

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

СЕВЕРО-КАВКАЗСКАЯ ГОСУДАРСТВЕННАЯ АКАДЕМИЯ



М.М. Кидакоев
А.М. Кидакоев
В.Г. Крымова

СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ

Методические указания к выполнению РГР для обучающихся
ОЗФО по направлению подготовки 08.03.01 Строительство
(профиль Промышленное и гражданское строительство)

Черкесск, 2025

УДК 39.3/6
ББК 30.121
К 38

Рассмотрено на заседании кафедры «Общественных и естественно-научных дисциплин»

Протокол № 1 от «27» 09. 2024 г.

Рекомендовано к изданию редакционно-издательским советом СКГА.

Протокол № 27 от «07» 11. 2024 г.

Рецензенты: Шайлиев Р.Ш. –к.т.н., доцент кафедры Общеинженерных и естественнонаучных дисциплин.

К38 Кидакоев, М.М. Методические указания к выполнению РГР по дисциплине «Сопротивление материалов» для обучающихся ОЗФО по направлению подготовки: 08.03.01 «Строительство» / М.М. Кидакоев, А.М. Кидакоев, В.Г. Крымова. – Черкесск: БИЦ СКГА, 2024. – 60 с.

Методические указания содержат 9 заданий. Представлена методика выбора варианта и порядок выполнения работ. Приведены примеры выполнения заданий.

Содержание методических указаний изложено в соответствии с федеральным государственным образовательным стандартом высшего профессионального образования (ФГОС) по направлению подготовки 08.03.01 «Строительство».

**УДК 39.3/6
ББК 30.121**

ОГЛАВЛЕНИЕ

1 Общие положения	4
Задание 1: Определение ВСФ. Построение эпюр.....	5
Задание 2: Расчет статически определимого ступенчатого бруса при растяжении и сжатии.....	25
Задание 3: Исследование плоского напряженного состояния.....	28
Задание 4: Геометрические характеристики плоских сечений.....	32
Задание 5: Расчет статически определимого вала, работающего на кручение.....	38
Задание 6: Подбор сечений балок, работающих на поперечный изгиб	39
Задание 7: Расчет стержней сжатых внецентренно приложенной силой.....	43
Задание 8: Расчет вала на совместное действие кручения и изгиба....	48
Задание 9: Расчет стержней на устойчивость.....	53
Список рекомендуемой литературы.....	58

ОБЩИЕ ПОЛОЖЕНИЯ

Расчетно-графическая работа является одним из видов учебных занятий и контроля учебной работы обучающегося. Выполнение обучающимся расчетно-графической работы проводится с целью:

- систематизации и закрепления полученных теоретических и практических навыков по дисциплине «Сопротивление материалов»;
- углубления теоретических знаний в соответствии с заданной темой;
- формирования умения пользоваться справочной и нормативно-технической документацией;
- развития творческой инициативы, самостоятельности, ответственности и организованности обучающегося.

При выполнении расчетно-графической работы обучающийся выбирает свой вариант расчетной схемы и исходных данных в соответствии с порядковым номером в журнале учета работы обучающегося. Работы, выполненные не по своему варианту, не засчитываются.

Каждую расчетно-графическую работу следует выполнять на листах формата А 4, четким почерком, с полями.

Перед решением каждой задачи надо выписать полностью ее условие с числовыми данными, составить аккуратный эскиз в масштабе и указать на нем в числах все величины, необходимые для расчета.

Решение должно сопровождаться краткими, последовательными и грамотными без сокращения слов объяснениями и чертежами, на которых все входящие в расчет величины должны быть показаны в числах.

Необходимо указать размерность всех величин и подчеркнуть окончательные результаты.

В возвращенной расчетно-графической работе обучающийся должен исправить все отмеченные ошибки и выполнить все данные ему указания.

Общие справочные данные для решения всех задач

Характеристики материала	Сталь	Бронза	Алюминий	Чугун	Дерево
Модуль упругости E , МПа	$2 \cdot 10^5$	$1 \cdot 10^5$	$0,7 \cdot 10^5$	$1,2 \cdot 10^5$	$1 \cdot 10^4$
Предел текучести σ_T , МПа	240	150	210	-	-
Предел прочности на растяжение-сжатие σ_B , МПа	360	240	300	180/600	100/45
Коэффициент Пуассона μ	0,25	0,34	0,3	0,25	0,45
Коэффициент температурного расширения α , 1/град	$12 \cdot 10^{-6}$	$22 \cdot 10^{-6}$	$24 \cdot 10^{-6}$	$11 \cdot 10^{-6}$	$4 \cdot 10^{-6}$

Примечание.

1. При вычислении допускаемых напряжений при растяжении-сжатии нормируемый коэффициент запаса прочности n необходимо принять:

- для пластичных материалов 1,5;
- для хрупких материалов 3 (коэффициенты запаса при растяжении-сжатии рекомендуется считать одинаковыми);
- для дерева при растяжении 10, при сжатии 4,5.

2. Допускаемые напряжения при сдвиге $[\tau]$ следует принять:

- для дерева 2 МПа;
- для пластичных материалов по соответствующим теориям прочности.

3. Допускаемые напряжения при изгибе рекомендуется считать равными допускаемым напряжениям при растяжении-сжатии.

4. Допускаемые напряжения при изгибе рекомендуется считать равными допускаемым напряжениям при растяжении-сжатии.

5. При проверке жесткости балок допускаемый прогиб следует принимать:

- для шарнирно-опертых балок $l/200$;
 - для консольных балок $l/100$,
- где l – длина пролета (консоли) балки.

Задание 1: Определение ВСФ. Построение эпюр

Для статически определимых балок, нагруженных сосредоточенными силами, распределенной линейной нагрузкой, изгибающими и крутящими моментами, требуется.

1. Разбить балку на участки, обозначив длину каждого из них;
2. При необходимости определить реакции опор;
3. Записать общие выражения ВСФ (нормальной силы, крутящего момента, изгибающего момента и поперечной силы) для каждого участка балки.

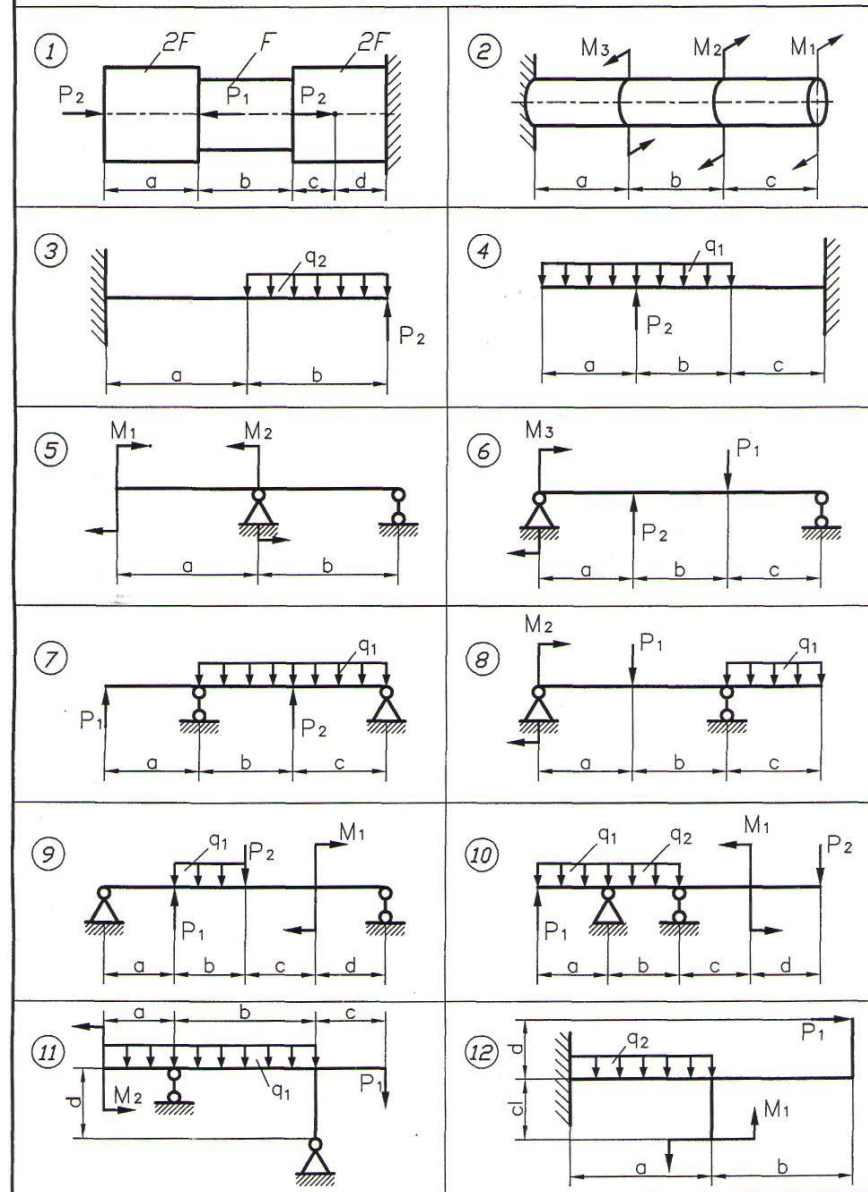
4. Построить эпюры ВСФ (нормальной силы, крутящего момента, изгибающего момента и поперечной силы) и проверить правильность построения.

5. Указать положение наиболее опасного сечения.

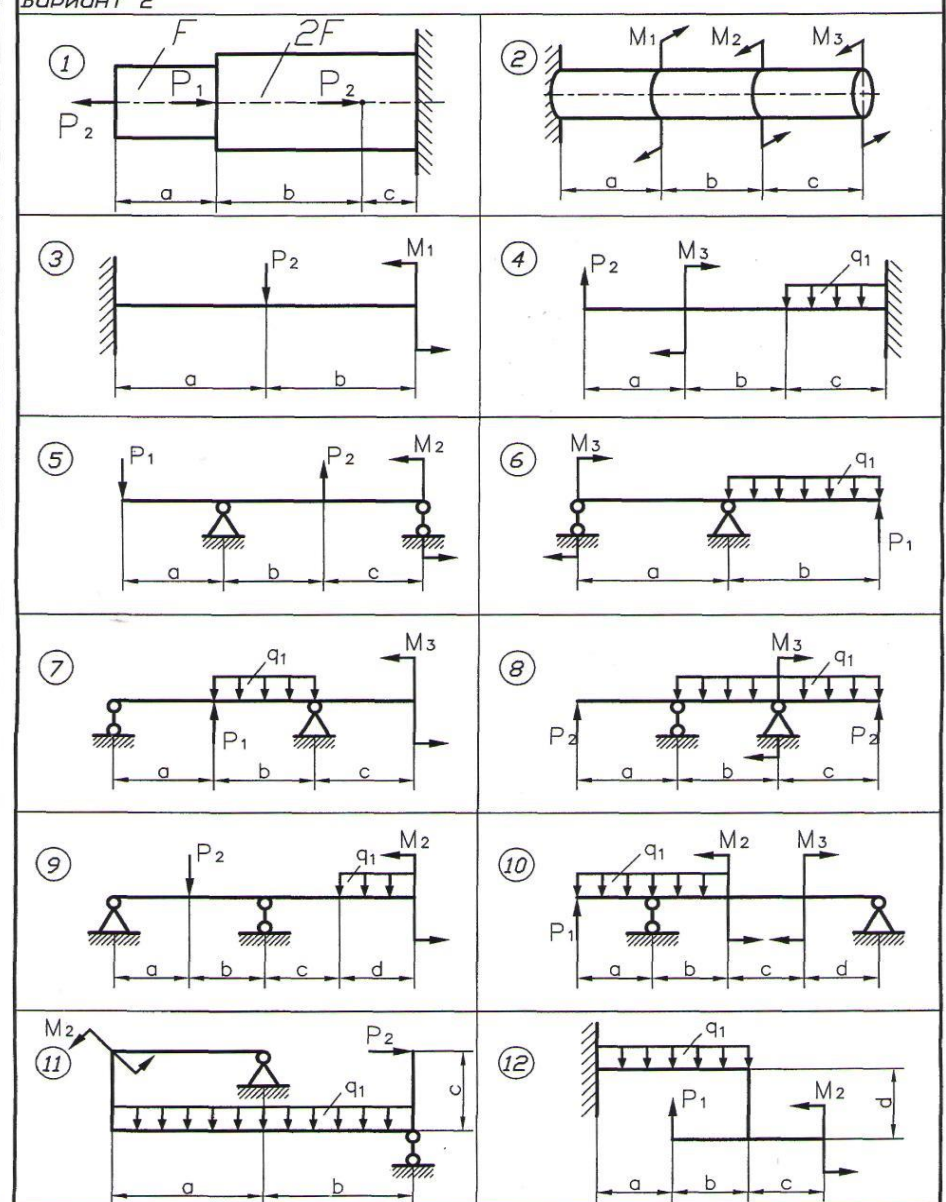
Исходные данные к задачам выбираются по табл. 1 и схемам на рис. 1.
Таблица 1. Исходные данные

№ варианта	P_1	P_2	M_1	M_2	M_3	q_1	q_2	a	b	c	d
1	$2ql$	$3ql$	ql^2	$5ql^2$	ql^2	q	$2q$	l	$2l$	$1,5l$	$0,5l$
2	ql	$2ql$	$2ql^2$	$4ql^2$	$2ql^2$	$2q$	q	$2l$	$3l$	$2l$	l
3	$1,5ql$	ql	ql^2	$3ql^2$	$3ql^2$	q	$3q$	$3l$	$4l$	$0,5l$	$1,5l$
4	$2ql$	$4ql$	$2ql^2$	$2ql^2$	$4ql^2$	$3q$	$3q$	$4l$	l	$1,5l$	$2l$
5	$0,5ql$	$3ql$	ql^2	ql^2	$5ql^2$	q	q	l	$2l$	$2l$	$2,5l$
6	$2ql$	$2ql$	$2ql^2$	$5ql^2$	ql^2	$4q$	q	$2l$	$3l$	$0,5l$	$0,5l$
7	ql	ql	ql^2	$4ql^2$	$2ql^2$	q	$0,5q$	$3l$	$4l$	$1,5l$	l
8	$1,5ql$	$4ql$	$2ql^2$	$3ql^2$	$3ql^2$	$2q$	$0,5q$	$4l$	$5l$	$2l$	$1,5l$
9	$2ql$	$3ql$	ql^2	$2ql^2$	$4ql^2$	q	$1,5q$	$5l$	l	$0,5l$	$2l$
10	$0,5ql$	$2ql$	$2ql^2$	ql^2	$5ql^2$	$0,5q$	$2q$	l	$2l$	$1,5l$	$2,5l$
11	$2ql$	ql	ql^2	$5ql^2$	ql^2	q	$2,5q$	$2l$	$3l$	$2l$	$0,5l$
12	ql	$4ql$	$2ql^2$	$4ql^2$	$2ql^2$	$2q$	$3q$	$3l$	$4l$	$0,5l$	l
13	$1,5ql$	$3ql$	ql^2	$3ql^2$	$3ql^2$	q	$3,5q$	$4l$	$5l$	$1,5l$	$1,5l$
14	$2ql$	$2ql$	$2ql^2$	$2ql^2$	$4ql^2$	$3q$	q	$5l$	l	$2l$	$2l$
15	$0,5ql$	ql	ql^2	ql^2	$5ql^2$	q	$2q$	l	$2l$	$0,5l$	$2,5l$
16	$2ql$	$4ql$	$2ql^2$	$5ql^2$	ql^2	$0,5q$	$1,5q$	$2l$	$3l$	$1,5l$	$0,5l$
17	ql	$3ql$	ql^2	$4ql^2$	$2ql^2$	q	$0,5q$	$3l$	$4l$	$2l$	l
18	$1,5ql$	$2ql$	$2ql^2$	$3ql^2$	$3ql^2$	$2q$	$2q$	$4l$	$5l$	$0,5l$	$1,5l$
19	$2ql$	ql	ql^2	$2ql^2$	$4ql^2$	q	$1,5q$	$5l$	l	$1,5l$	$2l$
20	$0,5ql$	$4ql$	$2ql^2$	ql^2	$5ql^2$	$3q$	q	l	$2l$	$2l$	$0,5l$
21	$2ql$	$3ql$	ql^2	$5ql^2$	ql^2	q	$2,5q$	$2l$	$3l$	$0,5l$	l
22	ql	$2ql$	$2ql^2$	$4ql^2$	$2ql^2$	$0,5q$	$3q$	$3l$	$4l$	$1,5l$	$1,5l$
23	$1,5ql$	ql	ql^2	$3ql^2$	$3ql^2$	q	$3,5q$	$4l$	$5l$	$2l$	$2l$
24	$2ql$	$4ql$	$2ql^2$	$2ql^2$	$4ql^2$	$2q$	$1,5q$	$5l$	l	$0,5l$	$2,5l$
25	$0,5ql$	$3ql$	ql^2	ql^2	$5ql^2$	q	$2,5q$	l	$2l$	$1,5l$	$0,5l$
26	$2ql$	$2ql$	$2ql^2$	$5ql^2$	ql^2	$3q$	$3q$	$2l$	$3l$	$2l$	l
27	ql	ql	ql^2	$4ql^2$	$2ql^2$	q	$2q$	$3l$	$4l$	$0,5l$	$1,5l$
28	$1,5ql$	$4ql$	$2ql^2$	$3ql^2$	$3ql^2$	$0,5q$	q	$4l$	$5l$	$1,5l$	$2l$
29	$2ql$	$3ql$	ql^2	$2ql^2$	$4ql^2$	q	$2,5q$	$5l$	l	$2l$	$2,5l$
30	$0,5ql$	$2ql$	$2ql^2$	ql^2	$5ql^2$	$2q$	$4q$	l	$2l$	$0,5l$	$0,5l$
31	$2ql$	ql	ql^2	$5ql^2$	ql^2	$3q$	$2q$	$2l$	$3l$	$1,5l$	l
32	ql	$4ql$	$2ql^2$	$4ql^2$	$2ql^2$	$0,5q$	$1,5q$	$3l$	$4l$	$2l$	$1,5l$

