МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«СЕВЕРО-КАВКАЗСКАЯ ГОСУДАРСТВЕННАЯ АКАДЕМИЯ»

СРЕДНЕПРОФЕССИОНАЛЬНЫЙ КОЛЛЕДЖ

О.Н. Котлярова

ДИСКРЕТНАЯ МАТЕМАТИКА С ЭЛЕМЕНТАМИ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛОГИКИ

практикум для студентов II курса, обучающихся
по специальности 09.02.07 Информационные
системы и программирование

Черкесск
2022

УДК 51
ББК 22.18
К 73

Рассмотрено на заседании ЦК «Информационные и естественнонаучные дисциплины».
Протокол № 1 от 31. 08 2022 г.
Рекомендовано к изданию редакционно-издательским советом СКГА
Протокол № 24 от 26. 09. 2022 г.

Рецензенты: Узденова К.М. – преподаватель ЦК «Информационные и естественнонаучные дисциплины»

К73 **Котлярова, О. Н.** Дискретная математика с элементами математической логики: практикум для студентов II курса обучающихся по специальности 09.02.07 Информационные системы и программирование / О. Н. Котлярова. – Черкесск: БИЦ СКГА, 2022. – 20 с.

Практикум по дисциплине «Дискретная математика с элементами математической логики» является необходимым учебно-методическим пособием для выполнения практических работ, которые запланированы в учебном плане по специальности 09.02.07 Информационные системы и программирование. Содержание практикума соответствует требованиям к реализации федерального государственного образовательного стандарта и охватывает основные разделы дисциплины: основы математической логики, элементы теории множеств, логика предикатов

УДК 51
ББК 2218

Содержание

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА №1: «Высказывания и операции над ними».

Цель работы:

- научиться строить составные высказывания, используя операции над ними,
- научиться определять значения истинности высказываний.

Справочный материал:

1. *Отрицанием* высказывания Р называется новое высказывание, обозначаемое Р (читается: «не Р» или «не верно, что Р»), которое истинно, если высказывание Р ложно, и ложно, если высказывание Р истинно.

2. *Конъюнкцией* двух высказываний Р и Q называется новое высказывание, обозначаемое $P \wedge Q$ или P & Q (читается: «Р и Q»), которое истинно лишь в венном случае, когда истинны оба исходных высказывания Р и Q и ложно во всех остальных случаях.

3. *Дизъюнкцией:* двух высказываний *Р* и *Q* называется новое высказывание, обозначаемое $P \vee Q$ (читается *«Р* или *Q*»), которое истинно в тех случаях, когда хотя бы одно из высказываний *Р* или *Q* истинно, и ложно в единственном случае, когда оба высказывания *Р* и *Q* ложны.

4. *Импликацией* двух высказываний Р и Q называется новое высказывание, обозначаемое $P \rightarrow Q$ «читается: «если Р, то Q», или «из Р следует О», или «Р влечет Q » или «Р достаточно для Q», или «О необходимо для Р»), которое ложно единственном случае, когда высказывание Р истинно, а Q ложно, а во всех остальных случаях — истинно.

5. *Эквивалентностью* двух высказываний Р и Q называется новое высказывание обозначаемое $P \leftrightarrow Q$ (читается: «Р эквивалентно Q», или «Р необходимо и достаточно для Q», или «Р тогда и только тогда, когда Q» или «Р, если и только если Q»), которое истинно в том и только в том случае, когда одновременно оба высказывания Р и Q либо истинны, либо ложны, а во всех остальных случаях - ложно.

Ход работы.

1. Какие из следующих предложений являются высказываниями:

а) Москва – столица России;

б) Студент механико-математического факультета университета;

в) Треугольник АВС подобен треугольнику A'B'C';

г) Луна есть спутник Марса;

д) 2+2-5;

е) Кислород – газ;

ж) Каша – вкусное блюдо;

з) Математика – интересный предмет;

и) Картины Пикассо слишком абстрактны;

к) Железо тяжелее свинца;

л) Треугольник называется равносторонним, если все его стороны равны;

м) Если в треугольнике все углы равны, то он равносторонний;

н) Сегодня плохая погода.

2. Сформулировать отрицания следующих высказываний, укажите значения истинности данных высказываний и их отрицаний:

а) Волга впадает в Каспийское море;

б) число 28 не делится на число 7;

в) $6>3$;

г) $4\leq 5$;

д) Все простые числа нечетные;

е) $\sqrt{2}$ – рациональное число;

ж) $5+3=8$;

з) Африка – остров;

и) Все слова можно разделить на слоги;

к) Некоторые грибы несъедобные.

3. Пусть через A обозначается высказывание «Это число целое», B – «Это число положительное», C – «Это число простое», D – «Это число делится на 3». Записать следующие высказывания словестно:

$(A\vee B)\rightarrow\neg C$; $(A\wedge B)\rightarrow D$; $(A\vee\neg A)\rightarrow(B\wedge C)$; $(B\wedge\neg B)\leftrightarrow(A\vee D)$

4. Записать символически, введя буквенные обозначения, следующие высказывания:

а) Если число делится на 2 и не делится на 3, то оно не делится на 6;

б) Если прямая параллельна каждой из двух пересекающихся плоскостей, то она параллельна и линии их пересечения;

в) Если в параллелограмме не все углы прямые или не все стороны равны между собой, то этот параллелограмм не прямоугольник или не ромб;

г) Если в треугольнике любая его медиана не является высотой и биссектрисой, то этот треугольник не равнобедренный и не равносторонний.

