МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«СЕВЕРО-КАВКАЗСКАЯ ГОСУДАРСТВЕННАЯ АКАДЕМИЯ»

М. Х. Дудов

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ ЭЛЕКТРОЭНЕРГЕТИКИ

Практикум для обучающихся направления подготовки 13.03.02 «Электроэнергетика и электротехника» всех форм обучения

Черкесск, 2025 г.

УДК 621.3:51
ББК 31.2:22.1
Д 81

Рассмотрено на заседании кафедры «Электроснабжение»
Протокол № 1 от 10 сентября 2024 г.
Рекомендовано к изданию редакционно-издательским советом СКГА.
Протокол № 27 от 11 ноября 2024 г.

Рецензенты: Эркенов Н. Х. – к.т.н., доцент кафедры «Электроснабжение»

Д 81 **Дудов, М. Х.** Математические задачи электроэнергетики: практикум для обучающихся направления подготовки 13.03.02 «Электроэнергетика и электротехника» всех форм обучения / М. Х. Дудов.– Черкесск: БИЦ СКГА, 2025. – 68 с.

В практикуме приведены необходимые теоретические сведения по дисциплине «Математические задачи электроэнергетики». Представлены задания для самостоятельной работы студентов направления подготовки 13.03.02 «Электроэнергетика и электротехника»

УДК 621.3:51
ББК 31.2:22.1

© Дудов М.Х., 2025
© ФГБОУ ВО СКГА, 22025

СОДЕРЖАНИЕ

Введение 5

Раздел 1. Теория вероятностей в электроэнергетике.

Тема 1. Методы теории вероятностей в задачах электроэнергетики. Случайные события в электроэнергетике. Математическое ожидание, дисперсия, стандартное отклонение случайных величин 6

Тема 2. Функции распределения случайных величин. Биномиальное распределение. Гипергеометрическое распределение. Распределение Пуассона. Равномерное распределение. Нормальное распределение (распределение Гаусса). Экспоненциальное распределение. 6

Тема 3. Определение численных характеристик случайных величин. Статистический анализ случайных величин. Статистическое определение среднего, дисперсии, стандартного отклонения случайных величин 9

Тема 4. Определение оптимального резерва мощности в энергосистеме. Дефицит мощности. Матожидание не доотпуска электроэнергии. Определение ущерба при отсутствии резерва. 13

Тема 5. Некоторые сведения о случайных процессах. Математическая модель процесса со случайными отклонениями. Изменения располагаемой мощности и энергии гидростанций. Изменения суммарного спроса мощности и энергии в энергосистемах. Потоки однородных событий в электроэнергетике 15

Тема 6. Корреляционная функция случайного процесса. Сечение случайного процесса. Реализация случайного процесса. Корреляционная связь. Корреляционная функция процесса. Дисперсия для сечения. Коэффициент корреляции 17

Раздел 2. Приближение функций в электроэнергетических задачах.

Тема 1. Методы приближения функций. Функциональные и нефункциональные зависимости. Способы задания функций 19

Методы вычисления функций. Методы приближения функций в электроэнергетике 22

Тема 2. Методы интерполяции. Интерполирование функции. Узлы интерполяции. Интерполирующая функция. Параболическая интерполяция. Точечная интерполяция. Интерполяционный полином Лагранжа. Интерполяционный полином Ньютона. Порядок интерполяционного полинома. Погрешность интерполирования 22

Тема 3. Методы аппроксимации. Аппроксимация функций. Аппроксимирующая функция. Отклонения в узлах. Критерий точности аппроксимации. 24

Тема 4. Методы анализа эмпирических функций. Определение максимума, минимума и корней эмпирических функций. Дифференцирование и интегрирование эмпирических функций. Технология метода «наименьших квадратов». 27

Раздел 3. Методы оптимизации систем электро- и энергоснабжения.
Тема 1. Математическая модель задачи планирования производства. Общая задача оптимального распределения ограниченных ресурсов. Технологическая матрица. Математическое программирование. Симплекс-метод. 30
Тема 2. Линейная транспортная задача. Особенности структуры системы ограничений. Транспортная матрица и матрица издержек. Транспортные модели в электроэнергетике. 38
Тема 3. Метод потенциалов. Свободные и базисные переменные. Потенциалы линейной модели. Задача о назначениях. Алгоритм решения транспортной задачи. Методы теории графов для транспортной задачи. 38
Тема 4. Приближенные методы в транспортной модели. Вычислительная сложность. Допустимая погрешность. Метод штрафных функций. 4
Тема 5. Математические методы оптимизации систем электро- и энергоснабжения. Общая задача оптимизации. Способы задания целевой функции. Критерии принятия решений. 51
Тема 6. Метод неопределенных множителей Лагранжа. Выпуклая целевая функция. Функциональные ограничения. Экстремумы целевой функции. 53
Тема 7. Численные методы оптимизации систем электро- и энергоснабжения. Метод одномерного поиска. Метод наискорейшего спуска. Численные методы в электроэнергетических задачах. 55
Тема 8. Линейное программирование и оптимизация систем. Линейное программирование. Нелинейное программирование. Динамическое программирование. Непрерывные и дискретные модели. Целочисленное программирование. Методы теории графов в задачах электроэнергетики. 56
Методические рекомендации к самостоятельной работе студентов. 63
Рекомендуемая литература 65

ВВЕДЕНИЕ

Целями освоения дисциплины «Математические задачи электроэнергетики» являются:

- формирование у студентов знаний и умений по постановке и анализу инженерно-технических и исследовательских задач электроэнергетики и электротехники с использованием современных математических методов.
- создание необходимой основы для использования современных математических методов при изучении студентами профильных дисциплин в течение всего периода обучения.

Задачи курса:

- познакомить обучающихся с разнообразными математическими методами, с возможностью применения их в электроэнергетике, требованиями к ним и основными характеристиками;
- научить работе с недетерминированными данными, в частности, вероятностными;
- научить принимать и обосновывать технические и технико-экономические решения на базе соответствующих математических методов;
- приобретение студентами прочных знаний и практических навыков в области, определяемой основной целью курса.

Раздел 1. Теория вероятностей в электроэнергетике.

1.1. Методы теории вероятностей в задачах электроэнергетики. Случайные события в электроэнергетике. Математическое ожидание, дисперсия, стандартное отклонение случайных величин.

Аварийные повреждения оборудования являются случайными событиями. При большом числе агрегатов электростанций и элементов сети повреждение одних устройств может сочетаться с повреждением других устройств. Возникает задача определения вероятности одновременного повреждения двух, трех и более устройств (агрегатов) или элементов сети. В ряде случаев необходимо также определять вероятность того, что никаких повреждений в энергосистеме нет, так как эта величина характеризует надежность работы всего оборудования. Эти задачи возникают обычно при необходимости выбора оптимального решения, связанного с обеспечением или надежности работы энергосистемы (выбор оптимального резерва мощности), или надежности питания отдельных потребителей (выбор оптимальной схемы электроснабжения потребителя), или устойчивости энергосистемы (выбор оптимального уровня устойчивости). Во всех этих случаях отдельные повреждения рассматриваются как независимые и совместимые случайные события. Вероятность каждого из них может быть определена как статистическая вероятность на основе длительного наблюдения над аварийностью данного или однотипного оборудования. Для иллюстрации определения вероятности сложных событий рассмотрим примеры.

Пример 1. Определить вероятность повреждения энергетического блока, представляющего собой последовательное соединение парового котла с паровой турбиной и электрическим генератором. Паровая турбина получает весь пар от парового котла. Генератор расположен на одном валу с турбиной, т. е. использует всю ее мощность. Вероятности повреждения отдельных элементов блока известны: $q_K = 0{,}02$; $q_T = 0{,}01$ и $q_Г = 0{,}001$ для котла, турбины и генератора соответственно. Очевидно, что аварийный выход из работы всего блока может иметь место при повреждении хотя бы одного из трех указанных элементов блока. Так как неповреждение является случайным событием, противоположным повреждению, то вероятности неповреждения элементов блока

$$p_K = 1 - 0{,}02 = 0{,}98;\ p_T = 1 - 0{,}01 = 0{,}99;\ p_Г = 1 - 0{,}001 = 0{,}999.$$

Найдем вероятность того, что все элементы блока не повреждены, т. е. блок работает исправно. Так как аварийность каждого элемента можно считать независимой от других элементов, то вероятность того, что все три элемента не повреждены, т. е. вероятность работы блока

$$p_Б = p_K p_T p_Г = 0{,}98 \cdot 0{,}99 \cdot 0{,}999 = 0{,}9692298.$$

Повреждение блока по любой причине является событием, противоположным по отношению к неповреждению блока, поэтому вероятность повреждения блока

$q_Б = 1 - 0{,}9692298 = 0{,}0307702$.

Пример 2. Потребитель питается по двухцепной линии электропередачи. Вероятность повреждения и выхода из строя каждой цепи составляет $q = 0{,}001$. По любой из цепей потребитель может получить всю нужную ему мощность. Какова вероятность сохранения электроснабжения данного потребителя? Потребитель теряет электроснабжение только в случае аварийного выхода обеих цепей. Вероятность этого равна $0{,}001 \cdot 0{,}001 = 0{,}000001$. Вероятность сохранения питания, т. е. надежность энергоснабжения, равна $1 - 0{,}000001 = 0{,}999999$. Если по одной цепи может быть передано только 50% мощности, то вероятность передачи только 50% мощности можно определить так. Вероятность выпадения первой цепи при сохранении второй равна $0{,}001 \cdot 0{,}999 = 0{,}000999$, где второй множитель соответствует вероятности сохранения второй цепи. Вероятность выпадения второй цепи при сохранении первой составляет $0{,}999 \cdot 0{,}001 = 0{,}000999$. Суммарная вероятность выпадения только одной цепи определится как сумма обеих вероятностей, т. е. $0{,}001998$. Вероятность сохранения полной нагрузки, очевидно, равна $0{,}999 \cdot 0{,}999 = 0{,}998001$, а вероятность полной потери питания равна $0{,}001 \cdot 0{,}001 = 0{,}000001$. Заметим, что сумма вероятностей сохранения полной нагрузки, сохранения 50% нагрузки и полной потери питания равна единице, так как эти события составляют полную группу несовместимых событий: $0{,}998001 + 0{,}001998 + 0{,}000001 = 1$.

При большом числе однотипных агрегатов в электрической системе вероятности повреждения различного числа агрегатов могут быть определены по биноминальной формуле вероятности для схемы независимых испытаний (схема Бернулли). Во многих практических случаях при многократных независимых испытаниях могут быть только два исхода: случайное событие А произойдет или не произойдет. Пусть вероятность того, что в каждом из этих независимых испытаний событие А произойдет, равна p, где p – статистическая вероятность. Тогда вероятность противоположного события (событие А не происходит) $q = 1 - p$. Зная p или q, можно определить вероятность того, что в n независимых испытаниях событие А, например повреждение агрегата, случится m раз. Обозначим эту вероятность через P_n^m. Она равна произведению числа комбинаций из n по m на вероятность события в степени m и на противоположную вероятность в степени (n-m):

$$P_n^m = C_n^m p^m q^{n-m} = \frac{n!}{m!(n-m)!} p^m q^{n-m}.$$

Это выражение называют формулой биноминального распределения. Очевидно, что

$$\sum_{m=0}^{n} P_n^m = 1,$$

так как эта сумма охватывает все возможные события (m варьируется от 0 до n).

Пример 3. Пусть в энергосистеме имеется группа из n однотипных агрегатов (например, котлов или турбин), находящихся в совершенно одинаковых условиях; вероятность исправного состояния агрегата равна p, а вероятность противоположного события, т. е. неисправного состояния агрегата (аварийного ремонта), равна q. Найдем вероятность рабочего состояния m агрегатов из числа n, причем m изменяется от 0 до n. Нетрудно убедиться в том, что разложение по формуле биноминального распределения определяет искомый ряд вероятностей. В самом деле, q^n – это, очевидно, вероятность того, что все агрегаты повреждены и число работоспособных агрегатов равно нулю; npq^{n-1} – вероятность того, что только один агрегат находится в рабочем состоянии; $C_n^m p^m q^{n-m} = \dfrac{n!}{m!(n-m)!} p^m q^{n-m}$ – вероятность рабочего состояния m агрегатов; p^n – вероятность того, что все агрегаты находятся в исправном состоянии. Если определять вероятность не рабочего состояния, а аварийного повреждения различного числа агрегатов, то целесообразно записать тот же ряд в следующем порядке:

$$(p+q)^n = p^n + np^{n-1}q + C_n^2 p^{n-2}q^2 + \cdots + C_n^m p^{n-m}q^m + \cdots + q^n = 1,$$

где (m+1)-й член определяет вероятность выхода из работы m агрегатов.

Если, например, $n = 5$, $p = 0{,}98$ и $q = 0{,}02$, то вероятность отсутствия аварийных выходов

$$p^n = 0{,}98^5 = 0{,}905.$$

Вероятность аварии с одним агрегатом

$np^{n-1}q = 5 \cdot 0{,}98^4 \cdot 0{,}02 = 0{,}0923$ и т. д.

Пример 4. Определим вероятность выхода из строя какого-либо количества агрегатов в энергосистеме. Если в системе имеется пять групп однотипных агрегатов с числом агрегатов $n_1 \ldots n_5$ и вероятностями повреждения агрегатов $q_1 \ldots q_5$, то вероятности любых комбинаций одновременных повреждений агрегатов можно найти из разложения выражения $(p_1 + q_1)^{n_1}$.

Так, например, вероятность аварийного выхода двух агрегатов 1-й группы, одного агрегата 3-й группы и одного агрегата 5-й группы равна

$$\left[\frac{n_1(n_1-1)}{1 \cdot 2} \cdot p_1^{n_1-2} \cdot q_1^2\right] \cdot p_2^{n_2} \cdot \left[n_3 p_3^{n_3-1} q_3\right] \cdot p_4^n \cdot \left[n_5 p_5^{n_5-1} q_5\right].$$

Пример 5. В энергетической системе, включающей четыре однотипных генератора, требуется найти вероятность одновременного выхода из строя

нескольких генераторов. Вероятность аварийного выхода каждого $q = 0{,}02$, вероятность рабочего состояния $p = 0{,}98$. Случайной величиной будем считать число агрегатов m, вышедших в аварию. Эта величина является дискретной и может принимать значения 0, 1, 2, 3, 4. Пользуясь формулой биноминального распределения, можно найти вероятность выхода из работы агрегатов

$P_n^m = C_n^m p^{n-m} q^m$.

Сделав подсчет по этой формуле, получим таблицу распределения вероятностей случайной величины – числа аварийных агрегатов:

m	0	1	2	3	4
Вероятность	0,9224	0,07530	0,00230	0,00003	0,00000

Контрольные вопросы.

1. Приведите примеры случайных событий в электроэнергетике.
2. Что такое независимые случайные события?
3. Как по известной вероятности отказа найти среднегодовое время безотказной работы элемента энергосистемы?

Задание.

1. Определить вероятность повреждения энергетического блока, представляющего собой последовательное соединение парового котла с паровой турбиной и электрическим генератором. Паровая турбина получает весь пар от парового котла. Генератор расположен на одном валу с турбиной, т. е. использует всю ее мощность. Вероятности повреждения отдельных элементов блока известны: $q_к$=0,002; $q_т$=0,001 и $q_г$=0,001 для котла, турбины и генератора соответственно.

Тема 1.2. Функции распределения случайных величин. Биномиальное распределение. Гипергеометрическое распределение. Распределение Пуассона. Равномерное распределение. Нормальное распределение (распределение Гаусса). Экспоненциальное распределение.

Биномиальное распределение.

Пусть некоторый опыт повторяется *n* раз и отдельные опыты этой серии не зависят друг от друга. Пусть в каждом опыте может произойти или не произойти событие А, а вероятность его осуществления в отдельном опыте не зависит от номера опыта и равна *p*. Пусть $X^{(n)}$ - число наступлений события А в такой серии из *n* опытов. Очевидно, что возможные значения случайной величины $X^{(n)}$ суть числа 0, 1, 2,..., *n*. Вероятности $P(n,k) = P\left(X^{(n)} = k\right)$ вычисляются по биномиальному закону:

$$P(n,k)=C_n^k p^k q^{n-k},\ q=1-p,\ (k=0,1,\ldots,n).$$

Случайная величина называется биномиально распределенной с параметрами n и p, если возможные значения 0, 1, ..., n она принимает с вероятностями, задаваемыми этой формулой. Параметры n и p полностью определяют биномиальное распределение. На рис.1 показаны «полигоны» биномиальных распределений для $n=20$ и различных p. При этом соответствующие $P(n,k)$ отложены по ординате и соединены ломанной линией. Биномиальный закон описывает в самой общей форме осуществление признака в выборке объемом n с возвратом.

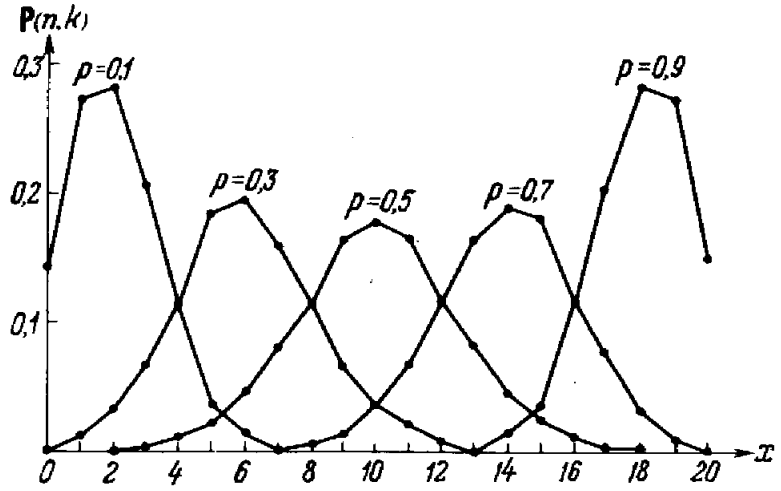


Рисунок 2.1. «Полигоны» биноминального распределения при $n=20$ и различных p.

