин называется *диаметром графа* G и обозначается через $d(G)$, т.е. $d(G) = \max\limits_{u \in V} \varepsilon(u) = \max\limits_{u \in V} \max\limits_{v \in V} \rho(u,v)$

Вершина v называется *периферийной,* если $\varepsilon(v) = d(G)$. Простая цепь длины $d(G)$, называется *диаметральной цепью.*

Минимальный из эксцентриситетов вершин связного графа называется его *радиусом* и обозначается через $r(G)$, т.е. $r(G) = \min\limits_{u \in V} \varepsilon(u) = \min\limits_{u \in V} \max\limits_{v \in V} \rho(u,v)$.

Очевидно, что радиус графа не больше его диаметра.

Вершина v называется *центральной,* если $\varepsilon(v) = r(G)$. Множество всех центральных вершин графа называется его *центром.* Граф может иметь единственную центральную вершину или несколько центральных вершин. Наконец, центр графа может совпадать с множеством всех вершин.

Задача нахождения центральных вершин графа постоянно возникает в практической деятельности людей. Пусть, например, граф представляет сеть дорог, т. е. вершины его соответствуют отдельным населенным пунктам, а ребра — дорогам между ними. Требуется оптимально разместить больницы, магазины, пункты обслуживания. В подобных ситуациях критерий оптимальности часто заключается в оптимизации «наихудшего» случая, т. е. в минимизации расстояния от места обслуживания до наиболее удаленного пункта. Следовательно, местами размещения должны быть центральные вершины графа.

Пример 1. Вычислить радиус, диаметр графа, указать центральные и периферийные вершины.

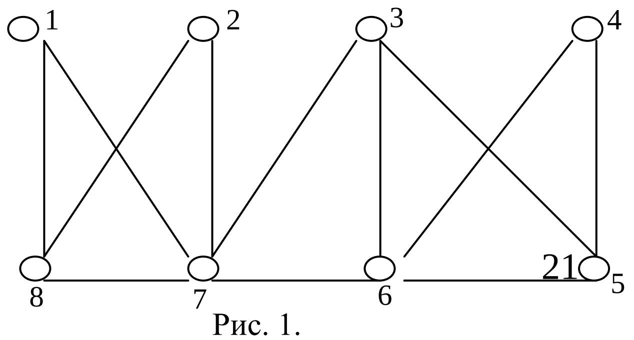


Рис. 1.

Решение. Находим эксцентриситет каждой вершины: ε(1)=3, ε(2)=3, ε(3)=2, ε(4)=3, ε(5)=3, ε(6)=2, ε(7)=2, ε(8)=3.

Наибольший из эксцентриситетов вершин графа называется диаметром графа: d(G)=3.

Наименьший из эксцентриситетов вершин графа называется радиусом графа: r(G)=2.

Вершины графа, имеющие эксцентриситет равный радиусу, называются центральными: Ц={3, 6, 7}. Вершины графа, имеющие эксцентриситет равный диаметру, называются периферийными: П={1, 2, 4, 5, 8}.

Функцию f называют *инвариантом*, если на изоморфных графах ее значения совпадают, т.е. для любых графов G и G' выполняется соотношение $G \approx G'$ тогда и только тогда, когда $f(G) = f(G')$.

Кликой называют всякий наибольший полный подграф данного графа, размер клики – число вершин в ней.

Определим наиболее важные инварианты графа.

1^0. Вектор степеней графа $G = (V, E)$ - это упорядоченный (по возрастанию или убыванию) перечень $S(G) = (S_1, S_2, ..., S_n)$ степеней $S_i = \deg v_i$ вершин $v_1, v_2, ..., v_n \in V,\ \ n = |V|$.

2^0. Число внешней устойчивости или плотности $\varphi(G)$ - это число вершин максимальной клики в графе G. Другими словами, $\varphi(G)$ - это наибольшее количество попарно смежных вершин в G.

Иногда плотность $\varphi(G)$ называют кликовым числом.

Наименьшее число клик графа G, покрывающих множество V, называется числом кликового покрытия и обозначается через $c(G)$.

3^0. Число внутренней устойчивости или неплотность $\alpha(G)$ графа $G = (V, E)$ - это наибольшее количество его попарно несмежных вершин. Приведем другое определение. Подмножество $V' \subset V$ называется независимым (или внутренне устойчивым), если в нем любая пара вершин $v', v'' \in V'$ не смежна. Т.е. если V' независимо в G, то порожденный подграф $G(V')$ состоит только из изолированных вершин.

Независимое множество называется максимальным, если оно не является собственным подмножеством другого независимого множества.

Наибольшее по мощности независимое множество в графе G называется наибольшим, а его мощность равна $\alpha(G)$.

Примечание. Для всякого полного графа $G = (V, E)$ значение $\alpha(G)$=1, а число внешней устойчивости $\varphi(G)=|V|$.

Задачи определения точного значения $\alpha(G)$ очень трудны.

4^0. Хроматическое число.