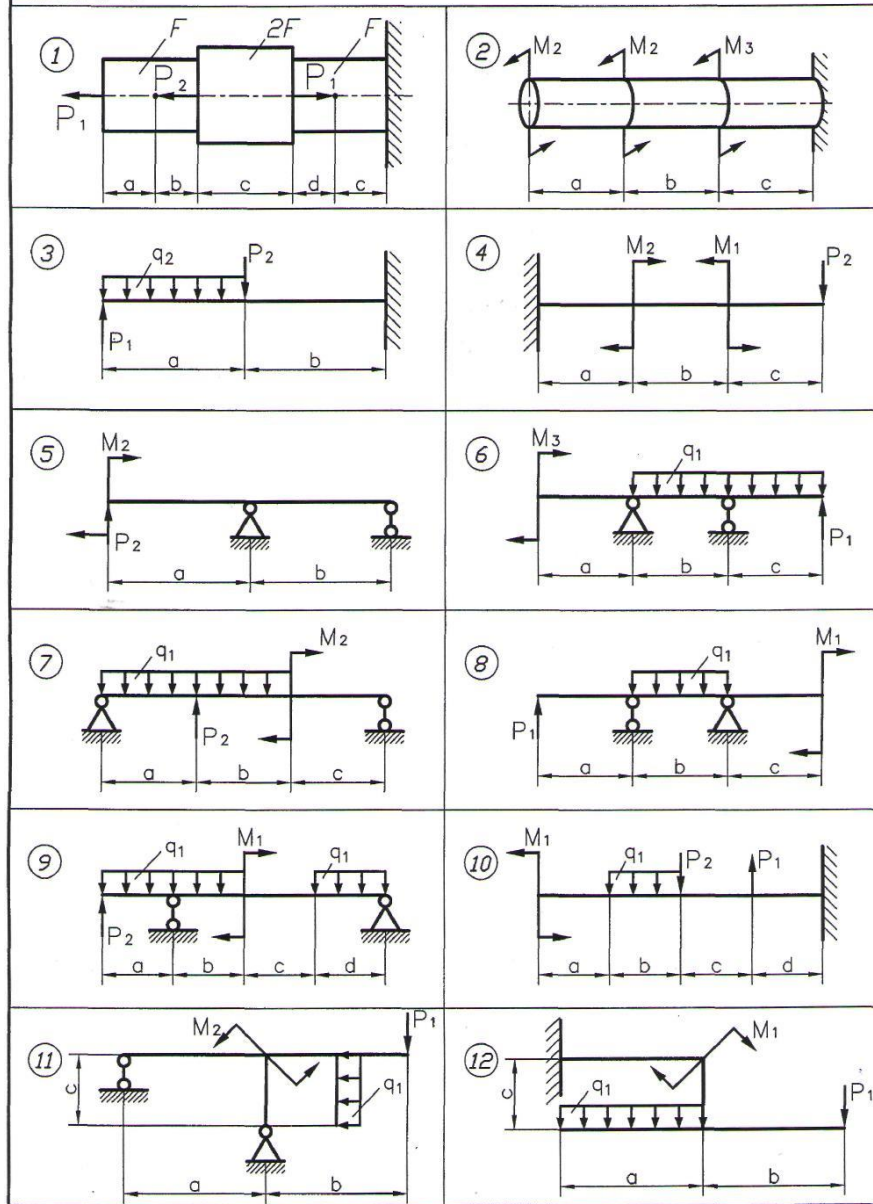
Вариант 1



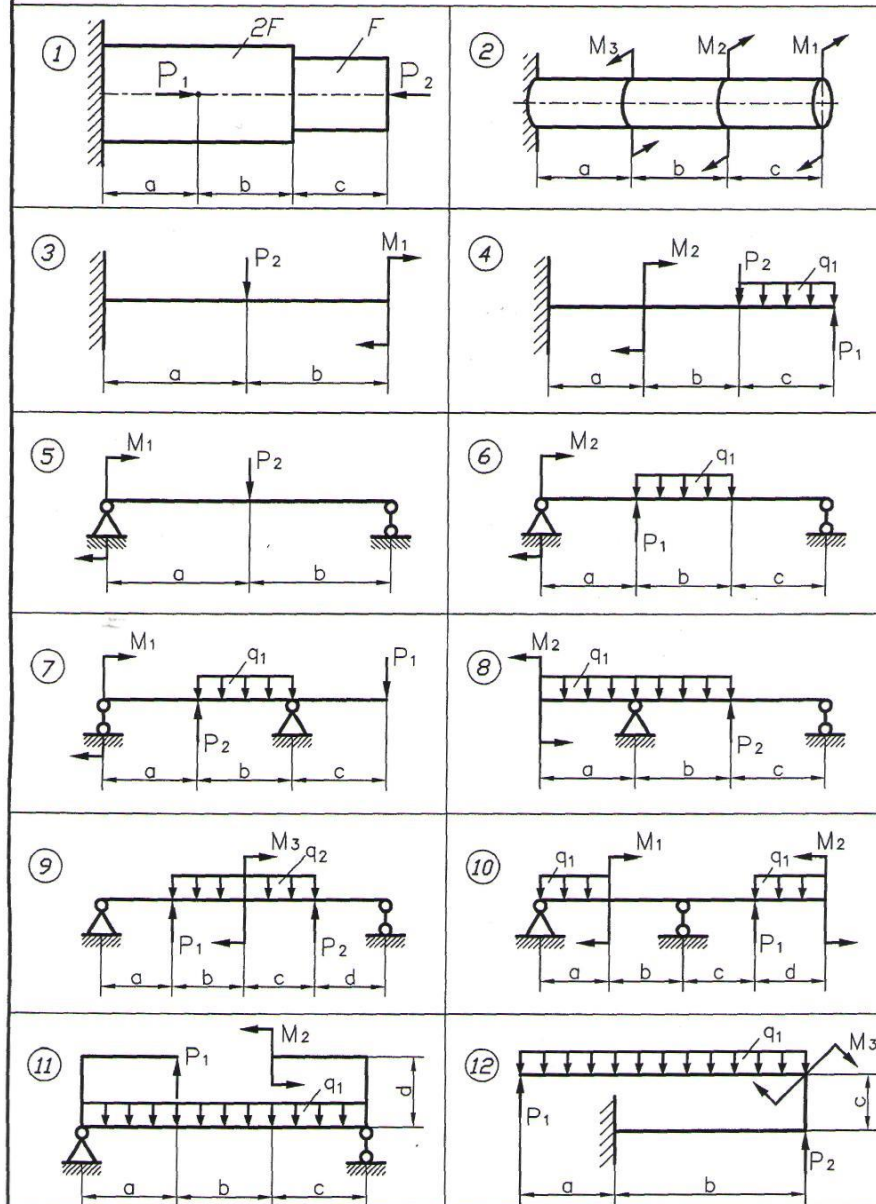
Вариант 2



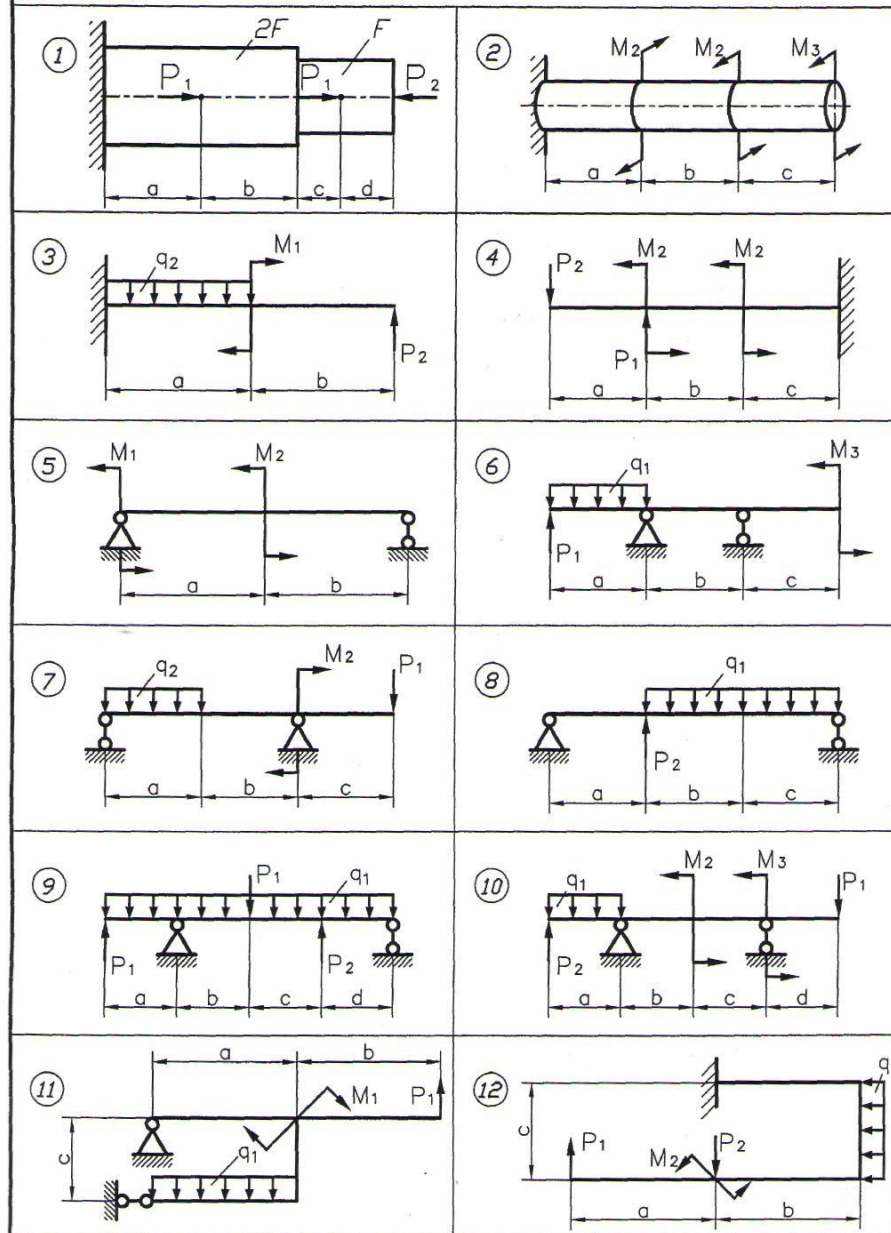
Вариант 3



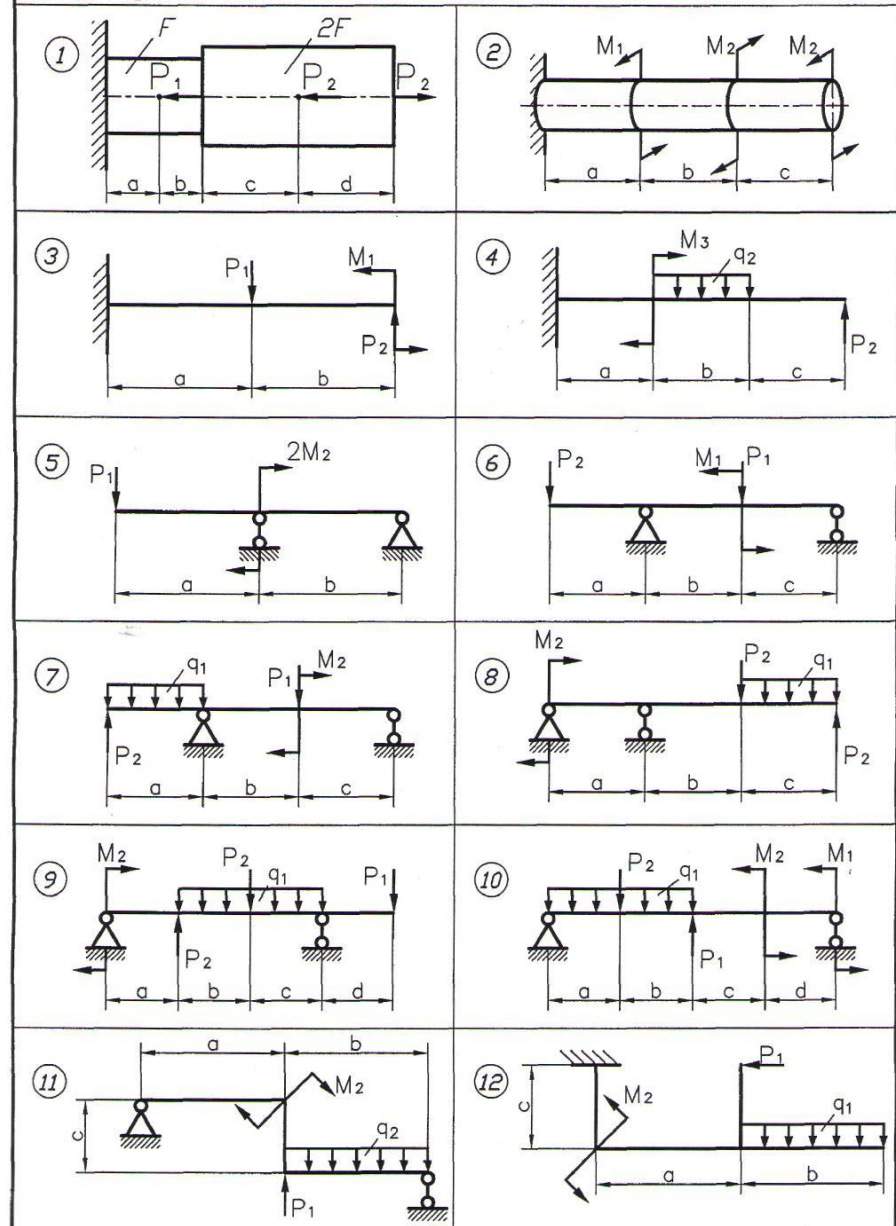
Вариант 4



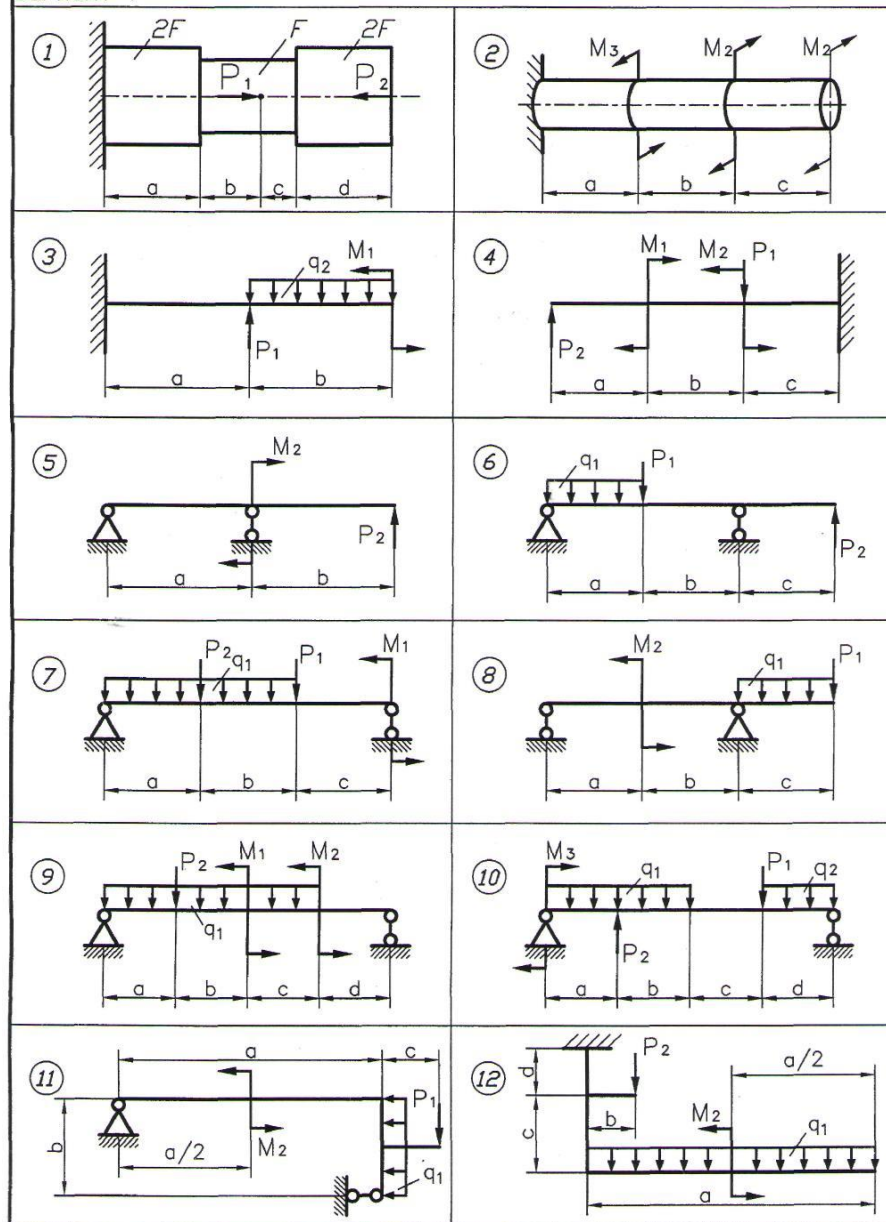
Вариант 5



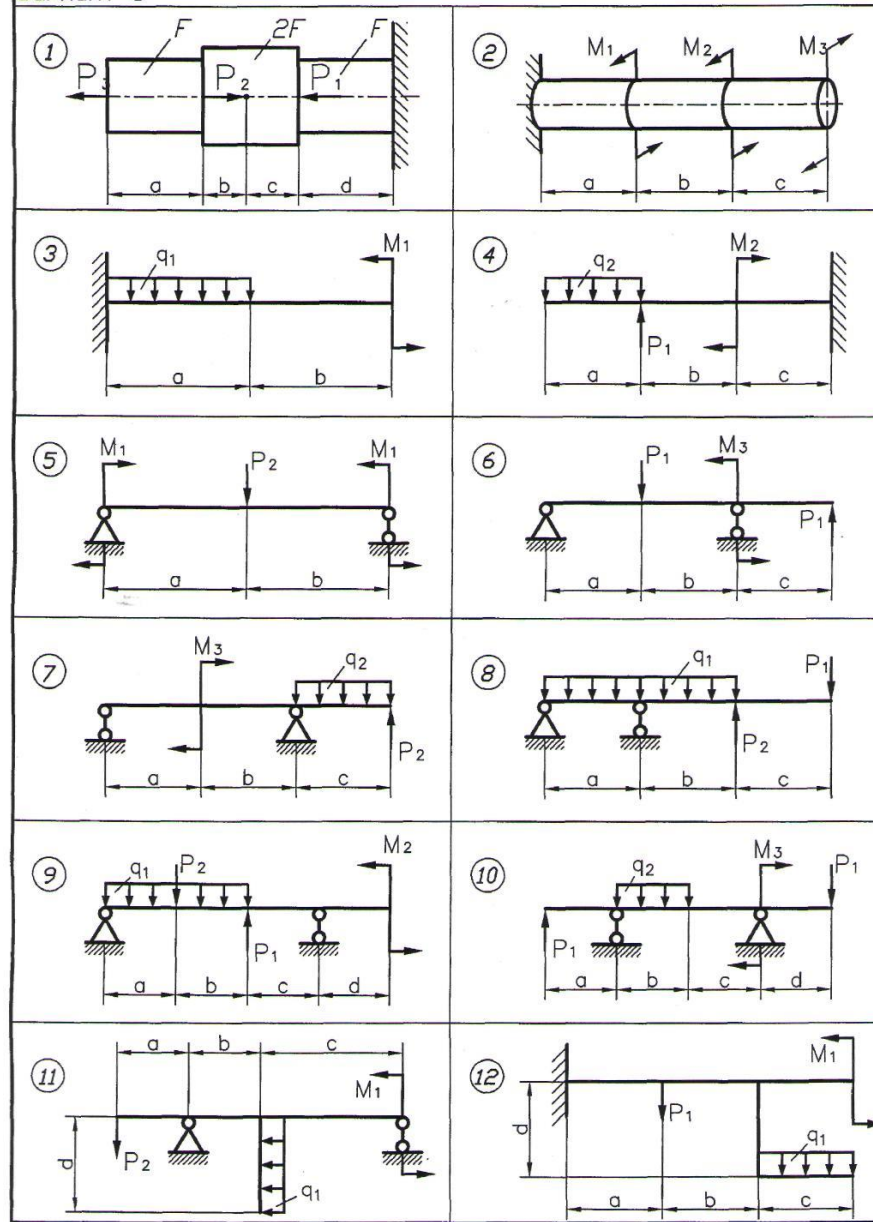
Вариант 6



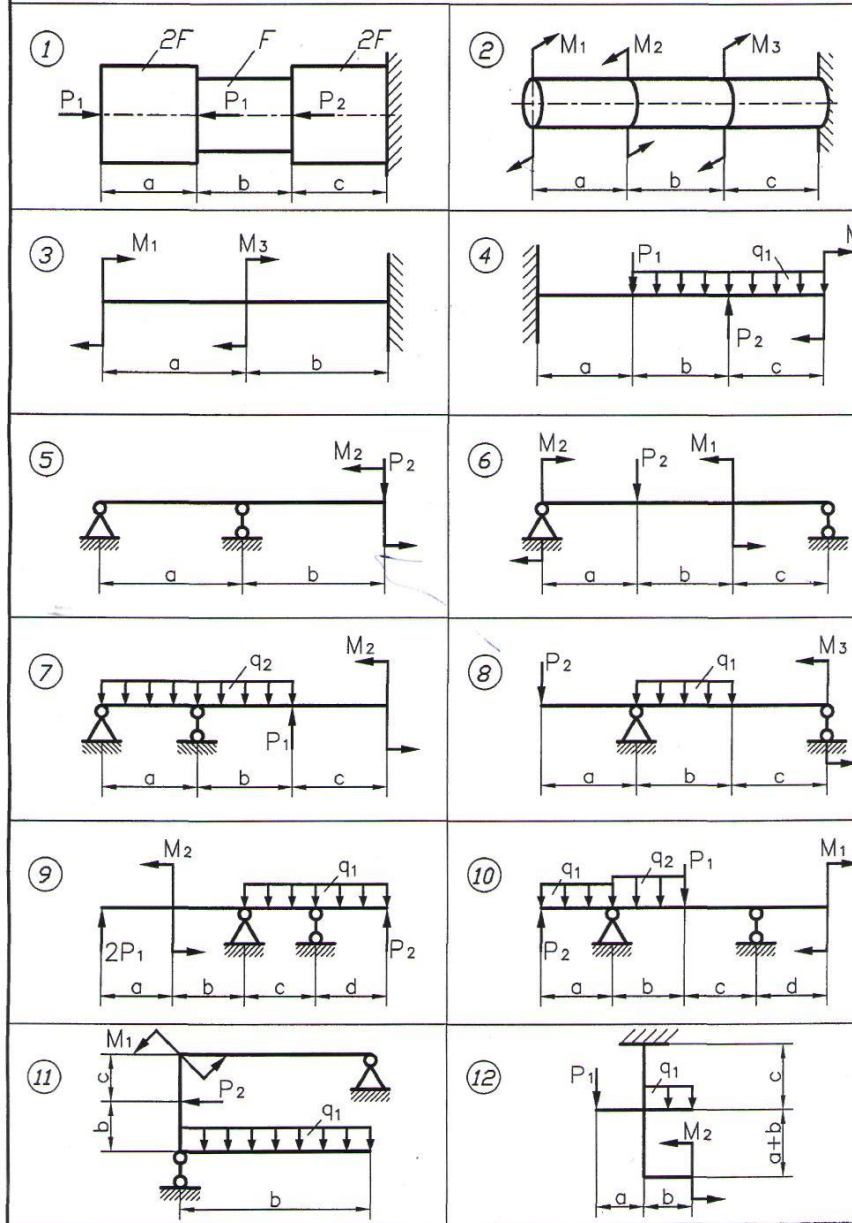
Вариант 7



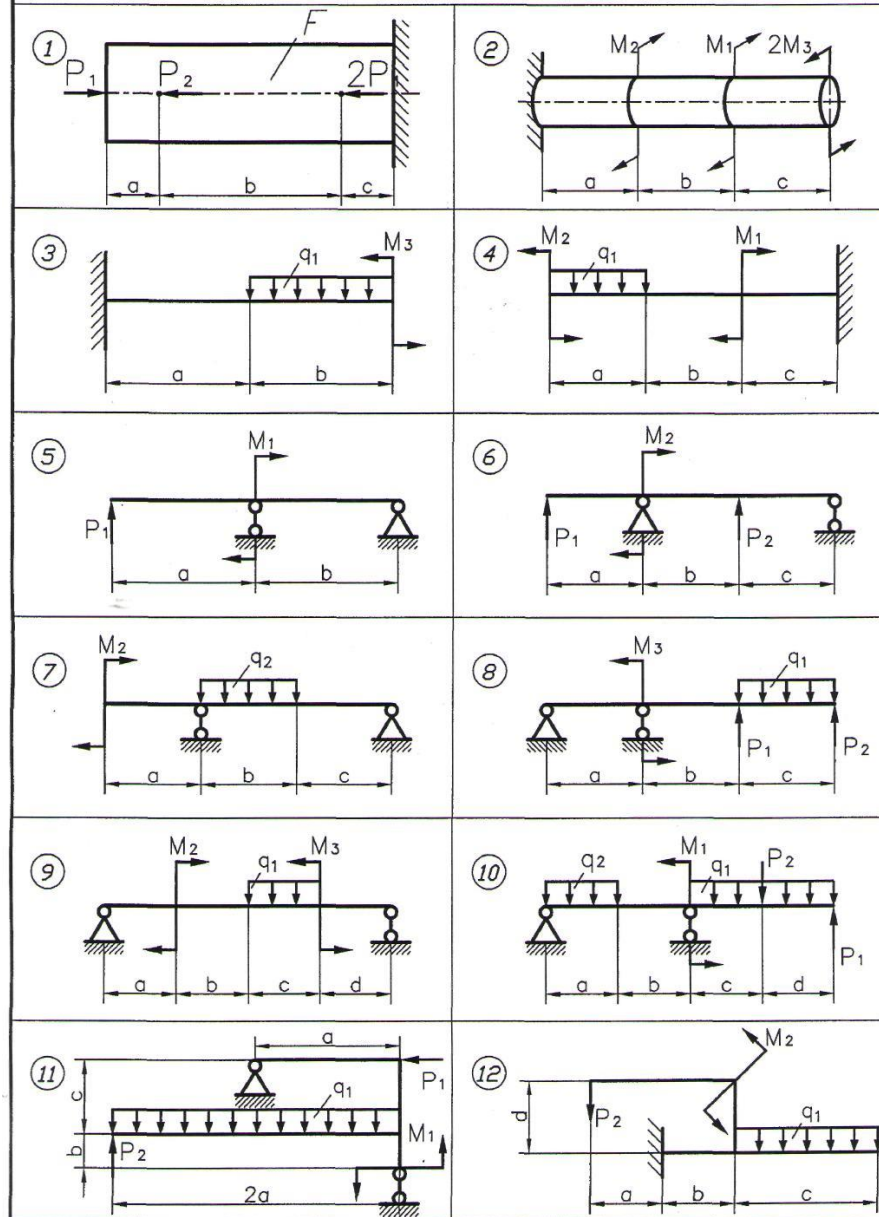
Вариант 8



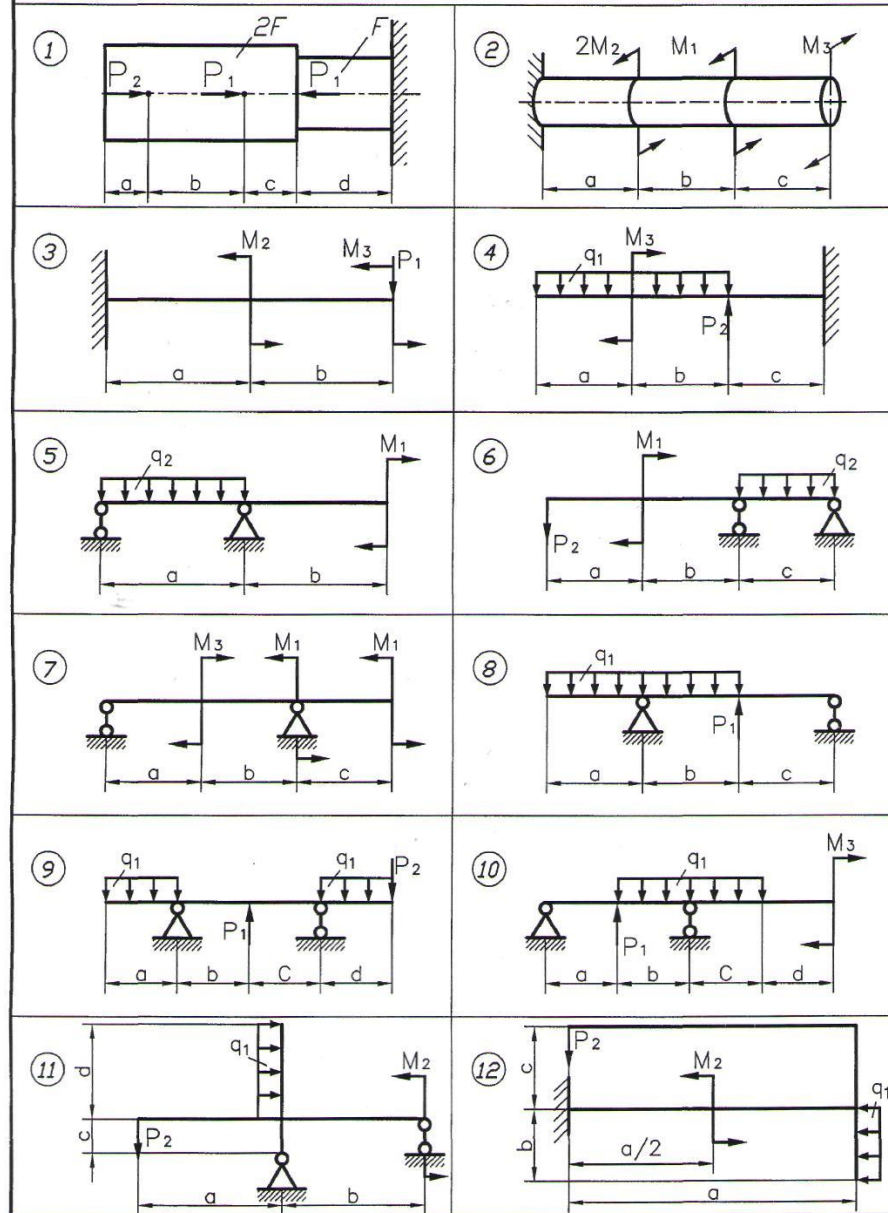
Вариант 9



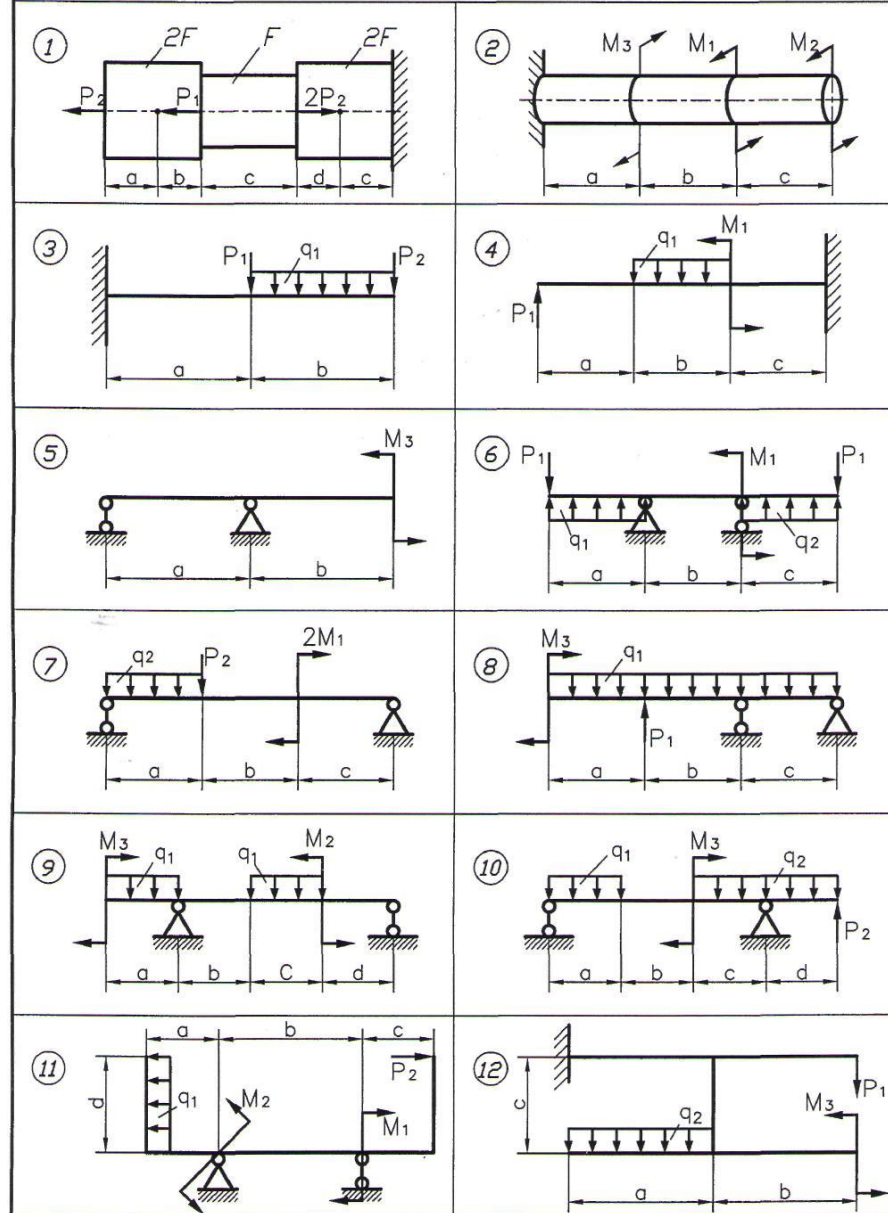