Пример 6. Пусть вероятность получения бракованного изделия равна 0,01. Какова вероятность того, что среди 100 изделий окажется не более трех бракованных? Согласно биномиальному закону и закону сложения, получаем, что:

$$P(A)=C_{100}^0(0{,}01)^0(0{,}99)^{100}+C_{100}^1(0{,}01)^1(0{,}99)^{99}+$$
$$+C_{100}^2(0{,}01)^2(0{,}99)^{98}+C_{100}^3(0{,}01)^3(0{,}99)^{97}=0{,}9816.$$

Гипергеометрическое распределение.

В урне находится N шаров, из которых ровно M белых. Пусть один за другим без возврата (или одновременно, что одно и то же) вынимается n ($n < M$) шаров. Тогда вероятность того, что среди этих вынутых шаров будет k белых, равна

$$P_{N,M}(n,k)=\frac{C_M^k C_{N-M}^{n-k}}{C_N^n},\ k=0,1,\ldots,n.$$

Случайная величина называется распределенной гипергеометрически, если возможные значения $0,1,\ldots,n$ она принимает с вероятностями, определяемыми этой формулой.

Числа N, M, n – параметры распределения. Гипергеометрическое распределение, таким образом, описывает осуществление признака в выборке без возврата. Если N очень велико по сравнению с n, то не имеет существенного значения, возвращаются шары обратно или нет, и формула

гипергеометрического распределения может быть приближенно заменена формулой биномиального распределения.

Распределение Пуассона.

Случайная величина называется распределенной по закону Пуассона, если она принимает счетное множество возможных значений 0, 1, 2, ...с вероятностями:

$$P_\lambda(k)=\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda},\ k=0,1,\ldots$$

Число λ называется параметром распределения. Распределение Пуассона может использоваться в качестве хорошего приближения биномиального распределения, если n велико, а p мало. Тогда в качестве λ нужно взять np .

Пример 7. Машина проехала 100000 км. Пусть X-число проколов шины на этом расстоянии. Тогда X можно считать случайной величиной, распределенной по закону Пуассона (с подходящим λ), т. е. вероятность трех проколов шины равна $\frac{\lambda}{3!}e^{-\lambda}$.

Пример 8. Рассмотрим пример 6. Имеем $n=100$, $p=0{,}01$. Таким образом, $100\cdot 0{,}01=1$:

$$P(A)\approx\frac{1^0}{0!}e^{-1}+\frac{1^1}{1!}e^{-1}+\frac{1^2}{2!}e^{-1}+\frac{1^3}{3!}e^{-1}=\frac{1}{e}\left(1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{6}\right)=0{,}9810,$$

что дает хорошее совпадение с точным значением, однако вычисляется гораздо быстрее. Распределение Пуассона затабулировано для различных λ.

Равномерное распределение.

Случайная величина называется равномерно распределенной на [a, b], если ее плотность вероятности на [a, b] постоянна, а вне [a, b] равна 0, причем:

$$f(x)=\frac{1}{b-a}.$$

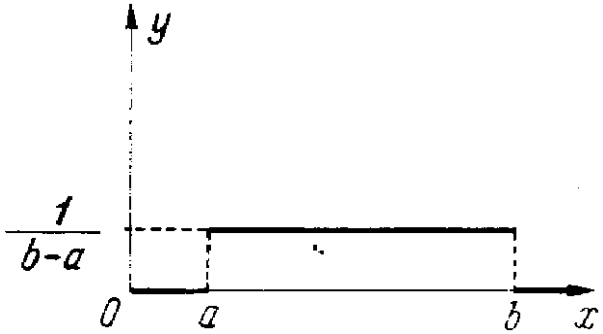


Рисунок 2.2. Равномерное распределение

Нормальное распределение (распределение Гаусса).

Случайная величина называется распределенной нормально, если она имеет плотность вероятности следующего вида:

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-(x-a)^2/(2\sigma^2)},$$

здесь a и σ - параметры распределения.

Эта функция представляет собой колоколообразную кривую.

Параметр a – точка максимума, через которую проходит ось симметрии, параметр σ – расстояние от этой оси до точки перегиба. Если σ мало, то кривая высокая и заостренная: если σ велико, то она широкая и плоская.

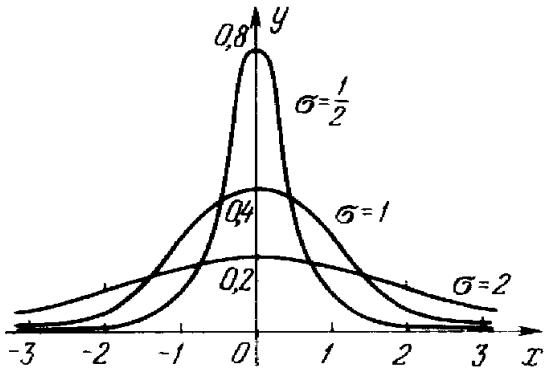


Рисунок 2.3. Нормальное распределение.

Если случайная величина X имеет нормальное распределение, то говорят, что X распределено нормально согласно закону $N(x;a,\sigma)$. Функция $\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2},(a=0,\sigma=1)$ называется плотностью нормированного и центрированного нормального распределения. Плотность вероятности $\varphi(x)$ и соответствующее распределение $\Phi(x)=\int_{-\infty}^{x}\varphi(t)dt$ затабулированы.

Экспоненциальное распределение.

Случайная величина называется экспоненциально распределенной, если она имеет следующую плотность вероятности:

$f(x)=\lambda e^{-\lambda x}$ при $x\geq 0$, $f(x)=0$ при $x<0$.

Число λ называется параметром распределения.

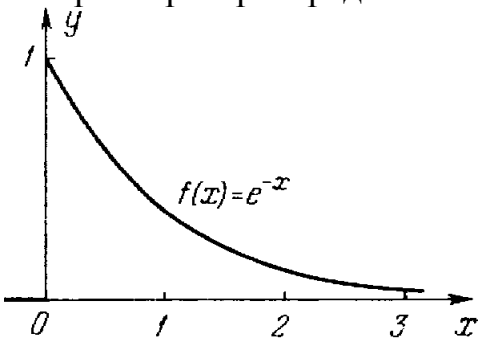


Рисунок 2.4. Экспоненциальное распределение.

Пример 9. Длительность службы электролампы можно рассматривать с хорошим приближением как экспоненциально распределенную величину. На

рис.4 показана плотность вероятности экспоненциального распределения с $\lambda = 1$.

Контрольные вопросы.

1. Дайте определение биномиально распределенной случайной величине.

2. Что такое совместные случайные события?

3. Приведите пример нормально распределенной случайной величины.

Задание.

1. Потребитель питается по двухцепной линии электропередачи. Вероятность повреждения и выхода из строя каждой цепи составляет q=0,001. По любой из цепей потребитель может получить всю нужную ему мощность. Какова вероятность сохранения электроснабжения данного потребителя?

Тема 1.3. Определение численных характеристик случайных величин. Статистический анализ случайных величин. Статистическое определение среднего, дисперсии, стандартного отклонения случайных величин.

Нормальное распределение, как простейшее, так и общее, используют при нахождении вероятностей ошибок прогнозирования нагрузки потребителей энергосистемы, отклонения нагрузки энергосистемы и отдельных ее узлов от средних значений, и т. п. Биноминальное распределение и распределение по закону Пуассона применяют при определении вероятностей различных значений аварийных снижений мощности в энергосистеме и аварийного выхода различного числа агрегатов в группе однотипных и т. д. Равномерное распределение служит основой метода статистических испытаний (метод Монте-Карло), применяющегося при определении резерва мощности, отказа в срабатывании автоматики и т. п. Из-за отсутствия соответствующих статистических материалов не всегда можно задать таблицы распределения вероятностей для дискретных случайных величин или функции распределения и плотности распределения вероятностей для непрерывных случайных величин. Однако и не для всех практических задач требуется знать полные вероятностные характеристики случайной величины. Во многих случаях достаточно знать основные числовые характеристики случайных величин, к числу которых относятся математическое ожидание, дисперсия, стандартное отклонение и моменты случайной величины. Случайная величина может приобретать различные значения, поэтому важно знать ее среднее значение. Однако, если известна совокупность значений случайной величины, то простое среднее значение,

определяемое как сумма возможных значений, разделенная на их число, еще не характеризует действительных условий. Ведь различные значения случайной величины могут иметь различные вероятности, и. поэтому более вероятные значения будут чаще встречаться на практике и в большей мере определять истинное среднее значение случайной величины. Поэтому для оценки среднего (в вероятностном смысле) значения случайной величины вводится понятие математического ожидания, представляющего собой действительно среднее значение случайной величины, определяемое с учетом различных вероятностей отдельных значений. Математическое ожидание (в дальнейшем сокращенно м.о.) случайной величины η будем обозначать как $M(\eta)$. Определим м.о. для случайной дискретной величины. Пусть заданы вероятности различных значений случайной дискретной величины:

Значение η	x_1	x_2	x_3	...
Вероятность	p_1	p_2	p_3	...

Примем, что общее число испытаний составляет n, причем m_1 раз получилась величина x_1, m_2 раз – x_2 и т. п. Тогда м.о., представляющее собой действительное среднее значение случайной величины,

$$M(\eta) = (m_1 x_1 + m_2 x_2 + \ldots)/n = x_1 p_1 + x_2 p_2 + \ldots,$$

так как вероятности $p_1 = m_1/n$, $p_2 = m_2/n$ и т. д.

Таким образом, для дискретной случайной величины:

$$M(\eta) = \sum_k x_k p_k ,$$

причем суммирование происходит по всем значениям дискретной величины x_k, имеющим вероятности p_k.

Аналогично для непрерывной случайной величины:

$$M(\eta) = \int_{-\infty}^{+\infty} x\varphi(x)dx ,$$

где $\varphi(x)$ – плотность вероятности.

Пример 10. Пусть в энергосистеме возможны дефициты мощности 50, 100 и 150 МВт, причем вероятности этих дефицитов соответственно равны 0,001; 0,0004; 0,0002. Требуется определить м.о. недоотпуска энергии за год.

При постоянном дефиците 50 МВт недоотпуск энергии за год составил бы 50·8760 МВтч, при дефиците 100 МВт – 100·8760 МВтч и т. д. Поэтому м.о. недоотпуска

$$M(\eta) = 50 \cdot 8760 \cdot 0{,}001 + 100 \cdot 8760 \cdot 0{,}0004 + 150 \cdot 8760 \cdot 0{,}0002 = 1051$$

МВтч.

Контрольные вопросы.

1. Приведите пример биномиально распределенной случайной величины.

2. Что такое основные числовые характеристики случайных величин?

3. Формулы математического ожидания случайной величины.

Задание.

1. Пусть статистическая вероятность повреждения любой фазы линии составляет 0,001. Если повреждение одной фазы произошло, то повреждение любой другой фазы будет иметь статистическую вероятность 0,2, т. е. условная вероятность повреждения второй фазы при повреждении первой равна 0,2. Кроме того, аналогичные вероятности повреждения третьей фазы при повреждении двух других составляют 0,5. Определить вероятность трехфазного КЗ при условии, что авария началась с повреждения одной фазы.

Тема 1.4. Определение оптимального резерва мощности в энергосистеме. Дефицит мощности. Матожидание недоотпуска электроэнергии. Определение ущерба при отсутствии резерва.

Как пример использования теории вероятностей для выбора оптимального решения рассмотрим в упрощенной форме вопрос о выборе оптимального резерва мощности в энергосистеме.

Пример 11. Энергосистема имеет 10 агрегатов мощностью 100МВт каждый. Вероятность рабочего состояния агрегата p=0,98, а аварийного состояния q=0,02. Максимальная нагрузка энергосистемы равна 1000МВт, т. е. для покрытия этой нагрузки достаточно имеющихся 10 агрегатов. Требуется определить оптимальное число дополнительных агрегатов, если ущерб от недоотпуска энергии составляет 0,6 руб/(кВтч), а расчетные затраты на каждый новый агрегат составляют 1 млн. руб. в год.

Определим м.о. ущерба при отсутствии резерва. Для этого найдем вероятности выхода в аварию одного, двух агрегатов и более.

Из формулы биноминального распределения получим вероятности потери m агрегатов из десяти:

$$p_{10}^1 = 10 \cdot 0{,}98^9 \cdot 0{,}02 \approx 0{,}167;$$

$$p_{10}^2 = \frac{10 \cdot 9}{1 \cdot 2} \cdot 0{,}98^8 \cdot 0{,}02^2 \approx 0{,}015;$$

$$p_{10}^3 = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot 0{,}98^7 \cdot 0{,}02^3 \approx 0{,}001;$$

$$p_{10}^4 \approx 0.$$

Для простоты график нагрузки примем ступенчатым со ступенями 100 МВт каждая. Вероятности нагрузки системы 1000, 900, 800 и 700 МВт равны P (1000) = 0,04; P (900) = 0,08; P (800) = 0,08; P (700) = 0,10. Определим вероятность дефицита в 100 МВт при отсутствии резерва. Такой дефицит может быть в том случае, если при максимальной нагрузке системы (1000МВт) один агрегат находится в аварийном состоянии или если при нагрузке 900 МВт два агрегата находятся в аварийном состоянии и т. д. Поэтому вероятность дефицита в 100 МВт

P_{100}=0,04·0,167+0,08·0,015+0,08·0,001+0,10·0,0000 =0,00796.

Аналогично найдем вероятности дефицитов в 200 и 300 МВт:

P_{200}=0,04·0,015+0,08·0,0001=0,00068;

P_{300}=0,04·0,001+0,08·0,0000=0,00004.

Математическое ожидание недоотпуска энергии за год:

$M(W_н)$ =8760 (100 000·0,00796+200 000·0,00068+300 000·0,00004)·10^{-6} = 8,27 млн. кВтч.

Следовательно, м.о. ущерба за год составит:

М (У) = 4,962 млн. руб.

Рассмотрим вариант установки одного дополнительного агрегата мощностью 100МВт, для чего последовательно определим новые значения вероятностей аварийного выхода различного числа агрегатов, вероятности дефицитов в 100 и 200 МВт и математическое ожидание ущерба от недоотпуска энергии. Затем повторим расчёты для варианта установки двух резервных агрегатов и результаты всех расчётов сведём в таблицу:

Номер вар-та	Число агрегатов	М.о. ущерба за год, млн.руб.	Дополнительные расчётные затраты за год, млн.руб.	Суммарные расчётные затраты.
1	10	4,962	0,0	4,962
2	11	0,528	1,0	1,528
3	12	0,035	2,0	2,035

Оптимальное число агрегатов составляет 11, так как при этом суммарные расчетные затраты минимальны (1,528 млн. руб.). Отсутствие резерва вообще дает перерасход 3,434 млн. руб. в год по сравнению с оптимальным вариантом. Установка двух резервных агрегатов дает перерасход 0,507 млн. руб. в год. Таким образом, оптимальный резерв мощности составляет 10%.

Контрольные вопросы.

1. Что такое ущерб от недоотпуска энергии?
2. Что такое оптимальный резерв мощности в энергосистеме?
3. Как найти вероятность дефицита мощности в энергосистеме?

Задание.

1. Пусть в энергосистеме имеется группа из n однотипных агрегатов (например, котлов или турбин), находящихся в совершенно одинаковых условиях; вероятность исправного состояния агрегата равна p, а вероятность противоположного события, т. е. неисправного состояния агрегата (аварийного ремонта), равна q. Найти вероятность рабочего состояния m агрегатов из числа n, причем m изменяется от 0 до n.

Тема 1.5. Некоторые сведения о случайных процессах. Математическая модель процесса со случайными отклонениями. Изменения располагаемой мощности и энергии гидростанций. Изменения суммарного спроса мощности и энергии в энергосистемах. Потоки однородных событий в электроэнергетике.

Математическая модель процесса со случайными отклонениями может быть представлена в виде соотношения:

$x_i = \varphi(t_i) + \Delta_i$,

где x_i – величины, отражающие ряд наблюдений ($i = 1, 2, \ldots, n$); $\varphi(t_i)$ – некоторая детерминированная функция, отражающая общую тенденцию изменения x_i (иногда называется «детерминированная компонента» или «тренд»); Δ_i – случайные отклонения, имеющие место при протекании процесса. Эту величину можно рассматривать как появление ошибки по отношению к $\varphi(t_i)$, благодаря чему процесс и становится случайным. Такой процесс иногда называется «тренд с ошибкой».

Предположим, что функция $\varphi(t_i)$ задана некоторой формулой $F(t, C_1, C_2, \ldots, C_k)$, в которую входят неизвестные параметры C_i, выбранные так, чтобы $\varphi(t_i) \cong F(t, C_1, C_2, \ldots, C_k)$. Для нахождения C_i применяют обычно метод наименьших квадратов. Если случайность рассматривать как основное свойство процесса, а не как отклонения от основной тенденции изменения, то можно оперировать только со случайными величинами $y_1, y_2, \ldots, y_n$ а не с детерминированными величинами x_i при случайных к ним добавкам Δ_i. Часто встречается случай, когда зависимость $\varphi(t_i)$ неизвестна. При этом также используют соотношение $\varphi(t_i) \cong F(t, C_1, C_2, \ldots, C_k)$, однако функцию F выбирают произвольно. Часто представляют ее многочленом

$\varphi(t) \cong F(t, C_1, \ldots, C_k) = C_1 + C_2 t + C_3 t^2 + \ldots + C_k t^{k-1}$.

Случайные процессы в энергетике связаны, во-первых, с метеорологическими условиями. К числу их можно отнести изменения располагаемой мощности и энергии гидростанций, зависящие от приточности рек; изменения суммарного спроса мощности и энергии в энергосистемах, зависящие как от изменения температуры наружного воздуха, так и от других факторов.

Случайные процессы в энергетике могут быть связаны, во вторых, с потоками однородных событий, таких, как возникновение аварий, окончание аварийных ремонтов и т. п.

Вероятностные методы определения закономерностей, характеризующих случайные процессы в энергетике, пока только разрабатываются; естественно, что методики использования их еще нет, если не считать применения метода Монте-Карло в моделировании и теории массового обслуживания.