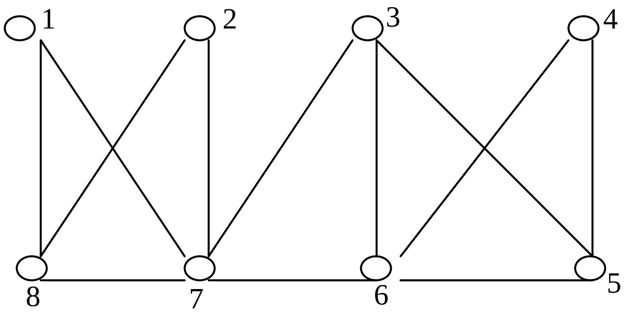
Рассмотрим правильные *k*-раскраски графа G. Минимальное число *k*, при котором граф G является *k*-раскрашиваемым, называется хроматическим числом этого графа и обозначается $\gamma(G)$. Правильная k-раскраска графа G при $k=\gamma(G)$ называется минимальной.

Если для графа G $\gamma(G)=2$, то G называется бихроматическим.

5^0. Число компонент связности К(G).

6^0. Числом Хадвигера $\eta(G)$ связного графа G называется количество вершин наибольшей клики, на которую можно стянуть данный граф.

Пример 2. Найти инварианты графа.



Решение.

Вектор степеней графа $S(G)=(2,2,2,3,3,3,4,5)$.

Число внешней устойчивости или плотности $\varphi(G)=3$, $\{1,8,7\}$ или $\{8,2,7\}$ и т.д.

Число внутренней устойчивости или не плотности $\alpha(G)=4$, $\{1,2,3,4\}$

Хроматическое число $\gamma(G)=3$, (можно использовать 3 краски).

Число компонент связности К=1.

Число Хадвигера $\eta(G)=3$.

3.3. Деревья и обходы

Деревом называется связный граф, не содержащий циклов. Любой граф без циклов, который состоит не менее, чем из двух компонент связности называется лесом. Таким образом, компонентами леса являются деревья.

Существует несколько вариантов определения дерева; некоторые из них отражены в следующей теореме.

Теорема. Для графа $G=(V,E)$, где $n=|V|, m=|E|$ следующие утверждения эквивалентны:

1) G - дерево;

2) G - связный граф и $m=n-1$;

3) G - ациклический граф и $m=n-1$;

4) любые две несовпадающие вершины графа G соединяет единственная простая цепь;

5) G - ациклический граф, обладающий тем свойством, что если какую-либо пару его несмежных вершин соединить ребром, то полученный граф будет содержать ровно один цикл.

Если дерево является суграфом конкретного графа, то его называют остовным деревом.

В связном графе остовом служит любое остовное дерево. Число остовов в связном графе определяется в неявной форме следующей теоремой.

Теорема Кирхгофа (1847 г.). Число остовных деревьев в связном графе G порядка $n \geq 2$ равно алгебраическому дополнению любого элемента матрицы Кирхгофа $B = D - A$, где D - матрица степеней графа G, A - матрица смежности графа G.

Следствие. При $n > 1$ число остовов в полном графе K_n равно n^{n-2}.

Очевидно, что число остовов в K_n равно числу помеченных деревьев порядка n. Поэтому предыдущее следствие можно сформулировать в виде следующей теоремы, впервые полученной А. Кэли в 1897 году.

Теорема Кэли. Число помеченных деревьев порядка n равно n^{n-2}.

Задача об остове минимального веса.

Алгоритм Краскала, решающий эту задачу, заключается в следующем.

1. Сначала упорядочиваем ребра в порядке не убывания их весов.

2. Строим граф $T_1 = O_n + e_1$, присоединяя к пустому графу на множестве вершин V ребро $e_1 \in E$ минимального веса.

3. Если граф T_i уже построен и $i < n-1$, то строим граф T_{i+1} это граф $T_i + e_{i+1}$, где e_{i+1} - ребро графа, имеющее минимальный вес среди ребер, не входящих в T_i и не составляющих циклов с ребрами из T_i.

Алгоритм Прима отличается от алгоритма Краскала только тем, что на каждом этапе строится не просто ациклический граф, но дерево.

Цикл в графе называется *эйлеровым,* если он содержит все ребра графа. Связный граф, в котором есть эйлеров цикл, называется *эйлеровым* графом. Такой граф можно нарисовать, не отрывая карандаша от бумаги и не повторяя линий.

Теорема. (Л. Эйлер, 1736 г.). Связный граф является эйлеровым тогда и только тогда, когда степени всех его вершин четны.

Гамильтонов граф – в теории графов это граф, содержащий гамильтонову цепь или гамильтонов цикл.

Гамильтонов путь (или гамильтонова цепь) — путь (цепь), содержащий каждую вершину графа ровно один раз. Гамильтонов путь, начальная и конечная вершины которого совпадают, называется гамильтоновым циклом. Гамильтонов цикл является простым остовным циклом. Задача определения содержит ли данный граф гамильтонов цикл является NP-полной.

Задачи

1. В соревнованиях участвуют 6 команд A, B, C, D, E, F. Через время команды сыграли друг с другом A – C, D, F; B – C, E, F; C – A, B; D – A, E, F; E – B, D, F; F – A, B, D, E. Представить в виде графа.

2. Изобразить неориентированный граф, состоящий из 6 вершин и 10 ребер.

3. Выписать для графа из предыдущей задачи смежные элементы, инцидентные элементы.

4. Выписать степени всех вершин данного графа.

5. Изобразить полный граф, состоящий из 1 вершины, 2 вершин, 3 вершин, 4 вершин, 5 вершин.

6. Изобразить двудольный граф, каждая доля содержит по 3 вершины. Достроить данный граф до полного двудольного.