5. Определите логическое значение последнего высказывания, исходя из логических значений всех предыдущих высказываний:

а) $\lambda(A\rightarrow B)=1$, $\lambda(A\leftrightarrow B)=0$, $\lambda(B\rightarrow A)=$;

б) $\lambda(A\rightarrow B)=1$, $\lambda((\neg A\wedge B)\rightarrow(\neg A\vee B))=$;

в) $\lambda(A\leftrightarrow B)=0$, $\lambda(\neg B\leftrightarrow A)=$;

г) $\lambda(A\wedge B)=0$, $\lambda(A\rightarrow B)=1$, $\lambda(B\rightarrow\neg A)=$;

д) $\lambda(A\leftrightarrow B)=0$, $\lambda(A\rightarrow в)=1$, $\lambda((\neg A\rightarrow B)\leftrightarrow A)=$;

е) $\lambda(A\vee B)=1$, $\lambda(A\rightarrow B)=1$, $\lambda(\neg B\rightarrow A)=$;

ж) $\lambda(A\wedge B)=0$, $\lambda(A\leftrightarrow B)=0$, $\lambda(A\rightarrow B)=1$ $\lambda(A)=$;

з) $\lambda(A\wedge B)=0$, $\lambda(A\leftrightarrow B)=0$, $\lambda(A\rightarrow B)=1$ $\lambda(B)=$.

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА №2: «Формулы логики».

Цель работы:

- научиться определять формулы, подформулы;
- научиться составлять таблицы истинности для формул.

Справочный материал:

1. Понятие *формулы алгебры высказываний* определяется следующим (индуктивным) образом:

а) всякая пропорциональная переменная есть формула;

б) если F_1 и F_2 – формулы, то выражения ↔ $\neg F$, $(F_1 \wedge F_2)$, $(F_1 \vee F_2)$, $(F_1 \to F_2)$, $(F_1 \leftrightarrow F_2)$ также являются формулами;

в) других формул, кроме построенных по правилам двух предыдущих пунктов, нет.

2. *Подформулой* формулы называется всякая ее часть, которая сама является формулой.

3. Если $F(X_1, X_2, \ldots X_n)$ – формула алгебры высказываний, содержащая пропозициональные переменные $X_1, X_2, \ldots, X_n$, и A_1, A_2, A_n– некоторые конкретные высказывания, то, подставив последние в данную формулу вместо соответствующих пропозициональных переменных, получим *составное высказывание* $F(A_1, A_2, \ldots, A_n)$. Логическое значение λ $(F(A_1, A_2, \ldots, A_n))$ этого высказывания можно определить, если теперь вместо высказываний $A_1, A_2, \ldots, A_n$ вставить символы их логических значений (0 или 1), а затем выполнить над этими символами последовательно все предписываемые формулой операции, т.е. $\lambda(F(A_1, A_2, \ldots, A_n)) = F(\lambda(A_1), \lambda(A_2), \ldots, \lambda(A_n))$.

4. Формула $F(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ называется *выполнимой (опроверг мой),* если существует такой набор высказываний $A_1, A_2, \ldots, A_n$, который обращает эту формулу в истинное (ложное) высказывание $F(A_1, A_2, \ldots, A_n)$.

5. Формула называется *тождественно истинной,* или *тавтологией (тождественно ложной,* или *противоречием),* если она обращается в истинное (ложное) высказывание при всех наборах значений переменных. Обозначение тавтологии: $\models F(X_1, X_2, \ldots, X_n)$.

Ход работы.

1. Определите, является ли последовательность символов формулой:

(PQ);	$((P \leftrightarrow Q) \wedge R) \to (P \vee R)$;
$(\neg P \to Q) \to (R \wedge (Q \vee S))$;	$((P \vee \neg Q) \to (R \neg S))$;
$(P \to (Q \wedge R \to \neg P))$;	$\neg(\neg P \wedge \neg Q) \to (P \vee (R \wedge \neg S)))$;
$((P \vee \neg Q) \to (\neg P \wedge \neg R \wedge (Q \leftrightarrow R)))$;	$P \to Q \to R$;
$\neg \neg P \to P$;	$(P \to Q) \vee (Q \to P)$;
$((P \wedge Q) R) \to \neg S$;	$((P \wedge (\neg Q \to R)) \vee ((\neg P \leftrightarrow R) \wedge \neg Q))$.

2. В следующей последовательности символов всевозможными способами. Расставьте скобки так, чтобы получилась формула:

$P \to Q \wedge \neg R \vee S$;	$P \leftrightarrow Q \wedge \neg R \to S$;

$P \to \neg Q \vee R \to \neg P \to \neg R$; $P \vee Q \wedge \neg R \wedge P \vee R$;
$\neg P \wedge Q \to R$; $\neg P \wedge Q \vee R \to Q$;
$P \vee \neg Q \to \neg R \wedge Q$; $\neg P \wedge Q \to \neg P \vee R$;
$\neg P \vee R \wedge Q \vee R$; $\neg P \leftrightarrow \neg Q \vee R \wedge Q$.