Математическое ожидание, дисперсия и стандартное отклонение случайного процесса.

Для каждого конкретного значения времени t случайный процесс характеризуется некоторой случайной величиной, которая называется сечением случайного процесса. Если фиксируется определенное значение времени *t*, то случайный процесс превращается в случайную величину (сечение случайного процесса); если фиксируется определенный конкретный опыт, то случайный, процесс превращается в неслучайную функцию времени (реализация случайного процесса).

Случайный процесс представляет собой бесконечное множество случайных величин или бесконечное множество неслучайных функций времени. Случайные величины, представляющие собой сечения случайного процесса, являются зависимыми величинами, т.е. имеют корреляционную связь. В этой связи и заключается единство процесса. Естественно, что для случайного процесса невозможно найти общий закон распределения вероятности. Тем не менее, количественные характеристики случайного процесса можно получить на основании достаточно большого числа опытов, т. е. на основании статистической обработки большого числа реализаций.

Обозначим величину, характеризующую случайный процесс, через $X(t)$. Математическое ожидание случайного процесса $M[X(t)]$ – это м.о. всех его сечений, в отличие от случайной величины является не конкретной величиной, а конкретной функцией времени. Если обозначить м.о. сечения процесса для данного значения *t* через $m_x(t)$, то очевидно, что:

$$M[X(t)] = m_x(t).$$

Таким образом, искомая неслучайная функция времени $M[X(t)]$ может быть получена следующим образом. Для каждого значения времени путем статистической обработки наблюдений случайных значений находится конкретная величина m_x равная м.о. случайной величины, которая наблюдалась при данном значении *t*. Совокупность значений m_x для всех значений *t* и определяет м.о. случайного процесса в виде функции времени. Аналогично могут быть определены значения дисперсии и стандартного отклонения:

$$D[X(t)] = D_x(t);$$
$$\delta[X(t)] = \delta_x(t).$$

Обе эти величины являются также неслучайными функциями времени и определяются для каждого момента времени на основании обработки наблюдений за значениями случайной величины, в которую превращается процесс при конкретном значении *t*.

Контрольные вопросы.

1. Объясните термин «тренд».
2. Приведите примеры случайных процессов в электроэнергетике.
3. Что такое сечение случайного процесса?

Задание.

1. Определить вероятность вероятность аварийного выхода двух агрегатов 1-й группы, одного агрегата 3-й группы и одного агрегата 5-й группы энергосистемы, если в системе имеется пять групп однотипных агрегатов с числом агрегатов 6, 10, 4, 8, 5 и вероятностями повреждения агрегатов 0,001, 0,0005, 0,002, 0,0003, 0,003.

Тема 1.6. Корреляционная функция случайного процесса. Сечение случайного процесса. Реализация случайного процесса. Корреляционная связь. Корреляционная функция процесса. Дисперсия для сечения. Коэффициент корреляции.

Значений м.о. и дисперсии случайного процесса недостаточно для его полной характеристики, так как отдельные сечения процесса имеют корреляционные связи, т. е. не являются независимыми случайными величинами. Для полной характеристики случайного процесса нужно знать еще одну величину – так называемую корреляционную функцию процесса, которая представляет собой м.о. произведения центрированных значений двух случайных величин для двух произвольных конкретных значений времении t и t'. Обозначая корреляционную функцию для моментов времени t и t' через $K_x(t,t')$, из определения получим:

$$K_x(t,t') = M\left[\dot{X}(t)\dot{X}(t')\right],$$

где центрированное значение $\dot{X}(t)$ равно разности случайной функции времени и ее м.о.:

$$\dot{X}(t) = X(t) - m_x(t).$$

У близких по времени сечений корреляционная связь обычно сильная и величина $K_x(t,t')$ может быть значительной.

Если $t' = t$, то корреляционная функция превращается в дисперсию для данного сечения:

$$K_x(t,t) = M\left[\dot{X}(t)\right]^2 = D_x(t).$$

Если использовать понятие нормированной случайной величины:

$$X_N(t) = \left[X(t) - m_x(t)\right] / \delta_x(t),$$

то очевидно, что м.о. произведения двух нормированных сечений равно коэффициенту корреляции этих сечений:

$$\rho_x(t,t') = K_x(t,t') / \left[\delta_x(t)\delta_x(t')\right] = M\left[X_N(t)X_N(t')\right].$$

При $t' = t$ этот коэффициент:

$$\rho_x(t,t') = D_x(t) / \delta_x^2(t) = 1.$$

Пусть имеется n реализаций некоторого случайного процесса, причем n достаточно велико. Найти основные количественные характеристики

случайного процесса: м.о. $m_x(t)$, дисперсию $D_x(t)$, коэффициенты корреляции $\rho_x(t,t')$.

Для этого выбирают ряд сечений процесса, соответствующих дискретным значениям времени $t_1, t_2, \ldots, t_m$.

Обычно это сечения, равноотстоящие по времени. Однако иногда уменьшают интервалы между сечениями в определенных промежутках времени для более тщательного изучения закономерностей случайного процесса в данной области. Составляют таблицу значений наблюденной случайной функции времени $X(t)$. В этой таблице каждая строка соответствует конкретному опыту, т. е. какой-нибудь реализации процесса; каждый столбец – конкретному значению времени, т. е. какому-нибудь сечению процесса. Тогда м.о. для сечения t_k:

$$m_x(t_x) = \sum_{i=1}^{n} x_i(t_k)/n.$$

Дисперсия для сечения t_k:

$$D_x(t_x) = \sum_{i=1}^{n} [x_i(t_k) - m_x(t_k)]^2 / (n-1).$$

Корреляционный коэффициент для сечений t_k и t_ℓ:

$$\rho_x(t_k, t_\ell) = \frac{\sum_{i=1}^{n} [x_i(t_k) - m_x(t_k)] \cdot [x_i(t_\ell) - m_x(t_\ell)]}{(n-1)\delta_x(t_k)\delta_x(t_\ell)}.$$

По этим формулам строят зависимости $m_x(t)$ и $D_x(t)$ по точкам.

Значения $\rho_x(t,t')$ получают в виде таблицы, где число строк и столбцов равно *m* и соответствует моментам времени t_i. В каждой клетке для строки t_k и столбца t_ℓ помещают вычисленное значение $\rho_x(t_k, t_\ell)$. Полученные числовые значения характеризуют данный случайный процесс. Таким способом могут быть обработаны статистические данные по спросу мощности, показатели изменения приточности рек, определяющие располагаемые мощности и энергию гидростанций, данные по изменению температуры наружного воздуха, влияющие на спрос мощности бытовыми потребителями, и т. п.

Пример 12. Пусть в энергосистеме в течение пяти суток наблюдались следующие мощности спроса (в 1000 МВт) за характерные часы суток 4, 10, 14, 19 и 24.

Часы суток	Мощность спроса за сутки				
	первые	вторые	третьи	четвертые	пятые
4	5	6	4	6	5
10	12	11	10	13	11
14	9	8	8	10	8
19	18	17	17	19	18
24	10	9	8	11	11

Рассматривая спрос как случайный процесс, можно найти м.о., дисперсии, стандартные отклонения и корреляционные коэффициенты для указанных сечений процесса и на основе этих данных предсказать спрос в 19 ч, если в 10 ч утра наблюдался спрос в 12000 МВт. Определим м.о. сечений:

$$M_1 = \frac{5+6+4+6+5}{5} = 5{,}2;$$

$$M_2 = \frac{12+11+10+13+11}{5} = 11{,}4;$$

$$M_3 = \frac{9+8+8+10+8}{5} = 8{,}6;$$

$$M_4 = \frac{18+17+17+19+18}{5} = 17{,}8;$$

$$M_5 = \frac{10+9+8+11+11}{5} = 9{,}8;$$

Вычислим дисперсии, стандартные отклонения и коэффициенты корреляции:

$$\rho_{12} = \frac{(5-5{,}2)(12-11{,}4)+(6-5{,}2)(11-11{,}4)+(4-5{,}2)(10-11{,}4)+}{4\cdot 0{,}837\cdot 1{,}14} \rightarrow$$

$$\rightarrow \frac{+(6-5{,}2)(13-11{,}4)+(5-5{,}2)(11-11{,}4)}{4\cdot 0{,}837\cdot 1{,}14} = 0{,}68;$$

$\rho_{13} = 0{,}468;\ \rho_{14} = 0{,}428;\ \rho_{15} = 0{,}501;\ \rho_{23} = 0{,}928;\ \rho_{24} = 0{,}89;\ \rho_{25} = 0{,}735;$

$\rho_{34} = 0{,}868;\ \rho_{35} = 0{,}554;\ \rho_{45} = 0{,}872.$

$$D_1 = \frac{(5-5{,}2)^2+(6-5{,}2)^2+(4-5{,}2)^2+(6-5{,}2)^2+(5-5{,}2)^2}{4} = 0{,}7;\ \delta_1 = 0{,}837;$$

$D_2 = 1{,}3;\ \delta_2 = 1{,}14;$ $D_3 = 0{,}8;\ \delta_3 = 0{,}895;$ $D_4 = 0{,}7;\ \delta_4 = 0{,}837;$ $D_5 = 1{,}7;\ \delta_5 = 1{,}31.$

Как видно, наиболее сильная корреляционная зависимость имеет место между спросом в 10 и 14, 10 и 19, 14 и 19, 19 и 24 ч.

Контрольные вопросы.

1. Приведите примеры коррелирующих процессов в энергетике.
2. Дайте краткое определение корреляционной функции.
3. Перечислите основные количественные характеристики случайного процесса.

Задание.

1. В энергетической системе, включающей четыре однотипных генератора, требуется найти вероятность одновременного выхода из строя нескольких генераторов. Вероятность аварийного выхода каждого q=0,002. Построить таблицу распределения вероятностей случайной величины - числа аварийных агрегатов.

Раздел 2. Приближение функций в электроэнергетических задачах.

Тема 2.1. Методы приближения функций. Функциональные и нефункциональные зависимости. Способы задания функций. Методы вычисления функций. Методы приближения функций в электроэнергетике.

Известно, что функция может быть задана многими способами, основными из которых являются следующие:

в явном виде с помощью аналитической формулы, содержащей конечное число основных операций (арифметических, алгебраических и т. п.);

в неявном виде с помощью аналитической формулы вида $F(x, y) = 0$, содержащей конечное число операций;

с помощью системы целых многочленов, каждый из которых близок к функции на определенном промежутке изменения независимого переменного; этот способ задания называют способом аппроксимирующих многочленов;

с помощью таблицы значений функции.

Каждый из перечисленных способов задания функции допускает определенный метод вычисления этой функции. Для ряда технико-экономических задач характерно табличное задание функции. Такую функцию с определенной точностью можно заменить другой приближенной функцией, наиболее удобной для математической обработки.

Следует отметить, что точное математическое решение многих задач связано с принципиальными трудностями. При использовании какого-либо приближенного метода решения задачи фактически решается другая, «аппроксимирующая» задача. В связи с этим вопросы приближения функции имеют исключительно важное значение для практических целей.

В ряде задач требования к точности приближенных решений оказываются высокими. Поэтому особое значение имеют такие приближенные методы, которые дают принципиальную возможность находить решения задач со сколь угодно большой точностью путем перехода от одного приближения к последующему по единой схеме, предписываемой данным методом.

Известно несколько способов приближения функций, к основным из которых относятся интерполирование, квадратическое приближение, среднее степенное приближение, равномерное (наилучшее) приближение.

Принцип, лежащий в основе теории интерполирования, заключается в том, что искомый полином $P_n(x)$ в ряде указанных точек должен принимать те же значения, что и данная функция $f(x)$, т.е. разность между искомым полиномом и данной функцией в этих точках должна обращаться в нуль:

$P_n(x) - f(x) = 0$.

При равномерном приближении максимум (в основном промежутке) абсолютного значения разности между $P_n(x)$ и $f(x)$ должен иметь значение, сколь угодно мало отличающееся от нуля:

$\max|P_n(x) - f(x)| \neq 0$.

При степенном приближении функций интеграл вида $\int|P_n(x) - f(x)|^s dx \,(s > 0)$, распространенный на основной промежуток, должен иметь, так же как и при равномерном приближении, значения, сколь угодно мало отличающиеся от нуля. Особенно важен случай, когда $s = 2$ (квадратическое приближение). Средние степенные приближения являются обобщением квадратических и в известном смысле предельный их случай - наилучшие приближения Чебышева.

В практике проектирования и эксплуатации систем промышленного электроснабжения получили применение такие методы приближения функции, как аппроксимирование и интерполирование.

Значения, полученные в результате экономических расчетов, обычно располагают в координатной системе так, что провести по этим точкам достаточно плавную кривую $y_a = f(x)$ невозможно. Это затрудняет описание рассматриваемых зависимостей математически и иногда исключает аналитическое решение задачи. Для выявления характера подобных экономических зависимостей используют указанные выше математические методы.

Это вполне допустимо, потому что полученные в виде точек с координатами $x_1, y_1;\ x_2, y_2; x_3, y_3; x_4, y_4; x_5, y_5; x_6, y_6; x_7, y_7$ данные экономических расчетов отклоняются от плавной кривой зависимости по причинам, которые в экономических расчетах не следует учитывать (например, резкие отклонения стоимостей трансформаторов при переходе от одного габарита к другому, то же при изменениях типов аппаратов в схемах и т. п.). В таких случаях аппроксимация дает более правильный для экономических расчетов характер зависимости.

Контрольные вопросы.

1. Поясните принцип, лежащий в основе теории интерполирования.
2. Перечислите способы задания функций.
3. Какие способы приближения функций Вы знаете?

Задание.

1. Пусть в энергосистеме возможны дефицнты мощности 55, 75 и 150 МВт, причем вероятности этих дефицитов соответственно равны 0,001; 0,002; 0,0002. Требуется определить м.о. недоотпуска энергии за год.

Тема 2.2. Методы интерполяции. Интерполирование функции. Узлы интерполяции. Интерполирующая функция. Параболическая интерполяция. Точечная интерполяция. Интерполяционный полином Лагранжа. Интерполяционный полином Ньютона. Порядок интерполяционного полинома. Погрешность интерполирования.

Интерполирование функции $y = f(x)$ на определенном отрезке состоит в приближенной замене функции $f(x)$ на данном отрезке одной из функций $P_n(x)$, причем функция $P_n(x)$ такова, что в точках $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ она принимает те же значения, что и $f(x)$. Указанные точки $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ называют узлами интерполяции, а $P_n(x)$ – интерполирующей функцией.

Если класс $P_n(x)$ представлен классом степенных многочленов, интерполяцию называют параболической. Параболическая интерполяция весьма удобна: многочлены просты по форме, легко вычисляются, их удобно дифференцировать и интегрировать. Поэтому параболическая интерполяция является наиболее распространенной.

При точечной интерполяции (рекомендуется для экономических расчетов, когда аргумент имеет не более трех-четырех точек) определяют многочлены, значения которых точно совпадают со значениями функции в узлах интерполяции. Степень многочлена (полинома) должна быть на единицу меньше числа точек интерполяции.

Пусть функция $f(x)$ задана таблично, т. е. в узлах интерполяции $x_0, x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ заданы значения функции $y_0, y_1, y_2, y_3, \ldots, y_n$. Требуется найти точку экстремума этой эмпирической функции. Предполагаем, что график функции $f(x)$ является плавной кривой, т. е. касательная к кривой $f(x)$ всюду между узлами интерполяции наклонена к оси Ох под углом, меньшим или большим, но не близким к π/2.

Тогда по значениям функции в узлах интерполяции можно определить отрезок на оси Ох, содержащий точку экстремума. Если функция $y = f(x)$ задана значениями

$x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n$;

$y_0, y_1, y_2, \ldots, y_n$,

то интерполяционный полином Лагранжа для этой функции можно записать следующим образом:

$$P_n(x) = \frac{(x-x_1)\cdots(x-x_n)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)\cdots(x_0-x_n)} y_0 + \frac{(x-x_0)(x-x_2)\cdots(x-x_n)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)\cdots(x_1-x_n)} y_1 + \ldots$$

$$\ldots + \frac{(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{n-1})}{(x_n-x_0)(x_n-x_1)\cdots(x_n-x_{n-1})} y_n$$

В этих формулах x – текущее значение аргумента. Для нахождения P, например при $x_0 < x_a < x_1$, необходимо в формулу интерполяционного полинома Лагранжа вместо x подставить x_a.

Для повышения точности интерполирования стремятся, чтобы интерполирующая функция имела достаточное число параметров (параметрами полинома являются его коэффициенты, т.е. если для приближения используют алгебраический полином степени *n*, то такими параметрами будут *n* + 1 коэффициент полинома), за счет изменения которых можно было бы заставить ее отвечать некоторому числу заданных значений исходной функции. С другой стороны, для простоты вычислений стремятся уменьшить степень полинома $P_n(x)$.

Для одной и той же интерполируемой функции по одним и тем же данным можно составить несколько различных интерполирующих функций, которые будут совпадать между собой и с исходной функцией только в заданных узлах интерполирования, а для промежуточных значений аргумента все интерполирующие функции будут приближенно воспроизводить исходную функцию с различной точностью.

Интерполирование не всегда дает удовлетворительное решение задачи о приближении функции с заданной точностью на данном промежутке, так как совпадение функции $f(x)$ с полиномом $P_n(x)$ в заданных точках не гарантирует малость $[f(x)-P_n(x)]$ на отрезке между этими точками. Поэтому алгебраические полиномы обычно используют, когда функцию нужно приблизить только на сравнительно небольшом участке.

Технология интерполяции в технико-экономических расчетах.

Применение интерполирования для технико-экономических расчетов промышленного электроснабжения вполне приемлемо, так как интерполируемая функция $З = f(x)$ является достаточно плавной кривой, не имеющей резких выбросов, дающих большую погрешность при интерполировании. Погрешность интерполирования можно свести к погрешности того же порядка, которая принята в исходных данных, определяющих узлы интерполирования. Для этого необходимо процесс интерполирования вести с оценкой погрешности. Методы оценки погрешности для интерполирования с помощью степенных полиномов разработаны достаточно хорошо. Процесс интерполирования весьма однообразен: при каждом вычислении все операции повторяются в строго установленном порядке – процесс имеет стройный алгоритм.