7. Для данного графа выписать смежные вершины и ребра, а так же инцидентные элементы. Изобразить всевозможные подграфы данного графа.

8. Построить матрицу смежности для неориентированного графа, состоящего из 8 вершин и 12 ребер.

9. Построить матрицу смежности для ориентированного графа, состоящего из 8 вершин и 12 дуг.

10. Построить матрицу инцидентности для неориентированного графа, состоящего из 8 вершин и 12 ребер.

11. Построить матрицу инцидентности для ориентированного графа, состоящего из 8 вершин и 12 ребер.

12. Изобразите графы, соответствующие матрицам смежности:

а) $M_{см} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; б) $M_{см} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

13. Граф задан матрицей смежности. Как по этой матрице определить:

а) число вершин графа;

б) число ребер выходящих из вершины B;

в) число ребер входящих в вершину B;

г) степень вершин графа;

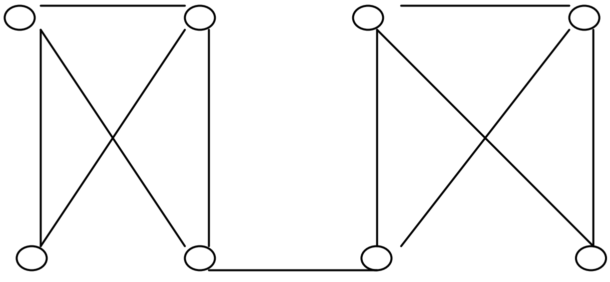


Рис. 1.

14.Для графа на рис.1 построить матрицу смежности, предварительно перенумеровав вершины. Построить матрицу инцидентности, предварительно перенумеровав ребра.

15.Для графа на рис.1 задать ориентацию для ребер от меньшего номера вершины к большему. Построить матрицу смежности и матрицу инцидентности, предварительно перенумеровав как вершины так и ребра.

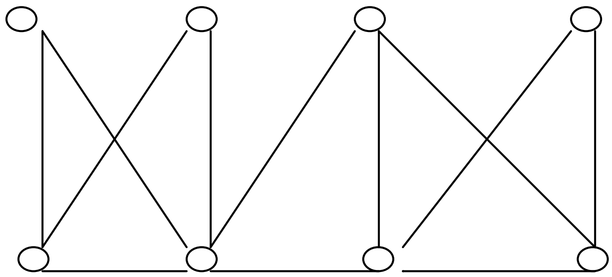


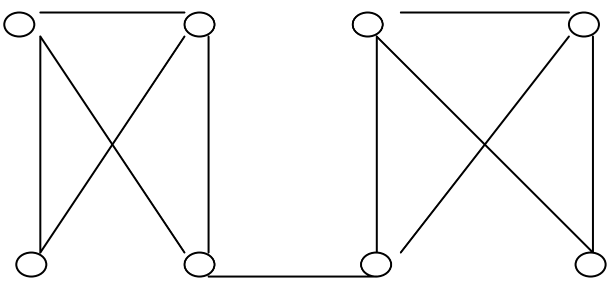
Рис. 2.

16. Для графа на рис.2 построить матрицу смежности, предварительно перенумеровав вершины. Построить матрицу инцидентности, предварительно перенумеровав ребра.

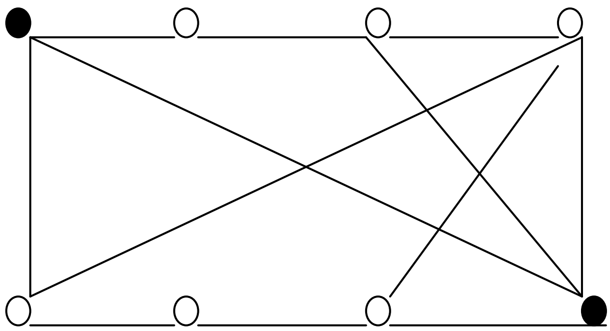
17. Для графа на рис.2 задать ориентацию для ребер от меньшего номера вершины к большему. Построить матрицу смежности и матрицу инцидентности, предварительно перенумеровав как вершины, так и ребра.

18. Вычислить радиус, диаметр графа, указать центральные и периферийные вершины, предварительно перенумеровав вершины.

а).



б).



19. Постройте граф, центр которого:

а) состоит ровно из одной вершины;

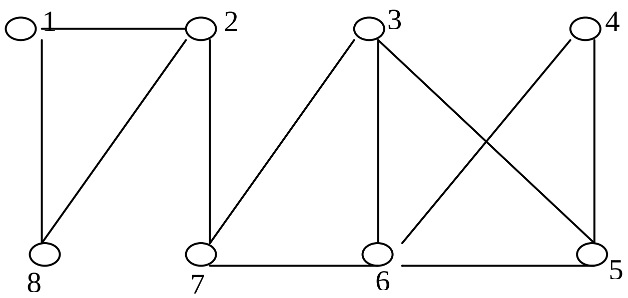
б) состоит ровно из трех вершин и не совпадает с множеством всех вершин;

в) совпадает с множеством всех вершин.

20. Докажите, что диаметр графа не превосходит его удвоенного радиуса.

21. Приведите пример графа, диаметр и радиус которого равны.

22. Найти инварианты графа.