Вариант 10



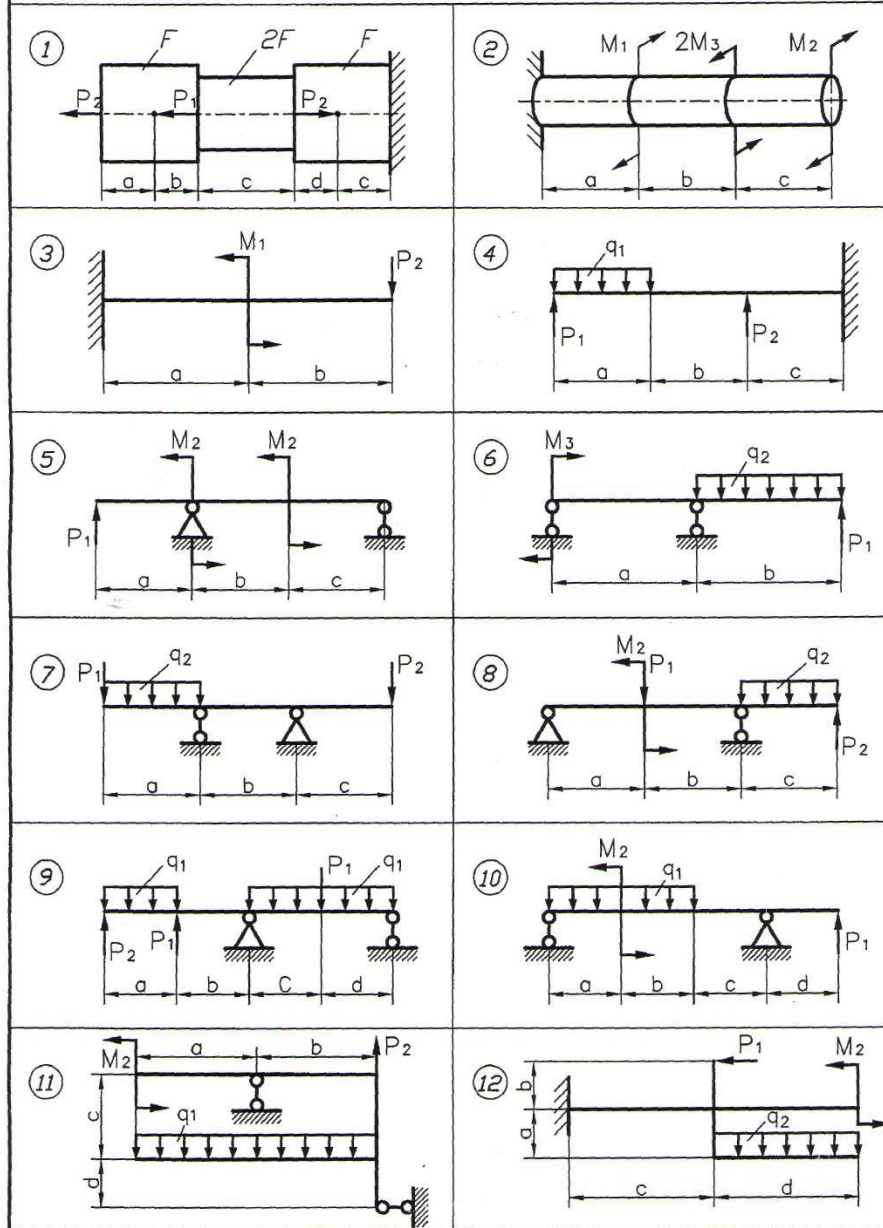
Вариант 11



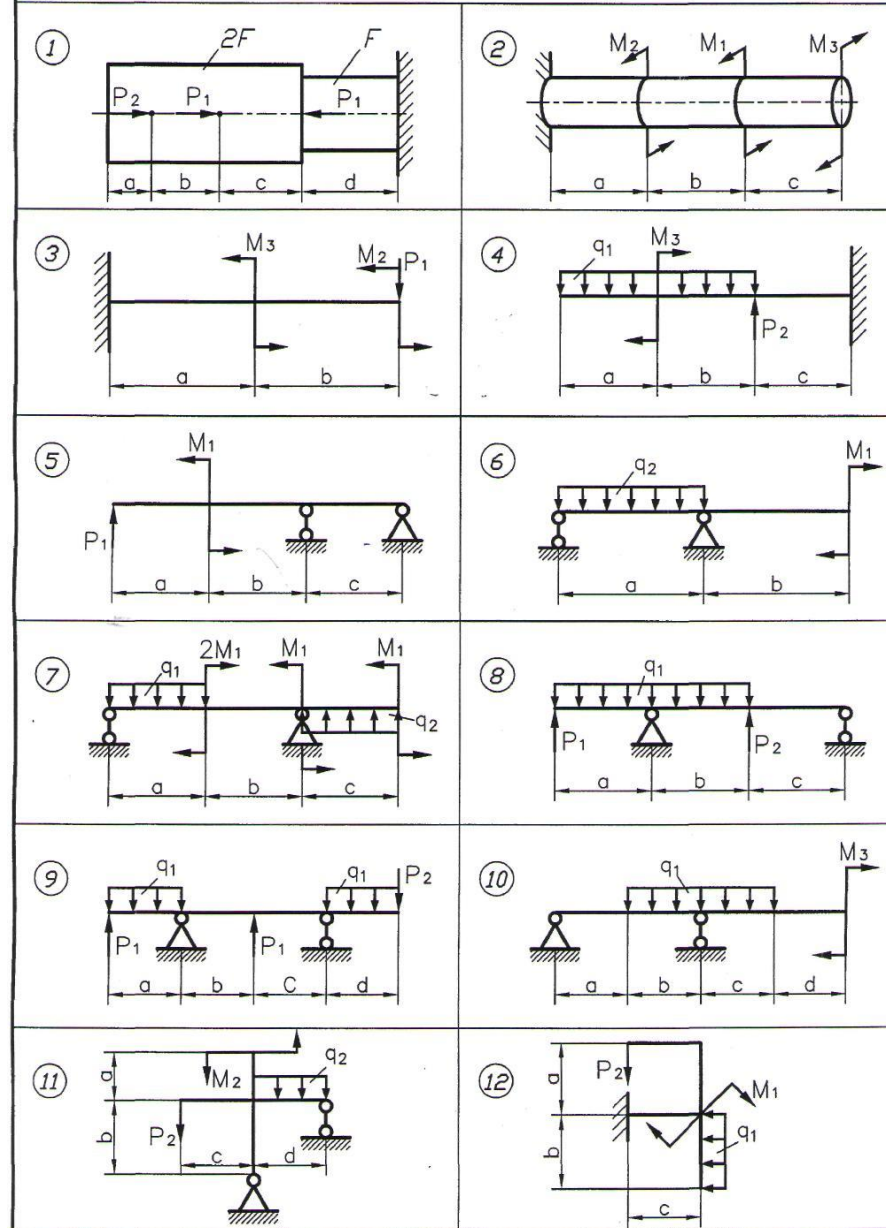
Вариант 12



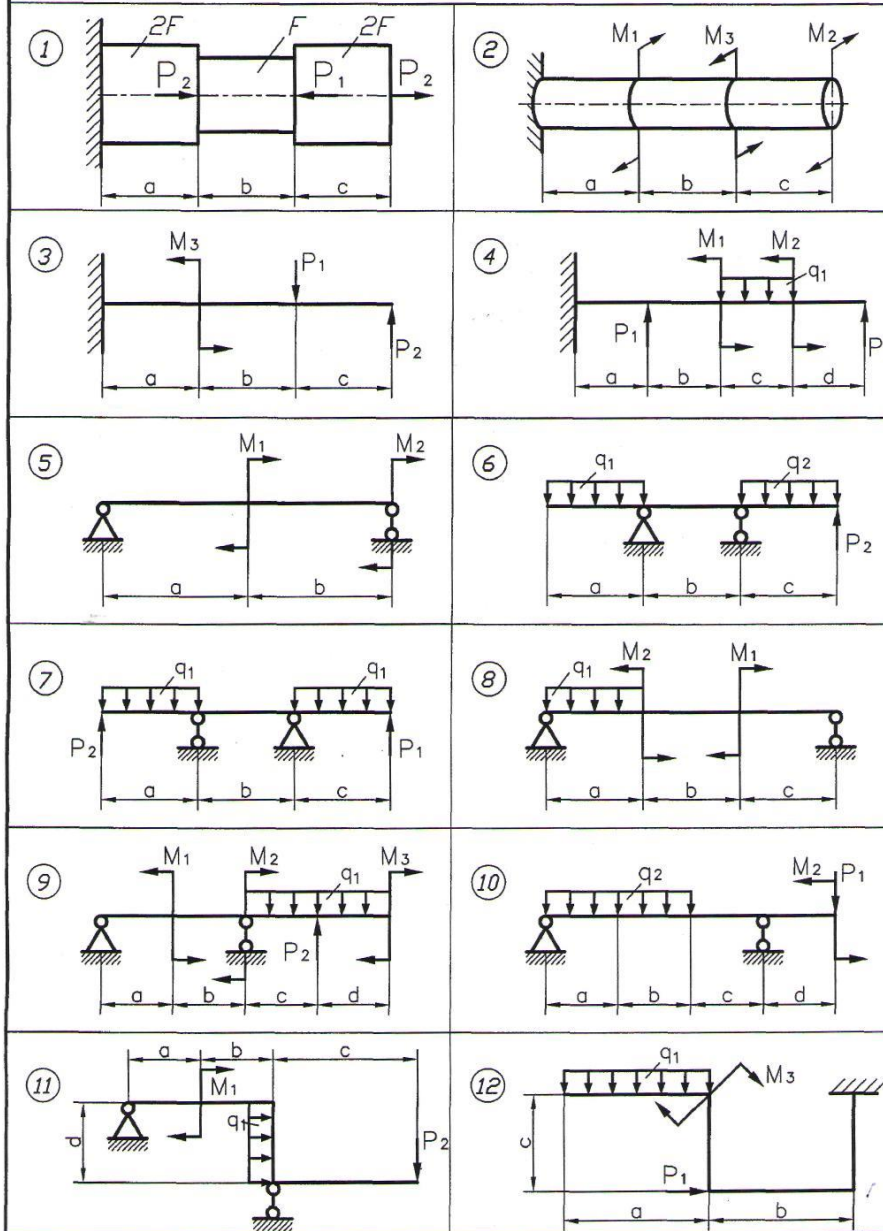
Вариант 13



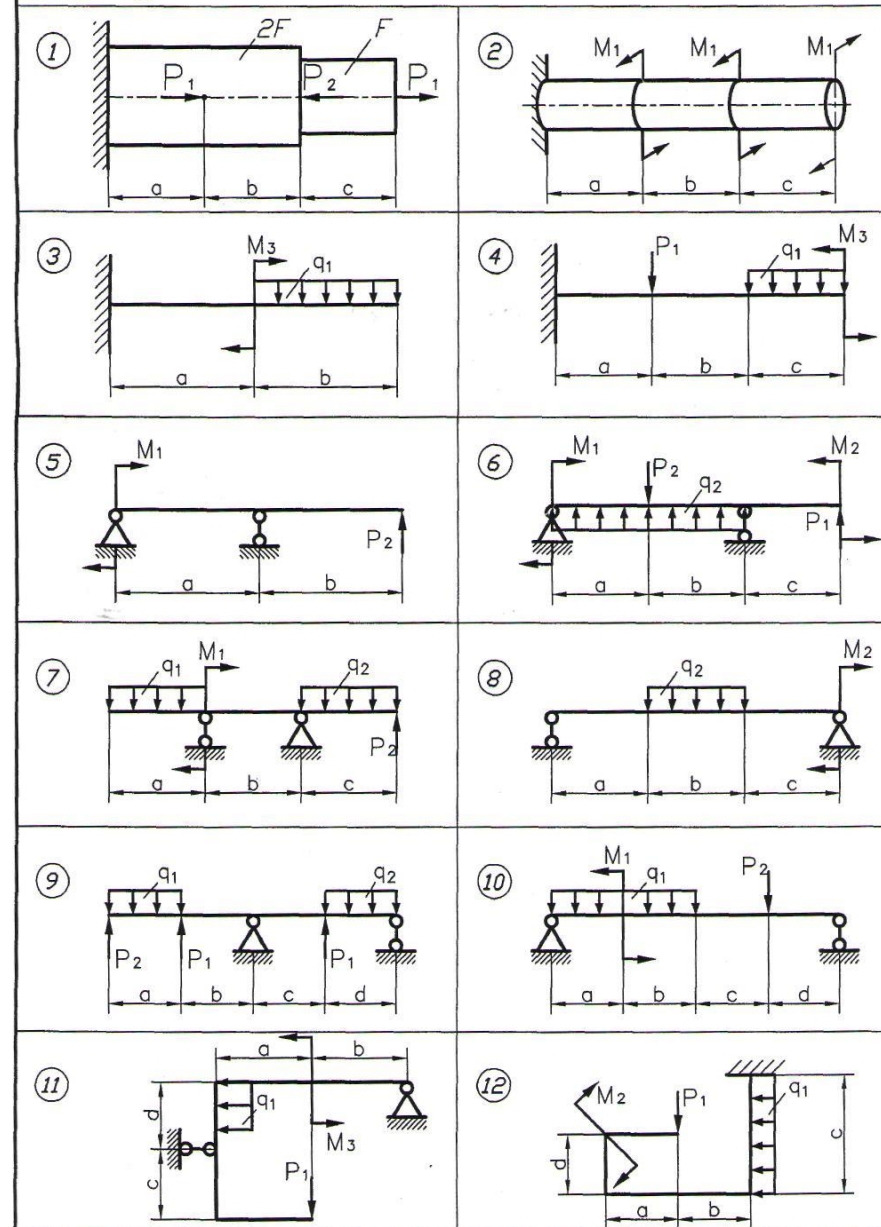
Вариант 14



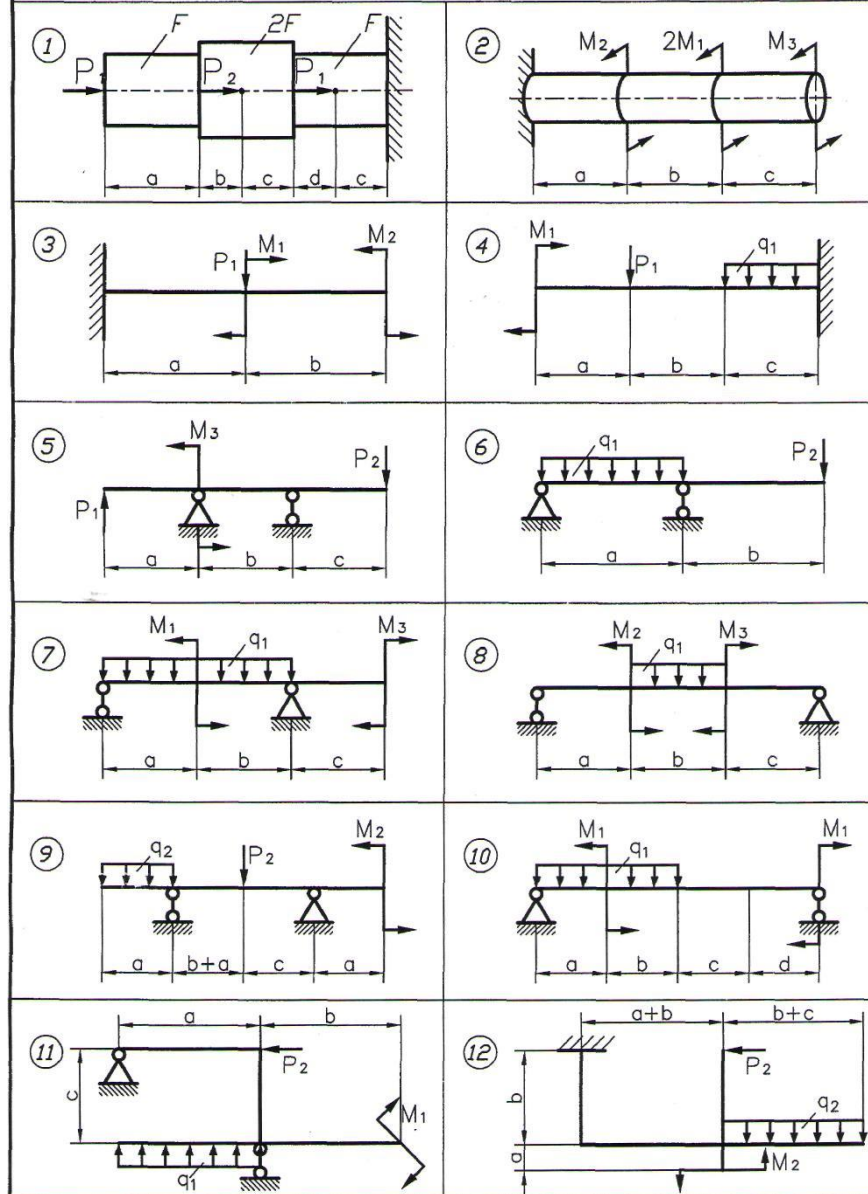
Вариант 15



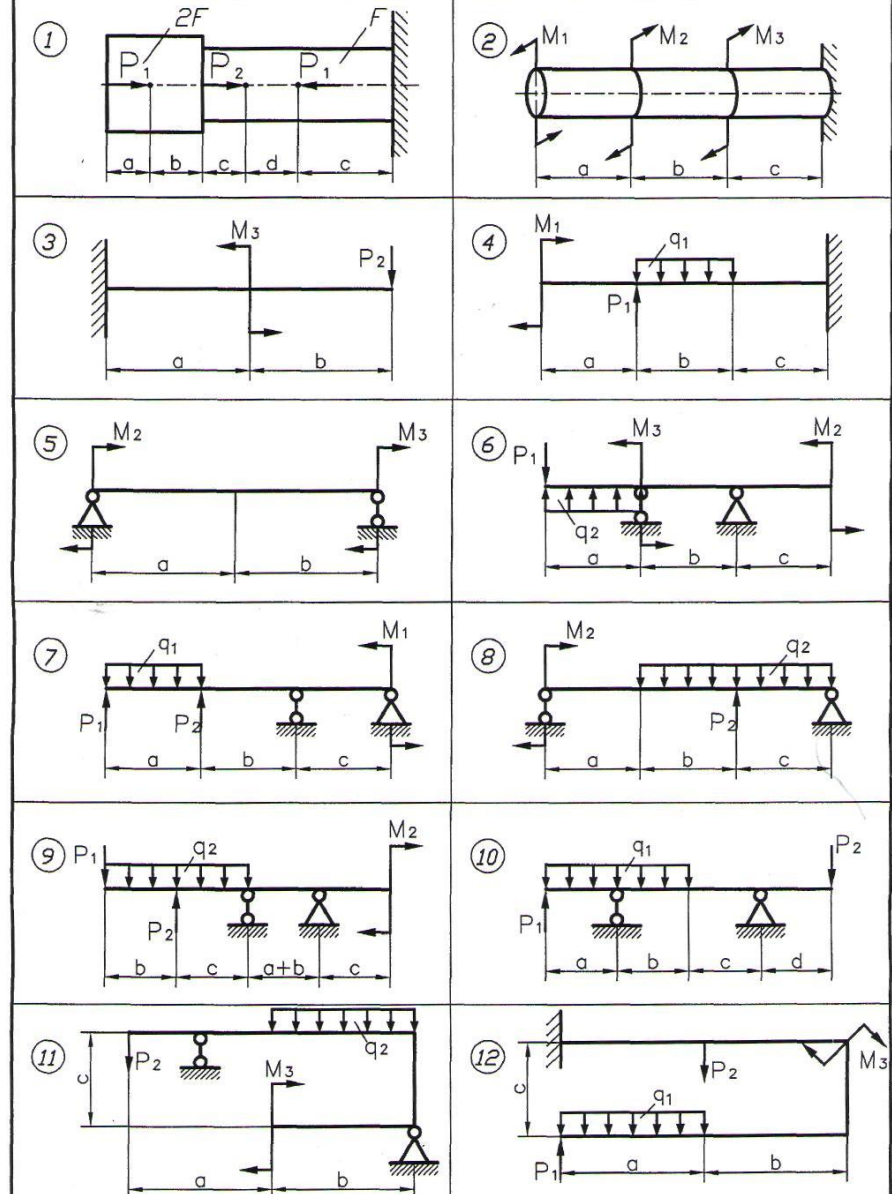
Вариант 16



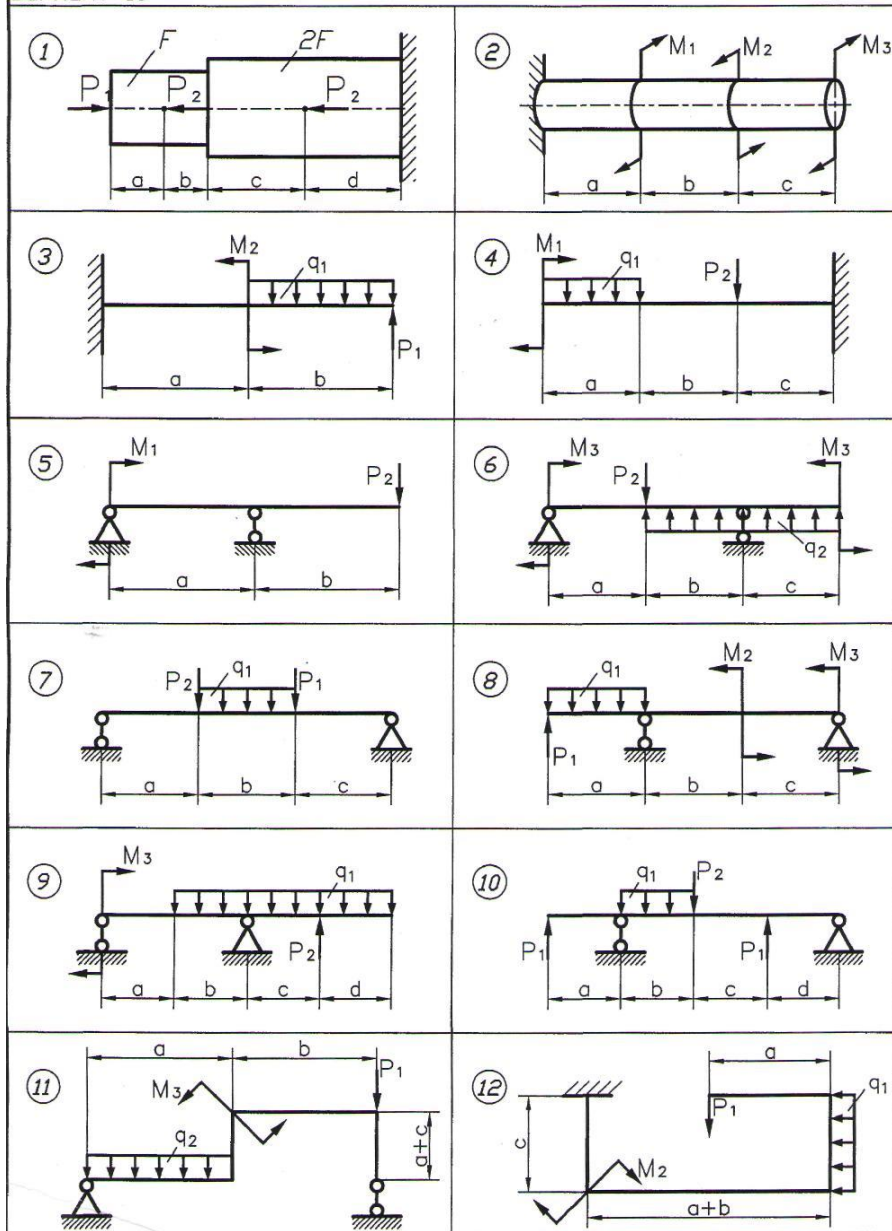
Вариант 17



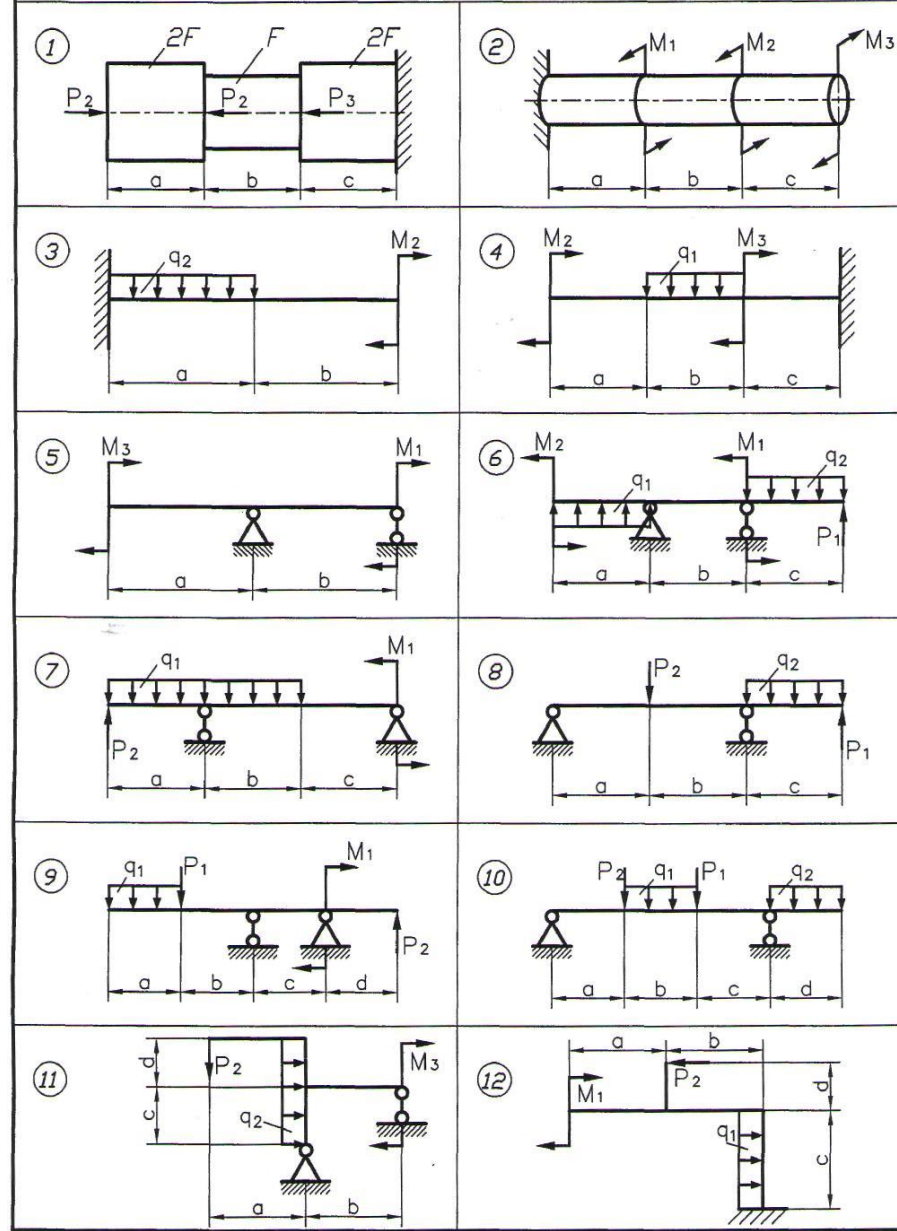
Вариант 18

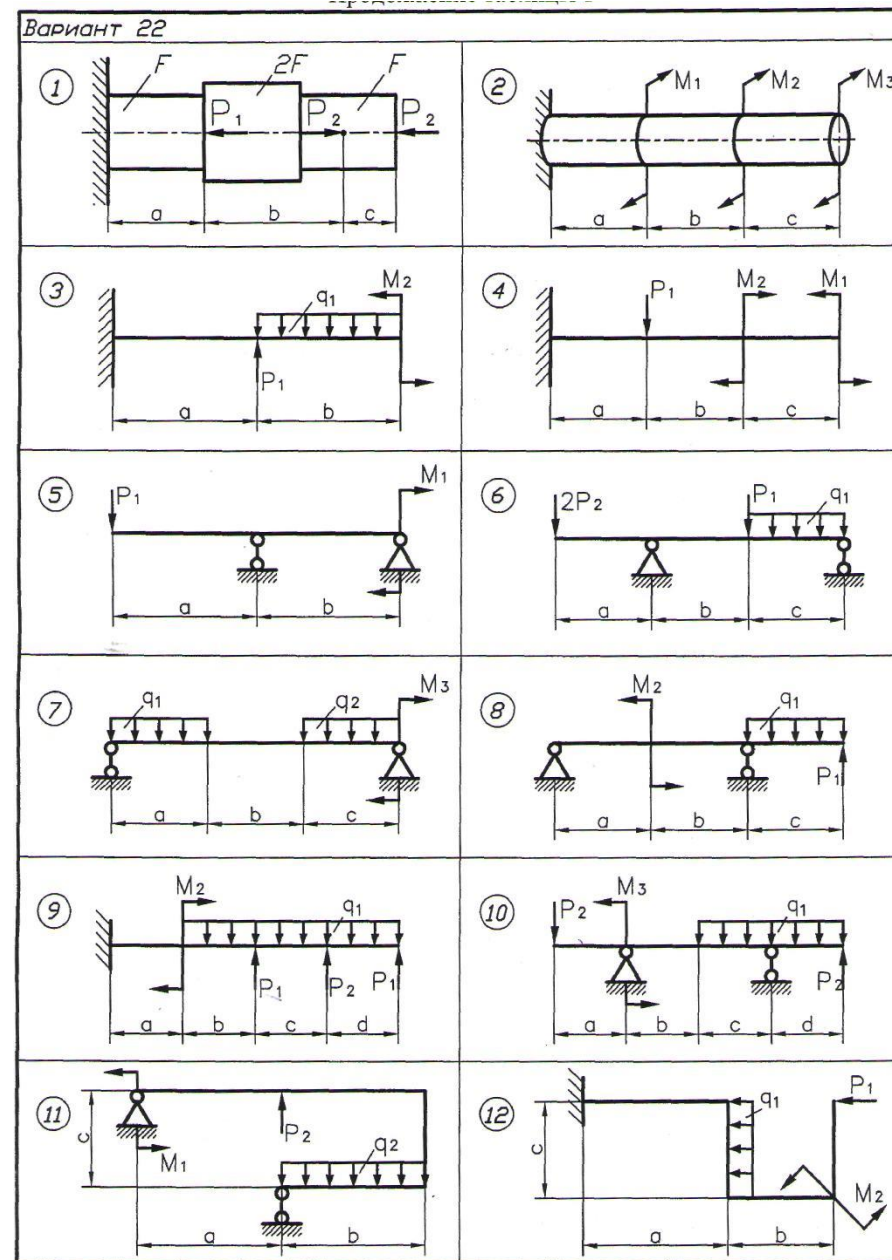
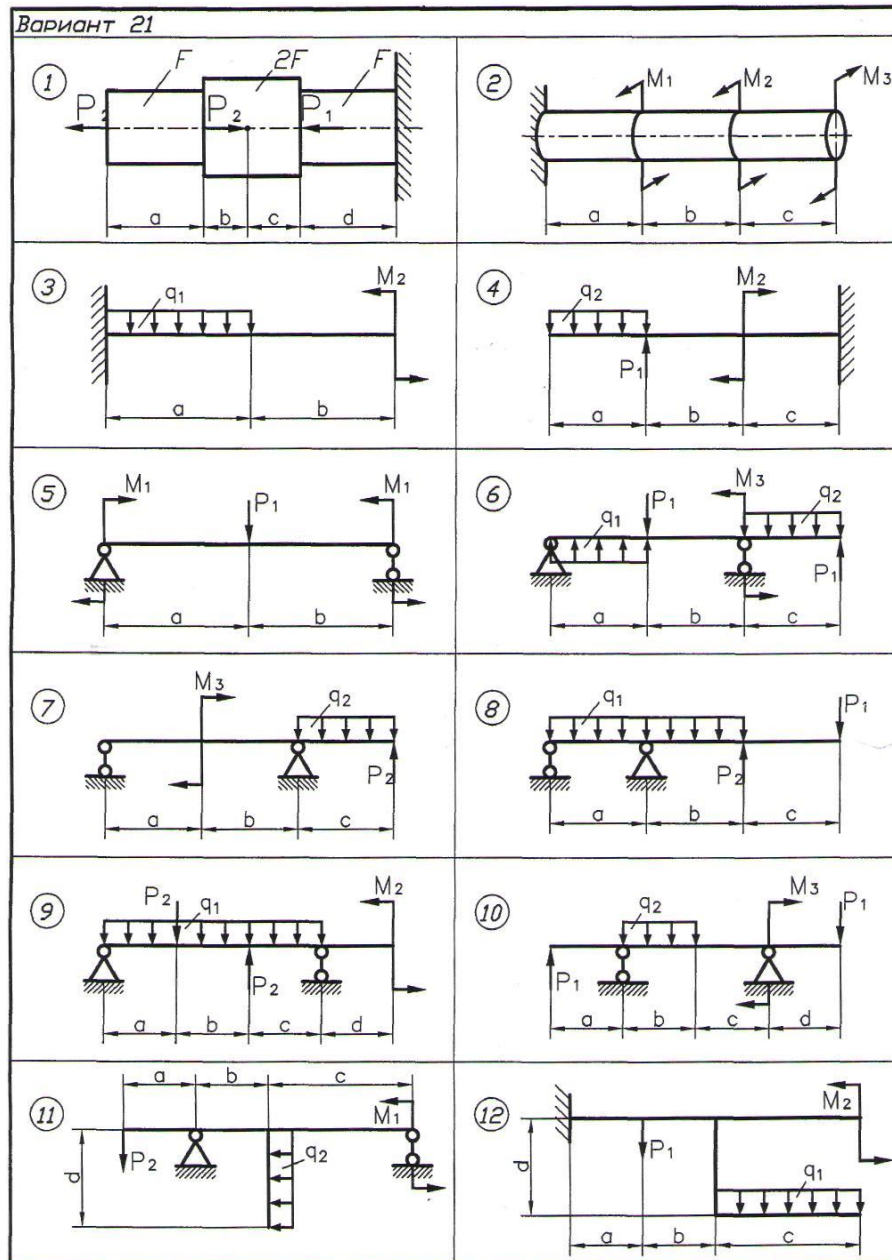