3. Выпишите всевозможные подформулы каждой из следующих формул:

$(P \vee Q) \vee \neg R) \wedge(\neg P \vee(\neg Q \vee R)$; $(P \to Q) \to (P \to \neg Q) \to (P \wedge Q)$;
$(P \wedge (Q \vee \neg P)) \wedge ((\neg Q \to P) \vee Q))$; $\neg(P \vee R) \wedge (P \to Q)$;
$(P \leftrightarrow Q) \wedge \neg(R \to S)$; $(P \vee (Q \wedge \neg R)) \wedge (P \vee R)$;
$((P \vee Q) \to (R \to \neg P)) \to (\neg R \to \neg Q)$; $P \vee (Q \to (R \leftrightarrow (P \wedge Q)))$.

4. Составьте таблицы истинности для следующих формул:

$(P \to Q) \to ((P \to \neg Q) \to \neg P)$; $((P \to Q) \to P) \to Q$;
$(P \wedge (Q \vee \neg P)) \wedge ((\neg Q \to P) \vee Q)$; $((P \wedge \neg Q) \to Q) \to (P \to Q)$;
$P \wedge (Q \wedge (\neg P \vee \neg Q)$; $(((P \to Q) \to Q) \to Q) \to Q$;
$((((P \vee \neg Q) \wedge (Q \vee R)) \vee \neg R) \vee Q$; $(((P \leftrightarrow Q) \leftrightarrow (P \leftrightarrow R)) \leftrightarrow (Q \leftrightarrow R)) \leftrightarrow P$;
$\neg((\neg R \to \neg(P \to \neg(Q \to R))) \to \neg(P \to \neg Q))$; $((P \vee \neg Q) \to Q) \wedge (\neg P \vee Q)$.

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА №3: «Упрощение формул логики с помощью равносильных преобразований».

Цель работы:

- научиться составлять таблицы истинности формул, доказывая, что они являются тавтологиями;
- научиться определять логические следствия формул.

Справочный материал:

1. Тавтологии представляют собой схемы построения истинных высказываний, независимо от содержания и истинности составляющих высказываний.
2. Термин «тавтология» означает повторение одного и того же определения, суждения иными, близкими по смыслу словами. В тавтологиях, относящихся к математической логике, заключительной логической связкой является эквивалентность $\leftrightarrow$.
3. Формулы F и G называются *равносильъными,* или *эквивалентными* (обозначение: $F \cong G$), если при любых и значениях переменных логические значения получающихся из формул F и G высказываний совпадают.

Ход работы.

1. Составив таблицы истинности следующих формул, жите, что они являются тавтологиями:

1) закон исключенного третьего $P \vee \neg P$;

2) закон отрицания противоречия $\neg(P \wedge \neg P)$;

3) закон двойного отрицания $\neg\neg P \leftrightarrow P$;

4) закон тождества $P \rightarrow P$;

5) закон контрапозиции $(P \rightarrow Q) \leftrightarrow (\neg Q \rightarrow \neg P)$;

6) закон силлогизма (правило цепного заключения)

$((P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow R)) \rightarrow (P \rightarrow R)$;

7) закон противоположности $(P \leftrightarrow Q) \leftrightarrow (\neg P \leftrightarrow \neg Q)$;

8) законы идемпотентности $(P \wedge P) \leftrightarrow P$, $(P \vee P) \leftrightarrow P$;

9) законы упрощения $(P \wedge Q) \rightarrow P$, $P \rightarrow (P \vee Q)$;

10) законы коммутативности $(P \wedge Q) \leftrightarrow (Q \wedge P)$, $(P \vee Q) \leftrightarrow (Q \vee P)$;

11) законы ассоциативности

$(P \wedge (Q \wedge R)) \leftrightarrow ((P \wedge Q) \wedge P)$,

$(P \vee (Q \vee R)) \leftrightarrow ((P \vee Q) \vee R)$;

12) законы дистрибутивности

$(P \wedge (Q \vee R)) \leftrightarrow ((P \wedge Q) \vee (P \wedge R))$,

$(P \vee (Q \wedge R)) \leftrightarrow ((P \vee Q) \wedge (P \vee R))$;

13) законы поглощения $(P \wedge (P \vee Q) \leftrightarrow P$, $(P \vee (P \wedge Q) \leftrightarrow P$;

14) законы де Моргана $\neg(P \wedge Q) \leftrightarrow (\neg P \vee \neg Q)$,

$\neg(P \vee Q) \leftrightarrow (\neg P \wedge \neg Q)$.

2. Составив соответствующие таблицы истинности, докажите, что все следующие формулы являются тавтологиями:

а) $P \rightarrow (Q \rightarrow P)$;

б) $(P \rightarrow Q) \rightarrow ((P \rightarrow (Q \rightarrow R)) \rightarrow (P \rightarrow R))$;

в) $P \rightarrow (Q \rightarrow (P \wedge Q))$;

г) $P \rightarrow (P \vee Q)$;

д) $(P \wedge Q) \rightarrow P$;

е) $(P \rightarrow (Q \wedge R)) \leftrightarrow ((P \rightarrow Q) \wedge (P \rightarrow R))$;

ж) $((P \rightarrow Q) \wedge (P \rightarrow Q)) \rightarrow \neg P$;

з) $(P \rightarrow R) \rightarrow ((Q \rightarrow R) \rightarrow ((P \vee Q) \rightarrow P))$ («разбор случаев»);

и) $(P \rightarrow Q) \rightarrow ((P \rightarrow \neg Q) \rightarrow \neg P)$;

к) $\neg\neg P \rightarrow P$;