Доказано, что для всякой функции $f(x)$ можно найти единственный многочлен $P_n(x)$, который удовлетворяет следующим условиям:

$P_n(x_0) = f(x_0) = y_0;$
$P_n(x_1) = f(x_1) = y_1;$
……
$P_n(x_n) = f(x_n) = y_n.$

Однако формы записи интерполяционного многочлена $P_n(x)$ могут быть различными. Каждая форма имеет свои вычислительные особенности. Так, если использовать интерполяционный полином Ньютона, можно

написать зависимость приведенных годовых затрат от сечения проводов линии $З = f(s)$ следующим образом:

$$З = З_1 + A_1(s - s_1) + B_1(s - s_1)(s - s_2) + C_1(s - s_1)(s - s_2)(s - s_3).$$

Продифференцировав это уравнение для нахождения экстремума, приравняв первую производную нулю и произведя ряд математических преобразований для случая, когда рассматривают три сечения проводов линии s_1, s_2 и s_3, получают:

$$s = \frac{s_1 + s_2}{2} - \frac{\Delta' s_1}{2\alpha},$$

где $\alpha = (\Delta З_2 \cdot \Delta s_1 / \Delta З_1 \cdot \Delta s_2) - 1$; $\Delta s_1 = s_2 - s_1$; $\Delta З_1 = З_2 - З_1$; $\Delta s_2 = s_3 - s_2$; $\Delta З_2 = З_3 - З_2$; $\Delta' s_1 = s_3 - s_1$; $З_1$, $З_2$ и $З_3$ - приведенные затраты, соответствующие сечениям s_1, s_2 и s_3; $s_{эц}$ - экономически целесообразное сечение.

Когда рассматривают четыре сечения, решение приводит к квадратичному уравнению

$$\alpha' s_{э.ц.}^2 + \beta s_{э.ц.} + \gamma = 0,$$

где α', β и γ - коэффициенты, определяемые в зависимости от величин s и З.

Для пяти сечений получают

$$\alpha_1 s_{э.ц.}^3 + \beta_1 s^2{}_{э.ц.} + \gamma_1 s_{э.ц.} + \delta = 0.$$

Решая эти уравнения, определяют экономически целесообразное сечение $s_{эц}$, т. е. сечение, соответствующее минимальным приведенным затратам. При рассмотрении вариантов реконструкции и модернизации систем промышленного электроснабжения в капитальных затратах учитывают суммы возврата за реализацию снятого оборудования с учетом износа его за время нахождения в эксплуатации. Все эти и другие величины могут изменяться, и это отражается на суммах К и $С_э$, но общий закон для определения приведенных затрат, сохраняется.

Практически при равноотстоящих узлах использовать полином Ньютона намного удобнее, так как добавление нового узла с целью улучшения приближения не меняет расчетных данных и приходится вычислять дополнительно только один член, тогда как полином Лагранжа нужно каждый раз считать заново. Однако при неравных промежутках интерполирования полином Ньютона требует вычисления разделенных разностей различных порядков, что усложняет расчеты, в то время как интерполяционный полином Лагранжа исключает подобные вычисления. Хотя для одной и той же функции оба полинома совпадают, внешне они несхожи, так как члены в них сгруппированы различным образом.

Учитывая, что при технико-экономических расчетах систем промышленного электроснабжения имеют место неравно отстоящие узлы (например, шкала напряжений 6, 10, 20, 35, 110, 220 кВ; шкала сечений проводов и жил кабелей 10, 16, 25, 35, 50, 70, 95, 120 мм^2), наиболее целесообразно применять полином Лагранжа. При этом для облегчения вычислений используют цифровые ЭВМ. Важным свойством лагранжевых

коэффициентов является то, что при линейном преобразовании переменного x (в качестве которого используют искомые напряжения, сечения и т. д.) форма лагранжевых коэффициентов не меняется.

При интерполировании функции $f(x)$ по одной из интерполяционных формул на некотором отрезке происходит замена этой функции полиномом $P_n(x)$, совпадающим с ней в $(n + 1)$ данной точке отрезка. В остальных же точках этого отрезка разность

$$R(x) = f(x) - P_n(x)$$

в общем случае отлична от нуля и представляет собой истинную погрешность метода. Величину $R(x)$ называют остаточным членом интерполирования. При построении интерполяционного полинома известны не точные значения интерполируемой функции в узлах интерполяции, а приближенные. За счет этого возникает неустранимая погрешность.

Контрольные вопросы.

1. Зачем интерполируют функции?
2. Что такое параболическая интерполяция?
3. Чем отличаются интерполяционные полиномы Лагранжа и Нъютона?

Задание.

1. Пусть среднемесячная максимальная нагрузка энергосистемы равна 1200МВт. Примем, что отклонения суточных максимумов в рабочие дни данного месяца подчинены закону нормального распределения с известными числовыми характеристиками. Найти вероятность того, что суточный максимум будет колебаться в пределах а) 1250...1300 МВт; б) 1050...1120 МВт. При этом задано, что дисперсия равна 1500.

Тема 2.3. Методы аппроксимации. Аппроксимация функций. Аппроксимирующая функция. Отклонения в узлах. Критерий точности аппроксимации.

В технико-экономических расчетах систем промышленного электроснабжения интерполируемая функция обычно задана таблично и аналитическое выражение ее неизвестно. Поэтому оценка погрешности интерполяционного полинома, строго говоря, является невозможной.

При интерполировании с помощью степенных полиномов с увеличением числа заданных узлов интерполирования возрастает порядок интерполяционного полинома. Однако это не всегда приводит к улучшению приближения функции на рассматриваемом отрезке. В этом случае целесообразнее применять другой способ приближения функции, а именно способ среднеквадратического приближения.

Кроме того, если значения функции в узлах интерполирования определены экспериментально или получены расчетным путем, они всегда содержат ошибки эксперимента или расчета. Поэтому целесообразно выбирать такой способ построения заменяющей функции $P_n(x)$, при котором эти ошибки не оказывали бы существенного влияния на окончательный результат.

Поставим задачу отыскания аналитического выражения, для $y = f(x)$ по заданным значениям аргумента. Для того чтобы задача стала определенной, в качестве аппроксимирующей функции возьмем многочлен $P_n(x)$ степени *n*. Выбор степени многочлена зависит от требуемой точности аппроксимации. Графически это означает, что на плоскости требуется провести параболу *n*-й степени, проходящую насколько возможно ближе ко всем точкам, полученным из расчета или эксперимента.

Метод «наименьших квадратов».

Согласно методу наименьших квадратов наилучшей кривой является та, для которой сумма квадратов отклонений минимальна. Для того чтобы пользоваться методом наименьших квадратов, предварительно выведем правило, которое сведет этот метод при расчетах к достаточно простым вычислительным приемам. Пусть задана эмпирическая функция

$x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{n-1}, x_n$;

$y_1, y_2, y_3, \ldots, y_{n-1}, y_n$.

Для простоты положим, что данную эмпирическую функцию можно аппроксимировать многочленом второй степени

$y = a + bx + cx^2$.

Найдем его коэффициенты a, b и c, т. е. такие их значения, при которых график многочлена проходит возможно ближе к каждой точке (x_i, y_i) где $i = 1,2,\ldots,n$. Обозначив через ε_i отклонения значений y_i от табличных, получим

$\varepsilon_1 = a + bx_1 + cx_1^2 - y_1$;

$\varepsilon_2 = a + bx_2 + cx_2^2 - y_2$;

$\varepsilon_3 = a + bx_3 + cx_3^2 - y_3$;

……

$\varepsilon_n = a + bx_n + cx_n^2 - y_n$.

В этой системе неизвестными являются a, b и c, а значения $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{n-1}, x_n$ – коэффициентами при них.

Наилучшими значениями чисел a, b и c будут такие, при которых сумма квадратов отклонений ε_i будет наименьшей, т. е.

$\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i^2 = \varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \varepsilon_3^2 + \ldots + \varepsilon_n^2 = \min f(a,b,c)$ или

$$\sum_{i=1}^{n}\left(a+bx_i+cx_i^2-y_i\right)^2=\left(a+bx_1+cx_1^2-y_1\right)^2+$$

$$+\left(a+bx_2+cx_2^2-y_2\right)^2+\ldots+\left(a+bx_n+cx_n^2-y_n\right)^2=\min\ f(a,b,c).$$

Для того чтобы функция $f(a,b,c)$ имела наименьшее значение, необходимо, чтобы частные производные по a, b и c (каждая в отдельности) равнялись нулю, т. е.

$$\frac{\partial f}{\partial a}=0;\ \frac{\partial f}{\partial b}=0;\ \frac{\partial f}{\partial c}=0.$$

Взяв частные производные, получим нормальную систему уравнений относительно неизвестных a, b и c:

$$\left(a+bx_1+cx_1^2-y_1\right)+\left(a+bx_2+cx_2^2-y_2\right)+\ldots+\left(a+bx_n+cx_n^2-y_n\right)=0;$$

$$x_1\left(a+bx_1+cx_1^2-y_1\right)+x_2\left(a+bx_2+cx_2^2-y_2\right)+\ldots+x_n\left(a+bx_n+cx_n^2-y_n\right)=0$$

;

$$x_1^2\left(a+bx_1+cx_1^2-y_1\right)+x_2^2\left(a+bx_2+cx_2^2-y_2\right)+\ldots+x_n^2\left(a+bx_n+cx_n^2-y_n\right)=0$$

.

Систему нетрудно записать, пользуясь следующим простым правилом. Чтобы получить первое уравнение нормальной системы, складывают почленно правые части исходной системы и приравнивают эту сумму нулю. Для получения второго уравнения системы правые части каждого уравнения исходной системы умножают соответственно на коэффициент при неизвестном b, складывают произведения и их сумму приравнивают нулю. Таким же образом поступают и для получения третьего уравнения системы: умножают правые части каждого уравнения исходной системы соответственно на коэффициент при *c*, складывают эти произведения и приравнивают их сумму нулю.

Систему уравнений решают обычными алгебраическими методами. Число уравнений системы всегда равно числу неизвестных, в то время как число уравнений системы равно числу пар значений (x_i, y_i). Если желательно методом наименьших квадратов получить удовлетворительное решение, число пар заданных значений должно быть больше, чем число неизвестных коэффициентов a, b, c,..., k.

Приведенное выше правило пригодно и для аппроксимации эмпирической функции многочленом более высокой степени, чем вторая.

Если таблица значений интерполируемой функции получена экспериментальным или расчетным путем, то значения функции, полученные в результате аппроксимации, как правило, лучше исходных. Это объясняется тем, что при аппроксимации по методу наименьших квадратов имеется тенденция к сглаживанию случайных ошибок.

Контрольные вопросы.

1. В чём, по Вашему мнению, достоинства и недостатки интерполировании с помощью степенных полиномов?

2. Поясните принцип, лежащий в основе теории аппроксимации функций.

3. Как «работает» метод наименьших квадратов?

Задание.

1. Найти вероятности ошибки прогнозирования спроса мощности в энергосистеме, если ошибка прогнозирования распределена нормально с величиной м.о., равной нулю. Определить вероятности ошибки прогнозирования в пределах ± 0,5%, ± 1%. ± 2% и более.

Тема 2.4. Методы анализа эмпирических функций. Определение максимума, минимума и корней эмпирических функций. Дифференцирование и интегрирование эмпирических функций. Технология метода «наименьших квадратов».

В технико-экономических расчетах систем промышленного электроснабжения часто требуется отыскать точки экстремума функций, заданных таблично. В таблице задают значения приведенных годовых затрат в зависимости от напряжения или сечения жил кабеля и т. п. В таких задачах функция ежегодных приведенных затрат всегда положительна, а график функции хорошо аппроксимируется параболой второй, третьей или максимум четвертой степени, причем кривая имеет один слабо выраженный минимум. Для отыскания точки экстремума эмпирической функции аппроксимируем ее многочленом степени *n*.

Исходя из специфики технико-экономических задач промышленного электроснабжения, считаем аппроксимацию достаточно хорошей, если среднеквадратическая ошибка $\sigma = \sqrt{\left(\sum_{1}^{n} \varepsilon_i^2 \Big/ n-1 \right)}$ не превышает 10% среднеарифметического табличных значений эмпирической функции. В противном случае аппроксимируют функцию многочленом более высокой степени.

Отыскав методом наименьших квадратов многочлен $P_n(x)$, найдем производную $P_n(x)$ и приравняем ее нулю. Решив уравнение $P_n'(x) = 0$, найдем искомую точку экстремума.

Технология дифференцирования эмпирических функций.

Пусть в результате расчета получена зависимость приведенных годовых затрат З, от сечений кабеля s_i:

$s_i, мм^2 \cdots\cdots\cdots\cdots$	10	16	25	35	50	70	95	120	150	185
$З_i, тыс.р/год \cdots$	360	340	320	290	280	270	300	340	400	470

По расположению точек на плоскости (рис. 2.4.1) видим, что, вероятно, достаточно заданную функцию аппроксимировать многочленом второй степени $З = a + bs + cs^2$.

Составим систему уравнений, характеризующих отклонения:

$\varepsilon_1 = a + 10b + 100c - 360;$

$\varepsilon_2 = a + 16b + 256c - 340;$

$\varepsilon_3 = a + 25b + 625c - 320;$

$\varepsilon_4 = a + 35b + 1225c - 290;$

$\varepsilon_5 = a + 50b + 2500c - 280;$

$\varepsilon_6 = a + 70b + 4900c - 270;$

$\varepsilon_7 = a + 95b + 9025c - 300;$

$\varepsilon_8 = a + 120b + 14400c - 340;$

$\varepsilon_9 = a + 150b + 22500c - 400;$

$\varepsilon_{10} = a + 185b + 34225c - 470;$

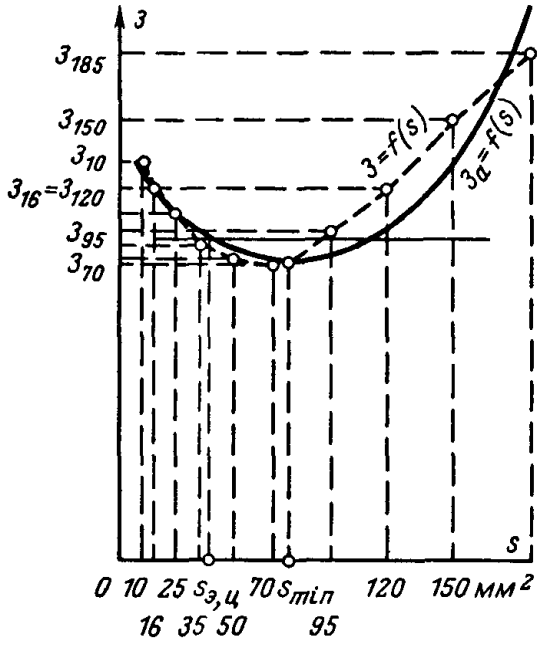


Рисунок 2.4.1. Линия аппроксимирующего многочлена.

Запишем нормальную систему, пользуясь уже известным правилом:

$10a + 756b + 89756c - 3370 = 0;$

$756a + 89756b + 12823596c - 276340 = 0;$

$89756a + 12823596b + 1998638036c - 35390540 = 0.$

Используем для решения системы метод Гаусса. Из коэффициентов при неизвестных в уравнениях системы составим матрицу. Если добавить к ней столбец, состоящий из свободных членов, то получим так называемую расширенную матрицу системы

10	756	89 756	–3 370
756	89 756	12 823 596	–276 340
89 756	12 823 596	1 998 638	–35 390 540

036

Оставляем первую строку без изменения, а вторую и третью преобразовываем. Умножаем все элементы второй строки на –75,6 и результаты прибавляем к соответствующим элементам второй строки. Далее умножаем все элементы первой строки на –8975,6 и результаты прибавляем к соответствующим элементам третьей строки. Множители подбираются так, чтобы все элементы первого столбца, кроме первого элемента, были равны нулю:

10	756	89 756	–3 370
0	32 602	6 038 042	–21 568
0	6 038 042	1 193 024	–5 142 768

082

Теперь все элементы второй строки умножаем на – (6038042/32602) и результаты прибавляем к соответствующим элементам третьей строки. Получаем

10	756	89 756	–3 370
0	32 602	6 038 042	–21 569
0		72 967 217	–1 148 374

Таблица 2.4.1. Зависимости годовых приведенных затрат и их среднеквадратических ошибок от сечения.

Затраты,	Сечение s_i, мм^2									
тыс.руб/год	10	16	25	35	50	70	95	120	150	185
$З_i$	360	340	320	290	280	270	300	340	400	470
З	356	341	321	303	284	272	280	312	384	500
ε_i	–4	+1	+1	+7	+4	+2	–20	–28	–16	+30

В курсе линейной алгебры доказывается, что такие преобразования расширенной матрицы приводят к системе уравнений, эквивалентной исходной. Запишем эту систему:

$$10a + 756b + 89756c - 3370 = 0;$$

$$32602b + 6038042c - 21569 = 0;$$

$$72967217c - 1148374 = 0\ .$$

Из последнего уравнения этой системы находим неизвестное c = 0,02. Решаем второе уравнение системы:

$$32602b + 6038042 \cdot 0{,}02 - 21568 = 0;\ b = -3.$$

Наконец, из первого уравнения находим

$$10a - 756 \cdot b + 89756 \cdot 0{,}02 - 3370 = 0;\ a = 384.$$

Получаем аппроксимирующий многочлен

$З = 384 - 3s + 0{,}02s^2$.

Находим среднеквадратическую ошибку, допустимую при вычислении приведенных годовых затрат, с помощью полученного аппроксимирующего многочлена. Для этого составляем таблицу отклонений (табл. 2.4.1):

$$\sum_{i=1}^{10} \varepsilon_i = -23; \sum_{i=1}^{10} \varepsilon_i^2 = 2\,427\,;\ \sigma = \sqrt{\frac{\sum \varepsilon_i^2}{9}} = \sqrt{\frac{2427}{9}} = 16; \sigma = 16.$$

Полученное приближение достаточно хорошее, потому что σ составляет 5% среднеарифметического табличных значений функций.