23. Построить неориентированный граф с 6 вершинами и 10 ребер и найти инварианты графа.

24. Найти инварианты графа для полного 4-х вершинного графа.

25. Построив неполные графы в виде циклов нечетной длины L≥5, убедиться, что для них теорема Брукса неверна.

26. Перечислить все попарно неизоморфные графы с пятью вершинами.

27. Приведите пример связного графа $G=(V,E)$, $n=|V|$, у которого одна вершина имеет степень, равную $n-1$, а все остальные – степень, равную 1.

28. Приведите пример связного графа $G=(V,E)$, $n=|V|$, у которого все вершины имеют степень, равную 2.

29. Изобразить 4-х вершинное дерево. Сколько ребер оно содержит?

30. Для полного 5-ти вершинного графа изобразить несколько его остовных деревьев.

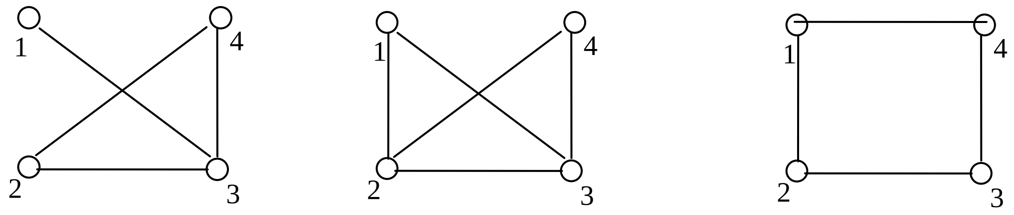
31. Изобразить лес с двумя компонентами связности, каждая из которых есть дерево.

32. Изобразить 6-ти вершинный граф с 8 ребрами. Построить все остовные деревья, а также паросочетания.

33. Для полного 4-х вершинного графа с нумерованными вершинами вычислить и нарисовать все его остовные деревья.

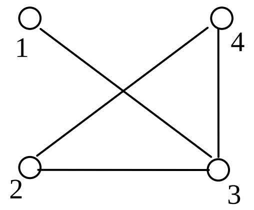
34. Для данного графа вычислить все его остовные деревья используя формулу Кирхгофа:

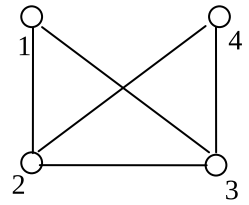
а) б) в)



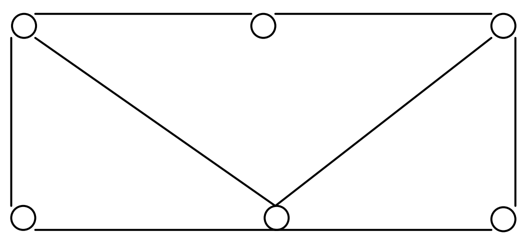
35. Пусть в данном графе ребра взвешены согласно соотношения $w(e_k) = k, \quad k = 1,2,3,4$. Найти остовное дерево минимального веса с помощью полного перебора всех допустимых решений, а также с помощью алгоритма Прима и алгоритма Краскала.

а) б)

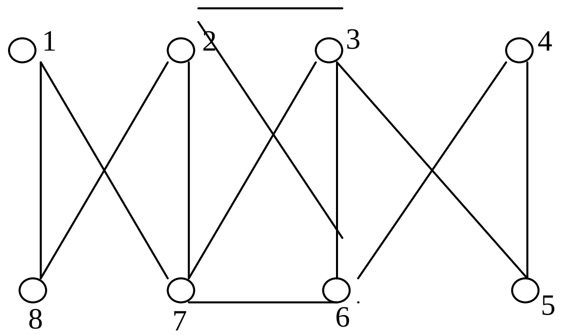




36. Проверить, является ли данный граф эйлеровым. Если да, то найти один эйлеров цикл по алгоритму Флери, и из него найти все остальные циклы.



37. Проверить, является ли данный граф эйлеровым. Если да, то найти один эйлеров цикл по алгоритму Флери, и из него найти все остальные циклы.



Задачи для самостоятельного решения.

1. Доказать или опровергнуть:

а) объединение любых двух различных цепей, соединяющих две вершины, содержит простой цикл;

б) объединение любых двух различных простых цепей, соединяющих две вершины, содержит простой цикл.

2. Покажите, что в связном графе любые две длиннейшие простые цепи имеют общую вершину.

3. Пусть в простом графе никакие две вершины одинаковой степени не соединены путем длины 2. Доказать, что в графе имеется висячая вершина.

4. Показать, что в любом графе найдутся две вершины с одинаковыми степенями.

5. В шахматном турнире по круговой системе (каждый участник встречается с каждым) участвуют семь человек. Известно, что в настоящий момент Иван сыграл 6 партий, Анатолий – пять, Алексей и Дмитрий – по три, Семен и Илья – по две, а Евгений – одну. С кем из участников сыграл Алексей?

6. Дана симметричная матрица размера $n \times n$, в каждой строке которой располагается нечетное число ненулевых элементов. Показать, что n является четным. Диагональные элементы матрицы равны нулю.

7. Имеется поле размером 4×4 клетки. Они пронумерованы последовательно: клетки первого ряда имеют номера от 1 до 4, второго ряда – от 5 до 8, и т.д. Считая клетку поля вершиной графа, нарисовать соответствующий граф и описать его с помощью матриц смежности и инцидентности. Вершины графа являются смежными, если клетки, которым они соответствуют, являются соседними по горизонтали или вертикали.