л) $(P \rightarrow Q) \vee (Q \rightarrow P)$;

м) $(P \rightarrow Q) \rightarrow ((Q \rightarrow P) \rightarrow (P \leftrightarrow Q))$;

н) $((P \rightarrow Q) \rightarrow P) \rightarrow P$;

о) $(P \leftrightarrow Q) \rightarrow (P \rightarrow Q)$;

п) $(P \rightarrow R) \rightarrow ((P \vee Q) \rightarrow (R \vee Q))$;

р) $(P \rightarrow ((Q \rightarrow R)) \rightarrow ((P \rightarrow Q) \rightarrow (P \rightarrow R))$;

с) $(P \rightarrow (Q \rightarrow R)) \leftrightarrow ((P \wedge Q) \rightarrow R)$;

т) $(P \rightarrow (Q \rightarrow R))(Q \rightarrow (P \rightarrow R))$;

у) $(\neg P \rightarrow P) \rightarrow P$;

ф) $((P \wedge Q) \rightarrow R) \rightarrow (P \wedge (Q \wedge R))$;

х) $(P \rightarrow (Q \rightarrow P)) \leftrightarrow (Q \rightarrow (P \rightarrow R)$.

3. Следующие формулы преобразуйте равносильным образом так, чтобы они содержали только логические связки $\neg$, $\wedge$, $\vee$:

а) $((X\to Y)\wedge(Y\to X))\to(X\vee Y)$;

б) $((X\to Y)\wedge(Y\to\neg X))\to(Z\to X)$;

в) $((X\to Y)\wedge(\neg X\to\neg Y))\to((X\vee Y)\wedge(\neg X\vee\neg Y))$;

г) $((X\leftrightarrow\neg Y)\to Z)\to(X\leftrightarrow\neg Z)$;

д) $(X\to(Y\leftrightarrow Z))\leftrightarrow((X\to Y)\leftrightarrow Z)$;

е) $(X\to Y)\to((X\to Y)\to\neg X)$;

ж) $((X\wedge\neg Y)\to Y)\to(X\to\neg Y)$;

з) $((X\to Y)\to Y)\to Y$;

и) $(X\to Y)\to((X\to\neg Y)\to(X\wedge Y))$;

к) $(X\to Z)\to((X\vee Y)\to(\neg Z\vee Y))$.

4. Следующие формулы преобразуйте равносильны образом так, чтобы отрицание было отнесено только к пропозициональным переменным и не стояло перед скобками:

а) $\neg((X\wedge(\neg Y\vee\neg Z))\vee Z)$;

б) $\neg((X\wedge Y)\vee\neg Z)\to\neg(X\wedge Z)$;

в) $\neg(U\to\neg(Z\wedge\neg(Y\wedge\neg X)))$;

г) $\neg(\neg(\neg(X\wedge Y)\to Y)\to(\neg X\wedge Z))$;

д) $\neg(\neg(X\vee(\neg Y\wedge Z)\vee\neg Z)\vee(Y\wedge Z))$;

е) $\neg((\neg X\wedge\neg Y)\to(X\vee(Z\wedge\neg T))$;

ж) $\neg((X\leftrightarrow(\neg Y\vee Z))\wedge Y)$;

з) $\neg((\neg X\leftrightarrow\neg Y)\vee Z)\wedge Y$;

и) $\neg((X\to Y)\to X)\to Y$;

к) $\neg((X\vee\neg Y)\to Y)\wedge(\neg X\vee Y))$.

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА №4: «Представление формулы логики в виде СДН и СКН».

Цель работы:

- научиться, выполняя равносильные преобразования преобразовывать формулу к дизъюнктивной нормальной форме, конъюнктивной нормальной форме.

Справочный материал:

1. *Конъюнктивным (дизъюнктивным*) *одночленом* от переменных X_1, X_2, ..., X_n называется конъюнкция (дизъюнкция) этих переменных или их отрицаний.

2. *Дизъюнктивной (конъюнктивной) нормальной формой* называется произвольная дизъюнкция (конъюнкция) конъюнктивных (дизъюнктивных) одночленов. Сокращенная запись: ДН- форма и КН-форма соответственно.

3. Одночлен от некоторых переменных называется *совершенным,* если каждая из этих переменных входит в него ровно один раз, со знаком отрицания или без него.

4. Нормальная форма от некоторых переменных называется *св-ершенной,* если каждый входящий в нее одночлен является соединенным одночленом от тех же самых переменных.

Сокращенная запись: СДН-форма (или СДНФ) – совершенней дизъюнктивная нормальная форма, СКН-форма (или КНФ) – совершенная конъюнктивная нормальная форма.

Ход работы.

1. По данному набору значений переменных постройте конъюнктивный одночлен, принимающий значение 1 только на этом наборе значений переменных:

а) (0, 0); е) (1,0, 0, 1);
б) (0,1); ж) (0,1,0,0);
в) (1,1); з) (0,0, 0,1);
г) (1,0, 0); и)(1, 0, 1);
д) (0,0,1); к) (1,1,1,0).