Для нахождения точки экстремума дифференцируем полученный многочлен и производную приравниваем нулю:

$З' = -3 + 0{,}04s\,;\quad -3 + 0{,}04s = 0$.

В точке экстремума находим $s_Э = 75$ мм^2.

В технико-экономических расчетах систем промышленного электроснабжения зависимость годовых затрат $З = f(s)$ имеет слабо выраженный минимум, т. е. на некотором участке s_K, s_P, содержащем $З_{min}$ функция мало отклоняется от прямой (рис. 2.4.2).

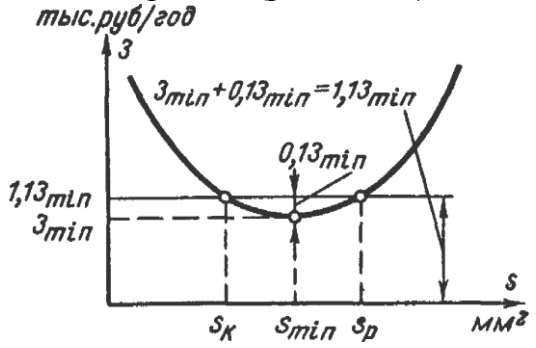


Рисунок 2.4.2. Зависимость годовых затрат $З = f(s)$ к примеру 13.

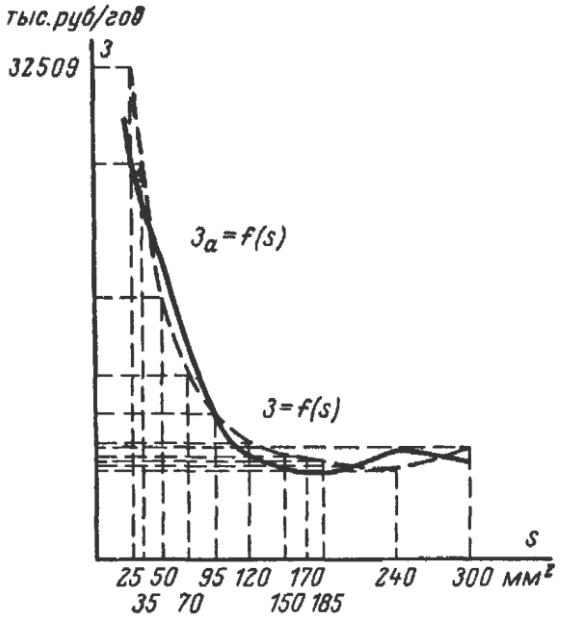


Рисунок 2.4.3. Кривая приведенных готовых затрат к примеру 14.

По экономическим соображениям в пределах допустимой 10%-ной погрешности для значений годовых затрат выгодно взять (из соображений экономии цветного металла) s, как наименьшее допустимое значение аргумента, т. е. $s_к = s_{эц}$ (экономически целесообразное).

Пример 14. Пусть при передаваемой мощности S = 5000 кВА, стоимости электроэнергии 1 руб. за 1 кВтч и других конкретных условиях расчетом получена зависимость годовых приведенных затрат $З_i$ от сечения жилы медного кабеля s:

$s_i, мм^2$ ·····	10	16	25	35	50	70	95	120	150	185
$З_i, тыс.р/год$ ···	82360	45052	32509	25846	17735	12319	9903	7656	6639	5865

Требуется найти экономически целесообразное сечение жилы кабеля. Аппроксимировать данную функцию, зная лишь одну ветвь параболы, нецелесообразно, так как никакой информации о правой ветви мы не имеем. Расчет следует вести до той точки, в которой мы получаем возрастание функции. Продолжая расчеты (увеличивая сечения жил кабеля), получаем значения годовых затрат:

$s_i, мм^2$ ·····	25	35	50	70	95	120	150	185	240	300
$З_i, тыс.р/год$ ···	32509	25846	17735	12319	9903	7656	6639	5865	6000	6775

Нами получена точка $s_i = 240$ мм^2, в которой функция $З_i$ возрастает.

По расположению точек на плоскости (на рис. 2.4.3 кривая приведенных готовых затрат изображена пунктирной линией) видно, что вполне допустима квадратичная аппроксимация функции, т. е. $З = a + bs + cs^2$.

Составим систему уравнений, характеризующих отклонения:

$$\varepsilon_1 = a + 25b + 625c - 32509;$$
$$\varepsilon_2 = a + 35b + 1225c - 25846;$$
$$\varepsilon_3 = a + 50b + 2500c - 17735;$$
$$\varepsilon_4 = a + 70b + 4900c - 12319;$$
$$\varepsilon_5 = a + 95b + 9025c - 9903;$$
$$\varepsilon_6 = a + 120b + 14400c - 7656;$$
$$\varepsilon_7 = a + 150b + 22500c - 6639;$$
$$\varepsilon_8 = a + 185b + 34225c - 5865;$$
$$\varepsilon_9 = a + 240b + 57600c - 4916;$$
$$\varepsilon_{10} = a + 300b + 90000c - 6775;$$

Запишем уравнения для нормальной системы:

$$10a + 1\,270b + 237\,000c - 130\,160 = 0;$$
$$1\,270a + 237\,000b + 53\,642\,500c - 10\,619\,140 = 0;$$
$$237\,000a + 53\,642\,500b + 13\,416\,322\,500c - 1\,599\,319\,800 = 0.$$

Решив систему методом Гаусса, получим следующие значения:

$$a = 34\,018; \quad b = -296; \quad c = 0{,}7.$$

Таким образом, аппроксимирующий многочлен примет вид

$З = 34\,018 - 296s + 0{,}7s^2$.

Определим степень приближения по таблице склонений (табл. 2.4.2). Без вычисления среднеквадратической ошибки по одним только отклонениям можно судить, насколько плохо аппроксимирует многочлен второй степени заданную функцию. Аппроксимируем функцию многочленом третьей степени. Полагаем,

$З = a + bs + cs^2 + ds^3$.

Составим систему отклонений; при этом используем данные предыдущего расчета:

$\varepsilon_1 = a + 25b + 625c + 15\,625d - 32\,509;$

$\varepsilon_2 = a + 35b + 1\,225c + 42\,875d - 25\,846;$

$\varepsilon_3 = a + 50b + 2\,500c + 125\,000d - 17\,735;$

$\varepsilon_4 = a + 70b + 4\,900c + 343\,000d - 12\,319;$

$\varepsilon_5 = a + 95b + 9\,525c + 857\,380d - 9\,903;$

$\varepsilon_6 = a + 120b + 14\,400c + 1\,728\,000d - 7\,656;$

$\varepsilon_7 = a + 150b + 22\,500c + 3\,375\,000d - 6\,639;$

$\varepsilon_8 = a + 185b + 34\,225c + 6\,331\,600d - 5\,865;$

$\varepsilon_9 = a + 240b + 57\,600c + 13\,824\,000d - 4\,916;$

$\varepsilon_{10} = a + 300b + 90\,000c + 27\,000\,000d - 6\,775.$

Таблица 2.4.2 Степень приближения при использовании аппроксимирующего многочлена.

Затраты,	Сечение s_i, мм^2									
тыс.руб/г	25	35	50	70	95	120	150	185	240	300
$З_i$	32509	25846	17735	12319	9903	7656	6639	5865	6000	6775
З	27056	24516	20968	16728	12216	8578	5368	3216	3298	8218
ε_i	+5453	+1330	–3233	–4409	–2313	–992	+1271	+2649	–2702	-1443

Запишем нормальную систему

$10a + 1270b + 237 \cdot 10^3 c + 53632 \cdot 10^3 d - 130160 = 0;$

$1270a + 237 \cdot 10^3 b + 53642 \cdot 10^3 c + 13416 \cdot 10^3 d - 10619 \cdot 10^3 = 0;$

$37 \cdot 10^3 a + 53642 \cdot 10^3 b + 13416 \cdot 10^6 c + 35536 \cdot 10^8 d - 15993 \cdot 10^6 = 0;$

$53642 \cdot 10^3 a + 13416 \cdot 10^6 b + 35536 \cdot 10^8 c + 97544 \cdot 10^{10} d - 34020 \cdot 10^7 = 0.$

После преобразования уравнений получим

$a + 127b + 237 \cdot 10^2 c + 53632 \cdot 10^2 d - 13016 = 0;$

$127a + 237 \cdot 10^2 b + 53642 \cdot 10^2 c + 13416 \cdot 10^5 d - 10619 \cdot 10^2 = 0;$

$237a + 53642b + 13416 \cdot 10^3 c + 35536 \cdot 10^5 d - 15993 \cdot 10^2 = 0;$

$53642a + 13416 \cdot 10^3 b + 35536 \cdot 10^5 c + 97544 \cdot 10^7 d - 34020 \cdot 10^4 = 0.$

Решаем нормальную систему методом Гаусса:

$$\begin{pmatrix} 1 & 127 & 237\cdot10^2 & 53\,642\cdot10^2 & -13\,016 \\ 127 & 237\cdot10^2 & 53\,642\cdot10^2 & 13\,416\cdot10^5 & -10\,619\cdot10^2 \\ 237 & 53\,642 & 13\,416\cdot10^3 & 35\,536\cdot10^5 & -15\,993\cdot10^2 \\ 53\,642 & 13\,416\cdot10^3 & 35\,536\cdot10^5 & 97\,544\cdot10^7 & -34\,020\cdot10^4 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 127 & 237\cdot10^2 & 53\,642\cdot10^2 & -13\,016 \\ 0 & 7581 & 23\,543\cdot10^2 & 66\,035\cdot10^4 & 59\,113\cdot10 \\ 0 & 23\,543 & 77\,991\cdot10^2 & 22\,823\cdot10^6 & 14\,855\cdot10^2 \\ 0 & 66\,035\cdot10^2 & 22\,823\cdot10^5 & 68\,769\cdot10^7 & 35\,800\cdot10^4 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 127 & 237\cdot10^2 & 53\,642\cdot10^2 & -13\,016 \\ 0 & 7581 & 23\,543\cdot10^2 & 66\,035\cdot10^4 & 59\,113\cdot10 \\ 0 & 0 & 48\,782\cdot10 & 23\,158\cdot10^4 & -35\,025\cdot10 \\ 0 & 0 & 23\,156\cdot10^4 & 11\,249\cdot10^7 & -15\,691\cdot10^4 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 127 & 237\cdot10^2 & 53\,642\cdot10^2 & -13\,016 \\ 0 & 7581 & 23\,543\cdot10^2 & 66\,035\cdot10^4 & -59\,113\cdot10 \\ 0 & 0 & 48\,782\cdot10 & 23\,158\cdot10^4 & -35\,025\cdot10 \\ 0 & 0 & 0 & 25\,636\cdot10^5 & 93\,467\cdot10^2 \end{pmatrix}.$$

Из последней строки матрицы получаем уравнение

$25\,636\,000d + 93\,467 = 0,$

откуда $d = -0{,}004$.

Из предпоследней строки матрицы получаем

$48\,782c - 0{,}004 \cdot 23158\,000 - 35\,025 = 0;$

следовательно, $c = 2{,}6$.

Таблица 2.4.3. Таблица отклонений при использовании аппроксимирующего многочлена.

Затраты,	Сечение s_i, мм^2									
тыс.руб/г	25	35	50	70	95	120	150	185	240	300
$З_i$	32509	25846	17735	12319	9903	7656	6639	5865	6000	6775
З	29200	25200	20000	14000	10000	7133	6000	5424	6749	6125
ε_i	–3309	–646	+2265	+1691	+97	–523	–639	–441	+749	–650

В соответствии со второй сверху строкой матрицы записываем

$7\,581b + 2{,}6 \cdot 2\,354\,300 - 0{,}004 \cdot 660\,350\,000 - 13\,016 = 0,$

или $b = -536$.

Наконец, из первой строки матрицы имеем

$a - 536 \cdot 127 + 2{,}6 \cdot 23\,700 - 0{,}004 \cdot 5\,364\,200 - 13\,016 = 0,$

откуда $a = 40\,925$.

Таким образом, найдем аппроксимирующий многочлен третьей степени

$$З = 40\,925 - 536 \cdot s + 2{,}6 \cdot s^2 - 0{,}004 \cdot s^3.$$

Составим таблицу отклонений (табл. 2.4.3), чтобы выяснить, достаточно ли хорошо этот многочлен аппроксимирует заданную эмпирическую функцию. Найдем среднеквадратическую ошибку:

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum \varepsilon_i^2}{n-1}} = \sqrt{\left(3309^2 + 646^2 + 2265^2 + 1691^2 + 97^2 + 523^2 + 639^2 + 441^2 + 749^2 + 650^2\right)/(10-1)} = 1290$$

.

Среднеарифметическое табличных значений функции равняется 13125. Как видим, среднеквадратическая ошибка составляет 9,8 % этого значения, т. е. погрешность аппроксимации лежит в допустимых пределах.

На рис. 2.4.3 сплошной линией построена кривая аппроксимирующего многочлена. Найдем точку экстремума полученной кубической параболы:

$$З' = -536 + 5{,}2 \cdot s - 0{,}012 \cdot s^2;$$

$$0{,}012 \cdot s_э^2 - 5{,}2 \cdot s_э + 536 = 0;$$

$$s_{\min} = 170 \text{ мм}^2.$$

Учитывая, что погрешность аппроксимирования близка к 10% табличных значении функции, не следует искать иное экономически целесообразное сечение кабеля. Итак, $s_{эц}$ = 170 мм^2, или ближайшее стандартное сечение $s_{эц}$ = 185 мм^2.

Контрольные вопросы.

1. Перечислите точки экстремума функций.
2. Что такое «допустимая среднеквадратическая ошибка»?
3. Как решить систему линейных уравнений методом Гаусса?

Задание.

1. Энергосистема имеет 10 агрегатов мощностью 100МВт каждый. Вероятность рабочего состояния агрегата p=0,998. Максимальная нагрузка энергосистемы равна 950МВт, т. е. для покрытия этой нагрузки достаточно имеющихся 10 агрегатов. Требуется определить оптимальное число дополнительных агрегатов, если ущерб от недоотпуска энергии составляет *a* руб/(кВт-ч), а расчетные затраты на каждый новый агрегат составляют *b* млн. руб. в год.

Раздел 3. Методы оптимизации систем электро- и энергоснабжения.

Тема 3.1. Математическая модель задачи планирования производства. Общая задача оптимального распределения ограниченных ресурсов. Технологическая матрица. Математическое программирование. Симплекс-метод.

Рассмотрим для примера простейшую задачу оптимального распределения ограниченных ресурсов.

Некоторое предприятие может производить два вида продукции – X и Y, используя при этом ресурсы трёх типов:

A – электроэнергия,

B – капитальные ресурсы,

C – трудовые ресурсы.

Технология и организация производства таковы, что матрица норм расхода (технологическая матрица) имеет следующий вид:

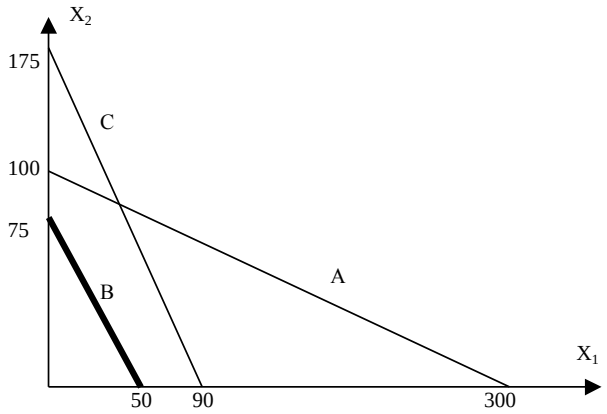
	Удельный расход ресурса на производство продукта X	Удельный расход ресурса на производство продукта Y
Электроэнергия, кВт·час.	5	15
Стоимости основных фондов, руб.	3	2
Труд, чел-час.	8	4

Найти план производства, обеспечивающий наибольшую прибыль при условии, что предприятие располагает оплаченным объёмом ресурсов (складской запас) соответственно 1500 кВт·час, 150 руб. и 700 чел-час., а удельная прибыль продуктов равны 10 и 12 руб/ед.

Математическая модель задачи:

$$\begin{cases} 5x_1 + 15x_2 \le 1500 \\ 3x_1 + 2x_2 \le 150 \\ 8x_1 + 4x_2 \le 700 \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0 \\ Z = 10x_1 + 12x_2 \to \max \end{cases}$$

Графическая интерпретация:



Известно, что оптимальное решение находится в одной из вершин области допустимых решений, представляющей собой в двумерном случае выпуклый многоугольник – симплекс, в данном случае треугольник. Подставив в целевую функцию Z поочередно координаты вершин треугольника, образованного прямой В (ограничение по капитальному ресурсу) и осями Ox_1, Ox_2, получаем искомый оптимальный план производства: $x_1 = 0;\ x_2 = 75.$

В математическом программировании наиболее теоретически разработанными, проверенными и широко используемыми на практике являются задачи линейного программирования.

Модель задачи планирования производства называют также задачей планирования сырья или производственных мощностей.

Предположим, что предприятие выпускает n наименований продукции. Обозначим через a_{ij} затраты *i*-го вида ресурсов (i = 1,2,..., m) на производство единицы продукции *j*-го вида (j = 1,2,..., n), через b_i –объемы имеющихся ресурсов (i = 1,2,..., m), через c_j – прибыль, получаемую предприятием при реализации единицы *j*-го вида продукции.

Требуется составить план производства продукции, который удовлетворял бы заданным ограничениям по ресурсам на выпуск каждого вида продукции с имеющимися технологическими способами производства и давал бы наибольшую прибыль предприятию.