8. Доказать или опровергнуть, что связный граф является деревом тогда и только тогда, когда при удалении любого его ребра число компонент связности графа увеличивается на 1.

9. Привести все различные деревья с семью вершинами (их 11).

10. С помощью матричной формулы Кирхгофа найти количество деревьев полного двудольного графа $K_{m,n}$.

11. Сколько остовных деревьев имеет граф $K_{2,n}$?

12. Доказать, что эйлеров граф не имеет мостов.

13. Привести пример эйлерова графа, не являющегося гамильтоновым, и гамильтонова графа, не являющегося эйлеровым. Граф имеет 6 вершин.

РАЗДЕЛ 4. ЛАБОРАТОРНЫЕ РАБОТЫ

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 1. *«КОМБИНАТОРИКА»*

Вариант №1.

1. Подсчитать и выписать все размещения без повторений из 4 по 3.

2. Сколько различных слов можно получить, переставляя буквы в слове «математика»?

3. В пассажирском поезде 12 вагонов. Сколькими способами можно рассадить в поезде 4 человека, при условии, что они поедут в различных вагонах?

4. Продаются 10 сортов открыток. Сколькими способами можно купить 8 открыток; 6 различных открыток?

Вариант №2.

1. Подсчитать и выписать все сочетания без повторений из 4 по 3.

2. Сколько различных расписаний при выборе из 11 дисциплин можно составить, если расписание одного дня включает 5 уроков?

3. Сколько различных слов можно получить, переставляя буквы в слове «ручка»?

4. Продаются 8 видов книг. Сколькими способами можно купить 5 книг; 7 различных книг?

Вариант №3.

1. Подсчитать и выписать все размещения с повторений из 4 по 3.

2. Сколькими способами можно составить 3-цветный полосатый флаг, если имеется материал пяти различных цветов?

3. Четверо студентов сдают экзамен. Сколькими способами могут быть поставлены им оценки, если «неуд» не получил никто из них?

4. В группе из 12 человек нужно выбрать 2-х дежурных на 6 дней, причем каждый должен дежурить 1 раз.

Вариант №4.

1. Подсчитать и выписать все сочетания с повторений из 4 по 3.

2. Сколькими способами можно составить 3-цветный полосатый флаг, если имеется материал пяти различных цветов и одна полоса должна быть красной?

3. Сколько различных комбинаций появления герба или цифры может быть при n-кратном бросании монеты?

4. Рота состоит из 3-х офицеров, 6 сержантов и 60 рядовых. Сколькими способами можно выделить отряд из 2-х офицеров, 2-х сержантов и 20 рядовых?

Вариант №5.

1. Подсчитать и выписать все перестановки по 4.

2. Сколько различных слов, каждое из которых содержит 4 буквы, можно составить из слова «выборы»?

3. Имеется 12 сортов газет. Сколькими способами можно выбрать 20 газет; 9 различных газет?

4. Сколько различных слов можно получить, переставляя буквы в слове «карандаш»?

Вариант №6.

1. Подсчитать и выписать все размещения без повторений из 4 по 2.

2. 4 спортсмена должны поразить 8 мишеней каждый по две. Сколькими способами они могут распределит их между собой?

3. Комиссия состоит из председателя, зама и еще 5 человек. Сколькими способами можно распределить обязанности?

4. Номера трамвайных маршрутов обозначают двумя цветными фонарями. Какое количество различных маршрутов можно обозначить используя фонари 8 цветов?

Вариант №7.

1. Подсчитать и выписать все сочетания без повторений из 4 по 2.

2. В вазе стоят 10 красных и 4 розовых гвоздик. Сколькими способами можно выбрать 3 цветка из вазы?

3. Сколько различных слов можно получить, переставляя буквы в слове «компьютер»?

4. Команда из 5 человек выступает на соревнованиях по плаванию, в которых выступают еще 20 спортсменов. Сколькими способами могут быть распределены места, занятые членами этой команды?

Вариант № 8.

1. Подсчитать и выписать все сочетания без повторений из 5 по 4.

2. На школьный вечер танцев собрались ребята 9-х, 10-х и 11-х классов. Вести хоровод приглашаются 10 школьников. Сколькими способами можно составить хоровод при условии участия в нем хотя бы одного одиннадцатиклассника?

3. Из 10 роз и 8 георгинов нужно составить букет, содержащий 2 розы и 3 георгины. Сколько можно составить различных букетов?

4. Замок открывается только в том случае, если набран определенный трехзначный номер. Попытка состоит в том, что набирают наугад три цифры из заданных пяти. Угадать номер удалось только на последней из всех возможных попыток. Сколько попыток предшествовало удачной?

Вариант № 9.

1. Подсчитать и выписать все сочетания с повторениями из 5 по 4.

2. На студенческий вечер собрались юноши и девушки 8 факультетов университета (в том числе математического и филологического). Для исполнения народных танцев приглашаются 10 студентов. Сколькими

способами можно выбрать эту десятку при условии участия в ней хотя бы одного студента математического и хотя бы одного студента филологического факультета?

3. В гастрономе имеются конфеты трех наименований. Конфеты упакованы в коробки трех видов – для каждого наименования своя коробка. Сколькими способами можно заказать набор из пяти коробок?