2. Для каждой из следующих формул алгебры высказываний найдите СДН- форму с помощью ее таблицы истинности:

а) $X \to Y$; б) $(X \wedge Y) \vee Z$;
в) $(X \leftrightarrow Z) \to (X \wedge \neg Y)$; г) $X \vee (Y \to (Z \leftrightarrow (X \wedge Y)))$;
д) $((X \wedge \neg Y) \vee Z) \wedge Y$; е) $(X \leftrightarrow Y) \wedge (Y \leftrightarrow Z) \wedge (Z \leftrightarrow Y)$;
ж) $((X \vee Y) \to Z) \leftrightarrow \neg X$; з) $(\neg Z \to \neg Y) \to ((X \wedge \neg Z) \wedge Y)$;
и) $(X \leftrightarrow Y) \wedge (\neg Z \to (Y \wedge \neg X))$; к) $((X \vee \neg Z) \wedge Y) \leftrightarrow ((Y \vee \neg X \wedge Z)$.

3. Для каждой из следующих формул алгебры высказываний с помощью ее таблицы истинности найдите СКН-форму:

а) $X \leftrightarrow Y$; б) $(X \vee Y) \wedge Z$;
в) $\neg(\neg X \vee \neg Y) \wedge (X \to (Y \wedge Z))$; г) $(X \wedge Y \wedge Z) \vee Y$;
д) $X \wedge \neg(\neg Y \wedge (Z \to (X \leftrightarrow Y)))$; е) $(X \wedge Y) \vee (Y \wedge Z) \vee (Z \wedge Y)$;
ж) $(X \wedge ((Y \wedge Z) \vee Y)) \vee \neg Y$; з) $\neg(X \wedge \neg Y) \wedge (Z \leftrightarrow (\neg X \wedge Y))$;
и) $\neg(((X \vee Y) \to \neg(X \vee Y)) \wedge \neg Z)$; к) $((X \vee Y) \to Z) \leftrightarrow \neg X$.

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА №5: «Равносильность булевых функций».

Цель работы:

- научиться строить таблицы значений для булевых функций.

Справочный материал:

1. *Булевой функцией от одного аргумента* называется функция f от одного аргумента, заданная на множестве из двух элементов {0, 1} и принимающая значения в том же двухэлементном множестве.

2. *Булевой функцией от n аргументов* называется функция f от *n* аргументов, заданная на двухэлементном множестве {0, 1} и принимающая значения в двухэлементном множестве {0, 1}.

		0	·	→′	x	←′	y	+	V	↓	↔	y′	←	x′	→	|	1
x	y	f_0	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7	f_8	f_9	f_{10}	f_{11}	f_{12}	f_{13}	f_{14}	f_{15}
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
1	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1

Ход работы.

1. Постройте таблицы значений для следующих булевых функций:

а) $f(x, y, z) = ((x\to z)y')\to x'$;

б) $f(x, y, z) = ((x \vee y')\to z)((x \mid y)\ z')$;

в) $f(x, y, z) = x'\to(x\leftrightarrow(y+(xz)))$;

г) $f(x, y, z) = ((((x \mid y)\downarrow z)|y)\downarrow z)$;

д) $f(x, y, z) = (x'y'z')\downarrow(xyz)$,

е) $f(x, y, z) = x'y'+yz'+xy$;

ж) $f(x,y, z) = (x\downarrow y)'+zx+xy$;

з) $f(x, y, z) = ((x|y)+(y| z)) + xyz$;

и) $f(x, y, z) = ((x+ y)\ (y+z)')'$;

к) $f(x, y, z) = (xyz) \mid (x'y'z')$;

л) $f(x, y, z) = ((x\to(y \vee z))(yz)')\to x$.

2. Построив соответствующую таблицу значений, выясните, равны ли следующие булевы функции:

а) $f(x,y,z)=((x\vee y)\vee z)\to((x\vee y)(x\vee z))$, $q(x,y,z)=x\vee(y\leftrightarrow z)$;

б) $f(x,y,z)=(x' \vee y)(y\vee z)$, $q(x, y,z)=(x\vee y\vee z)(x'\vee y\vee z)(x'\vee y\vee z')$;

в) $f(x,y,z)=(x\to y)\to z$, $q(x, y,z)= x\to(y\to z)$;

г) $f(x,y,z)=((x\vee y')z)\vee(xz')\vee(z(y\vee z'))$, $g(x,y,z)=x\vee z$;

д) $f(x,y,z)=xy\vee xz\vee yz$, $g(x,y,z)=(x+y)z\vee zy$;

е) $f(x, y, z) = xy'\vee x'y\vee x'z'$, $g(x, y, z)=(x'\vee y')(x\vee y\vee z')$;

ж) $f(x,y,z)=x'y'z'\vee x'yz\vee xyz\vee xy'z$, $g(x,y,z)=(x\to yz)(y\leftrightarrow z)\vee(y\to xz)(x\leftrightarrow z)$;

з) $f(x,y,z)=((y'+x)+z(x+y'))'$, $g(x,y,z)=z'\to(y \to x)'$;

и) $f(x,y,z)=(x +z')'(y+x'z)$, $g(x,y,z)=y+(z\to x)'$;

к) $f(x,y,z)=(x+y)'\vee(x+z)'$, $g(x,y,z)=xyz+x'y'z'$.

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА №6: «Анализ и синтез релейно-контактной схемы».

Цель работы:

- научится строить релейно-контактные схемы по заданным функциям.

Справочный материал:

1. Под *релейно-контактной схемой* понимается устройство из проводников и двухпозиционных контактов. Оно может быть предназначено, например, для соединения (или разъединения) полюсов источника тока с некоторым потребителем. Контакты релейно-контактной схемы могут быть двух типов: *замыкающие и размыкающие*.