Вариант 19

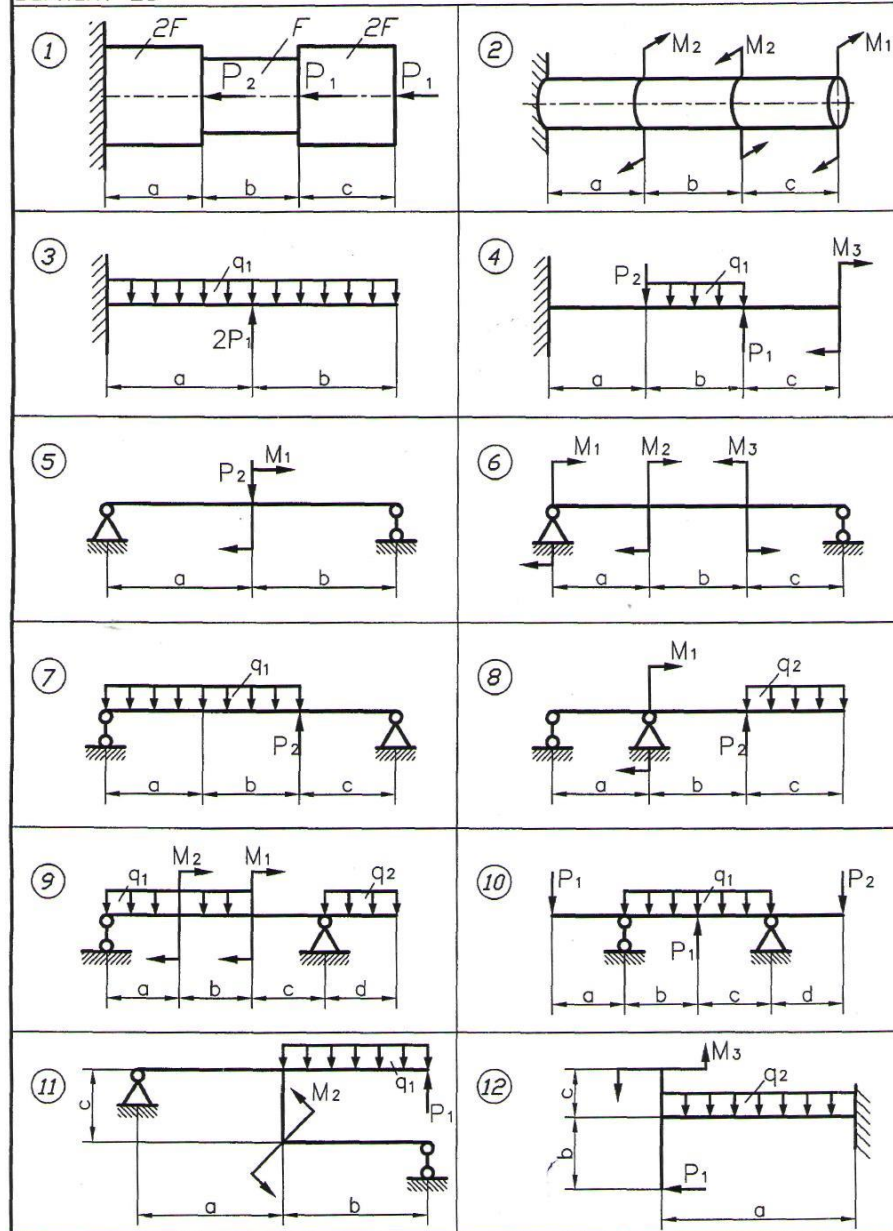


Вариант 20

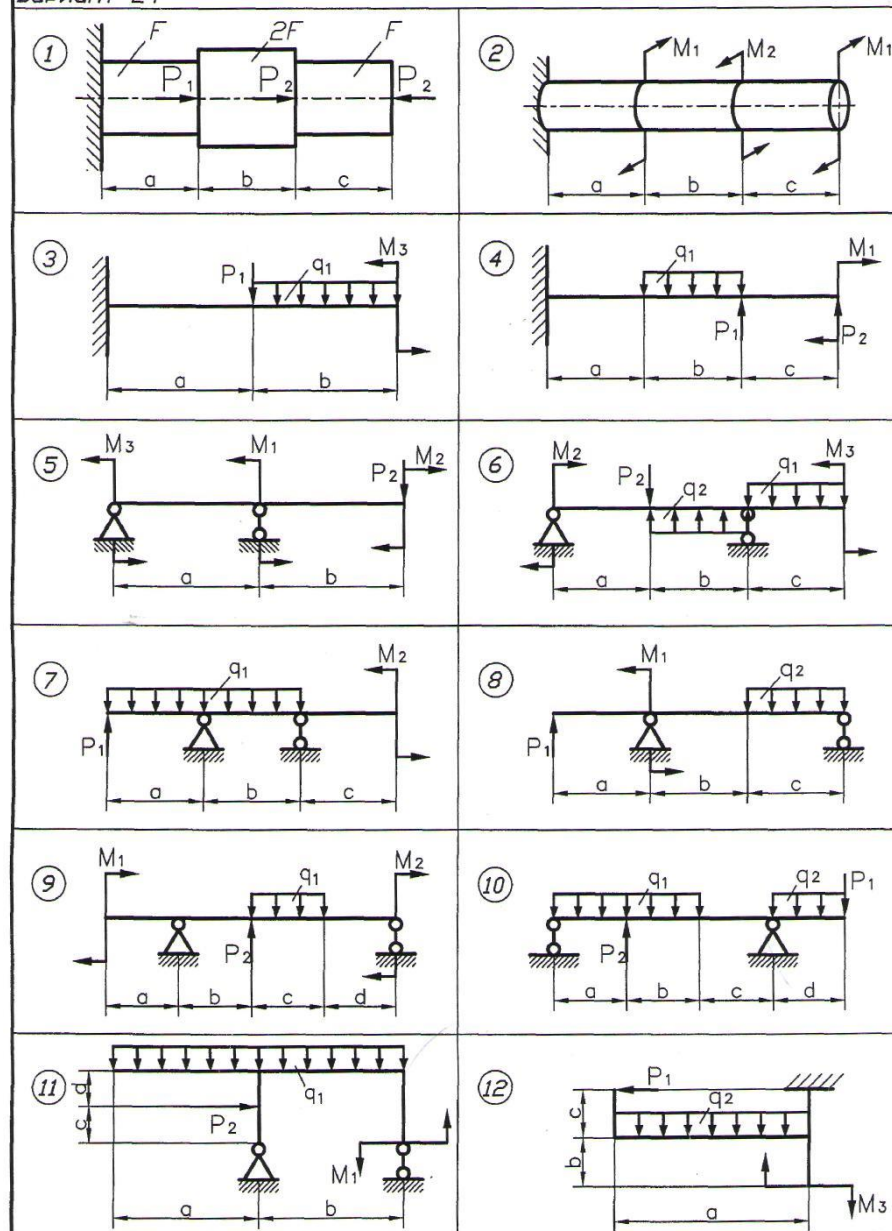




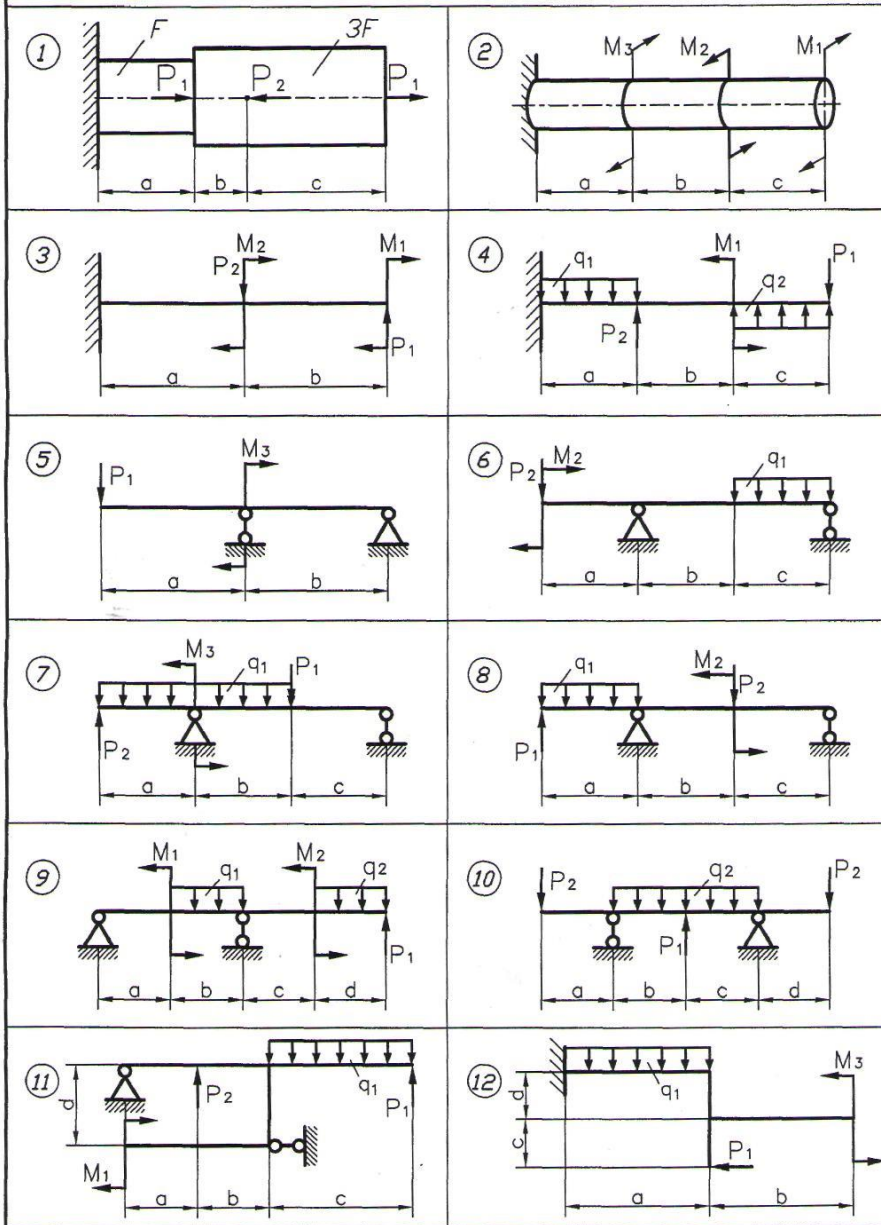
Вариант 23



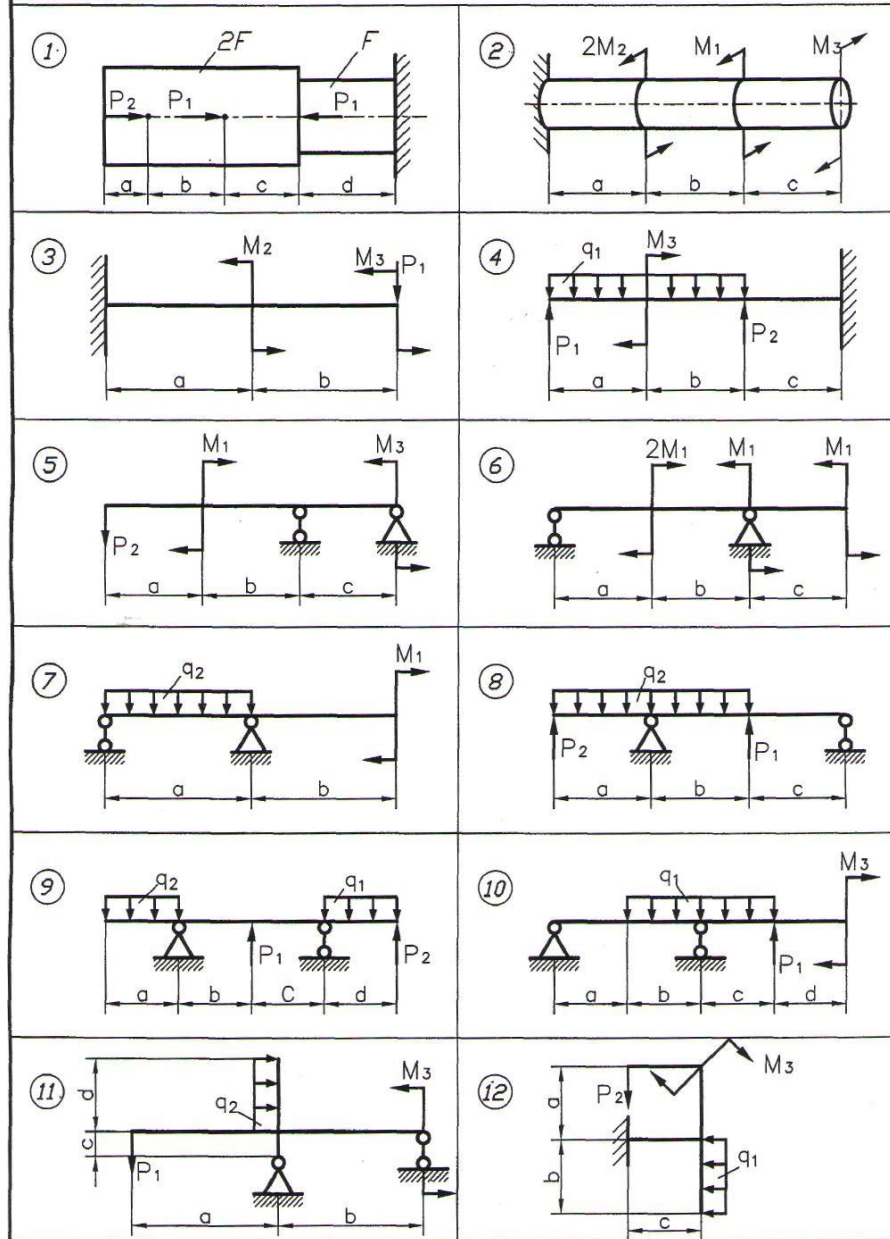
Вариант 24



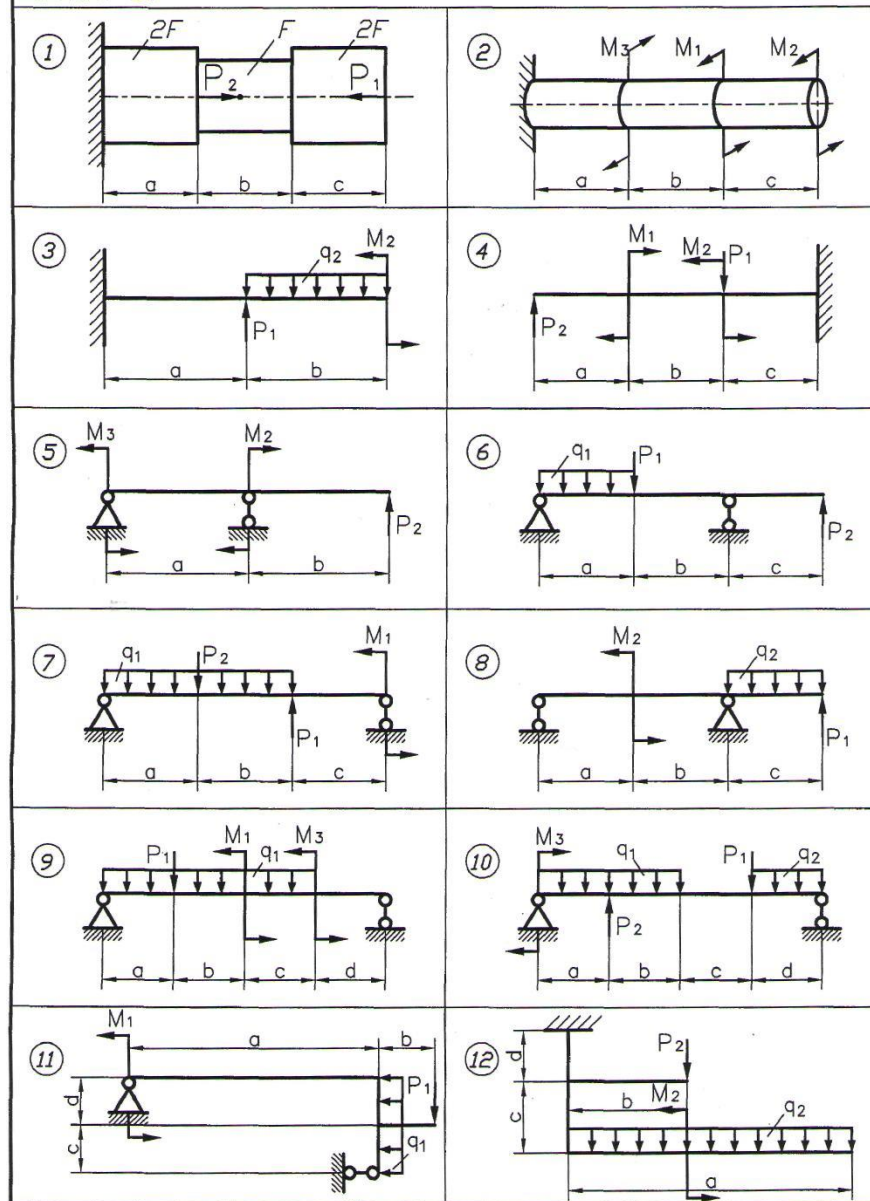
Вариант 25



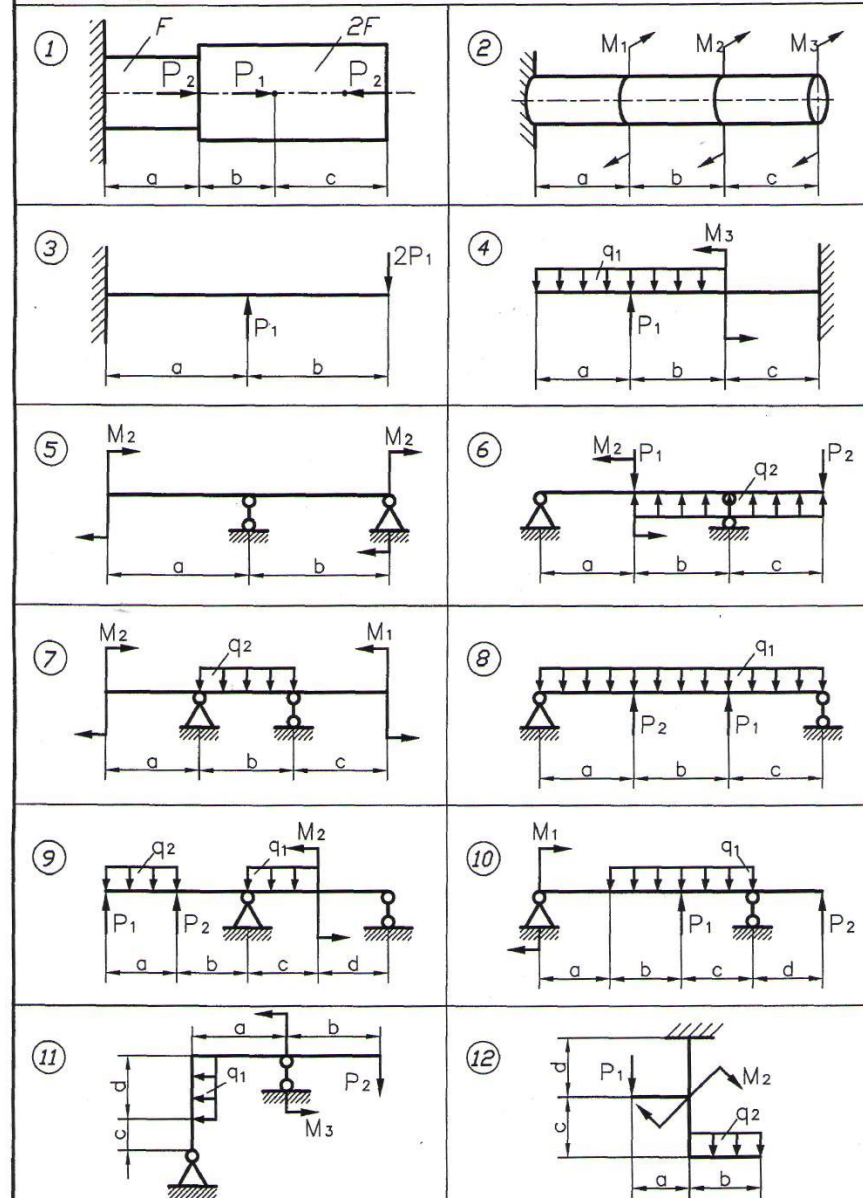
Вариант 27



ВАРИАНТ 28



ВАРИАНТ 29



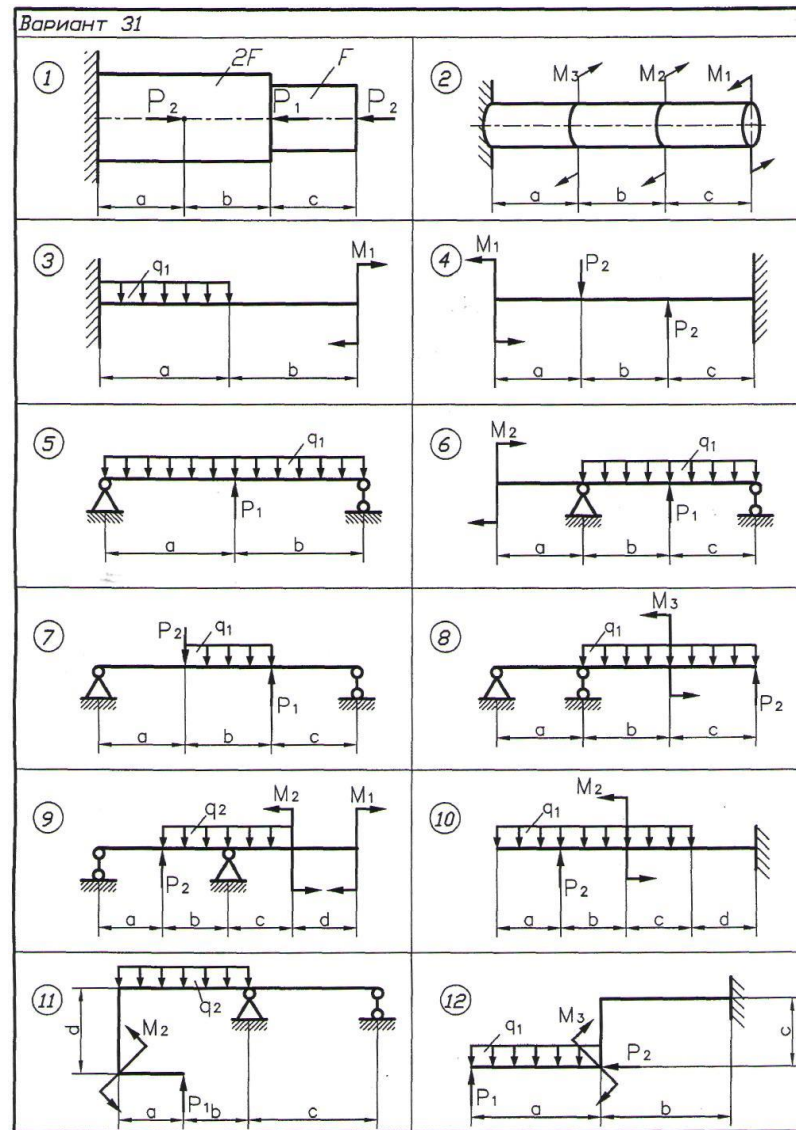
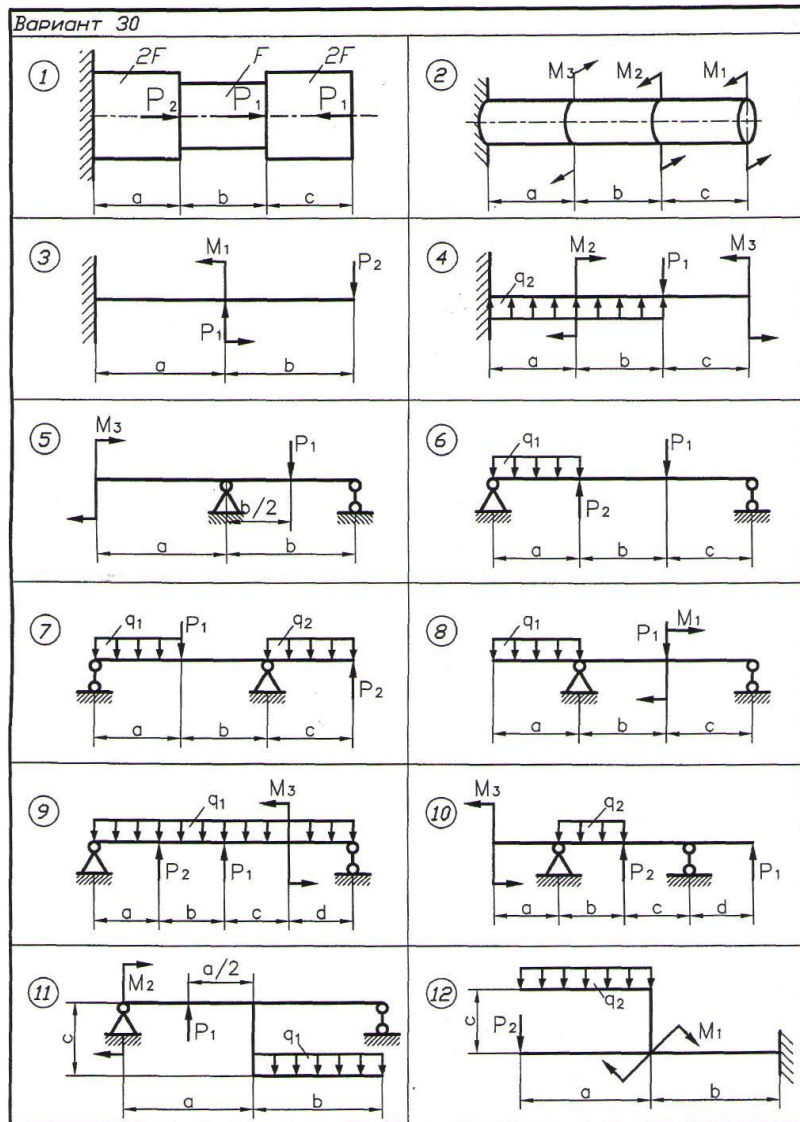


Рис.1. Расчетные схемы

Пример выполнения задания 1.

Балка длиной l закреплена левым концом и нагружена сосредоточенной силой F и моментом $m=2F\ell$ (рис. 1а).

Требуется построить эпюры поперечных сил Q и изгибающих моментов $M_{из}$.

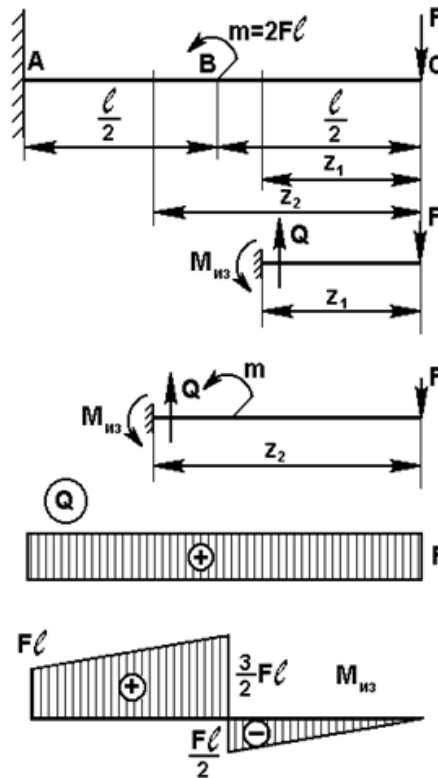


Рисунок 1а – Расчетная схема

Решение.

В нашем случае на балку с правой стороны не наложено связей. Поэтому чтобы не определять опорные реакции, целесообразно рассматривать равновесие правой отсеченной части балки. Заданная балка имеет два участка нагружения. Границы участков-сечения, в которых приложены внешние силы:

1 участок – СВ,

2 участок – ВА.

Проводим произвольное сечение на участке 1 и рассмотрим равновесие правой отсеченной части длиной Z_1 .

$0 \leq Z_1 \leq l/2$ (рис. 1а).

Из условия равновесия следует:

$$Q=F; \quad M_{из}=-F \cdot Z_1 \quad (1)$$

Поперечная сила положительна, т.к. внешняя сила F стремится повернуть отсеченную часть по часовой стрелке. Момент изгибающий считается отрицательным, т.к. он изгибает рассматриваемую часть балки выпуклостью вверх.

При составлении уравнений равновесия мысленно закрепляем место сечения, как это показано на рис. 1а; из уравнений (1) следует, что поперечная сила на I участке от Z_1 не зависит и является постоянной величиной.

Положительную силу $Q=F$ откладываем в масштабе вверх от осевой линии балки (рис.1а), перпендикулярно к ней.

Изгибающий момент зависит от Z_1 .

При $Z_1=0$ $M_{из}=0$

при $Z_1=l/2$ $M_{из}= -Fl/2$

Полученное значение $(-Fl/2)$ откладываем вниз, т.е. эпюра $M_{из}$ строится на сжатом волокне (рис.11).

Переходим ко второму участку ($l/2 \leq Z_2 \leq l$). Рассекаем участок II на произвольном расстоянии Z_2 от свободного правого торца балки (рис.1а) и рассматриваем равновесие отсеченной части длиной Z_2 (рис.1а). Изменение поперечной силы и изгибающего момента на основе условий равновесия можно выразить следующими уравнениями:

$Q=F$ $M_{из}= -FZ_2+2Fl$

Величина и знак поперечной силы не изменились.

Эпюра поперечной силы представлена на (рис.1а).

Величина изгибающего момента зависит от Z_2 .

При $Z_2= l/2$ $M_{из}=3Fl/2$, при $Z_2=l$.

Изгибающий момент получился положительным, как в начале участка II, так и в конце его. На участке II балка изгибается выпуклостью вниз.

Откладываем в масштабе величины моментов вверх по осевой линии балки (т.е. эпюра строится на сжатом волокне). Эпюра $M_{из}$ показана на (рис.1а). Наибольший изгибающий момент возникает в сечении, где приложен внешний момент m и по абсолютной величине равен $3Fl/2$.

Заметим, что на длине балки, где Q сохраняет постоянную величину, изгибающий момент $M_{из}$ меняется линейно и представляется на эпюре наклонными прямыми. Из эпюр Q и $M_{из}$ видно, что в сечении, где приложена внешняя поперечная сила, эпюра Q имеет скачок на величину этой силы, а эпюра $M_{из}$ – излом. В сечении, где приложен внешний изгибающий момент, эпюра $M_{из}$ имеет скачок на величину этого момента. На эпюре Q это не отражается. Из эпюры $M_{из}$ видим, что $\max M_{из}=3Fl/2$, следовательно, опасное сечение предельно приближено с левой стороны к т.В(рис.1а).

Пример 2.

Для балки изображенной на рис.1в, построить эпюры поперечных сил и изгибающих моментов. На длине a балка нагружена равномерно распределенной нагрузкой с интенсивностью q (кН/см).

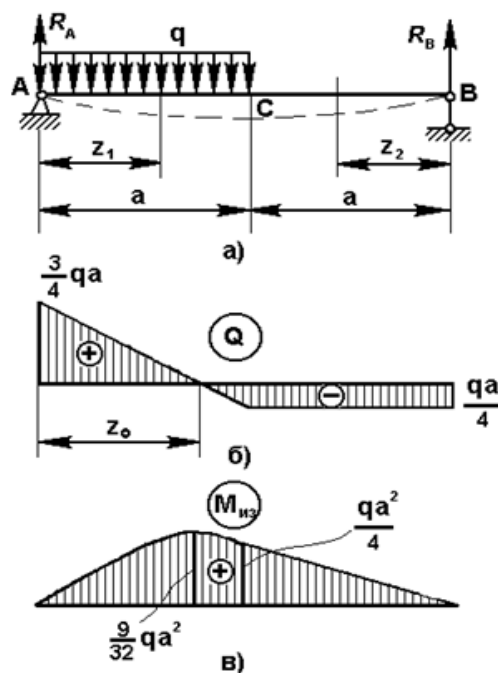


Рисунок 1в– Расчетная схема

Решение.

На опоре А (шарнир неподвижный) возникнет вертикальная реакция R_A (горизонтальная реакция равна нулю), а на опоре В (подвижный шарнир) возникает вертикальная реакция R_B .

Определим вертикальные реакции опор, составляя уравнение моментов относительно опор А и В.

$$\Sigma M_A = 0 \quad qa^2/2 - R_B \cdot 2a = 0 \quad R_B = qa/4$$

$$\Sigma M_B = 0 \quad R_A \cdot 2a - qa \cdot 3a/2 = 0 \quad R_A = 3qa/4$$

Проверим правильность определения реакции:

$$\Sigma Y = 0 \quad R_A + R_B - qa = 3qa/4 + qa/4 - qa = 0$$

т.е. опорные реакции определены правильно.

Заданная балка имеет два участка нагружения:

I участок – АС.

II участок – СВ.

На первом участке $0 \leq Z_1 \leq a$, в текущем сечении Z_1 из условия равновесия отсеченной части имеем

$$Q = R_A - qZ_1 = 3qa/4 - qZ_1$$

$$\text{При } Z_1 = 0 \quad Q = 3qa/4.$$

$$\text{При } Z_1 = a \quad Q = -qa/4$$

Эпюра Q имеет вид наклонной прямой, пересекающей ось Z .

Уравнение изгибающих моментов на I участке балки:

$$M_{из} = \frac{3}{4}qaZ_1 - q\frac{Z_1^2}{2}$$

Момент от реакции R_A изгибает балку на участке 1, выпуклостью вниз, поэтому изгибающий момент от реакции R_A вводится в уравнение со знаком плюс. Нагрузка qZ_1 изгибает балку выпуклостью вверх, поэтому момент от нее вводится в уравнение со знаком минус. Изгибающий момент изменяется по закону квадратной параболы.

Поэтому, необходимо выяснить имеет ли место экстремум. Между поперечной силой Q и изгибающим моментом существует дифференциальная зависимость на анализе которой мы остановимся далее

Как известно, функция имеет экстремум там, где производная равна нулю. Следовательно, чтобы определить при каком значении Z_1 , изгибающий момент будет экстремальным, надо уравнение поперечной силы приравнять к нулю.

$$Q = 3qa/4 - qZ_1 = 0 \quad Z_1 = Z_0 = 3a/4$$

Так как поперечная сила меняет в данном сечении знак с плюса на минус, то изгибающий момент в этом сечении будет максимальным. Если Q меняет знак с минуса на плюс, то изгибающий момент в этом сечении будет минимальным.

Итак, изгибающий момент при $Z_1 = Z_0 = 3a/4$, является максимальным.

Поэтому, строим параболу по трем точкам