4. Сколько 5-значных чисел можно образовать из цифр 0 и 1?

Вариант № 10.

1. Подсчитать и выписать все размещения без повторений из 5 по 4.

2. Сколькими способами можно отослать 6 писем разным адресатам, если их будут разносить 3 курьера и заранее известно, какому курьеру какое достанется письмо?

3. Сколько чисел, меньших миллиона, можно записать с помощью цифр 8 и 9?

4. Отряд из 92 школьников собрался в поход. Из них 47 приготовили бутерброды с колбасой, 38 – с сыром, 42 – с ветчиной, 28 – с колбасой и сыром, 31 – с колбасой и ветчиной, 26 – с сыром и ветчиной. Взяли с собой бутерброды всех сортов 25 школьников, а некоторые взяли только по бутылке молока. Сколько было таких, которые взяли только молоко?

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 2. *«БИНОМ НЬЮТОНА»*

Вариант №1.

1. Разложить по формуле бинома Ньютона: $(a+b)^{11}$.
2. Решить уравнение $P_x^2 \cdot C_x^{x-1} = 64$.
3. Сумма биномиальных коэффициентов разложения $\left(2nx + \dfrac{1}{2nx^2}\right)^{3n}$ равна 64. определить слагаемое, не содержащее x.

Вариант №2.

1. Разложить по формуле бинома Ньютона: $(a+b)^{12}$.
2. Решить уравнение $\dfrac{P_x^4}{P_{x+1}^3 - C_x^{x-4}} = \dfrac{24}{23}$.
3. Сумма биномиальных коэффициентов с нечетными номерами в разложении $\left(ax + x^{-\frac{1}{4}}\right)^n$ равна 512. Найти слагаемое, не содержащее x.

Вариант №3.

1. Разложить по формуле бинома Ньютона: $(a+b)^{13}$.
2. Решить уравнение $\dfrac{P_x^5}{C_{x-2}^{x-5}} = 336$.
3. При каких значениях x четвертое слагаемое разложения $(5+2x)^{16}$ больше двух соседних с ним слагаемых?

Вариант №4.

1. Разложить по формуле бинома Ньютона: $(a+b)^{14}$.
2. Решить уравнение $P_x^3 + C_x^{x-2} = 14x$.
3. Известно, что в разложении $\left(\sqrt{\dfrac{b}{a}} + \sqrt[10]{\dfrac{a^7}{b^3}}\right)^n$ имеется член, содержащий ab. Найти этот член.

Вариант №5.

1. Разложить по формуле бинома Ньютона: $(a+b)^{15}$.
2. Решить уравнение $C_{x+1}^{x-2} + 2C_{x-1}^3 = 7(x-1)$.
3. Сумма коэффициентов второго и третьего слагаемых разложения $\left(\sqrt[5]{x^2} - \dfrac{1}{2\sqrt[6]{x}}\right)^n$ равна 25,5. Написать член, не содержащий x.

Вариант №6.

1. Разложить по формуле бинома Ньютона: $(a+b)^6$.
2. Решить уравнение $C_x^1 + 6C_x^2 + 6C_x^3 = 9x^2 - 14x$.
3. Определить P_n^2, если пятое слагаемое разложения $\left(\sqrt[3]{x} + \dfrac{1}{x}\right)^n$ не зависит от x.

Вариант №7.

1. Разложить по формуле бинома Ньютона: $(a+b)^7$.
2. Решить уравнение $P_x^{x-3} = xP_{x-2}$.
3. В какую натуральную степень следует возвести бином $\dfrac{1}{\sqrt{2}} + 3$, чтобы отношение четвертого слагаемого разложения к третьему было равно $3\sqrt{2}$?

Вариант № 8.

1. Разложить по формуле бинома Ньютона: $(a+b)^8$.

2. Решить уравнение $\dfrac{P_{x+2}}{P_{x-1}^{x-4}P_3}=210$.

3. Найти член разложения $\left(\dfrac{x}{a}+\dfrac{a}{x^2}\right)^8$, который содержит x^2.

Вариант № 9.

1. Разложить по формуле бинома Ньютона: $(a+b)^9$.
2. Решить уравнение $P_{x+1}^{x-1}+2P_{x-1}=\dfrac{30}{7}P_x$.
3. Биномиальные коэффициенты второго и девятого членов разложения $\left(5x^{-\frac{3}{2}}-x^{\frac{1}{3}}\right)^n$ равны. Найти член разложения, не содержащий x.

Вариант № 10.

1. Разложить по формуле бинома Ньютона: $(a+b)^{10}$.
2. Решить уравнение $\hat{P}_x^3-2C_x^4=3\hat{P}_x^2$.
3. Найти номер члена разложения $\left(x+x^{-2}\right)^{12}$, не содержащего x.

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 3. *«ТЕОРИЯ ГРАФОВ»*

Нарисуйте произвольный связный неориентированный граф $G=(V,E),\ \ |V|=10$. В этом графе найти:

1) матрицу смежности;
2) матрицу инцидентности;
3) суграф;
4) простой цикл максимальной длины;
5) простую цепь максимальной длины;
6) радиус и диаметр графа, указать центральные и периферийные вершины;
7) дополнение для данного графа;
8) инварианты графа (вектор степеней графа, число внешней устойчивости, число внутренней устойчивости, хроматическое число, число компонент связности, число Хадвигера);
9) остовное дерево.