2. Составление релейно-контактных схем с заданными условиями работы называется *задачей синтеза* релейно-контактных схем и является первой важной задачей, состоящей в том, что требуется построить схему,

которая проводила бы электрический ток лишь при вполне определенных задаваемых условиях.

3. Упрощение релейно-контактных схем называется *задачей анализа* таких схем и является второй важной задачей теории релейно-контактных схем.

Ход работы.

1. Построить релейно-контактную схему с заданной функцией проводимости:

а) $(xy \to x'y)(x \vee zy)$;

б) $(x \to y) \to x'(y \vee z)$;

в) $(x \to (y \to z)) \to (y \to x')$;

г) $(x|y') \to ((x \vee y)|(x \vee z))$;

д) $(z \downarrow xy)((x \vee z') \downarrow yz)$;

е) $(x|(x \downarrow y'))|(x' \downarrow (y \vee z'))$;

ж) $(x+y') \vee (x+z)(y'+z')$;

з) $(xy+z) \to x'z$;

и) $(x'+y')(x \leftrightarrow y)$;

к) $xy|(x' \to x(y \vee z))$.

2. Построить наиболее простые релейно-контактные схемы по заданным условиям работы:

а) (0,0,0)=(1,0,1)=1;

б) (1,1,0)= (0,0,0)=(1,0,0)=1;

в) (0,0,0)=(0,1,0)=(1,0,0)=(0,1,1)=1;

г) (0,0,1,1)=(1,1,1,0)=(0,1,1,0)=1;

д) (0,0,1,1)=(0,0,0,1)=(1,0,0,1)=1;

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА №7: «Множества и основные операции над ними».

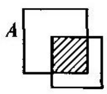
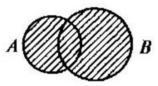
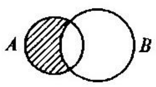
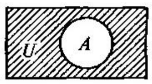
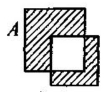
Цель работы:

- научиться задавать множества характеристическими свойствами;
- научиться проверять на множествах выполнение операций.

Справочный материал:

1. Совокупность элементов, объединенных некоторым признаком, свойством, составляет понятие *множество*.

Основные операции над множествами

Название операции	Обозначение	Изображение кругами Эйлера	Определение	Символическая запись
Пересечение множеств	$A \cap B$		Те и только те элементы, которые принадлежат *одновременно A и B*	$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ и } x \in B\}$
Объединение множеств	$A \cup B$		Те и только те элементы, которые принадлежат *хотя бы одному* из множеств A и B	$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ или } x \in B\}$
Разность множеств	$A \setminus B$		Те и только те элементы множества A, которые *не* принадлежат B	$A \setminus B = \{x \mid x \in A \text{ и } x \notin B\}$
Дополнение к множеству A	$\overline{A} = A' = U \setminus A$		Те и только те элементы, которые *не* принадлежат множеству A (т.е. дополняют его до универсального U)	$\overline{A} = \{x \mid x \notin A\} = U \setminus A$
Симметрическая разность	$A \Delta B$		Те и только те элементы, которые принадлежат одному из множеств: *A либо B*, но не являются общими элементами	$A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$

Ход работы.

1. Даны множества. Указать, каким из множеств принадлежат числа 3, 4, 5, 13, 25, $\frac{1}{9}, \frac{1}{6}, \frac{1}{4}$.

а) $M_1=\{n^2 + 1 | n \in N\}$;

б) $M_2=\{n^3 - 2 | n \in N\}$;

в) $M_3=\left\{\frac{1}{n} \middle| n \in N\right\}$;

г) $M_4=\left\{\frac{1}{n^2} \middle| n \in N\right\}$;

д) $M_5= \left\{\frac{1}{n-1} \middle| n \in N\right\}$;

е) $M_6= \left\{\frac{1}{2+n^2} \middle| n \in N\right\}$.

2. Приведите по три примера конечных и бесконечных множеств.

3. Задайте характеристическим свойством множество:

а) всех параллелограммов;

б) всех прямоугольников;

в) всех квадратов;

г) всех равнобедренных треугольников;

д) всех ромбов.

4. Какие из следующих соотношений справедливы:

а) $A \cup \varnothing = A$;

б) $A \cup \varnothing = \varnothing$;

в) $A \cap \varnothing = \varnothing$;

г) $A \cap \varnothing = A$;

д) $A \cup \overline{A} = A$;

е) $A \setminus A = \varnothing$.

5. Дано множество A={a,b,c, {a,b}, {a}, {a,b,c,d}, {a,b,c}}. Какие из следующих записей верны:

а) a∈A;

б) {a}∈A;

в) a⊂A;

г) {a}⊂A;

д) {a,b,c,d}⊂A;

е) {a,b,c,d}∈A.

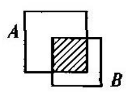
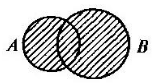
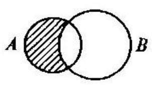
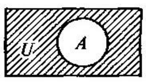
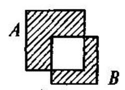
ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА №8: «Графическое изображение множеств на диаграммах Эйлера-Венна».

Цель работы:

- научиться изображать множества на диаграммах Эйлера-Венна.