Математическая формулировка задачи состоит в следующем: найти план производства продукции

$$x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

при ограничениях

$$\sum_{j}^{n} a_{ij} x_j \le b_i,\ i = 1,2,\ldots,m;$$

$$x_j \ge 0,\ j = 1,2,\ldots,n$$

и при этом общая прибыль от производства и реализации продукции была бы максимальной, т. е.

$$\sum_{j}^{n} c_j x_j = z \to \max.$$

Если предприятию наперед заданы нижняя (α_j) и верхняя (β_j) границы по объему выпуска *j*-ой продукции, то в модель задачи войдут ограничения типа

$$\alpha_j \le x_j \le \beta_j.$$

Симплекс-метод.

Основным алгоритмом решения задач линейного программирования является симплекс-метод. Его можно применять в том случае, когда задача программирования задана в специальном, каноническом виде. Каждую задачу линейного программирования с непустой допустимой областью можно привести к такому виду. Уравнения ЗЛП

$$a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$a_{m1}x_1 + \ldots + a_m x_n = b_m,$$

$$x_1 \ge 0, \ldots, x_n \ge 0,$$

$$Q(x) = p_1 x_1 + \ldots + p_n x_n$$

имеют канонический вид, если каждое *i*-е уравнение содержит переменное x_{λ_i} такое, что коэффициент перед ним в этом уравнении равен 1, а во всех других уравнениях равен 0. Если при этом $b_i \ge 0$ для всех *i*, то говорят о допустимом каноническом виде. Переменные x_{λ_i} называются базисными, остальные – свободными. В следующем примере, относящемся к допустимому каноническому виду, мы отметим базисные переменные подчеркиванием:

$$3x_1 + \underline{x_2} + 2x_3 = 5,$$

$$-x_1 + 3x_3 + \underline{x_5} = 9,$$

$$x_1 - 4x_3 + \underline{x_4} = 1.$$

Здесь $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = 5, \lambda_3 = 4$. Если уравнения заданы в канонической форме, то целевая функция легко может быть выражена через свободные переменные. Если целевая функция имеет вид

$$Q(x) = x_1 + 13x_2 + 2x_3 + 17x_4 + 3x_5,$$

то вычитанием из этого выражения первого уравнения, умноженного на 13 (так как там выделено переменное x_2, а в целевой функции x_2 имеет коэффициент 13), второго уравнения, умноженного на 3, и, наконец, третьего уравнения, умноженного на 17, получим целевую функцию $Q(x) = -52x_1 + 35x_3 + 109$. Вместе с уравнениями канонического вида и условиями знака она описывает ЗЛП в каноническом виде:

$$3x_1 + \underline{x_2} + 2x_3 = 5,$$

$$-x_1 + 3x_3 + \underline{x_5} = 9,$$

$x_1 - 4x_3 + \underline{x_4} = 1,$

$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0, \ldots, x_5 \geq 0,$

$Q_{\min} = -52x_1 + 35x_3 + 109.$

Значение величины $Q_{\min}$ при нулевых значениях свободных переменных обозначим через Q_0. Здесь $Q_0 = 109$.

ЗЛП канонического вида может быть записана в таблице следующего вида. Левый крайний столбец содержит номера λ_i, базисных переменных, верхняя строчка – номера λ_{m+j} свободных переменных. В точке пересечения строки, соответствующей значению λ_i и столбца, соответствующего λ_{m+j} стоит коэффициент $a_{i,\lambda_{m+j}}$ при свободной переменной в уравнении i, в котором выделена базисная переменная x_{λ_i}. Соответственно справа записаны постоянные члены уравнений, внизу – коэффициенты целевой функции от свободных переменных, а в правом нижнем углу записано значение $-Q_0$.

	λ_{m+1}	$\cdots$	λ_n	
λ_1	$a_{1\lambda_{m+1}}$	$\cdots$	$a_{1\lambda_n}$	b_1
$\vdots$	$\vdots$			
λ_m	$a_{m\lambda_{m+1}}$	$\cdots$	$a_{m\lambda_n}$	b_m
	$p_{\lambda_{m+1}}$	$\cdots$	p_{λ_n}	$-Q_0$

Для нашего примера

	1	3	
2	3	2	5
5	−1	3	9
4	1	−4	1
	−52	35	−109

Так как решение ЗЛП достигается по крайней мере в одной вершине допустимой области, то достаточно рассмотреть значения целевой функции только в вершинах. Данной допустимой симплекс–таблице соответствует одно базисное решение, т. е. одна вершина. Проверка выделяет ту вершину, которую следует считать оптимальной. В других случаях способ ведет или к заключению, что задача неразрешима (т. е. минимальное значение целевой функции в допустимой области равно $-\infty$), или к новому базисному решению, в котором значение целевой функции не больше, чем в первом. В общем случае после конечного числа шагов достигается вершина, в которой целевая функция имеет оптимальное значение. При наличии вырожденных вершин в очень редких, исключительных случаях может оказаться, что мы снова и снова будем проходить один и тот же цикл базисных решений,

относящихся к одной и той же вырожденной вершине. Этот особый случай будет рассмотрен ниже. Допустимой симплекс-таблице соответствует точка минимума, если все коэффициенты целевой функции неотрицательны:

$$p_{\lambda_{m+1}} \geq 0, \ldots, p_{\lambda_n} \geq 0.$$

Тогда минимальное значение целевой функции равно Q_0. (Этот критерий становится понятным, если вспомнить, что все переменные в целевой функции могут принимать только неотрицательные значения.) Если все коэффициенты целевой функции положительны, то вершина, соответствующая таблице, является единственной оптимальной точкой. Если критерий не выполнен, т. е. не все коэффициенты целевой функции неотрицательны, то следует перейти от одного допустимого базисного решения к соседнему допустимому, т. е. такому, в котором множества базисных и свободных переменных изменены на один элемент. В невырожденном случае этому геометрически соответствует переход от одной вершины к другой вдоль ребра допустимой области (обе вершины принадлежат одному ребру). Этот процесс называют также симплекс-шагом или заменой базиса. Опишем последовательно его этапы.

1) Выбор разрешающего столбца: среди элементов последней строки таблицы выбирается любой $p_{j^*} < 0$, и соответствующий столбец называется разрешающим. В качестве p_{j^*} рекомендуется выбирать минимальное p_j.

2) Выбор разрешающей строки: если $a_{ij^*} \leq 0$ для всех элементов разрешающего столбца, то минимума не существует (целевая функция в допустимой области не ограничена снизу). Если это не так, то для всех положительных a_{ij^*} нужно вычислить отношения b_i / a_{ij^*}. Строка i, для которой отношение минимально, называется разрешающей строкой i^*:

$$\min_{a_{ij^*}>0} \frac{b_i}{a_{ij^*}} = \frac{b_{i^*}}{a_{i^* j^*}};$$

общий элемент $a_{i^* j^*}$ разрешающего столбца и разрешающей строки называется разрешающим элементом.

3) Замена базиса при помощи разрешающего элемента $a_{i^* j^*}$ – процесс, производящий в таблице преобразования канонического вида, при котором базисное переменное x_{i^*} становится свободным и одновременно свободное переменное x_{j^*} становится базисным. Если w – какое-либо значение в таблице, то через $\hat{w}$ будем обозначать значение, стоящее в новой таблице на том же самом месте:

$$\text{а)} \ \hat{i}^* = j^*, \ \hat{i} = i \ \text{для всех} \ i \neq i^*,$$
$$\hat{j}^* = i^*, \ \hat{j} = j \ \text{для всех} \ j \neq j^*.$$

б) $\hat{a}_{i^*j^*} = \dfrac{1}{a_{i^*j^*}}$; $\hat{a}_{ij^*} = -a_{ij^*}\hat{a}_{i^*j^*}$ для всех $i \neq i^*$,

$$\hat{p}_{j^*} = -p_{j^*}\hat{a}_{i^*j^*}.$$

в) $\hat{a}_{i^*j} = a_{i^*j}\hat{a}_{i^*j^*}$ для всех $j \neq j^*$; $\hat{b}_{i^*} = b_{i^*}\hat{a}_{i^*j}$.

Отметим, что элементы правого столбца и нижней строки пересчитываются по тому же принципу, что и элементы в центральной части таблицы. То же имеет место и в г) и д).

г) $\hat{a}_{ij} = a_{ij} - \hat{a}_{i^*j}a_{ij^*}$ для всех $i \neq i^*$ и $j \neq j^*$,

$$\hat{p}_j = p_j - \hat{a}_{i^*j}p_{j^*} \text{ для всех } j \neq j^*.$$

При вычислениях вручную рекомендуется проделать вычисления г) по столбцам для каждого $j \neq j^*$ Заметим, что

(новый столбец) = (старый столбец) −

$$-\begin{pmatrix}\text{то, что уже}\\ \text{стоит в новом}\\ \text{столбце после}\\ \text{выполнения в)}\end{pmatrix}\cdot\qquad\begin{pmatrix}\text{разреша-}\\ \text{ющий стол-}\\ \text{бец}\end{pmatrix}.$$

«То, что уже стоит в новом столбце после выполнения в) » есть число $\hat{a}_{i^*j}$ постоянное при пересчете каждого столбца.

д) $\hat{b}_i = b_i - \hat{b}_{i^*}a_{ij^*}$ для всех $i \neq i^*$, $(-\hat{Q}_0) = (-Q_0) - \hat{b}_{i^*}p_{j^*}$.

Правый столбец таблицы преобразуется аналогично нормальному разрешающему столбцу, остается неизменным также правило преобразования такого столбца, сформулированное в г). Единое для столбца число, уже имеющееся после в), здесь есть $\hat{b}_{i^*}$.

Пример 15.

$$\begin{aligned}
&2x_1 - x_3 + 3x_4 + \underline{x_8} = 1,\\
&\underline{x_2} + 3x_4 = 2,\\
&2x_1 + \underline{x_7} = 6,\\
&x_3 + \underline{x_6} = 6,\\
&-2x_1 + x_3 - 3x_4 + \underline{x_5} = 2,
\end{aligned}$$

$$x_1 \geqslant 0, \ldots, x_8 \geqslant 0,$$

$$Q_{\min} = 4x_1 - 6x_3 + 9x_4 = 66.$$

ЗЛЛ задана в канонической форме. Запишем соответствующую симплекс-таблицу:

	1	3	4	
8	2	−1	3	1
2	0	0	3	2
7	2	0	0	6
6	0	1	0	6
5	−2	[1]	−3	2
	4	−6	9	−66

1) Выбор разрешающего столбца: имеется только один отрицательный коэффициент в целевой функции (–6). Следовательно, $j^* = 3$ (разрешающий столбец есть $(-1,0,0,1,1)^T$). Разрешающий столбец содержит положительные элементы $(a_{63} = 1, a_{53} = 1)$.

2) Выбор разрешающей строки: найдем $\min(6:1, 2:1) = 2 (= b_5 / a_{53})$. Следовательно, $j^* = 3$. Разрешающий элемент $a_{53} = 1$. Он обведен рамкой.

3) Замена базиса:

а) В левом столбце новой таблицы на место 5 ставится 3. Наоборот, в верхней строке вместо 3 запишем 5. Остальные индексы остаются на своих местах.

б) Место элемента a_{53} в новой таблице занимает $\hat{a}_{53} = 1 : a_{53} = 1$.

в) В новой таблице место разрешающего столбца (кроме разрешающего элемента) займет столбец:

(то, что уже стоит в новом столбце после выполнения б)) × (разрешающий столбец, кроме разрешающего элемента), т.е.

$\hat{a}_{83} = -1 \cdot (-1) = 1,\ \hat{a}_{23} = -1 \cdot 0 = 0,\ \hat{a}_{73} = -1 \cdot 0 = 0,\ \hat{a}_{63} = -1 \cdot 1 = -1,\ \hat{p}_3 = -1 \cdot (-6) = 6$

.

В новой таблице место разрешающей строки (кроме разрешающего элемента) займет строка:

(то, что уже стоит в новой строке после выполнения б)) × (разрешающая строка, кроме разрешающего элемента), т.е.

$\hat{a}_{51} = 1 \cdot (-2) = -2,\ \hat{a}_{54} = 1 \cdot (-3) = -3,\ \hat{b}_5 = 1 \cdot 2 = 2.$

Таким образом, мы получили следующие элементы новой таблицы:

	1	5	4	
8		1		
2		0		
7		0		
6		−1		
3	−2	1	−3	2
		6		

г) В столбец, стоящий под 1 ($j = 1$), мы должны внести в новой таблице следующие элементы (кроме элемента –2, уже стоящего там после в)):

$$\begin{bmatrix} \hat{a}_{81} \\ \hat{a}_{21} \\ \hat{a}_{71} \\ \hat{a}_{61} \\ \hline \hat{p}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{81} \\ a_{21} \\ a_{71} \\ a_{61} \\ \hline p_1 \end{bmatrix} + (-\hat{a}_{51}) \begin{bmatrix} a_{83} \\ a_{23} \\ a_{73} \\ a_{63} \\ \hline p_3 \end{bmatrix};$$

$$\hat{a}_{81} = 2 - (-2)\cdot(-1) = 0,$$
$$\hat{a}_{21} = 0 - (-2)\cdot 0 = 0,$$
$$\hat{a}_{71} = 2 - (-2)\cdot 0 = 2,$$
$$\hat{a}_{61} = 0 - (-2)\cdot 1 = 2,$$
$$\hat{p}_1 = 4 - (-2)\cdot(-6) = -8.$$

Пересчитав оставшиеся два столбца, получим полную таблицу:

	1	5	4		
8	0	1	0	3	
2	0	0	[3]	2	2:3
7	2	0	0	6	
6	2	−1	3	4	4:3
3	−2	1	−3	2	
	−8	6	−9	−54	

Пока критерий минимальности не выполнен, необходимы дальнейшие замены базисов. Они приводят к следующим таблицам:

	1	5	2		
8	0	1	0	3	
4	0	0	1/3	2/3	
7	2	0	0	6	6:2
6	[2]	−1	−1	2	2:2
3	−2	1	1	4	
	−8	6	3	−48	

	6	5	2		
8	0	1	0	3	
4	0	0	[1/3]	2/3	2/3 : 1/3
7	−1	1	1	4	4:1
1	1/2	−1/2	−1/2	1	
3	1	0	0	6	
	4	2	−1	−40	

	6	5	4	
8	0	1	0	3
2	0	0	3	2
7	−1	1	−3	2
1	1/2	−1/2	3/2	2
3	1	0	0	6
	4	2	3	−38

В последней таблице все коэффициенты целевой функции неотрицательны (даже положительны). Следовательно, в точке

$x_1 = 2, x_2 = 2, x_3 = 6, x_4 = 0, x_5 = 0, x_6 = 0, x_7 = 2, x_8 = 3$

целевая функция принимает минимальное значение $Q_0 = -(-38) = 38$. (Переменным, индекс которых стоит в верхней строке, в базисном решении приписывается значение 0; это свободные переменные. Каждое из переменных, индекс которых стоит в левом столбце, приравнивается к числу, записанному в правом столбце той же самой строки: это базисные переменные.)

Как было упомянуто выше, применение симплекс-метода может натолкнуться на трудности, если вершина, соответствующая симплекс-таблице, вырождена и имеет несколько базисных решений. В этом случае при некотором i в таблице $b_i = 0$. Тогда в качестве разрешающей строки обычно следует выбирать как раз строку, в которой $b_i = 0$; значение целевой функции при замене базиса не изменяется. Теоретически (в практических примерах чрезвычайно редко!) может случиться, что после нескольких замен базиса мы снова придем к такой же таблице и, следовательно, никогда не достигнем оптимального значения (это явление называется зацикливанием). Если симплекс-метод снова и снова приводит к вырожденным таблицам без изменения при этом целевой функции, он дополняется таким образом, чтобы препятствовать появлению таких циклов. Метод дополнения геометрически может быть истолкован как предварительное внесение малых изменений в правые части условий, посредством чего граничные гиперплоскости допустимой области сдвигаются так, что вырожденных вершин больше не существует.

Вектор $x = (x_1, \ldots, x_k)^T$ называется лексикографически меньшим, чем вектор $y = (y_1, \ldots, y_k)^T$ (обозначается $x \prec y$), если существует такое j, что $x_1 = y_1, \ldots, x_{j-1} = y_{j-1}; x_j < y_j$. Тогда пишут также $y \succ x$.

Дополнение к симплекс-таблице.

Каждая правая часть b_i, дополняется до вектора $(b_i, b_{i1}, \ldots, b_{im})^T$ при помощи m других чисел так, чтобы векторы удовлетворяли условию $(b_{i1}, \ldots, b_{im})^T \succ 0$ и были линейно независимы. Это условие выполнено, например, если положить $b_{ii} = 1$ и $b_{ik} = 0$ при $i \neq j$. Далее, $-Q_0$ дополняется

до вектора $(-Q_0,-Q_1,\ldots,-Q_m)^T$ произвольными числами (например, нулями). Получаем таблицу

	λ_{m+1}	...	λ_n				
λ_1	$a_{1}\lambda_{m+1}$	...	$a_{1}\lambda_n$	b_1	b_{11}	...	b_{1m}
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
λ_m	$a_{m}\lambda_{m+1}$	...	$a_{m}\lambda_n$	b_m	b_{m1}	...	b_{mm}
	$p_{\lambda_{m+1}}$	...	p_{λ_n}	$-Q_0$	$-Q_1$	...	$-Q_m$

Дополнение к симплекс-методу.

2. Частные b_i/a_{ij^*}, образованные для всех i таких, что $a_{ij^*}>0$, объединяются в векторы-частные $\left(\frac{b_i}{a_{ij^*}},\frac{b_{i1}}{a_{ij^*}},\cdots,\frac{b_{im}}{a_{ij^*}}\right)^T$, лексикографически минимальный среди них соответствует строке i^*.

3.б. $\hat{b}_{i^*k}=b_{i^*k}a_{ij^*}$ для всех k.

3.д. $\hat{b}_{ik}=b_{ik}-b_{i^*k}a_{ij^*}$ для всех $i\neq i^*$ и всех k; $\left(-\hat{Q}_k\right)=\left(-Q_k\right)-\hat{b}_{i^*k}p_{j^*}$ для всех k.

Этот расширенный симплекс-метод может применяться в общем случае.

Контрольные вопросы.