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 4. *«ТЕОРИЯ ГРАФОВ»*

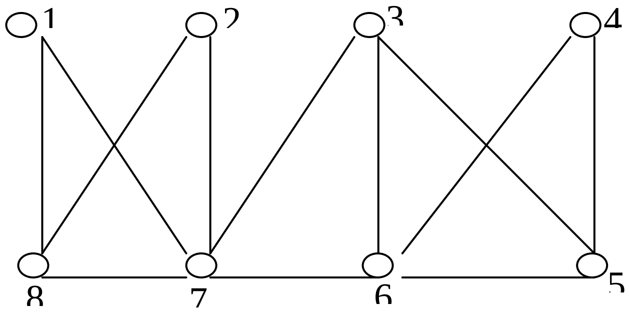
1. Для данного графа по матричной формуле Кирхгофа найти число остовных деревьев графа.

2. Для данного графа, у которого ребра $e=(u,v)$ взвешены числами $w(e)=\dfrac{\deg u+\deg v}{НОД(\deg u,\deg v)}$, найти минимальное остовное дерево:

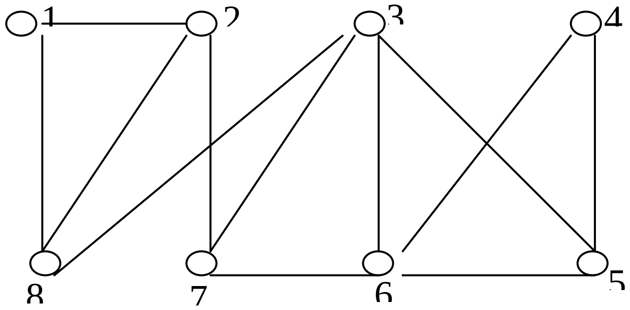
а) с помощью алгоритма Краскала;

б) с помощью алгоритма Прима.