Справочный материал:

Основные операции над множествами

Название операции	Обозначение	Изображение кругами Эйлера	Определение	Символическая запись
Пересечение множеств	$A \cap B$		Те и только те элементы, которые принадлежат *одновременно A* и *B*	$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ и } x \in B\}$
Объединение множеств	$A \cup B$		Те и только те элементы, которые принадлежат *хотя бы одному* из множеств *A* и *B*	$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ или } x \in B\}$
Разность множеств	$A \setminus B$		Те и только те элементы множества *A*, которые *не* принадлежат *B*	$A \setminus B = \{x \mid x \in A \text{ и } x \notin B\}$
Дополнение к множеству *A*	$\overline{A} = A' = U \setminus A$		Те и только те элементы, которые *не* принадлежат множеству *A* (т.е. дополняют его до универсального *U*)	$\overline{A} = \{x \mid x \notin A\} = U \setminus A$
Симметрическая разность	$A \Delta B$		Те и только те элементы, которые принадлежат одному из множеств: *A либо B*, но не являются общими элементами	$A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$

Ход работы.

1. На множестве U всех букв русского алфавита заданы множества A, B, C:

A={к, л, м, н, о}; B={к, з, л, е, о}; C={б, к, ч, ы, о}.

Найди следующие множества и изобразите их на кругах Эйлера:

а) A∩B;

б) A∪B;

в) (A∩B)∪C;

г) (A∪C)∩B.

2. Докажите, используя определения и круги Эйлера:

а) $A \cap (A \cup B) = A$;

б) $A \cup (A \cap B) = A$.

3. Даны отрезки $A = [-4; 5]$, $B = (2; 6]$, $C = (5; 10]$.

Найти следующие множества и изобразить их на кругах Эйлера:

а) $(A \cup B) \cup C$;

б) $(A \cap B) \cup C$;

в) $A \cap B$;

г) $(A \cup B) \setminus (A \cap B)$.

4. Результаты статистических исследований реакции на очередную кадровую перестановку занесены в таблицу

Социологические группы	Одобряют безоговорочно	Одобряют с сомнениями	Сомневаются	Негативная реакция
Мужчины-преподаватели	3	4	2	10
Женщины-преподаватели	8	9	7	11
Юноши-студенты	5	4	4	7
Девушки-студенты	6	6	8	9

Введем обозначения:

М – множество опрошенных лиц мужского пола,

С – сомневающиеся,

П – множество преподавателей,

О – множество тех, кто одобряет.

Изобразите следующие множества кругами Эйлера и найдите число элементов в них:

а) $М \setminus С$;

б) $(М \cap П') \setminus О$;

в) $(М \cap П)'$;

г) $М' \cup С'$.

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА №9: «Нахождение области определения и истинности предиката».

Цель работы:

- научиться определять истинность предикатов.

Справочный материал:

Множеством истинности предиката $P\ (x_1, x_2, ..., x_n)$, заданного над множествами $M_1, M_2, ..., M_n$, называют совокупность всех упорядоченных n-систем $(a_1, a_2, ..., a_n) \in M_1 \times M_2 \times ... \times M_n$, таких, что данный предикат обращается в истинное высказывание $P(a_1, a_2, ..., a_n)$ при подстановке $x_1 = a_1, x_2 = a_2, x_n = a_n$.

Ход работы.

1. Найдите множества истинности следующих предикатом, заданных над указанными множествами:

а) «x кратно 3», M = {1,2,3,4,5, 6, 7, 8, 9};

б) «x кратно 3», M = {3, 6,9,12};

в) «x кратно 3», M = {2, 4,8};

г) «x^2 + 4», M = R;

д) «sinx > 1», M = R.

2. Изобразите на координатной прямой множества истинности следующих заданных на *R* одноместных предикатов:

а) $x < 3$;

б) $|x|=4$;

в) $x^2 \geq 0$;

г) $|x| < 2$;

д) $x^2 + 6x - 16 < 0$.

3. Найдите множества истинности следующих предикатов, заданных на множестве всех точек плоскости (A, B и C - различные фиксированные точки плоскости, *l* – фиксированная прямая плоскости):

а) Отрезок [AB] виден из точки X под прямым углом;

б) Точка X располагается по одну сторону с точкой A от прямой *l* (предполагается, что точка A не лежит на прямой *l*);

в) Точка X располагается на прямой *l* и одинаково удалена от точек A и B;

г) Точка X симметрична с некоторой точкой отрезка [AB] относительно точки C;

д) Точка X равноудалена от точек A и B.

4. Изобразите на координатной прямой или на координатной плоскости множества истинности следующих предикатов:

а) $(x > 2) \wedge (x < 2)$;

б) $(x > 2) \vee (x < 2)$;

в) $(x > 2) \leftrightarrow (x < 2)$;

г) $(x \geq 0) \wedge (y \leq 0)$;

д) $(x \geq 0) \vee (y \leq 0)$.

5. Найдите множества истинности следующих предикатов, заданных над множеством $M = \{1, 2, 3, 4, 5, ..., 19, 20\}$:

а) x – четное число;

б) x – нечетное число;

в) $x < 10$;

г) $3 -| x$;

д) (x – четное число) → (x – квадрат натурального числа).

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА №10: «Формулы логики предикатов, их интерпретация и классификация».

Цель работы:

- научиться определять и классифицировать формулы логики предикатов.