$$\text{При } Z_1 = 0 \quad M_{из} = 0$$

$$\text{При } Z_1 = Z_0 = 3a/4 \quad M_{из} = M_{max} = \frac{9}{32} qa^2$$

$$\text{При } Z_1 = a \quad M_{из} = \frac{qa^2}{4}$$

Рассекаем второй участок на расстоянии Z_2 от опоры В

Из условия равновесия правой отсеченной части балки имеем:

$$Q = -R_B = -\frac{qa}{4} \quad M_{из} = R_B Z_2$$

При $0 \leq Z_2 \leq a$ величина $Q = \text{const}$, изгибающий момент будет:

$$\text{при } Z_2 = 0 \quad M_{из} = 0,$$

$$\text{при } Z_2 = a \quad M_{из} = \frac{qa^2}{4}, \text{ т.е. } M_{из} \text{ меняется по линейному закону.}$$

Эпюра поперечных сил представлена на рис.1в изгибающих моментов на рис.1в. Примерный вид изогнутой оси балки предоставлен пунктиром на рис.1в.

Задание 2: Расчет статически определимого ступенчатого бруса при растяжении и сжатии.

Ступенчатый стальной брус нагружен продольными силами P , направленными вдоль его оси. Заданы длины участков и площади их поперечных сечений F_1 и F_2 . Модуль упругости материала $E = 2 \cdot 10^5$ МПа, предел текучести $\sigma_T = 240$ МПа и запас прочности по отношению к пределу текучести $n_T = 1,5$.

Требуется:

1) построить эпюры продольных сил N , напряжений σ и продольных перемещений Δ ;

2) проверить, выполняется ли условие прочности.

Расчетные схемы выбираются из рис. 5, числовые данные берутся из таблицы 1.

Пример выполнения задания 2.

Ступенчатый брус нагружен силами P_1, P_2, P_3 , (рис.2).

Дано: $P_1=40\text{кН}$, $P_2=90\text{кН}$, $P_3=110\text{кН}$, $a=0,5\text{м}$, $b=0,5\text{м}$, $c=0,4\text{м}$; $F_1=6\text{см}$; $F_2=14\text{ см}^2$, $E=2\cdot 10^5\text{ Мпа}$, $\sigma_T=240\text{ Мпа}$, $n_T=1,5$.

Требуется построить эпюры продольных сил N , нормальных напряжений σ , продольных перемещений Δ и проверить, выполняется ли условие прочности.

Решение.

1. Построение эпюры N .

На брус действуют три силы, следовательно, продольная сила по его длине будет изменяться. Разбиваем брус на участки, в пределах которых продольная сила будет постоянной.

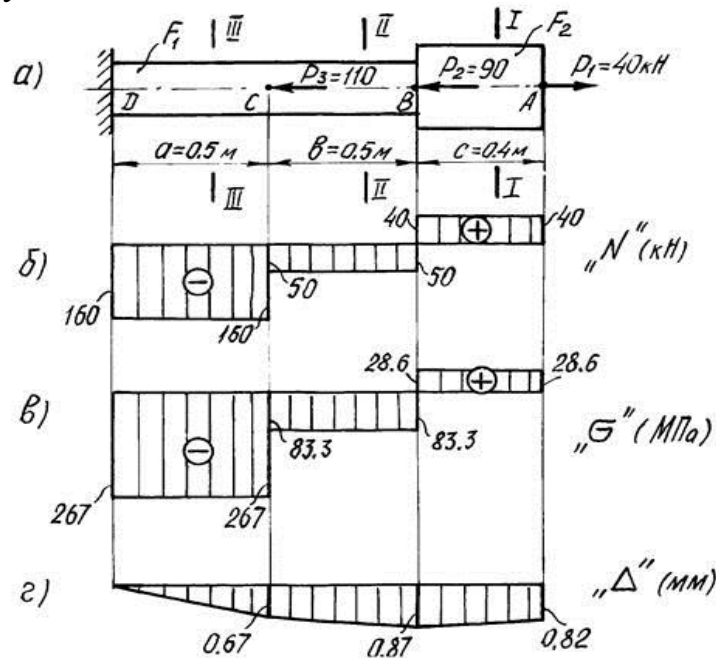


Рисунок 2— Расчетная схема бруса и эпюры: а - расчетная схема; б - эпюра продольных сил; в - эпюра напряжений; г - эпюра продольных перемещений

В данном случае границами участков являются сечения, в которых приложены силы. Обозначим сечения буквами A , B , C , D , начиная со свободного конца, в данном случае правого.

Для определения продольной силы на каждом участке рассматриваем произвольное поперечное сечение, сила в котором определяется по правилу, приведенному ранее. Чтобы не определять предварительно реакцию в заделке D , начинаем расчеты со свободного конца бруса A .

Участок AB , сечение 1-1. Справа от сечения действует растягивающая сила P_1 (рис. 2). В соответствии с упомянутым ранее правилом, получаем

$$N_{AB}=+P_1=40\text{ кН}.$$

Участок BC , сечение 2-2. Справа от него расположены две силы, направленные в разные стороны. С учетом правила знаков, получим

$$N_{BC}=+P_1-P_2=40-90=-50\text{ кН}.$$

Участок CD , сечение 3-3: аналогично получаем

$$N_{CD} = +P_1 - P_2 - P_3 = 40 - 90 - 110 = -160 \text{ кН.}$$

По найденным значениям N в выбранном масштабе строим эпюру, учитывая, что в пределах каждого участка продольная сила постоянна (рис.15,б)

Положительные значения N откладываем вверх от оси эпюры, отрицательные - вниз.

2. Построение эпюры напряжений σ .

Вычисляем напряжения в поперечном сечении для каждого участка бруса:

$$\sigma = \frac{N_{AB}}{F_{AB}} = \frac{40 \cdot 10^3}{14 \cdot 10^{-4}} = 2,86 \cdot 10^7 \text{ Н/см}^2 = 28,6 \text{ МПа;}$$

$$\sigma = \frac{N_{BC}}{F_{BC}} = \frac{-50 \cdot 10^3}{6 \cdot 10^{-4}} = -83,3 \text{ МПа;}$$

$$\sigma = \frac{N_{CD}}{F_{CD}} = \frac{-160 \cdot 10^3}{6 \cdot 10^{-4}} = -267 \text{ МПа.}$$

При вычислении нормальных напряжений значения продольных сил N берутся по эпюре с учетом их знаков. Знак плюс соответствует растяжению, минус - сжатию. Эпюра напряжений показана на рис. 15, в.

3. Построение эпюры продольных перемещений.

Для построения эпюры перемещений вычисляем абсолютные удлинения отдельных участков бруса, используя закон Гука:

$$\Delta l_{AB} = \frac{N_{AB} \cdot l_{AB}}{E \cdot F_{AB}} = \frac{40 \cdot 10^3 \cdot 0,4}{2 \cdot 10^5 \cdot 10^6 \cdot 14 \cdot 10^{-4}} = 0,57 \cdot 10^{-4} \text{ м;}$$

$$\Delta l_{BC} = \frac{N_{BC} \cdot l_{BC}}{E \cdot F_{BC}} = \frac{-50 \cdot 10^3 \cdot 0,5}{2 \cdot 10^5 \cdot 10^6 \cdot 6 \cdot 10^{-4}} = -2,1 \cdot 10^{-4} \text{ м;}$$

$$\Delta l_{CD} = \frac{N_{CD} \cdot l_{CD}}{E \cdot F_{CD}} = \frac{-160 \cdot 10^3 \cdot 0,5}{2 \cdot 10^5 \cdot 10^6 \cdot 6 \cdot 10^{-4}} = -6,7 \cdot 10^{-4} \text{ м.}$$

Определяем перемещения сечений, начиная с неподвижного закрепленного конца. Сечение D расположено в заделке, оно не может смещаться и его перемещение равно нулю:

$$\Delta_D = 0.$$

Сечение C переместится в результате изменения длины участка CD . Перемещение сечения C определяется по формуле

$$\Delta_C = \Delta l_{CD} = -6,7 \cdot 10^{-4} \text{ м.}$$

При отрицательной (сжимающей) силе точка C сместится влево.

Перемещение сечения B является результатом изменения длин DC и CB . Складывая их удлинения, получаем

$$\Delta_B = \Delta l_{CD} + \Delta l_{BC} = -6,7 \cdot 10^{-4} - 2,1 \cdot 10^{-4} = -8,8 \cdot 10^{-4} \text{ м.}$$

Рассуждая аналогично, вычисляем перемещение сечения A :

$$\Delta_A = \Delta l_{CD} + \Delta l_{BC} + \Delta l_{AB} = -6,7 \cdot 10^{-4} - 2,1 \cdot 10^{-4} + 0,57 \cdot 10^{-4} = -8,23 \cdot 10^{-4} \text{ м.}$$

В выбранном масштабе откладываем от исходной оси значения вычисленных перемещений. Соединив полученные точки прямыми линиями, строим эпюру перемещений (рис.15,г).

4. Проверка прочности бруса.

Условие прочности записывается в следующем виде:

$$\sigma_{\max} \leq [\sigma].$$

Максимальное напряжение $\sigma_{\max}$ находим по эпюре напряжений, выбирая максимальное по абсолютной величине:

$$\sigma_{\max} = 267 \text{ МПа.}$$

Это напряжение действует на участке DC , все сечения которого являются опасным.