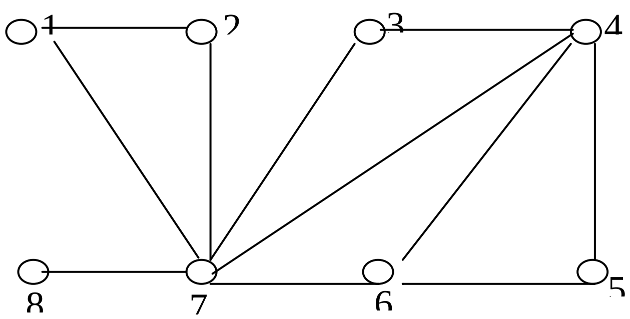
Вариант № 1



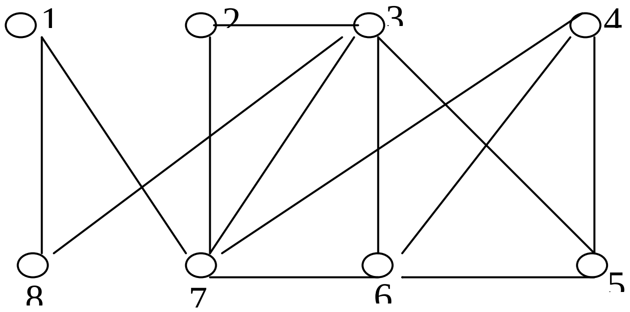
Вариант № 2



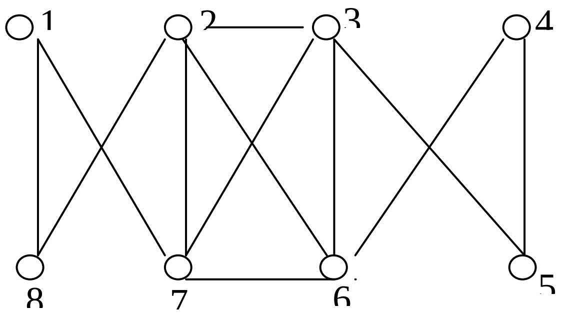
Вариант № 3



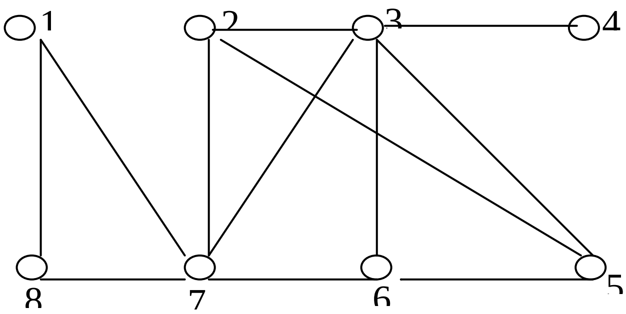
Вариант № 4



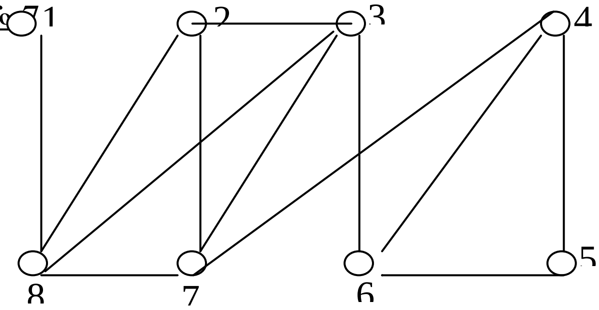
Вариант №5



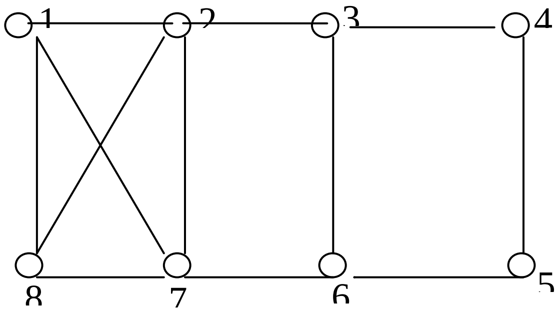
Вариант № 6



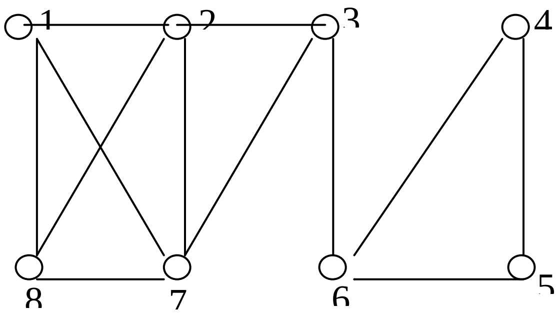
Вариант № 7



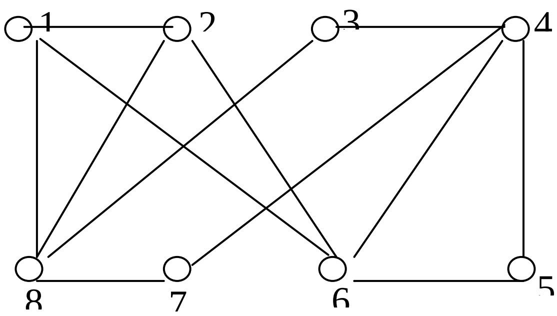
Вариант № 8



Вариант № 9



Вариант № 10



СПИСОК ИСПОЛЬЗУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гаврилов, Г.П. Задачи и упраженения по дискретной математике [Текст]: учеб. пособие/ Г.П. Гаврилов, А.А. Сапоженко.- 3-е изд., перераб. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2006.- 416 с.
2. Годунова, Е.К. Введение в теорию графов. Индивидуальные задания [Электронный ресурс]/ Е.К. Годунова. – Электрон. текстовые данные. – М.: Прометей, 2012. – 44 с. – 978-5-4263-0104-7. – Режим доступа: http://www.iprbookshop.ru/23979.html
3. Кузнецов, О.П. Дискретная математика для инженера [Текст]/ О.П. Кузнецов.- 5-е изд., стер.- СПб.: Лань, 2007.- 400 с.
4. Князьков, В.С. Введение в теорию графов [Электронный ресурс]/ В.С. Князьков, Т.В. Волченская. – 2-е изд. – Электрон. текстовые данные. – М.: Интернет-Университет Информационных Технологий (ИНТУИТ), 2016. – 76 с. – 2227-8397. – Режим доступа: http://www.iprbookshop.ru/73674.html
5. Новиков, Ф.А. Дискретная математика для программистов [Текст]: учеб. пособие для студ. вузов/ Ф.А. Новиков.- СПб.: Питер, 2001.- 304 с.
6. Одинец, В.П. Избранные главы теории графов [Электронный ресурс]/ В.П. Одинец, В.А. Шлензак. – Электрон. текстовые данные. – Москва, Ижевск: Регулярная и хаотическая динамика, Ижевский институт компьютерных исследований, 2009. – 504 с. – 978-5-93972-748-8. – Режим доступа: http://www.iprbookshop.ru/16523.html
7. Поздняков, С.Н. Дискретная математика [Текст]: учеб. пособие для студ. вузов/ С.Н. Поздняков, С.В. Рыбин.- М.: Академия, 2008.- 448 с.
8. Полякова, О.Р. Элементы теория графов и комбинаторики [Электронный ресурс]: учебное пособие/ О.Р. Полякова. – Электрон. текстовые данные. – СПб.: Санкт-Петербургский государственный архитектурно-строительный университет, ЭБС АСВ, 2017. – 84 с. – 978-5-9227-0750-3. – Режим доступа: http://www.iprbookshop.ru/74358.html
9. Топунов, В.Л. Комбинаторика. Практикум по решению задач [Электронный ресурс]: учебное пособие/ В.Л. Топунов. – 2-е изд. – Электрон. текстовые данные. – М.: Московский педагогический государственный университет, 2016. –88 с. – 978-5-4263-0330-0. –

ШАПОШНИКОВА Ольга Ивановна

ДИСКРЕТНАЯ МАТЕМАТИКА

Учебно-методическое пособие для обучающихся I курса направления подготовки 01.03.02 Прикладная математика и информатика

Корректор Чагова О.Х.
Редактор Чагова О.Х.

Сдано в набор 29.03.2024г.
Формат 60х84/16
Бумага офсетная.
Усл. печ.л. 2,32
Заказ № 4875
Тираж 100 экз.

Оригинал-макет подготовлен
в Библиотечно-издательском центре СКГА
369000, г. Черкесск, ул. Ставропольская, 36