Справочный материал:

Понятие *ф о р м у л ы л о г и к и п р е д и к а т о в* вводится аналогично тому, как это было сделано в алгебре высказываний. Определение имеет индуктивный характер: а) всякий 0-местный предикатный символ (т.е. пропозициональная переменная) есть формула; б) всякий n-местный предикатный символ $P(x_1, x_2, ..., x_n)$, где $x_1, x_2, ..., x_n$ – свободные предметные переменные, есть формула; в) если F_1 и F_2 – формулы, то $\neg F$, $(F_1 \wedge F_2)$, $(F_1 \vee F_2)$, $(F_1 \rightarrow F_2)$, $(F_1 \leftrightarrow F_2)$ – формулы; г) если F – формула, в которую предметная переменная x входит свободно, то $(\forall x)(F)$ и $(\exists x)(F)$ – формулы, в которых предметная переменная x связана, а те предметные переменные, кроме x, которые были свободны в F, свободны и в новых формулах, и те предметные переменные, которые бы связаны в F, связаны и в новых формулах; д) никаких других формул, кроме тех, которые получаются по правилам а) –г), в логике предикатов нет.

Ход работы.

1. Определите, какие из следующих выражений являются формулами логики предикатов, а какие нет, и объясните почему:

а) $(\exists x)(B(x)) \rightarrow (\forall x)(B(x))$;

б) $(\forall x)(P(x)) \rightarrow P(y)$;

в) $(\forall x)((P(x) \wedge Q(x)R(x)) \rightarrow (\exists y(\neg S(x))$;

г) $(\forall x)(Q(x) \wedge \neg R(x))$;

д) $(\exists x)(P(x) \wedge Q(x) \wedge \neg R(x))$.

2. Перечислите свободные и связанные вхождения каждой из переменных в каждой из следующих формул:

а) $(\forall x)(P(x))$;

б) $(\forall x)(P(x)) \rightarrow P(y)$;

в) $P(x) \rightarrow (\exists x)(Q(x))$;

г) $(\exists)(A(x) \wedge B(x))$;

д) $(\exists x)(\forall y)(P(x) \wedge Q(y)) \rightarrow (\forall y)(R(x, y))$.

3. Придайте следующим формулам указанные интерпретации и определите истинностные значения получающихся высказываний:

а) $(\forall x)(P(x) \rightarrow P(y))$, M = {Петр, Павел}, $P(x)$: «Имя x состоит из 5 букв»,

y = Петр;

б) $(\forall x)(P(x)) \rightarrow P(y)$, интерпретация та же, что и для предыдущей формулы;

в) предыдущая формула, $M=N$, $F(x,y)$: «$x<y$»;

г) $(\exists x)(P(x) \wedge Q(x))$, $M=N$, $P(x)$: «$x<5$», $Q(x)$: «$x>6$»;

д) $(\exists x)(P(x)) \wedge (\exists x)(Q(x))$, интерпретация та же, что и для предыдущей формулы.

4. Покажите, что каждая интерпретация каждой из следующих формул на одноэлементном множестве дает истинное высказывание:

а) $P(x) \rightarrow P(y)$;

б) $P(x) \leftrightarrow P(y)$;

в) $(\exists x)(P(x)) \rightarrow P(y)$;

г) $(\exists x)(P(x)) \rightarrow (\forall x)(P(x))$;

д) $P(x) \vee \neg P(y)$.

5. Определите, какие из следующих формул выполнимы, а какие нет (т.е. тождественно ложны):

а) $(\exists x)(P(x))$;

б) $(\forall x)(P(x))$;

в) $(\exists x)(\forall y(Q(x, x) \wedge \neg Q(x, y))$;

г) $(\exists x)(\forall y)(Q(x, y) \rightarrow (\forall z) (R(x,y, z)))$;

д) $P(x) \rightarrow (\forall y)(P(y)$.

Список рекомендуемой литературы

1. Унучек С.А. Математическая логика [Электронный ресурс]: учебное пособие / С.А. Унучек. – Электрон. текстовые данные. – Саратов: Ай Пи Эр Медиа, 2018. – 239 c. – 978-5-4486-0086-9. – Режим доступа: http://www.iprbookshop.ru/69312.html

2. Седова Н.А. Дискретная математика [Электронный ресурс]: учебное пособие / Н.А. Седова. – Электрон. текстовые данные. – Саратов: Ай Пи Эр Медиа, 2018. – 67 c. – 978-5-4486-0069-2. – Режим доступа: http://www.iprbookshop.ru/69316.html

3. Спирина, М.С. Дискретная математика [Текст]: учебник для студ. учреждений сред. проф. образования / М.С. Спирина, П.А. Спирин.- М.: Академия, 2017.- 368 с.

4. Игошин, В.И. Элементы математической логики [Текст]: учебник для студ. учреждений сред. проф. образования / В.И. Игошин.- М.: Академия, 2017.- 320с

КОТЛЯРОВА Ольга Николаевна

ДИСКРЕТНАЯ МАТЕМАТИКА С ЭЛЕМЕНТАМИ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛОГИКИ

практикум для студентов II курса, обучающихся
по специальности 09.02.07 Информационные
системы и программирование

Корректор Чагова О.Х.
Редактор Чагова О.Х.

Сдано в набор 14.12.2022 г.
Формат 60х84/16
Бумага офсетная.
Печать офсетная.
Усл. печ. л. 1,16.
Заказ № 4674
Тираж 100 экз.

Оригинал-макет подготовлен
в Библиотечно-издательском центре СКГА
369000, г. Черкесск, ул. Ставропольская, 36