Допускаемое напряжение вычисляем по формуле:

$$[\sigma] = \frac{\sigma_T}{n_T} = \frac{240}{1,5} = 160 \text{ МПа.}$$

Сравнивая $\sigma_{\max}$ и $[\sigma]$, видим, что условие прочности не выполняется, так как максимальное напряжение превышает допускаемое

Задание 3: Исследование плоского напряженного состояния

Стальной кубик (рис.3) находится под действием сил, создающих плоское напряженное состояние (одно из трех главных напряжений равно нулю). Требуется найти:

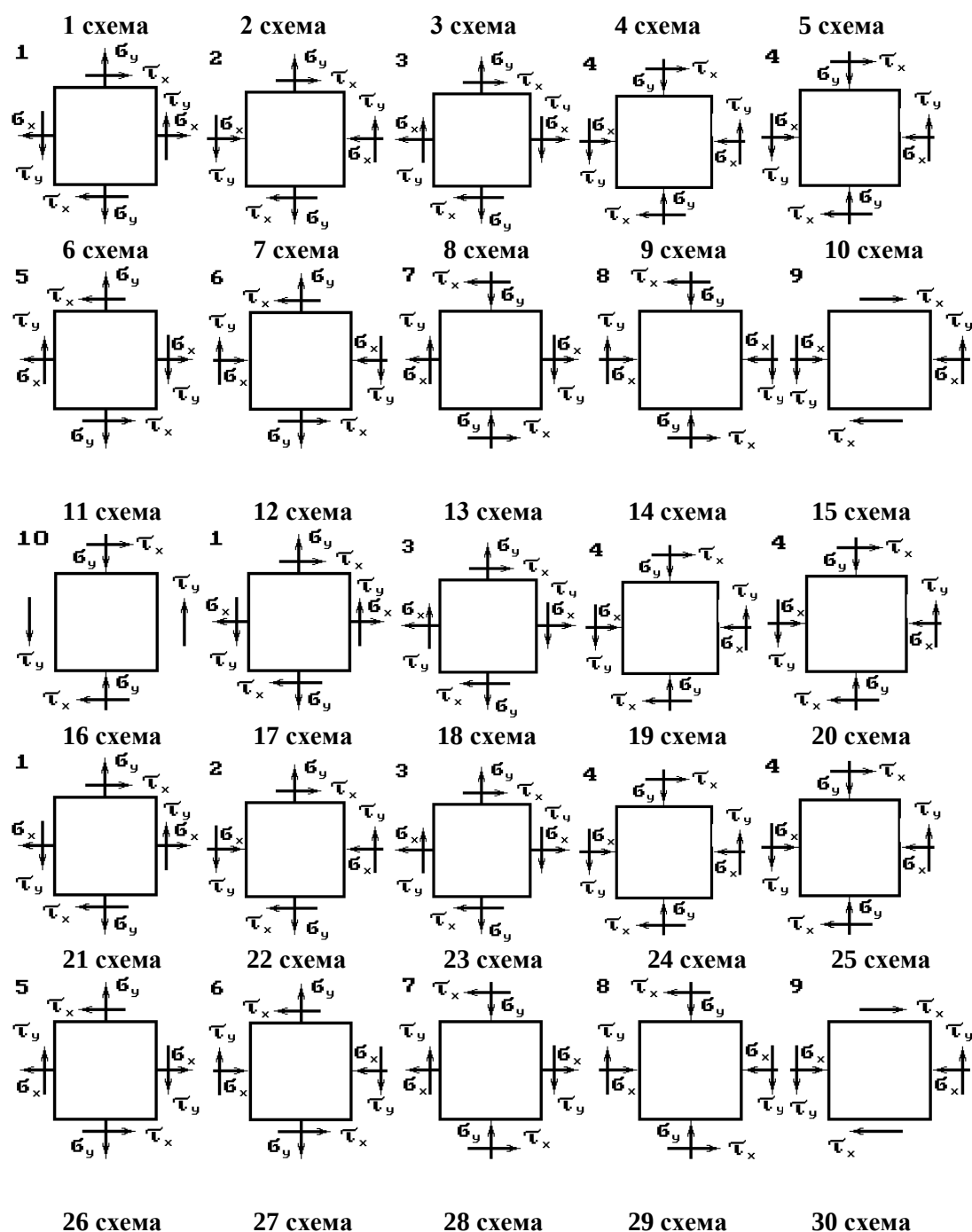
1. главные напряжения и направление главных площадок;
2. максимальные касательные напряжения, равные наибольшей разности главных напряжений;
3. главные деформации $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$;
4. относительное изменение объема;
5. удельную потенциальную энергию деформации.

Данные взять из табл.2.

Таблица 2. Исходные данные

Номер строки	Схема по рис.3	σ_x	σ_y	τ_x
01	1	10	10	10
02	2	20	20	20
03	3	30	30	30
04	4	40	40	40
05	5	50	50	50
06	6	60	60	60
07	7	70	70	70
08	8	80	80	80
09	9	90	90	90
10	10	100	100	100
11	11	60	100	90
12	12	70	40	100
13	13	80	50	10
14	14	90	90	20
15	15	100	100	90
16	16	10	10	90
17	17	20	20	100
18	18	30	90	10
19	19	40	100	20
20	20	50	10	90
21	21	90	20	100
22	22	100	40	10

23	23	10	50	20
24	24	20	90	40
25	25	30	100	80
26	26	80	80	90
27	27	90	90	100
28	28	100	100	10
29	29	10	10	20
30	30	20	20	40



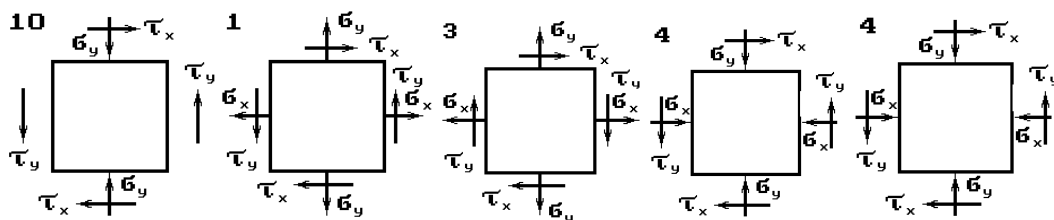


Рисунок 3 – Расчетные схемы

Пример выполнения задания 3.

Дано: $\sigma_x = -25$ МПа; $\sigma_y = -75$ МПа; $\tau_{xy} = 20$ МПа; $\alpha = 55^\circ$; для чугуна $[\sigma] = 80$ МПа; рис.4.

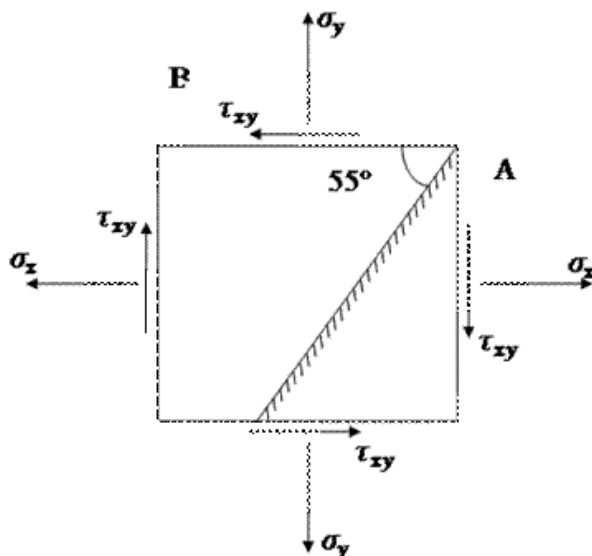


Рисунок 4– Расчетная схема

Решение.

1. По заданным напряжениям, действующим по граням элемента, определим главные напряжения с помощью круга Мора (рис.5). Напряженное состояние в какой-либо площадке можно представить точкой в координатной плоскости $\sigma - \tau$, а напряженное состояние в двух взаимно-перпендикулярных площадках соответствует двум точкам, расположенным на концах диаметра круга Мора. Поэтому для построения круга Мора отложим в системе координат $\sigma - \tau$ точку, соответствующую напряженному состоянию в грани А, и точку, соответствующую напряженному состоянию в грани В.

Соединив точки А и В прямой линией, получим диаметр круга Мора, пересечение которого с осью σ дает центр круга Мора. Пересечение окружности, проведенной из центра С радиусом СА, с осью σ дает значение главных напряжений σ_1 и σ_2 в окрестности выделенного элемента.

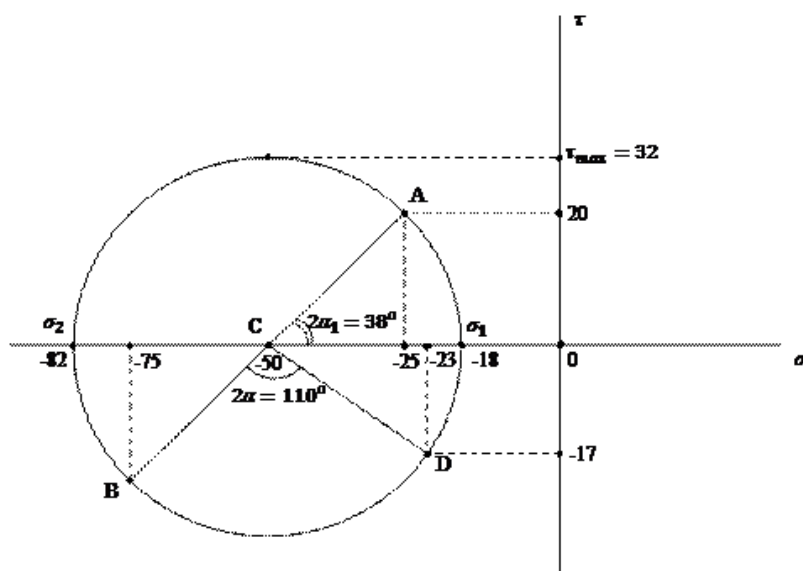


Рисунок 5 – Круг Мора

Из круга Мора получаем:

$$\sigma_1 = -18 \text{ МПа}; \sigma_2 = -82 \text{ МПа}.$$

Наибольшие касательные напряжения будут равны $\tau_{max} = 32 \text{ МПа}$. Для определения напряжения в площадке, наклонной под углом $\alpha = 55^\circ$ к горизонтальной площадке В, надо от точки В отложить против часовой стрелки центральный угол $2\alpha = 110^\circ$. Тогда координаты точки D и будут напряжениями в площадке α . Окончательно получим:

$$\sigma_\alpha = -23 \text{ МПа}; \tau_\alpha = -17 \text{ МПа}.$$

2. Теперь определим аналитически, чему равны главные напряжения и наибольшие касательные напряжения по формулам:

$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2};$$

$$\tau_{max} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}.$$

Подставляя исходные данные, получим:

$$\sigma_1 = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} = \frac{-25 + (-75)}{2} + \sqrt{\left(\frac{-25 - (-75)}{2}\right)^2 + 20^2} = -50 + 32 = -18 \text{ МПа};$$

$$\sigma_2 = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} = \frac{-25 + (-75)}{2} - \sqrt{\left(\frac{-25 - (-75)}{2}\right)^2 + 20^2} = -50 - 32 = -82 \text{ МПа};$$

$$\tau_{max} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} = \sqrt{\left(\frac{-25 - (-75)}{2}\right)^2 + 20^2} = 32 \text{ МПа}.$$

что совпадает со значениями напряжений, снятых с круга Мора.

3. Покажем на схеме положение главных площадок и направление главных напряжений (рис.6). Для того, чтобы от площадки А перейти к площадке, где действует главное напряжение σ_1 , нужно совершить поворот по часовой стрелке на угол $2\alpha_1$. Поэтому на схеме от площадки А

откладываем по часовой стрелке угол $\alpha_1 = 18^\circ$ и получаем площадку, в которой действует главное напряжение σ_1 . В перпендикулярной ей площадке действует главное напряжение σ_2 . Так как σ_1 и σ_2 являются отрицательными величинами, то они вызывают сжатие на своих площадках.

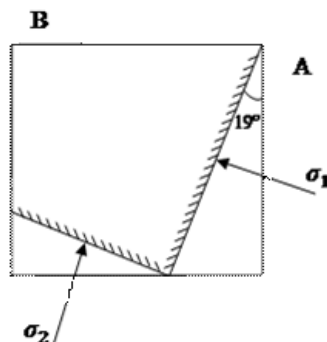


Рисунок 6 – Положение главных площадок и направление главных напряжений

4. Проверим прочность материала по критерию наибольших касательных напряжений, который иногда называется третьей теорией прочности, по формуле:

$$\sigma_{\text{экв}} = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \leq R,$$

где R – расчетное сопротивление материала при одноосном растяжении.

Подставляем в формулу σ и τ для той заданной площадки, в которой действует большее по модулю нормальное напряжение σ_x и σ_y . В нашем случае это площадка В. Подставляя значения σ_y и τ в исходную формулу, получим:

$$\sigma_{\text{экв}} = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} = \sqrt{75^2 + 4 \cdot 20^2} = \sqrt{7225} = 85 \text{ МПа} > 80 \text{ МПа}.$$

Следовательно, величины напряжений, действующих по заданным площадкам, являются недопустимыми для данного материала с точки зрения его прочности.

Задание 4: Геометрические характеристики плоских сечений

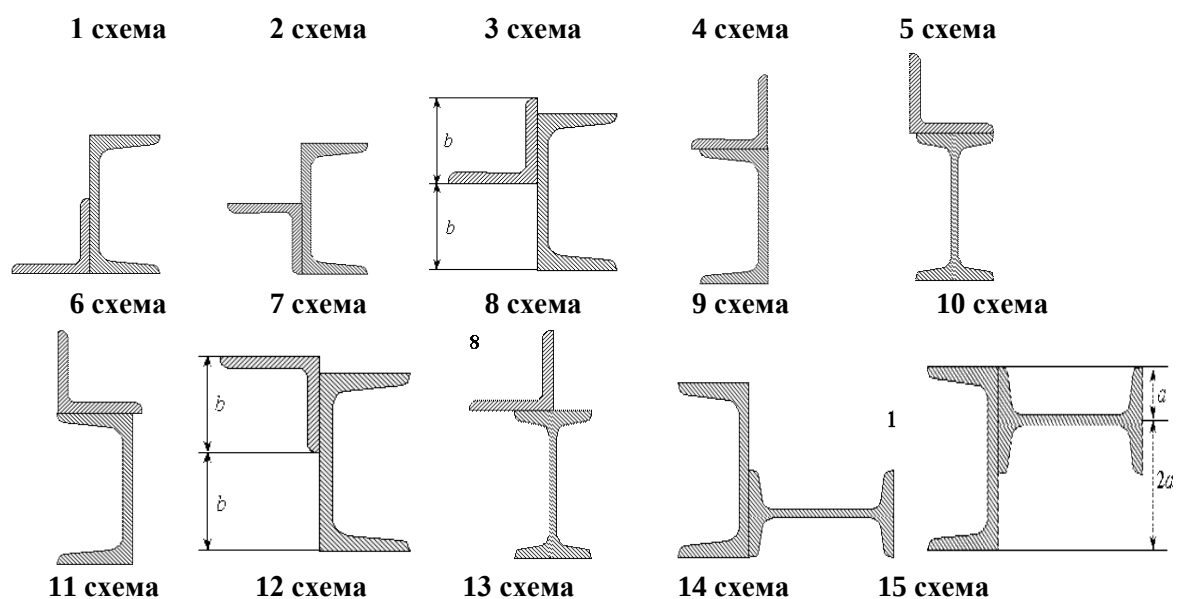
Для составного поперечного сечения (рис.7), состоящего из двутавра, швеллера, уголка, заданных в табл.3, требуется:

- 1) определить положение центра тяжести;
- 2) найти величину осевых и центробежных моментов инерции относительно центральных осей;
- 3) определить направление главных центральных осей;
- 4) найти величину моментов инерции относительно главных центральных осей;
- 5) вычертить сечений в масштабе 1:2 и указать на нем все размеры в числах и все оси.

При расчете все необходимые данные следует взять из таблицы 3 и сортамента.

Таблица 3. Исходные данные

Номер строки	Схема сечения по рис.2	Швеллер №	Равнобокий уголок №	Двутавр №
01	1	14	8(8)	12
02	2	16	8(6)	14
03	3	18	9(8)	16
04	4	20	9(7)	18
05	5	22	9(6)	20a
06	6	24	10(8)	20
07	7	27	10(10)	22a
08	8	30	10(12)	22
09	9	33	12,5(10)	24a
10	10	36	12,5(12)	24
11	11	14	8(8)	12
12	12	16	8(6)	14
13	13	18	9(8)	16
14	14	20	9(7)	18
15	15	22	9(6)	20a
16	16	24	10(8)	20
17	17	27	10(10)	22a
18	18	30	10(12)	22
19	19	33	12,5(10)	24a
20	20	36	12,5(12)	24
21	21	14	8(8)	12
22	22	16	8(6)	14
23	23	18	9(8)	16
24	24	20	9(7)	18
25	25	22	9(6)	20a
26	26	24	10(8)	20
27	27	27	10(10)	22a
28	28	30	10(12)	22
29	29	33	12,5(10)	24a
30	30	36	12,5(12)	24



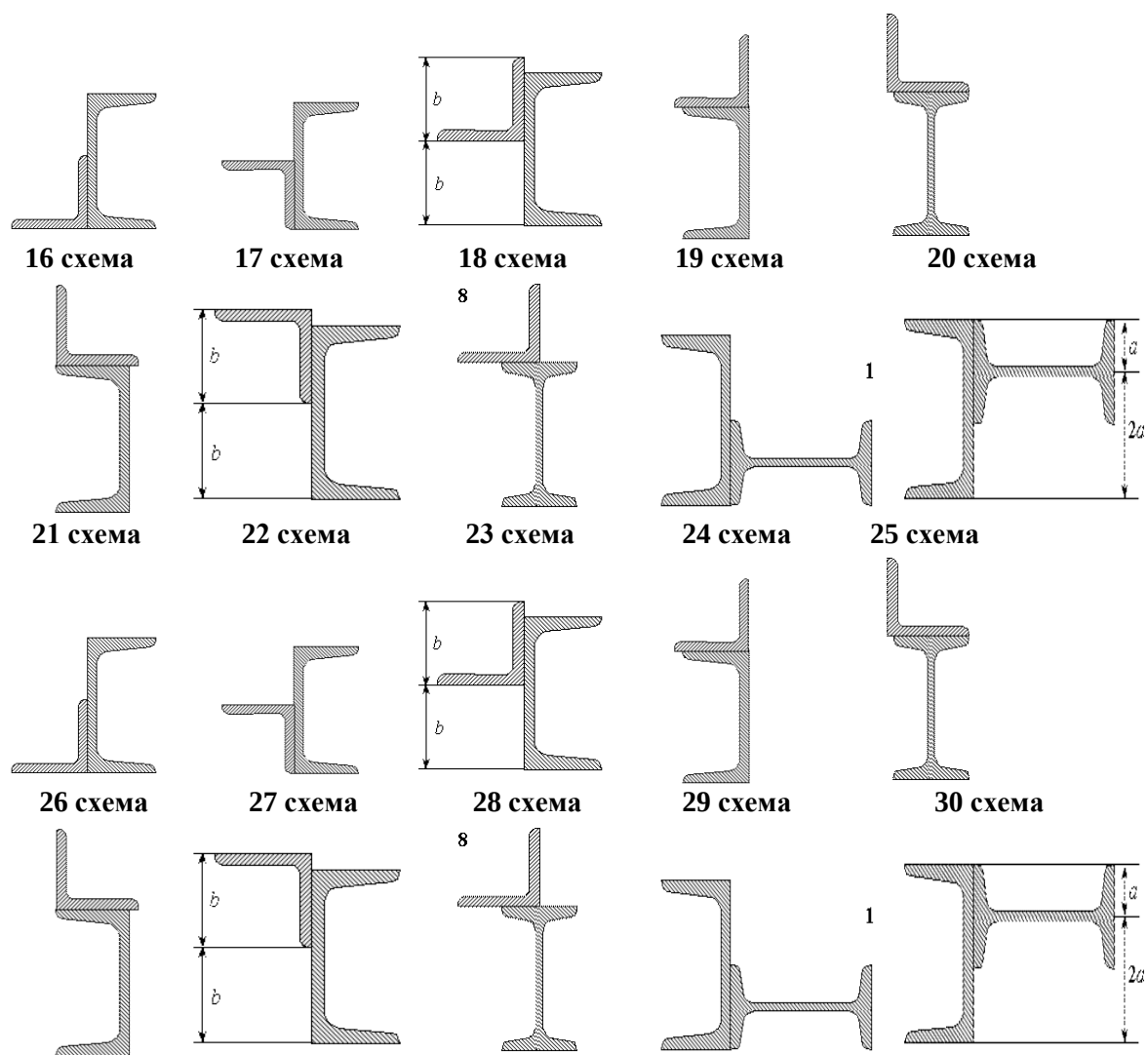


Рис. 7. Расчетные схемы

Пример выполнения задания 4

Задано сечение, составленное из прокатных профилей: швеллера № 16а и двух неравнобоких уголков 80×50×6 (рис. 8). Требуется вычислить главные центральные моменты инерции.

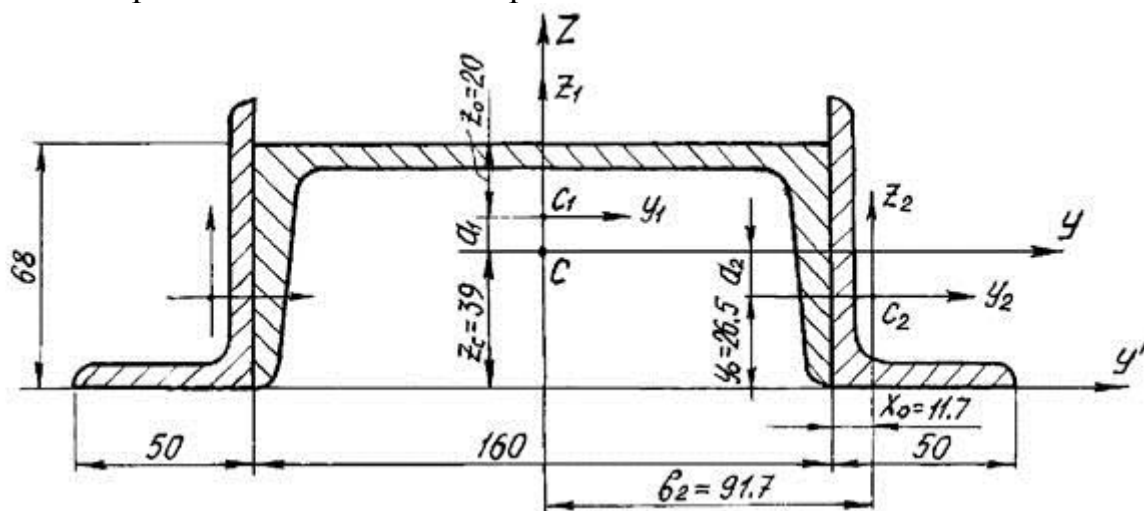


Рис. 8. Расчетная схема

Решение.

1. Из таблиц сортамента выписываются геометрические характеристики прокатных профилей, составляющих заданное сечение.

Швеллер №16а: размеры $h=160$ мм, $b=68$ мм, площадь сечения $F_1=19,5$ см²; осевые моменты инерции $I_{z_1}^I=823$ см⁴, $I_{y_1}^I=78,8$ см⁴, координата центра тяжести $z_0=2$ см.

Неравнобокий уголок 80×50×6: площадь сечения $F_2=7,55$ см²; осевые моменты инерции $I_{z_2}^{II}=49$ см⁴, $I_{y_2}^{II}=14,8$ см⁴, координаты центра тяжести $y_0=2,65$ см, $x_0=1,17$ см..

Примечание. Если в состав сечения входит прямоугольник, то следует вычислить площадь и осевые моменты инерции

$$F = b \cdot h; \quad J_y = \frac{b \cdot h^3}{12}; \quad J_z = \frac{h \cdot b^3}{12}.$$

В соответствии с заданным вариантом сечения выполняется чертеж в масштабе 1:2 с указанием характерных размеров.

На чертеж наносятся центры тяжести швеллера C_1 и уголка C_2 и проводятся их собственные центральные оси y_1, z_1 и y_2, z_2 (см. рис. 17).

2. Определение положения центра тяжести заданного сечения.

Заданное сечение имеет одну ось симметрии, которая является главной центральной осью. Выбираем исходную систему координат: ось абсцисс $y^{\square}$ совмещаем с нижней границей сечения, а ось ординат Z - с осью симметрии. Координаты точек C_1 и C_2 легко определяются по чертежу.

Учитывая симметрию сечения, вычисляем ординату его центра тяжести по формуле

$$z_c = \frac{z_{c_1} F_1 + 2 z_{c_2} F_2}{F_1 + 2 F_2}.$$

где F_1 - площадь швеллера, $F_1=19,5$ см²,

z_{c_1} - ордината точки C_1 , $z_{c_1}=6,8-2,0=4,8$ см;

F_2 - площадь одного уголка, $F_2=7,55$ см²;

z_{c_2} - ордината точки C_2 , $z_{c_2}=y_0=2,65$ см.

После подстановки числовых значений получаем

$$z_c = \frac{4,8 \cdot 19,5 + 2 \cdot 7,55 \cdot 2,65}{19,5 + 2 \cdot 7,55} = 3,9 \text{ см}$$

Откладывая найденное значение $z_c=3,9$ см на оси Z вверх от оси $y^{\square}$, находим положение центра тяжести всего сечения C и проводим главные центральные оси Y, Z .

Примечание. Если фигура имеет две оси симметрии, центр тяжести лежит на их пересечении, то вычислений для определения его положения производить не нужно.

3. Вычисление главных центральных моментов инерции сечения относительно осей Y и Z .

Расстояния между осями определяются по чертежу:

$$a_1=6,8-3,9-2=0,90 \text{ см};$$

$$a_2=3,9-2,65=1,25 \text{ см};$$

$b_1=0$, так как оси Z и Z_1 совпадают;

$b_2=8+1,17=9,17$ см.

Главные центральные моменты инерции составного сечения J_Y и J_Z вычисляются по формулам

$$J_Y = J_{Y_0} + a^2 F;$$

$$J_Z = J_{Z_0} + b^2 F.$$

$$J_Y = J_Y^I + 2J_Y^{II} = (J_{Y_1}^I + a_1^2 F_1) + 2(J_{Y_2}^{II} + a_2^2 F_2);$$

$$J_Z = J_Z^I + 2J_Z^{II} = (J_{Z_1}^I + b_1^2 F_1) + 2(J_{Z_2}^{II} + b_2^2 F_2).$$

После подстановки числовых значений в эти формулы, получаем:

$$J_Y = (78,8 + 0,9^2 \cdot 19,5) + 2 \cdot (49 + 1,25^2 \cdot 7,55) = 216,2 \text{ см}^4;$$

$$J_Z = (823) + 2 \cdot (14,8 + 9,17^2 \cdot 7,55) = 2122 \text{ см}^4.$$

Пример выполнения задания 4

Для заданного поперечного сечения (рис. 9), состоящего из двух стандартных профилей (швеллера и равнобокого уголка), требуется:

- 1) определить положение центра тяжести;
- 2) найти осевые и центробежный моменты инерции относительно центральных осей;
- 3) определить направление главных центральных осей (u и v);
- 4) найти моменты инерции относительно главных центральных осей;
- 5) вычертить сечение и указать на нем все размеры в числах и все оси.

Дано: Сечение состоит из швеллера №20 и равнобокого уголка $125 \times 125 \times 12$.

Решение.