1. Объсните структуру технологической матрицы.
2. Что такое целевая функция?
3. Что такое «симплекс»?

Задание.

1. Пусть наблюдения максимальных нагрузок за 10 рабочих дней дают следующий ряд: 810, 920, 900, 910, 930, 890, 925, 910, 900, 920. Найти математическое ожидание, дисперсию, среднеквадратичное отклонение.

Тема 3.2. Линейная транспортная задача. Особенности структуры системы ограничений. Транспортная матрица и матрица издержек. Транспортные модели в электроэнергетике.

Линейные транспортные задачи составляют особый класс задач линейного программирования. Задача заключается в отыскании такого плана перевозок продукции с m складов к n потребителям, который требовал бы минимальных затрат. Если потребитель j получает единицу продукции (по прямой дороге) со склада i, то возникают издержки p_{ij}. Предполагается, что

транспортные расходы пропорциональны перевозимому количеству продукции, т. е. перевозка k единиц продукции вызывает расходы $k \cdot p_{ij}$. Далее, предполагается, что

$$\sum_{i=1}^{m} b_i = \sum_{j=1}^{n} a_j ,$$

где b_i есть количество продукции, находящееся на складе i, и a_j – потребность потребителя j. Обозначим через x_{ij} количество продукции, поставляемое со склада i потребителю j.

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = a_j \text{ для } j = 1, \ldots, n.$$

Транспортную задачу мы можем характеризовать транспортной таблицей и таблицей издержек:

	a_1	…	a_{j^*}	…	a_n
b_1					
⋮					
b_{i^*}			$\bar{x}_{i^*j^*}$		
⋮					
b_m					

	a_1	…	a_n
b_1			
⋮			
b_m			

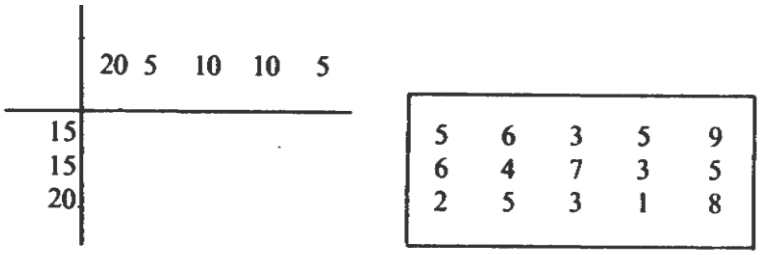
p_{11}	…	p_{1n}
⋮		⋮
p_{m1}	…	p_{mn}

Допустимый план перевозок будем представлять в виде транспортной таблицы:

	a_1	…	a_n
b	$\bar{x}_{11}$	…	$\bar{x}_{1n}$
⋮	⋮		⋮
b_m	$\bar{x}_{m1}$	…	$\bar{x}_{mn}$

Сумма элементов строки i должна быть равна b_i, а сумма элементов столбца j должна быть равна a_{ij} и все x_{ij} должны быть неотрицательны.

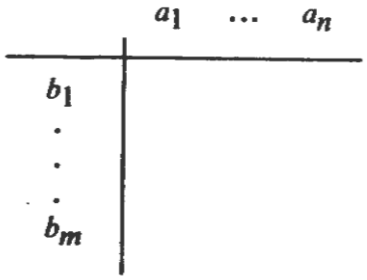
Пример 16.



Такие задачи целесообразно решать при помощи особого варианта симплекс-метода – так называемого транспортного метода. Если все значения a_i и b_j в условии транспортной задачи целочисленны, то переменные x_{ij} во всех базисных решениях (а также и в любом оптимальном базисном решении) имеют целочисленные значения.

Отыскание начального решения.

В транспортной таблице



выберем ячейку (i*, j*) и запишем в ней $x_{i^*j^*} = \min\{b_{i^*}, a_{j^*}\}$ (в случае $x_{i^*j^*} = \min\{b_{i^*}, a_{j^*}\}$ в таблицу вносится 0, причём следует различать внесение 0 и невнесение какого-либо числа вообще):

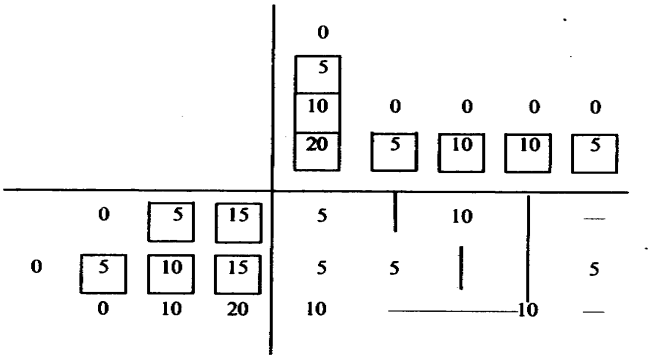
а) Если $b_{i^*} \le a_{j^*}$, то остальные ячейки строки i^* вычеркиваются (все содержимое склада i* поставляется в j*) и a_{j^*} заменяется на $(a_{i^*} - b_{j^*})$, а b_{j^*} - на 0.

б) Если $b_{i^*} \le a_{j^*}$, то остальные ячейки столбца j* вычеркиваются (потребитель j* уже получил всю продукцию) и b_{j^*} заменяется на $(b_{j^*} - a_{i^*})$, а a_{j^*} – на 0.

Полученная таблица содержит на одну строку или на один столбец меньше, чем предыдущая. В полученной таблице выбирают новую ячейку и повторяют предыдущие рассуждения до тех пор, пока в таблице не окажется ни одной свободной ячейки. В результате каждой ячейке исходной таблицы можно сопоставить либо зачеркнутую ячейку, либо ячейку, в которую внесено число $\bar{x}_{ij}$. Тем самым найдено базисное решение: переменные, соответствующие зачеркнутым ячейкам, называются свободными

переменными; остальные называются базисными. В каждой строке и в каждом столбце будет стоять по меньшей мере одно базисное переменное (возможно, со значением 0, что соответствует вырожденному случаю). Для того чтобы найти наиболее экономичное начальное базисное решение, обычно выбирают ячейку (*i**,*j**), которой соответствуют минимальные транспортные издержки: $\min\limits_{i,j} p_{ij} = p_{i^* j^*}$.

Найдем $\min\limits_{i,j} p_{ij} = 1 = p_{34}$. В ячейку (3, 4) запишем min {20, 10} = 10 и остаток четвертого столбца вычеркнем. Найдем $\min\limits_{j\neq 4} p_{ij} = 2 = p_{31}$. В ячейку (3, 1) запишем min {10, 20} = 10 и остаток третьей строки вычеркнем. Найдем $\min\limits_{j\neq 4} p_{ij} = 2 = p_{31}$. В ячейку (1, 3) запишем min {15, 10} = 10 и вычеркнем остаток третьего столбца. Продолжая таким образом дальше, получим таблицу



Контрольные вопросы.

1. Приведите примеры применения транспортной модели в энергетике.

2. Что такое «матрица издержек»?

3. При каком условии оптимальное решение транспортной задачи целочисленно?

Задание.

1. В течение ряда лет максимум нагрузки энергосистемы P (МВт) и годовая выработка электроэнергии W (млрд. кВт.ч) имели следующие значения:

ε	*P*	1000	1100	1220	1350
η	*W*	5,6	6,6	7,0	7,8

Определить коэффициент корреляции двух случайных величин ε и η (P и W).

Полученную экспериментальную зависимость максимума энергосистемы P от годовой выработки электроэнергии W представить в виде линейной зависимости P=aW + b.

Тема 3.3. Метод потенциалов. Свободные и базисные переменные. Потенциалы линейной модели. Задача о назначениях. Алгоритм решения транспортной задачи. Методы теории графов для транспортной задачи.

Пусть имеется транспортная таблица, соответствующая начальному решению, $x_{ij} = \bar{x}_{ij}$ для базисных переменных, $x_{ij} = 0$ для свободных переменных (ячейки, соответствующие свободным переменным, остаются пустыми). Далее, нам требуется таблица расходов с заданными p_{ij}. (Ниже мы постоянно будем ссылаться на пример 16).

Отыскание симплекс-множителей.

Заполним таблицу расходов, оставив ячейки, соответствующие свободным переменным, пустыми. В крайний правый столбец внесем значения неизвестных $u_1,\ldots,u_m$, в нижнюю строку – значения неизвестных $v_1,\ldots,v_n$. Эти $m+n$ неизвестных для всех (i, j), соответствующих базисным переменным, должны удовлетворять линейной системе уравнений $u_i + v_j = p_{ij}$. Для всех базисных решений эта система имеет треугольный вид, ранг ее матрицы равен $n+m-1$. Следовательно, систему всегда можно решить следующим способом.

Полагаем $v_n = 0$. Если значения k неизвестных $(1 \le k \le n+m-1)$ определены, то в системе всегда

p_{11}		p_{1j}		p_{1n}	u_1
	⋮		⋮		⋮
p_{i1}		p_{ij}		p_{in}	u_i
	⋮		⋮		⋮
p_{m1}		p_{mj}		p_{mn}	u_m
v_1	⋯	v_j	⋯	v_n	

имеется уравнение, одно из неизвестных в котором уже найдено, а другое еще нет. Переменные u_i и v_j, называются симплекс-множителями. Иногда они называются также потенциалами, а транспортный метод - методом потенциалов.

Пример 17.

5					u_1
6	4	7			u_2
		3	1	8	u_3
v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	

$v_5 = 0 \to u_3 = 8,$ так как $u_3 + v_5 = p_{35} = 8, \to v_4 = -7,$ так как $u_3 + v_4 = p_{34} = 1, \to v_3 = -5,$ так как $u_3 + v_3 = 3, \to u_2 = 12, v_2 = -8 \to v_1 = -6 \to u_1 = 11.$

Симплекс-множители нужны для того, чтобы найти свободную ячейку (i , j), которая при замене базиса переходит в базисную (это соответствует отысканию разрешающего столбца в симплекс-методе). После определения симплекс-множителей мы вносим на свободные места в таблице значения

$$p'_{ij} = p_{ij} - u_i - v_j$$

(коэффициенты целевой функции, пересчитанные для свободных переменных). Если все $p'_{ij} = 0$, то базисное решение оптимально. В противном случае мы выбираем произвольное $p'_{\alpha\beta} < 0$, чаще всего наименьшее. Индексом $\alpha\beta$ помечено свободное переменное $x_{\alpha\beta}$, которое должно войти в базис. Соответствующую ячейку транспортной таблицы мы отметим знаком +.

Пример 18.

p_{ij}:

5	6	3	5	9
6	4	7	3	5
2	5	3	1	8

,

5					11
6	4	7			12
		3	1	8	8
−6	−8	−5	−7	0	

→

5	3	−3	1	−2
6	4	7	−2	−7
0	5	3	1	8

Минимальный элемент равен -7 $\rightarrow (\alpha, \beta) = (2,5)$.

Кроме ячейки (α, β) транспортной таблицы, мы пометим знаками - и + другие занятые числами ячейки таким образом, чтобы в каждой строке и каждом столбце транспортной таблицы число знаков + было равно числу знаков –. Это всегда можно сделать единственным образом, причем в каждой строке и каждом столбце будет содержаться максимум по одному знаку + и по одному знаку –.

Затем мы определяем минимум M из всех элементов, помеченных знаком –, и выбираем ячейку (γ, δ), где этот минимум достигается.

В нашем примере с M = 5 можно выбрать (γ, δ) = (2, 3); при этом (γ, δ) определяет базисное переменное, которое должно стать свободным, т. е. базисное переменное, соответствующее индексу разрешающей строки симплекс-метода.

Переход к новой транспортной таблице (замена базиса) происходит следующим образом:

а) В ячейку (α, β) новой таблицы записывается число M.

б) Ячейка (γ, δ) остается пустой.

в) В других ячейках, помеченных знаками – или +, число M вычитается из стоящего в ячейке числа (-) или складывается с ним (+). Результат вносится в соответствующую ячейку новой таблицы.

г) Непомеченные числа переносятся в новую таблицу без изменений. Остальные ячейки новой таблицы остаются пустыми.

Получается новая транспортная таблица, и повторяется ход предыдущих рассуждений. После конечного числа шагов критерий минимальности будет выполнен.

Контрольные вопросы.

1. Какие переменные транспортной модели называются базисными?
2. Что такое «потенциал свободной переменной?
3. Как понять, что полученное решение транспортной задачи оптимально?

Задание.

1. Пусть в энергосистеме в течение пяти суток наблюдались следующие мощности спроса (в 1000 МВт) за характерные часы суток 4, 10, 16, 19 и 24.

Часы суток	Мощность спроса за сутки				
	первые	вторые	третьи	четвертые	пятые
4	5	6	4	6	5
10	12	11	10	13	11
16	9	8	8	10	8
19	18	17	17	19	18
24	10	9	8	11	11

Рассматривая спрос как случайный процесс, найти м. о., дисперсии, стандартные отклонения и корреляционные коэффициенты для указанных сечений процесса и на основе этих данных предсказать спрос в 19 ч, если в 10 ч утра наблюдался спрос в 10 ГВт.

Тема 3.4. Приближенные методы в транспортной модели. Вычислительная сложность. Допустимая погрешность. Метод штрафных функций.

Для каждого источника (строки) и каждого стока(столбца) вычисляется минимальный штраф за отказ воспользоваться наиболее экономным маршрутом, исходящим из этого источника (заходящим в этот сток). Затем среди вычисленных значений минимального штрафа определяется наибольшее и выбирается соответствующий этому значению источник или сток. Наиболее экономному маршруту, исходящему из выбранного источника (или заходящему в выбранный сток), назначается максимально допустимый поток. Смысл такого назначения заключается в том, что оно позволяет избежать наибольшего из минимальных значений штрафа. После

«насыщения» выбранного маршрута необходимо выполнить проверку условий, касающихся предложения и спроса соответственно в начальном и конечном узлах этого маршрута. Источник или сток, для которого соответствующее условие выполнено, исключается, и вычисляются новые значения штрафа. Данная процедура повторяется до тех пор, пока не будут исключены все источники и стоки. Штраф для каждого источника или стока легко вычисляется. Он равен разности между двумя минимальными стоимостями. Если эти стоимости равны между собой, то штраф равен нулю. Кроме того, если на множестве источников и стоков существует несколько максимальных значений минимального штрафа, то можно выбрать произвольный узел, соответствующий одному из этих значений.

Задача о назначениях является частным случаем транспортной задачи, соответствующим единичным значениям параметров a_i и b_j. Поэтому для решения задачи о назначениях можно воспользоваться любым алгоритмом линейного программирования или симплексным алгоритмом для транспортной задачи.

Контрольные вопросы.

1. Приведите пример применения задачи «о назначениях».
2. Достоинства и недостатки приближённых методов решения задач «транспортного» типа.
3. Что значит термин «насыщение» выбранного маршрута?

Задание.

1. Предприятие производит два вида продукции – X и Y. Удельные затраты на производство каждого из них приведены в таблице. Определить стоимость потерь электроэнергии, если ожидаемая удельная прибыль от реализации X равна 6000 руб., Y – 8000 руб.

Ресурс	X	Y	Количество ресурса (оплаченное)
Сырьё типа А, кг	2	4	8000
Сырьё типа Б, м	3	1	5000
Сырьё типа В, $м^2$	10	12	15000
Электроэнергия, кВтчас.	10	8	8000
Труд, чел-час.	5	6	10000

Тема 3.5. Математические методы оптимизации систем электро- и энергоснабжения. Общая задача оптимизации. Способы задания целевой функции. Критерии принятия решений.

Задача оптимизации может быть представлена в виде

$$\min_{x \in S} f(x),$$

где *f(x)* – наиболее важный из выходов системы; *x* – независимые переменные, которые определяют состояние проектируемого объекта, а *S* – множество, представляющее область их возможного изменения.

Целевая функция в принципе может быть задана либо алгоритмически, либо (более простой случай) аналитически. В первом случае оптимизация сводится к задаче, решаемой методом перебора вариантов и выбора наилучшего из них по заранее известному критерию. Во втором – имеем типичную задачу нахождения условного экстремума целевой функции.

В практике проектирования систем электроснабжения находят применение оба указанных метода. Рассмотрим сначала первый из них - перебор вариантов. Для того чтобы не пропустить оптимального решения, у которого критерий эффективности принимает экстремальные значения, необходимо перебрать все возможные сочетания регулируемых параметров. Так как число таких вариантов может быть очень велико, этот принцип применяется лишь при ограниченном числе дискретно изменяющихся параметров. При большом числе регулируемых параметров (свыше четырех, пяти) общее количество возможных вариантов оказывается больше тысячи и для каждого из них надлежит выполнить соответствующую проектную проработку, определить показатель качества. Даже с применением ЭВМ такая задача становится трудновыполнимой, требует большого количества машинного времени. Поэтому в последнее время ищут пути рационализации перебора вариантов, т.е., отыскивая определенные закономерности между регулируемыми параметрами, стремятся сократить число рассматриваемых решений.

Большим преимуществом рассматриваемого метода отыскания оптимального решения, по мнению авторов, является его естественность, непротиворечивость традиционным методам проектирования, а также возможность учета индивидуальных особенностей сравниваемых вариантов. Недостаток этого метода – невозможность оценки большого числа вариантов исполнения проектируемой системы.

Другой метод отыскания оптимального решения, как уже было отмечено выше, – составление целевой функций и нахождение ее экстремального значения при известных ограничениях. Заметим, что в настоящее время наблюдается тенденция к сочетанию обоих методов путем использования внутри общей оценочной модели проектируемого объекта отдельных оптимизирующих блоков.

Вернемся к задаче оптимизации целевой функции. В общем виде она формулируется так: найти значения параметров $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, при которых целевая функция

$$F = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

принимает минимальное или максимальное значение при функциональных ограничениях (условиях связи):

$$\Psi_1 = \Psi_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0;$$
$$\Psi_2 = \Psi_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\Psi_m = \Psi_m(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0.$$

и областных ограничениях:

$$\ell_1 = \ell_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) \le L_1;$$
$$\ell_2 = \ell_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) \le L_2;$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\ell_p = \ell_p(x_1, x_2, \ldots, x_n) \le L_p.$$

Для решения таких задач могут быть использованы известные классические методы (метод неопределенных множителей Лагранжа), численные методы (одномерного поиска, наискорейшего спуска, метод Монте-Карло), а также методы линейного программирования.