Из сортамента прокатной стали выписываем необходимые геометрические для швеллера №20 (ГОСТ 8240-86): $A=23,4 \text{ см}^2$, $h=20$ см, $b=7,6$ см, $z_0=2,07$ см, $I_x=1520 \text{ см}^4$, $I_y=113 \text{ см}^4$; для уголка (ГОСТ 8509-86) имеем: $A=28,9 \text{ см}^2$, $b=12,5$ см, $z_0=3,53$ см, $I_x=422 \text{ см}^4$, $I_{x_0}^{\max}=670 \text{ см}^4$, $I_{y_0}^{\min}=174 \text{ см}^4$.

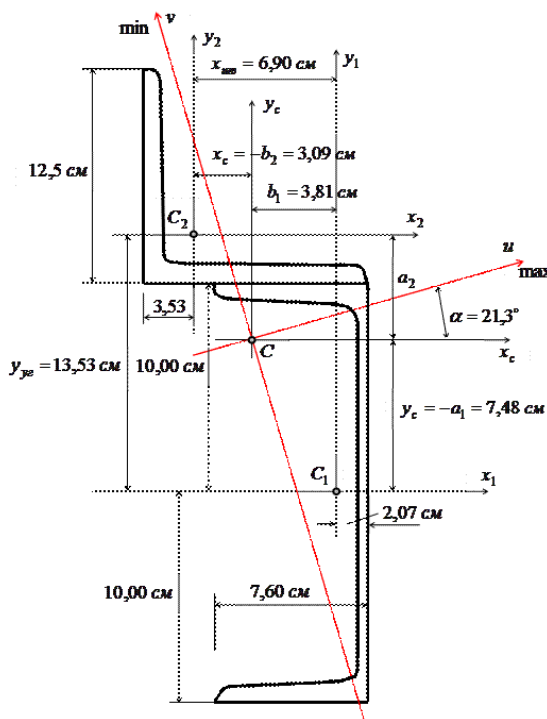


Рисунок 9 – Расчетная схема

Определяем координаты центра тяжести сечения относительно координат x_1 и y_2 , представив его в виде двух простых фигур (рис. 18):

$$y_c = \frac{\sum_{i=1}^2 S_{x_i}^i}{\sum_{i=1}^2 A_i} = \frac{S_{x_1}^{(1)} + S_{x_1}^{(2)}}{A_1 + A_2} = \frac{A_1 y_{шв} + A_2 y_{уг}}{A_1 + A_2} = \frac{23,4 \cdot 0 + 28,9 \cdot 13,53}{23,4 + 28,9} = 7,48 \text{ см},$$

$$x_c = \frac{\sum_{i=1}^2 S_{y_2}^i}{\sum_{i=1}^2 A_i} = \frac{S_{y_2}^{(1)} + S_{y_2}^{(2)}}{A_1 + A_2} = \frac{A_1 x_{шв} + A_2 x_{уг}}{A_1 + A_2} = \frac{23,4 \cdot 6,9 + 28,9 \cdot 0}{23,4 + 28,9} = 3,09 \text{ см}.$$

Здесь $y_{шв}$, $y_{уг}$ и $x_{шв}$, $x_{уг}$ - расстояния от центров тяжести простых фигур швеллера и уголка до вспомогательных осей x_1 и y_2 .

Центр тяжести заданного сечения (точка C) должен лежать на прямой $C_1 C_2$. Проводим через него центральные оси инерции x_c , y_c и определяем осевые и центробежный моменты инерции относительно этих осей по формулам для случая параллельного переноса осей:

$$I_{x_c} = I_{x_1}^{(1)} + a_1^2 A_1 + I_{x_2}^{(2)} + a_2^2 A_2 = 1520 + (-7,48)^2 \cdot 23,4 + 422 + 6,05^2 \cdot 28,9 = 4309 \text{ см}^4,$$

$$I_{y_c} = I_{y_1}^{(1)} + b_1^2 A_1 + I_{y_2}^{(2)} + b_2^2 A_2 = 113 + 3,81^2 \cdot 23,4 + 422 + (-3,09)^2 \cdot 28,9 = 1151 \text{ см}^4.$$

Здесь $a_1 = -y_c = -7,48$ см, $b_1 = 3,81$ см, $a_2 = 6,05$ см, $b_2 = -x_c = -3,09$ см - координаты центров тяжести швеллера и уголка в осях x_c , y_c .

Центробежный момент инерции сечения для уголка относительно осей x_2 , y_2 можно определить по формуле:

$$I_{x_2 y_2}^{(2)} = -\sqrt{(I_{x_2}^{(2)} - I_{y_2}^{min}) \cdot (I_{y_2}^{(2)} - I_{x_2}^{min})} = -\sqrt{(422 - 174)^2} = -248 \text{ см}^4.$$

Знак минус здесь поставлен, так как большая часть сечения уголка находится во второй и четвертой четвертях, где координаты имеют разные знаки. Центробежный момент инерции сечения для всего сечения:

$$I_{x_c y_c} = I_{x_1 y_1}^{(1)} + a_1 b_1 A_1 + I_{x_2 y_2}^{(2)} + a_2 b_2 A_2 = 0 + (-7,48) \cdot 3,81 \cdot 23,4 + (-248) + 6,05 \cdot (-3,09) \cdot 28,9 = -1455 \text{ см}^4.$$

Определяем угол наклона главных центральных осей:

$$\operatorname{tg} 2\alpha = -\frac{2 \cdot I_{x_c y_c}}{I_{x_c} - I_{y_c}} = -\frac{2 \cdot (-1455)}{4309 - 1151} = 0,921; \quad \alpha = 21,3^\circ.$$

Для нахождения оси max и ось x_c ($I_{x_c} > I_{y_c}$) поворачиваем против часовой стрелки ($\angle \alpha > 0$) на $\alpha = 21,3^\circ$.

Находим значения главных центральных моментов инерции:

$$I_{\max, \min} = \frac{I_{x_c} + I_{y_c}}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(I_{x_c} - I_{y_c})^2 + 4 \cdot I_{x_c y_c}^2}$$

$$= \frac{4309 + 1151}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(4309 - 1151)^2 + 4 \cdot (-1455)^2} = 2730 \pm 2147.$$

$$I_{\max} = 4877 \text{ см}^4, \quad I_{\min} = 583 \text{ см}^4.$$

Проверкой нам служит соблюдение равенства

$$I_{x_c} + I_{y_c} = I_{\max} + I_{\min} = \text{const};$$

$$4309 + 1151 = 4877 + 583;$$

$$5460 = 5460$$

Задание 5: Расчет статически определимого вала, работающего на кручение

К стальному валу приложены скручивающие моменты: M_1 , M_2 , M_3 , (рис.1). Требуется:

- 1) построить эпюру крутящих моментов;
- 2) при заданном значении $[\tau]$ ($[\tau] = 40$ МПа) определить диаметр вала из расчета на прочность и округлить его величину до ближайшей большей, соответственно равной: 30, 35, 40, 45, 50, 60, 70, 80, 90, 100 мм;
- 3) найти наибольший относительный угол закручивания и проверить жесткость вала при $[\theta] = 0,05$ рад/м.

Данные взять из табл.1.

Пример выполнения задания 5

К стальному валу приложены четыре сосредоточенных момента (рис. 8).

Дано: $a = 1,2$ м, $b = 1,9$ м, $c = 1,7$ м, $M_1 = 1,2$ кНм, $M_2 = 1,9$ кНм, $M_3 = 1,7$ кНм, $[\tau] = 40$ МПа. Для стали модуль поперечного сдвига равен $G = 80$ ГПа.

Требуется:

- 1) построить эпюру крутящих моментов;
- 2) при заданном значении $[\tau]$ определить диаметр вала из расчета на прочность и округлить его до ближайшей большей величины из нормального ряда чисел: 30, 35, 40, 45, 50, 60, 70, 80, 90, 100, 110, 125, 140, 160, 180, 200 мм;
- 3) найти наибольший относительный угол закручивания и проверить жесткость вала при $[\theta] = 0,05$ рад/м.

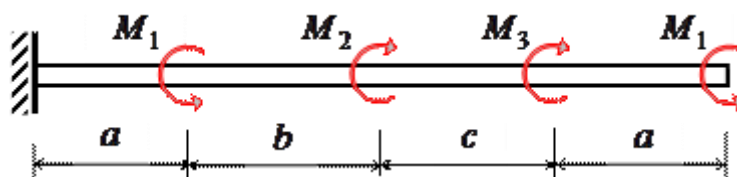


Рисунок 8 – Расчетная схема

Решение.

Крутящие моменты, возникающие в поперечных сечениях вала, определяются по внешним скручивающим моментам с помощью метода сечений (рис. 9):

участок № 1 ($0 \leq z_1 \leq 1,2$ м), $M_1^{кр} = -1,2$ кНм;

участок № 2 ($0 \leq z_2 \leq 1,7$ м), $M_2^{кр} = -1,2 + 1,7 = 0,5$ кНм;

участок № 3 ($0 \leq z_3 \leq 1,9$ м), $M_3^{кр} = -1,2 + 1,7 + 1,9 = 2,4$ кНм;

участок № 4 ($0 \leq z_4 \leq 1,2$ м), $M_4^{кр} = -1,2 + 1,7 + 1,9 - 1,2 = 1,2$ кНм.

Для удобства построения эпюр $M_{кр}$ принимаем следующее правило знаков: крутящий момент считается положительным, если при взгляде в торец отсеченной части вала действующий на него момент представляется направленным по ходу часовой стрелки.

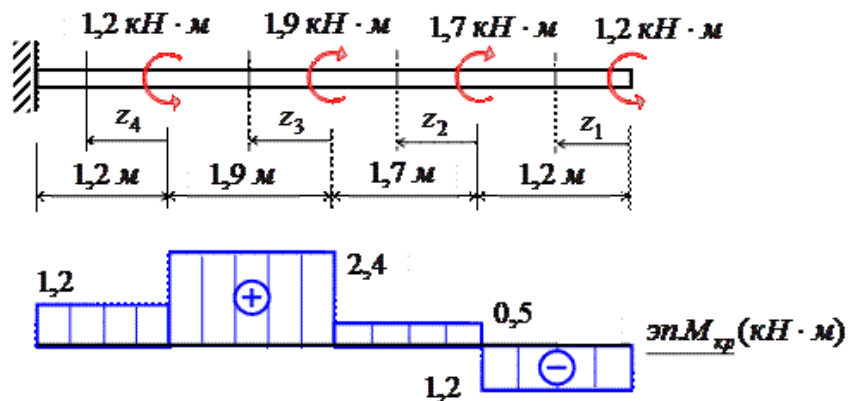


Рисунок 9 – Расчетная схема

Диаметр вала находим из условия прочности по касательным напряжениям

$$\tau_{max} \leq [\tau], \quad \frac{M_{max}^{кр}}{W_\rho} \leq [\tau], \quad W_\rho = \frac{\pi d^3}{16}, \quad \frac{2,4 \cdot 10^3}{\pi d^3} \cdot 16 \leq 40 \cdot 10^6, \quad d \geq 0,067 \text{ м.}$$

Принимаем $d = 70$ мм.

Крутильная жесткость поперечного сечения вала будет равна

(полярный момент инерции для круглого сечения $I_\rho = \frac{\pi d^4}{32}$)

$$GI_\rho = 80 \cdot 10^9 \cdot \frac{\pi (0,07)^4}{32} = 188,57 \text{ кН} \cdot \text{м}^2.$$

Наибольший относительный угол закручивания определяем по формуле

$$\theta_{max} = \left(\frac{\varphi}{l} \right)_{max} = \frac{M_{max}^{кр}}{GI_\rho} = \frac{2,4 \cdot 10^3}{188,57 \cdot 10^3} \approx 0,013 \frac{\text{рад}}{\text{м}}.$$

В нашем случае имеем $\theta_{max} < [\theta]$, где $[\theta] = 0,05$. Таким образом, условие жесткости ($\theta_{max} \leq [\theta]$) соблюдается.

Задание 6: Подбор сечений балок, работающих на поперечный изгиб

Для балки, изображенной на схеме (рис.1) (по согласованию с преподавателем), требуется:

- 1) построить эпюры внутренних усилий;
- 2) указать положение опасного сечения.

4) подобрать размеры поперечного сечения стальной балки для различных форм сечения: двутавровой балки, балки прямоугольного сечения со сторонами h и b при $h/b = 2$ и круглого поперечного сечения. Балка выполнена из стали с допускаемым напряжением $[\sigma] = 190 \text{ МПа}$.

Данные для схем взять из табл.1.

Пример выполнения задания 6

Требуется построить эпюры поперечных сил и изгибающих моментов и подобрать размеры поперечного сечения стальной балки (рис. 10) для различных форм сечения: двутавровой балки, балки прямоугольного сечения со сторонами h и b при $h/b = 2$ и круглого поперечного сечения. Балка выполнена из стали с допускаемым напряжением $[\sigma] = 190 \text{ МПа}$; $a = 1 \text{ м}$; $q = 10 \text{ кН/м}$.

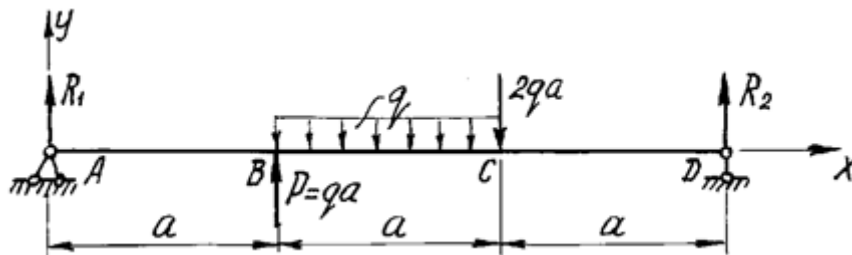


Рисунок 10 – Расчетная схема балки

Решение

1. Определение опорных реакций.

На схеме показываем опорные реакции R_1 , R_2 . Вертикальные реакции направляем вверх и записываем уравнения равновесия:

$$\sum X = 0; \quad H = 0;$$

$$\sum M_D = 0; \quad R_1 \cdot 3a + qa \cdot 2a - qa \cdot 1,5a - 2qa \cdot a = 0.$$

$$\text{Отсюда} \quad R_1 = 0,5qa.$$

$$\sum M_A = 0; \quad R_2 \cdot 3a - 2qa \cdot 2a - qa \cdot 1,5a + qa \cdot a = 0.$$

$$\text{Отсюда} \quad R_2 = 1,5qa.$$

Проверим правильность вычислений, составив еще одно уравнение равновесия:

$$\sum Y = 0; \quad 0,5qa + qa - qa - 2qa + 1,5qa = 0.$$

Условие равновесия удовлетворяется, реакции определены правильно.

2. Построение эпюры Q .

Мысленно разбиваем балку на участки. Границами участков являются сечения, в которых к балке приложены сосредоточенные силы или пары сил, начинаются или заканчиваются распределенные нагрузки, имеются промежуточные шарниры. В рассматриваемой балке граничными сечениями будут сечения A , B , C и D . Для каждого из трех участков запишем аналитическое выражение $Q(x)$.

Участок AB , $0 < x < a$. Рассмотрим произвольно выбранное сечение с абсциссой x . Рассекая балку в этом сечении на две части и отбросив

правую часть, вычисляем алгебраическую сумму проекций на ось y всех сил, действующих на оставшуюся часть:

$$Q(x) = R_1 = 0,5qa.$$

Поперечная сила не зависит от переменной x на протяжении всего участка, следовательно, эпюра Q ограничена прямой, параллельной оси абсцисс. Отложив от оси эпюры вверх в выбранном масштабе $0,5qa$ (рис.11), строим эпюру на этом участке.

Участок BC , $a < x < 2a$. Алгебраическая сумма проекций всех сил на ось y слева от сечения с абсциссой x

$$Q(x) = 0,5qa + qa - q(x-a) = 1,5qa - q(x-a).$$

Полученное выражение является уравнением наклонной прямой, которая может быть построена по двум лежащим на ней точкам. Для ее построения найдем значения поперечной силы на границах участков балки

$$x=a, \quad Q(a) = 1,5qa,$$

$$x=2a, \quad Q(2a) = 0,5qa.$$

Участок CD , $2a < x < 3a$. Поперечная сила на расстоянии x от начала координат

$$Q(x) = 0,5qa + qa - qa - 2qa = -1,5qa.$$

Так как поперечная сила не зависит от переменной x , на последнем участке эпюра Q ограничена прямой, параллельной оси балки (см. рис. 11).

3. Построение эпюры M_z .

Аналитическое выражение для вычисления изгибающего момента в сечении x необходимо записать для каждого участка балки.

Участок AB :

$$M_z(x) = 0,5qa \cdot x.$$

На этом участке балки изгибающий момент возрастает по линейному закону и эпюра M_z ограничена наклонной прямой. Вычисляя его значения в сечениях на границах участка, строим в масштабе (рис. 11) эпюру M_z на сжатом волокне

$$x=0, \quad M_z(0) = 0;$$

$$x=a, \quad M_z(a) = 0,5qa^2.$$

Участок BC :

$$M_z(x) = 0,5qa \cdot x + qa(x-a) - \frac{q(x-a)^2}{2}.$$

Полученное уравнение является уравнением квадратной параболы и, поскольку поперечная сила Q на участке BC не изменяет знак, экстремума на эпюре M_z не будет.

Определим изгибающий момент на границах участка:

$$x=a, \quad M_z(a) = 0,5qa^2;$$

$$x=2a, \quad M_z(2a) = 0,5qa \cdot 2a + qa(2a-a) - \frac{q(2a-a)^2}{2} = 1,5qa^2.$$

Отложив вверх от оси балки найденные значения, проводим квадратную параболу выпуклостью вверх (навстречу вектору усилия равномерно распределенной нагрузки).

Участок CD:

$$M_z(x) = 0,5qa \cdot x + qa(x-a) - qa(x-1,5a) - 2qa(x-2a).$$

В пределах последнего участка ($2a < x < 3a$) изгибающий момент линейно зависит от абсциссы x , и эпюра ограничена прямой линией.

При $x=2a$, $M_z(2a) = 1,5qa^2$, при $x=3a$, $M_z(3a) = 0$.

Эпюры Q и M_z показаны на рис. 11.

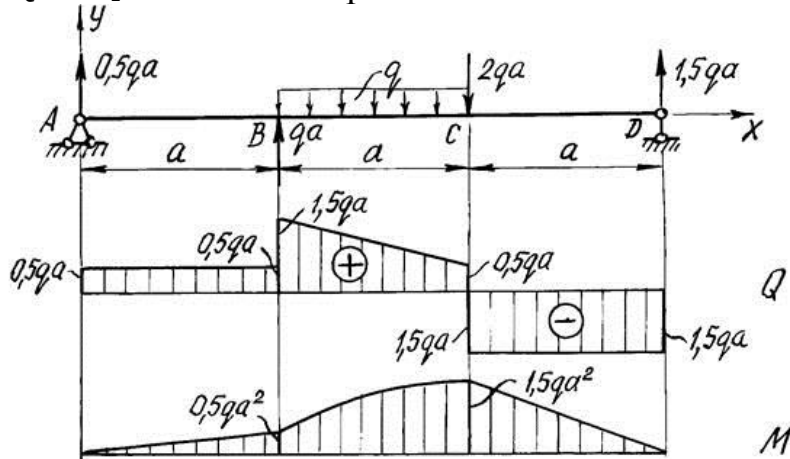


Рисунок 11 – Эпюры поперечных сил и изгибающих моментов

По эпюре M_z находим опасное сечение балки – чья сечение, в котором изгибающий момент максимален по абсолютной величине. Для заданной балки изгибающий момент в опасном сечении $M_z^{\max} = M_z(2a) = 1,5qa^2$ или после подстановки числовых значений $M_z^{\max} = 1,5 \cdot 10 \cdot 1^2 = 15 \text{ кНм}$.

Из условия прочности определим требуемый момент сопротивления сечения

$$W_z \geq \frac{M_z^{\max}}{[\sigma]} = \frac{15 \cdot 10^3}{190 \cdot 10^6} = 79 \cdot 10^{-6} \text{ см}^3 = 79 \text{ см}^3.$$

Номер двутавра находим по расчетному значению момента сопротивления W_z , используя таблицы сортамента прокатной стали.

Внимание! В таблицах сортамента прокатной стали (см. «справочные данные») ось z соответствует ось x , это означает, что $W_z = W_x$.

Наиболее близок к требуемому моменту сопротивления двутавра №14, равный $W_x = 81,7 \text{ см}^3$. Выбрав это сечение, определяем нормальные напряжения в поперечном сечении балки:

$$\sigma = \frac{M_z^{\max}}{W_z} = \frac{15 \cdot 10^3}{81,7 \cdot 10^{-6}} = 183,6 \cdot 10^6 \text{ Па} = 183,6 \text{ МПа}.$$

Подбираем прямоугольное сечение, момент сопротивления которого определяется с учетом того, что $h=2b$:

$$W_z = \frac{bh^2}{6} = \frac{b \cdot (2b)^2}{6} = \frac{2b^3}{3} = 79 \text{ см}^3.$$

Отсюда

$$b = \sqrt[3]{\frac{3W_z}{2}} = \sqrt[3]{\frac{3 \cdot 79}{2}} = 4,9 \text{ см}, \quad h = 2b = 2 \cdot 4,9 = 9,8 \text{ см}.$$

Круглое поперечное сечение имеет момент сопротивления

$$W_z = \frac{\pi d^3}{32} = 79 \text{ см}^3.$$

Диаметр круга

$$d = \sqrt[3]{\frac{32W_z}{\pi}} = \sqrt[3]{\frac{32 \cdot 79}{\pi}} = 9,3 \text{ см}.$$

Рассмотрим *второй метод построения эпюр* внутренних усилий, действующих в сечениях балки. Он состоит в том, что поперечные силы и изгибающие моменты вычисляются на границах участков без записи уравнений $Q(z)$, $M(z)$, а соответствующие эпюры строятся на основании дифференциальных зависимостей между Q , M , q :

$$Q = \frac{dM}{dx}; \quad q = \frac{dQ}{dx} = \frac{d^2M}{dx^2}. \quad (1)$$

Зависимости (1) позволяют установить следующие характерные особенности эпюр поперечных сил и изгибающих моментов:

На участках, где нет распределенной нагрузки, эпюра Q ограничена прямыми, параллельными оси балки, а эпюра M - наклонными прямыми.

На участках, где приложена равномерно распределенная нагрузка интенсивностью q , эпюра Q ограничена наклонными прямыми, а эпюра M - квадратными параболоми, выпуклость которых направлена навстречу вектору равномерно распределенной нагрузки.

На участках, где $Q > 0$, изгибающий момент возрастает; если $Q < 0$ - изгибающий момент убывает.

В сечениях, где к балке приложены сосредоточенные силы, на эпюре Q будут скачки на величину приложенных сил, а на эпюре M - переломы, острие которых направлено против действия этих сил.

В сечениях, где к балке приложены пары сил (сосредоточенные моменты), на эпюре M будут скачки на величину этих моментов.

Если на участке балки имеется равномерно распределенная нагрузка и эпюра Q в пределах участка изменяет знак, то в сечении, где $Q = 0$, на эпюре M_z будет экстремум.

Задание 7: Расчет стержней сжатых внецентренно приложенной силой

Чугунный короткий стержень, поперечное сечение которого изображено на рис.12, сжимается силой P , приложенной внецентренно в точке A . Требуется:

1) вычислить наибольшее растягивающее и наибольшее сжимающее напряжения в поперечном сечении, выразив величины этих напряжений через P и размеры сечения;

2) найти допускаемую нагрузку P при заданных размерах сечения и допускаемых напряжениях для чугуна на сжатие $[\sigma]_c$ и на растяжение $[\sigma]_p$.

Данные взять из табл.4.