Контрольные вопросы.

1. Приведите пример алгоритмического задания целевой функции.
2. Что такое задача оптимизации в общем виде?
3. Достоинства и недостатки метода «перебор вариантов».

Задание.

1. Определить вероятность того, что максимальное отклонение относительной частоты события m/n от вероятности p=0,98 будет меньше ε=0,005 при числе испытаний n=1000.

Тема 3.6. Метод неопределенных множителей Лагранжа. Выпуклая целевая функция. Функциональные ограничения. Экстремумы целевой функции.

Сущность метода неопределенных множителей Лагранжа заключается в следующем. Пусть необходимо оптимизировать выпуклую целевую функцию

$$U = u(x_1, x_2, \ldots, x_n),$$

Для нахождения экстремума имеем основание ее продифференцировать и приравнять полученное выражение нулю:

$$dU = \frac{\partial u}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial u}{\partial x_2} dx_2 + \ldots + \frac{\partial u}{\partial x_n} dx_n = 0$$

или в более изящном виде

$$dU = \sum_1^n \frac{\partial u}{\partial x_i} dx_i = 0 .$$

Функциональные ограничения могут быть приведены к виду

$$\Psi_1 = \Psi_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0;$$
$$\Psi_2 = \Psi_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\Psi_m = \Psi_m(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0 .$$

Продифференцировав каждое из этих ограничений и умножив его на неопределенный множитель λ , получим:

$$\lambda_1 d\Psi_1 = \sum_1^n \lambda_1 \frac{\partial \Psi_1}{\partial x_i} dx_i = 0;$$

$$\lambda_2 d\Psi_2 = \sum_1^n \lambda_2 \frac{\partial \Psi_2}{\partial x_i} dx_i = 0;$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\lambda_m d\Psi_m = \sum_1^n \lambda_m \frac{\partial \Psi_m}{\partial x_i} dx_i = 0 .$$

Сложив уравнения и приравняв полученное выражение нулю, будем иметь:

$$\sum_1^n \left(\frac{\partial u}{\partial x_1} + \lambda_1 \frac{\partial \Psi_1}{\partial x_i} + \lambda_2 \frac{\partial \Psi_2}{\partial x_i} + \ldots + \lambda_m \frac{\partial \Psi_m}{\partial x_i} \right) dx_i = 0 ,$$

Так как все неизвестные уравнения независимы, каждое из *n* уравнений должно быть равно нулю:

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} + \lambda_1 \frac{\partial \Psi_1}{\partial x_i} + \lambda_2 \frac{\partial \Psi_2}{\partial x_i} + \ldots + \lambda_m \frac{\partial \Psi_m}{\partial x_i} = 0, \; i = 1,2,\ldots,n .$$

Это дает нам *n* уравнений. Если же к этому прибавим еще *m* уравнений

$$\Psi_j = 0, \quad j = 1,2,\ldots,m ,$$

получим *m*+*n* уравнений и столько же неизвестных. Решение этих уравнений и даст нам искомые оптимальные значения x_i .

Контрольные вопросы.

1. В чём суть метода неопределенных множителей Лагранжа?
2. Что такое «выпуклая функция»?
3. Как найти экстремум функции от нескольких переменных?

Задание.

1. Пусть q=0,02; p=0,98; β=0,99; ε=0,01. Найдем наименьшее число испытаний, при котором с вероятностью 0,98 разность относительной частоты и вероятности события не превышает 0,01.

Тема 3.7. Численные методы оптимизации систем электро- и энергоснабжения. Метод одномерного поиска. Метод наискорейшего спуска. Численные методы в электроэнергетических задачах.

Из численных методов оптимизации остановимся, во-первых, на методе одномерного поиска. Пусть имеется бинарная функция $U = u(x_1, x_2)$. Требуется найти ее экстремум. Поступаем следующим образом:

1. Выбираем начальное значение каждого из двух параметров $x_1^{(0)}, x_2^{(0)}$, определяющих начальное значение исследуемой функции *U*.

2. Параметру x_2 придаем постоянное значение $x_2 = x_2^{(0)}$, а параметр x_1 меняем до тех пор, пока не найдем условно экстремальное значение функции U.

3. Найдя это промежуточное «оптимальное» значение $x_1 = x_1^{(1)}$ определим значение целевой функции в точках $x_1^{(1)}, x_2^{(0)}$:

$U = U_1^{(0)}$,

4. Сохраняя неизменным значение $x_1 = x_1^{(1)}$, будем изменять теперь параметр x_2 до тех пор, пока при значении $x_2 = x_2^{(1)}$ найдем новое «оптимальное» значение функции $U = U_1^{(1)}$.

5. Сохраняя неизменным значение $x_2 = x_2^{(1)}$ снова изменяем параметр x_1 до получения нового «оптимального» значения. И так до тех пор, пока не убедимся, что последующее значение исследуемой функции перестает изменяться.

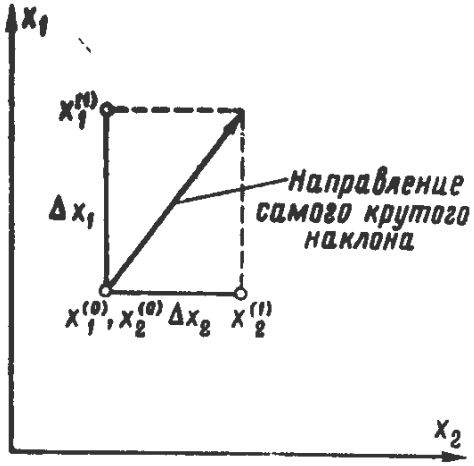


Рисунок 8.1. Поиск экстремума функции двух переменных.

Метод наискорейшего спуска может рассматриваться как дальнейшее усовершенствование только что рассмотренного метода одномерного поиска. Рассматривая изменение x_1 и x_2 и вычисляя тангенс угла наклона в данной точке $\left(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}\right)$, можно быстрее найти их значения, обеспечивающие экстремум целевой функции.

Допустим, что целевая функция *U* дифференцируема и производные ее в начальной точке $(du/dx_1)_0$ и $(du/dx_2)_0$ вычислены и известны. Чтобы отыскать минимум функции, будем двигаться в направлении самого крутого ее наклона. Для этого надо, чтобы приращения

$\Delta x_1 \approx -(\partial u/\partial x_1)_0$ и $\Delta x_2 \approx -(\partial u/\partial x_2)_0$.

Направление самого крутого наклона определится соотношением

$$\frac{\Delta x_1}{\Delta x_2} = \frac{(\partial u/\partial x_1)_0}{(\partial u/\partial x_2)_0}.$$

Если принять коэффициент пропорциональности равным α, то после перемещения из точки с координатами $\left(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}\right)$ на расстояние у получим новые значения переменных:

$x_1 = x_1^{(0)} - \alpha(\partial u/\partial x_1)_0$; $x_2 = x_2^{(0)} - \alpha(\partial u/\partial x_2)_0$,

а значение целевой функции будет:

$$U = u\left\{\left[x_1^{(0)} - \alpha(\partial u/\partial x_1)_0\right]; \left[x_2^{(0)} - \alpha(\partial u/\partial x_2)_0\right]\right\},$$

Новые значения x_1, x_2 будут служить исходными точками для последующей итерации. Процесс ведется до тех пор, пока не будет найдена точка, в которой производные окажутся близкими нулю.

Контрольные вопросы.

1. В чём принципиальное отличие численных методов оптимизации от всех других?

2. Что такое «метод наискорейшего спуска»?

3. Поясните на примере метод «одномерного поиска».

Задание.

1. Предприятие производит два вида продукции – X и Y. Удельные затраты на производство каждого из них приведены в таблице. Определить стоимость потерь электроэнергии, если ожидаемая удельная прибыль от реализации X равна 50 т.руб., Y – 80 т.руб.

Ресурс	X	Y	Количество ресурса (оплаченное)
Сырьё типа А, кг	2	4	8000
Сырьё типа Б, м	3	1	5000
Сырьё типа В, м^2	10	12	15000
Электроэнергия, кВтчас.	10	8	80000
Труд, чел-час.	5	6	10000

Тема 3.8. Линейное программирование и оптимизация систем. Линейное программирование. Нелинейное программирование. Динамическое программирование. Непрерывные и дискретные модели. Целочисленное программирование. Методы теории графов в задачах электроэнергетики.

Для решения задач оптимизации в настоящее время широко используются наиболее простые и достаточно полно разработанные методы линейного программирования.

Кроме линейного различают также нелинейное, выпуклое и динамическое программирование, к которым обращаются, когда целевая функция и ее ограничения нелинейны или коэффициенты целевой функции или ограничений зависят от какого-либо параметра (динамическое программирование).

К частным случаям задачи проектирования оптимальной электрической сети относятся задача с ограничением пропускной способности отдельных ветвей и задача с транзитами через пункты потребления, которые с помощью несложных специальных приемов удается свести к обычной транспортной задаче. В первом случае решение распадается на два этапа:

1) решается задача без ограничений; если результат не нарушает ограничения, то решение на этом этапе заканчивается;

2) если ограничение нарушено, то пункт потребления, к которому ведет ветвь с ограниченной пропускной способностью, искусственно разделяется на два; потребляемая мощность первого принимается равной известной пропускной способности ветви. Стоимость передачи электроэнергии ко второму принимается нереально высокой, и задача решается окончательно.

Для задачи с транзитами электроэнергии через пункты потребления искомая матрица распределения мощности отличается от обычной тем, что она составляется для электрической сети, все узлы которой (как источники, так и потребители) пронумерованы подряд. Матрица получается квадратной порядка т·п. Решение задачи усложняется из-за возросшего порядка матрицы.

Во многих постановках задачи на распределение электрической энергии часто приводят к нелинейным целевым функциям, или ограничениям, или к тому и другому вместе. Задача оптимального распределения реактивной мощности в заданной системе электроснабжения может служить типичным примером, так как в этом случае потери активной мощности, а следовательно и стоимость потерь энергии, являются квадратичной функцией. Область нелинейных задач изучена неполно, и в настоящее время нет общих методов их решения. В зависимости от свойств целевой функции и ограничений наиболее эффективным может оказаться тот или иной метод или его модификация. Вопросы выбора методов оптимизации для задач, возникающих при проектировании и эксплуатации систем электроснабжения, в основном находятся в стадии исследования.

Контрольные вопросы.

1. Приведите примеры оптимизационных задач в электроэнергетике.

2. Что такое «методы линейного программирования»?

3. Чем отличается задача с транзитами электроэнергии от обычной транспортной?

Задание.

1. Фирма производит три вида продукции с одинаковой ожидаемой удельной прибылью в 120 руб. Затраты ресурсов на производство приведены в таблице. Определить максимальную цену дополнительной электроэнергии, допустимую с точки зрения фирмы.

Ресурс	П1	П2	П3	Кол-во ресурса (оплаченное)
Сырьё, кг	4	5	6	600 000
Труд, чел-час.	500	500	450	5 млн.
Энергия, кВтчас.	20	15	25	1 500

Методические рекомендации к самостоятельной работе студентов.

Содержание внеаудиторной самостоятельной работы студентов по дисциплине «Математические задачи электроэнергетики» включает в себя различные виды деятельности:

- чтение текста (учебника, первоисточника, дополнительной литературы);
- составление плана текста;
- конспектирование текста;
- работа со словарями и справочниками;
- ознакомление с нормативными документами;
- исследовательская работа;
- использование аудио- и видеозаписи;
- работа с электронными информационными ресурсами;
- выполнение тестовых заданий;
- ответы на контрольные вопросы;
- аннотирование, реферирование, рецензирование текста;
- решение вариативных задач и упражнений.

Задания к контрольной работе

Подробно рассмотреть одну из тем и решить задачу.
Вариант выбрать по последней цифре номера зачётной книжки.

Тема 1. Методы теории вероятностей в задачах электроэнергетики.
Тема 2. Определение численных характеристик случайных величин.
Тема 3. Определение оптимального резерва мощности в энергосистеме.
Тема 4. Математическая модель процесса со случайными отклонениями.
Тема 5. Методы приближения функций в электроэнергетике.
Тема 6. Методы анализа эмпирических функций.
Тема 7. Математические методы оптимизации систем электро- и энергоснабжения.
Тема 8. Метод неопределенных множителей Лагранжа.
Тема 9. Численные методы оптимизации систем электро- и энергоснабжения.
Тема 10. Математическое программирование и оптимизация систем.

Задачи

1. Определить вероятность повреждения энергетического блока, представляющего собой последовательное соединение парового котла с паровой турбиной и электрическим генератором. Паровая турбина получает весь пар от парового котла. Генератор расположен на одном валу с турбиной, т. е. использует всю ее мощность. Вероятности повреждения отдельных элементов блока известны: $q_к$=0,002; $q_т$=0,001 и $q_г$=0,001 для котла, турбины и генератора соответственно.

2. Потребитель питается по двухцепной линии электропередачи. Вероятность повреждения и выхода из строя каждой цепи составляет q=0,001. По любой из цепей потребитель может получить всю нужную ему мощность. Какова вероятность сохранения электроснабжения данного потребителя?

3. Пусть статистическая вероятность повреждения любой фазы линии составляет 0,001. Если повреждение одной фазы произошло, то повреждение любой другой фазы будет иметь статистическую вероятность 0,2, т. е. условная вероятность повреждения второй фазы при повреждении первой равна 0,2. Кроме того, аналогичные вероятности повреждения третьей фазы при повреждении двух других составляют 0,5. Определить вероятность трехфазного КЗ при условии, что авария началась с повреждения одной фазы.

4. Пусть в энергосистеме имеется группа из n однотипных агрегатов (например, котлов или турбин), находящихся в совершенно одинаковых условиях; вероятность исправного состояния агрегата равна p, а вероятность противоположного события, т. е. неисправного состояния агрегата (аварийного ремонта), равна q. Найти вероятность рабочего состояния m агрегатов из числа n, причем m изменяется от 0 до n.

5. Определить вероятность вероятность аварийного выхода двух агрегатов 1-й группы, одного агрегата 3-й группы и одного агрегата 5-й группы энергосистемы, если в системе имеется пять групп однотипных агрегатов с числом агрегатов 6, 10, 4, 8, 5 и вероятностями повреждения агрегатов 0,001, 0,0005, 0,002, 0,0003, 0,003.

6. В энергетической системе, включающей четыре однотипных генератора, требуется найти вероятность одновременного выхода из строя нескольких генераторов. Вероятность аварийного выхода каждого q=0,002. Построить таблицу распределения вероятностей случайной величины - числа аварийных агрегатов.

7. Пусть в энергосистеме возможны дефицнты мощности 55, 75 и 150 МВт, причем вероятности этих дефицитов соответственно равны 0,001; 0,002; 0,0002. Требуется определить м.о. недоотпуска энергии за год.

8. Энергосистема имеет 10 агрегатов мощностью 100МВт каждый. Вероятность рабочего состояния агрегата p=0,998. Максимальная нагрузка энергосистемы равна 950МВт, т. е. для покрытия этой нагрузки достаточно имеющихся 10 агрегатов. Требуется определить оптимальное число дополнительных агрегатов, если ущерб от недоотпуска энергии составляет *a*

руб/(кВт-ч), а расчетные затраты на каждый новый агрегат составляют *b* млн. руб. в год.

9. Пусть наблюдения максимальных нагрузок за 10 рабочих дней дают следующий ряд: 810, 920, 900, 910, 930, 890, 925, 910, 900, 920. Найти математическое ожидание, дисперсию, среднеквадратичное отклонение.

10. В течение ряда лет максимум нагрузки энергосистемы P (МВт) и годовая выработка электроэнергии W (млрд. кВт.ч) имели следующие значения:

ε	P	1000	1100	1220	1350
η	W	5,6	6,6	7,0	7,8

Полученную экспериментальную зависимость максимума энергосистемы P от годовой выработки электроэнергии W представить в виде линейной зависимости P=aW + b.

Рекомендуемая литература.

	Список основной литературы
1.	Вайнштейн, Р.А. Математические модели элементов электроэнергетических систем в расчетах установившихся режимов и переходных процессов [Электронный ресурс]: учебное пособие/ Р.А. Вайнштейн, Н.В. Коломиец, В.В. Шестакова.- Электрон. текстовые данные - Томск: издательство Томского политехнического университета, 2021.- 115 с. – Режим доступа: http:// window .edu. ru/resource /962/73962/ files/ models.pdf, свободный
2.	Сошинов, А.Г. Математические задачи электроэнергетики [Текст]: учеб. пособие/ А.Г. Сошинов, К.Н. Бахтиаров.- Волгоград: ВолгГТУ, 2022.- 48 с.
	Ушаков, В.Я. Современные проблемы электроэнергетики [Электронный ресурс]: учебное пособие/ Ушаков В.Я.— Электрон. текстовые данные.— Томск: Томский политехнический университет, 2014.— 447 с.— Режим доступа: http://www.iprbookshop.ru/34715.— ЭБС «IPRbooks», по паролю
	Список дополнительной литературы
1.	Электрические системы. Математические задачи электроэнергетики [Текст]: учебник для студентов вузов/ под ред. В.А. Веникова.- 2-е изд., перераб. и доп.- М.: Высш. школа, 1981.- 288с.

ДУДОВ Мурат Хусеевич

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ ЭЛЕКТРОЭНЕРГЕТИКИ

Практикум для обучающихся направления подготовки 13.03.02
«Электроэнергетика и электротехника» всех форм обучения

Корректор Чагова О.Х.
Редактор Чагова О.Х.

Сдано в набор 12.08.2025 г.
Формат 60х84/16
Бумага офсетная.
Печать офсетная.
Усл. печ. л.3,95
Заказ № 5169
Тираж 100 экз.

Оригинал-макет подготовлен
в Библиотечно-издательском центре СКГА
369000, г. Черкесск, ул. Ставропольская, 36