Таблица 4. Исходные данные

Номер строки	Схема по рис.12	a, см	b, см	$[\sigma]_c$, МПа	$[\sigma]_p$, МПа
01	1	6	6	110	21
02	2	2	2	120	22
03	3	3	3	130	23
04	4	4	4	140	24
05	5	5	5	150	25
06	6	6	6	60	26
07	7	2	2	70	27
08	8	3	3	80	28
09	9	4	4	90	29
10	10	5	5	100	30
11	11	3	4	130	23
12	12	4	5	140	24
13	13	5	6	150	25
14	14	6	2	60	26
15	15	2	3	70	27
16	16	4	4	80	28
17	17	5	5	90	29
18	18	6	6	110	21
19	19	2	2	120	22
20	20	3	3	130	23
21	21	4	4	140	24
22	22	5	5	150	25
23	23	3	6	60	26
24	24	4	2	70	27
25	25	5	3	80	28
26	26	6	4	90	29
27	27	2	5	100	30
28	28	6	4	130	23
29	29	2	5	140	24
30	30	3	6	150	25

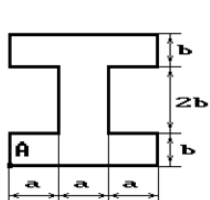
1 схема

2 схема

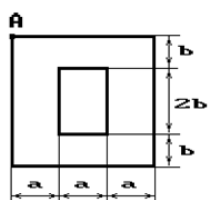
3 схема

4 схема

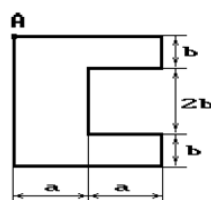
5 схема



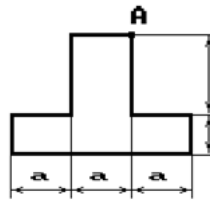
6 схема



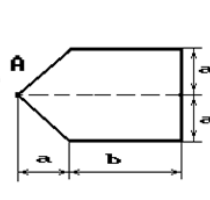
7 схема



8 схема



9 схема



10 схема

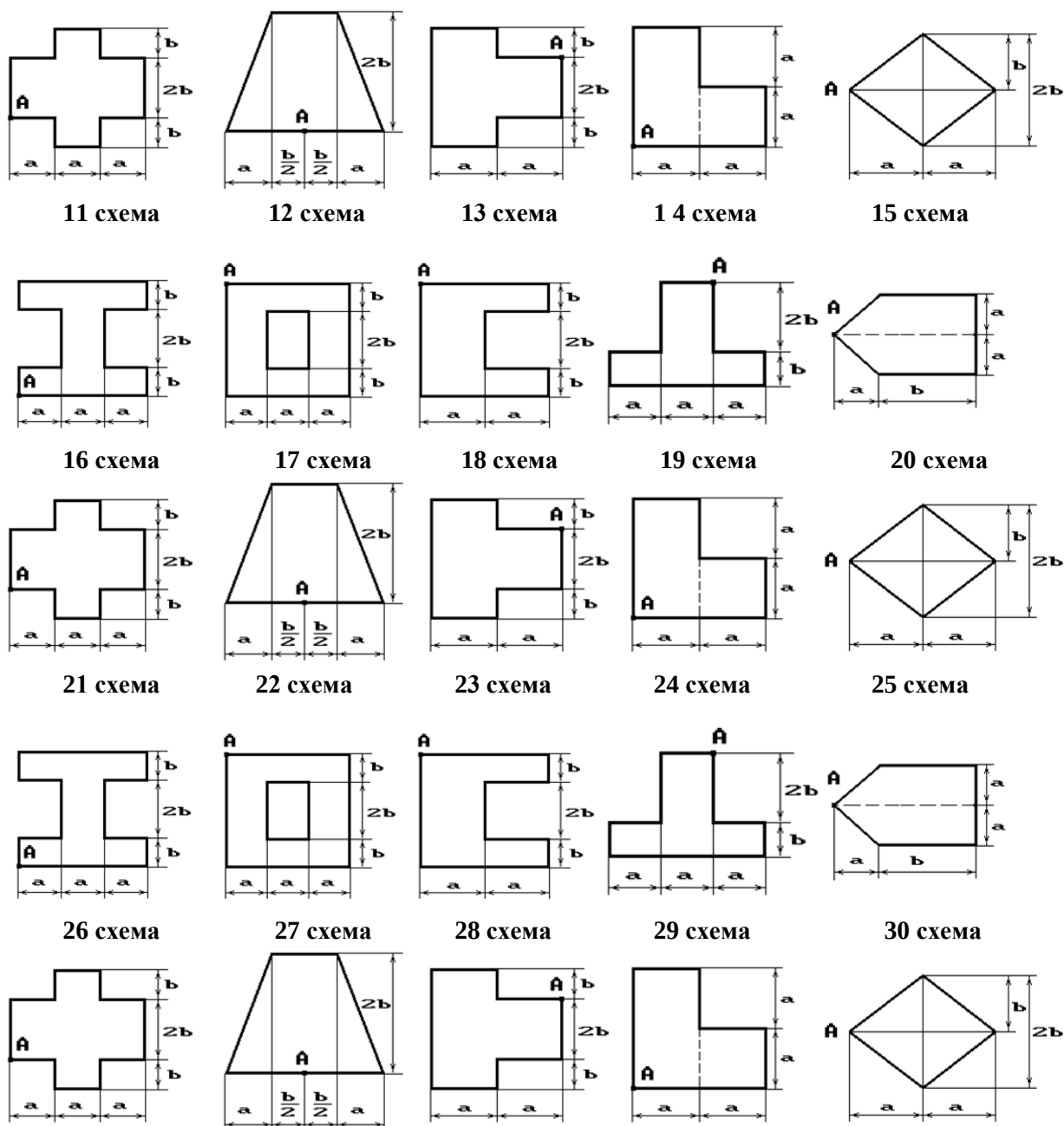


Рисунок 12 – Поперечное сечение

Пример выполнения задания 7

Короткий чугунный брус с заданным поперечным сечением (рис.13) сжимается силой P , приложенной в точке D .

Определить из условия прочности бруса допускаемое значение силы P_d .

Дано: $a = 0,08$ м; $b = 0,12$ м; $\alpha = 0,5$; пределы прочности чугуна при растяжении $\sigma_{вр} = 280$ МПа, при сжатии $\sigma_{вс} = 1000$ МПа; запас прочности принять $n = 1,5$.

Решение.

1. *Определение геометрических характеристик поперечного сечения.*

Заданное сечение (рис.13) рассматриваем как сложное, состоящее из двух прямоугольников: большого сплошного со сторонами a и b и прямоугольного отверстия со сторонами $0,5a$ и $0,6b$.

За исходные координатные оси принимаем оси z_1 и y . На рис.8 в этой системе координат показаны положения центров тяжести прямоугольников (точки C_1 и C_2) и их главные центральные оси y_1, z_1, y_2, z_2 .

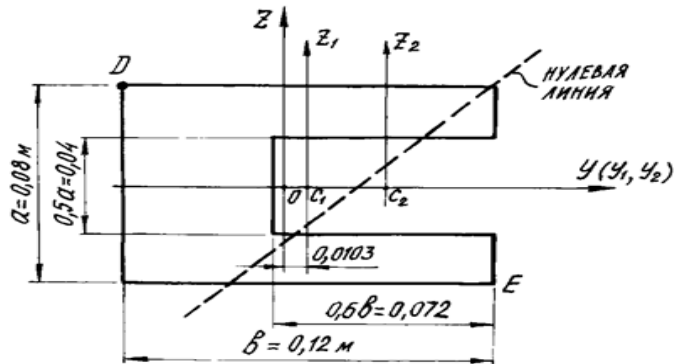


Рисунок 13 – Поперечное сечение бруса

Центр тяжести всего сечения обозначен через O . Он располагается на оси симметрии y , поэтому вычисляется только одна его координата y_C :

$$y_C = \frac{F_1 y_1 - F_2 y_2}{F_1 - F_2};$$

где F_1 и F_2 - площади большого прямоугольника и отверстия; y_1 и y_2 - координаты их центров тяжести.

Подсчитываем геометрические характеристики поперечного сечения бруса.

Площади составляющих фигур

$$F_1 = 12 \cdot 8 = 96 \text{ см}^2; \quad F_2 = 4 \cdot 7,2 = 28,8 \text{ см}^2.$$

Площадь сечения всей фигуры:

$$F = F_1 - F_2 = 96 - 28,8 = 67,2 \text{ см}^2 = 67,2 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2.$$

Абсциссы центров тяжести составляющих фигур:

$$y_1 = 0; \quad y_2 = 2,4 \text{ см.}$$

Абсцисса центра тяжести всей фигуры:

$$y_C = \frac{96 \cdot 0 - 28,8 \cdot 2,4}{96 - 28,8} = -1,03 \text{ см.}$$

Центр тяжести сечения лежит на оси Y (точка O) слева от точки C_1 на расстоянии y_C . Главные центральные оси сечения - Y, Z .

Главные центральные моменты инерции составного сечения относительно осей Y, Z вычисляются с помощью зависимостей между моментами инерции относительно параллельных осей, одна из которых центральная:

$$I_Y = (J_{y_1} + F_1 a_1^2) - (J_{y_2} + F_2 a_2^2);$$

$$I_Z = (J_{z_1} + F_1 b_1^2) - (J_{z_2} + F_2 b_2^2).$$

Моменты инерции прямоугольников относительно собственных главных центральных осей равны

$$J_{y_1} = \frac{b \cdot a^3}{12} = \frac{12 \cdot 8^3}{12} = 512 \text{ см}^4 = 512 \cdot 10^{-8} \text{ м}^4;$$

$$J_{z_1} = \frac{a \cdot b^3}{12} = \frac{8 \cdot 12^3}{12} = 1152 \text{ см}^4 = 1152 \cdot 10^{-8} \text{ м}^4;$$

$$J_{y_2} = \frac{7,24^3}{12} = 38,4 \text{ см}^4 = 38,4 \cdot 10^{-8} \text{ м}^4;$$

$$J_{z_2} = \frac{4 \cdot 7,2^3}{12} = 124,4 \text{ см}^4 = 124,4 \cdot 10^{-8} \text{ м}^4.$$

Расстояния между главными центральными осями Y, Z и собственными главными центральными осями составляющих фигур определяются по чертежу.

Расстояние между главной центральной осью Y и осями y_1, y_2 :

$a_1 = a_2 = 0$, так как главные центральные оси y_1 и y_2 составляющих фигур совпадают с главной центральной осью Y сечения;

расстояния между главной центральной осью Z и осями z_1, z_2 :

$$b_1 = 1,03 \text{ см},$$

$$b_2 = 1,03 + 2,4 = 3,43 \text{ см}.$$

Подставив найденные величины в формулы для вычисления главных центральных моментов инерции и учитывая, что осевой момент инерции отверстия условно считается отрицательным, получаем

$$J_Y = 512 - 38,4 = 473,6 \text{ см}^4 = 473,6 \cdot 10^{-8} \text{ м}^4;$$

$$J_Z = (1152 + 96 \cdot 1,03^2) - (124,4 + 28,8 \cdot 3,43^2) = 790,6 \text{ см}^4 = 790,6 \cdot 10^{-8} \text{ м}^4.$$

Квадраты главных центральных радиусов инерции

$$i_Y^2 = \frac{J_Y}{A} = \frac{473,6}{67,2} = 7,05 \text{ см}^2 = 7,05 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2;$$

$$i_Z^2 = \frac{J_Z}{A} = \frac{790,6}{67,2} = 11,76 \text{ см}^2 = 11,76 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2.$$

2. Определение положения нулевой линии.

По условию задачи сила P приложена в точке D , координаты которой в системе главных центральных осей Y, Z определяются по рис. 13:

$$y_P = -(6 - 1,03) = -4,97 \text{ см} = -4,97 \cdot 10^{-2} \text{ м};$$

$$z_P = 4 \text{ см} = 4 \cdot 10^{-2} \text{ м}.$$

Отрезки, отсекаемые нулевой линией на осях координат Y, Z :

$$a_Y = -\frac{i_Z^2}{y_P} = -\frac{11,76}{-4,97} = 2,37 \text{ см} = 2,37 \cdot 10^{-2} \text{ м};$$

$$a_Z = -\frac{i_Y^2}{z_P} = -\frac{7,05}{4} = -1,76 \text{ см} = -1,76 \cdot 10^{-2} \text{ м}.$$

На осях координат Y, Z откладываются в масштабе величины найденных отрезков и проводится нулевая линия.

3. Вычисление максимальных нормальных напряжений в поперечном сечении бруса.

Максимальные напряжения возникают в точках, наиболее удаленных от нулевой линии. В рассматриваемой задаче это точки D и E . В точке D напряжения сжимающие, в точке E - растягивающие.

Координаты опасных точек находятся по рис. 8:

$$y^* = y_E = 6 + 1,03 = 7,03 \text{ см} = 7,03 \cdot 10^{-2} \text{ м}; \quad z^* = z_E = -4 \text{ см} = -4 \cdot 10^{-2} \text{ м};$$

$$y^{**} = y_D = -4,97 \text{ см} = -4,97 \cdot 10^{-2} \text{ м}; \quad z^{**} = z_D = 4 \text{ см} = 4 \cdot 10^{-2} \text{ м}.$$

Максимальные растягивающие и сжимающие напряжения выражаются через внешнюю нагрузку;

$$\sigma_p^{max} = -P \left(\frac{1}{F} + \frac{z_p z^*}{J_y} + \frac{y_p y^*}{J_z} \right) = -P \cdot \left[\frac{1}{67,2} + \frac{4 \cdot (-4)}{473,6} + \frac{(-4,97) \cdot 7,03}{790,6} \right] = 0,0631 \cdot P \frac{\text{Н}}{\text{см}^2}$$

$$= 631 \cdot P \frac{\text{Н}}{\text{м}^2};$$

$$\sigma_c^{max} = \left| -P \left(\frac{1}{F} + \frac{z_p z^{**}}{J_y} + \frac{y_p y^{**}}{J_z} \right) \right| = \left| -P \cdot \left[\frac{1}{67,2} + \frac{4 \cdot 4}{473,6} + \frac{(-4,97) \cdot (-4,97)}{790,6} \right] \right| = 0,0799 \cdot P \frac{\text{Н}}{\text{см}^2}$$

$$= 799 \cdot P \frac{\text{Н}}{\text{м}^2}.$$

Допускаемая нагрузка $P_{доп}$ определяется из условий прочности бруса по растягивающим и сжимающим напряжениям.

Допускаемые напряжения определяются по исходным данным для растяжения и для сжатия хрупкого материала, в рассматриваемом случае чугуна:

$$\text{На растяжение } [\sigma]_p = \frac{\sigma_{вп}}{n} = \frac{280}{1,5} = 187 \text{ МПа} = 187 \cdot 10^6 \frac{\text{Н}}{\text{м}^2};$$

$$\text{На сжатие } [\sigma]_c = \frac{\sigma_{вс}}{n} = \frac{1000}{1,5} = 667 \text{ МПа} = 667 \cdot 10^6 \frac{\text{Н}}{\text{м}^2}.$$

Из условия прочности материала бруса на растяжение $\sigma_p^{max} \leq [\sigma]_p$ определяется величина допускаемой нагрузки

$$631 P_{доп}^* \leq 187 \cdot 10^6, \text{ откуда } P_{доп}^* \leq 296,4 \cdot 10^3 \text{ Н} = 296,4 \text{ кН}.$$

Из условия прочности на сжатие $\sigma_c^{max} \leq [\sigma]_c$

$$799 P_{доп}^{**} \leq 667 \cdot 10^6, \text{ откуда } P_{доп}^{**} \leq 834,8 \cdot 10^3 \text{ Н} = 834,8 \text{ кН}.$$

В качестве допускаемой нагрузки принимается меньшая из двух полученных, что обеспечивает прочность бруса как по растягивающим, так и по сжимающим напряжениям, то есть $P_{доп} = 296,4 \text{ кН}$.

Задание 8: Расчет вала на совместное действие кручения и изгиба

Шкив с диаметром D_1 и с углом наклона ветвей ремня к горизонту α_1 вращается со скоростью n оборотов в минуту и передает мощность N кВт. Два других шкива имеют одинаковые диаметры D_2 и одинаковые углы наклона ветвей ремня к горизонту α_2 , и каждый из них передает мощность $N/2$ (рис. 14).

Требуется:

- 1) определить моменты, приложенные к шкивам, по заданным величинам N и n ;
- 2) построить эпюру крутящих моментов M_z ;
- 3) определить окружные усилия t_1 и t_2 , действующие на шкивы, по найденным крутящим моментами и заданным диаметрам шкивов D_1 и D_2 ;
- 4) определить давления на вал, принимая их равными трем окружным усилиям;
- 5) определить силы, изгибающие вал в горизонтальной и вертикальной плоскостях (вес шкивов и вала не учитывать);

6) построить эпюры изгибающих моментов от горизонтальных сил M_y и от вертикальных сил M_x ;

7) вычислить значения суммарных изгибающих моментов, пользуясь формулой $M_n = \sqrt{M_x^2 + M_y^2}$ и построить развертку эпюры суммарного изгибающего момента на плоскость, откладывая все ординаты в одну сторону от оси вала (при построении развертки эпюры надо учесть, что для некоторых участков вала она не будет прямолинейной);

8) при помощи эпюр M_z и M_n найти опасное сечение и определить величину максимального расчетного момента (по третьей теории прочности);

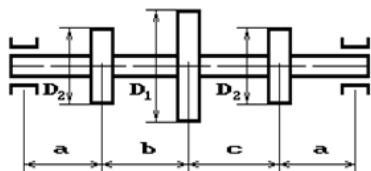
9) подобрать диаметр вала d при $[\sigma]=70$ МПа и округлить его величину.

Данные взять из табл. 5.

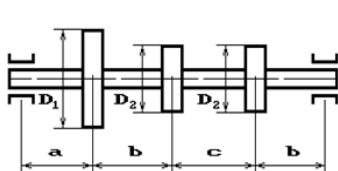
Таблица 5– Исходные данные

Номер строки	Схема по рис.14	N, кВт	n, об/мин	a, м	b, м	c, м	D ₁ , м	D ₂ , м	α_1	α_2
01	1	10	100	1,1	1,1	1,1	1,1	1,1	10°	10°
02	2	20	200	1,2	1,2	1,2	1,2	1,2	20°	20°
03	3	30	300	1,3	1,3	1,3	1,3	1,3	30°	30°
04	4	40	400	1,4	1,4	1,4	1,4	1,4	40°	40°
05	5	50	500	1,5	1,5	1,5	1,5	1,5	50°	50°
06	6	60	600	1,6	1,6	1,6	0,6	0,6	60°	60°
07	7	70	700	1,7	1,7	1,7	0,7	0,7	70°	70°
08	8	80	800	1,8	1,8	1,8	0,8	0,8	80°	80°
09	9	90	900	1,9	1,9	1,9	0,9	0,9	90°	90°
10	10	100	1000	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0	0°	0°
11	11	30	100	1,3	1,3	1,2	1,5	1,2	20°	30°
12	12	40	200	1,4	1,4	1,3	0,6	1,3	30°	40°
13	13	50	300	1,5	1,5	1,4	0,7	1,4	40°	50°
14	14	60	400	1,6	1,6	1,5	0,8	1,5	50°	60°
15	15	70	500	1,7	1,7	1,6	0,8	0,6	60°	40°
16	16	80	600	1,8	1,8	1,7	0,9	0,7	70°	50°
17	17	10	700	1,1	1,9	1,8	1,0	0,8	80°	60°
18	18	20	800	1,2	1,1	1,1	1,5	0,9	10°	70°
19	19	30	900	1,3	1,2	1,2	0,6	1,1	20°	80°
20	20	40	1000	1,4	1,3	1,3	0,7	1,2	30°	90°
21	21	50	100	1,5	1,4	1,4	0,8	1,3	40°	0°
22	22	60	200	1,6	1,5	1,5	1,1	1,4	50°	30°
23	23	30	400	1,7	1,6	1,6	1,2	1,5	60°	40°
24	24	40	500	1,8	1,7	1,7	1,3	0,6	70°	50°
25	25	50	600	1,9	1,8	1,8	1,4	0,7	80°	60°
26	26	60	700	1,0	1,9	1,9	1,5	0,8	90°	80°
27	27	70	800	1,3	1,0	1,0	0,6	0,9	0°	90°
28	28	80	900	1,4	1,3	1,2	0,7	1,0	20°	0°
29	29	90	1000	1,5	1,4	1,3	0,8	1,2	30°	30°
30	30	100	100	1,6	1,5	1,4	0,8	1,3	40°	40°

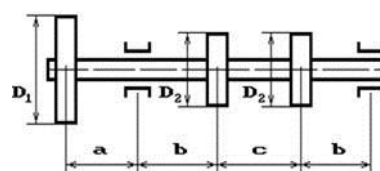
1 схема



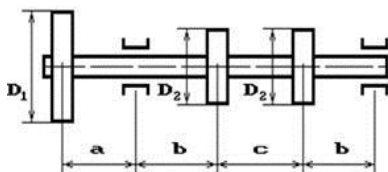
2 схема



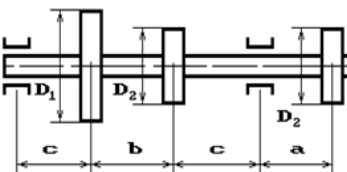
3 схема



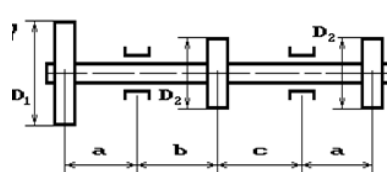
4 схема



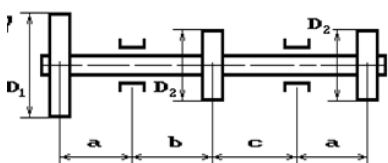
5 схема



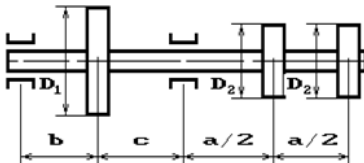
6 схема



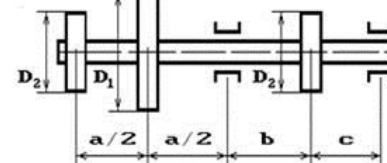
7 схема



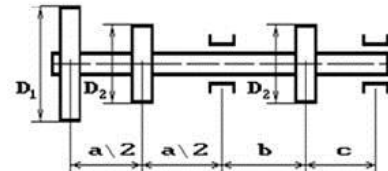
8 схема



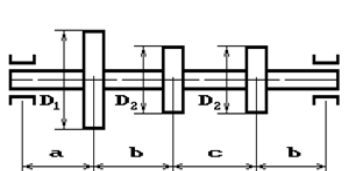
9 схема



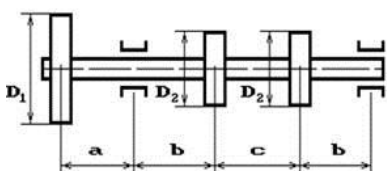
10 схема



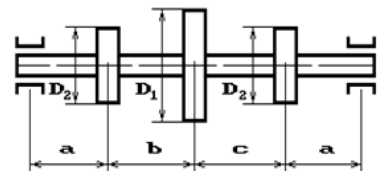
11 схема



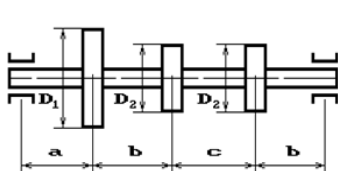
12 схема



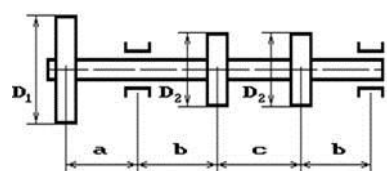
13 схема



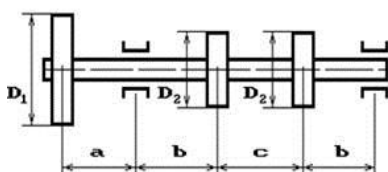
14 схема



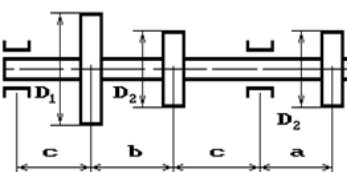
15 схема



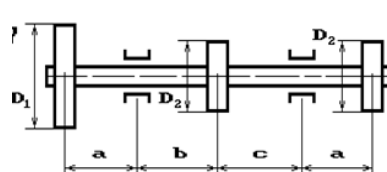
16 схема



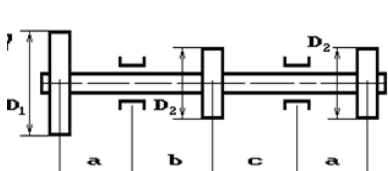
17 схема



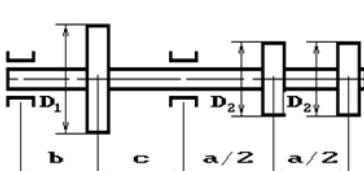
18 схема



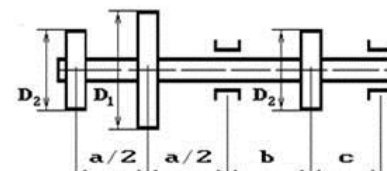
19 схема



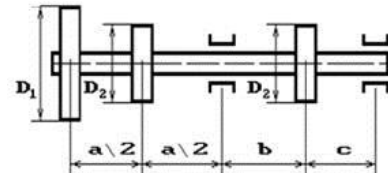
20 схема



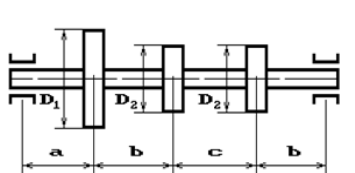
21 схема



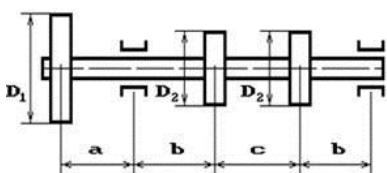
22 схема



23 схема



24 схема



25 схема



26 схема



27 схема



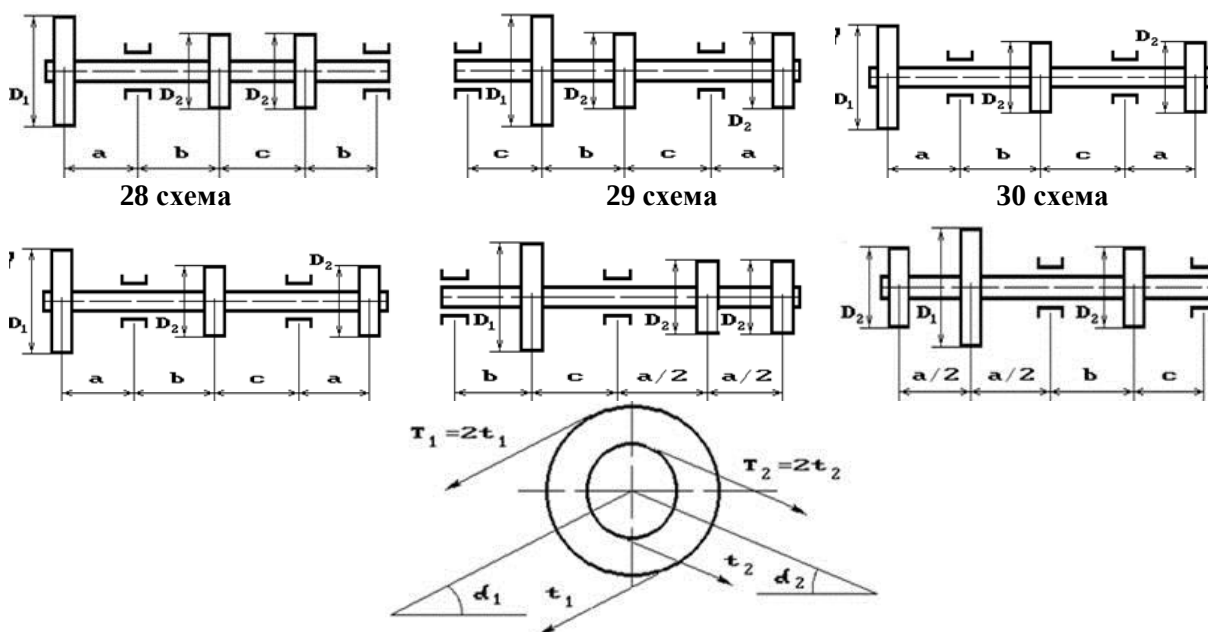


Рисунок 14 – Расчетные схемы

Пример выполнения задания 8

Шкив с диаметром D_1 и с углом наклона ветвей ремня к горизонту α_1 вращается со скоростью n оборотов в минуту и передает мощность N кВт. Два других шкива имеют одинаковые диаметры D_2 и одинаковые углы наклона ветвей ремня к горизонту α_2 , и каждый из них передает мощность $N/2$ (рис. 15).

Дано: $N=60$ кВт, $n=500$ об/мин, $D_1=0,6$ м, $D_2=1,5$ м, $a=1,3$ м, $b=0,6$ м, $c=1,5$ м, $\alpha_1^0=60^\circ$, $\alpha_2^0=50^\circ$.

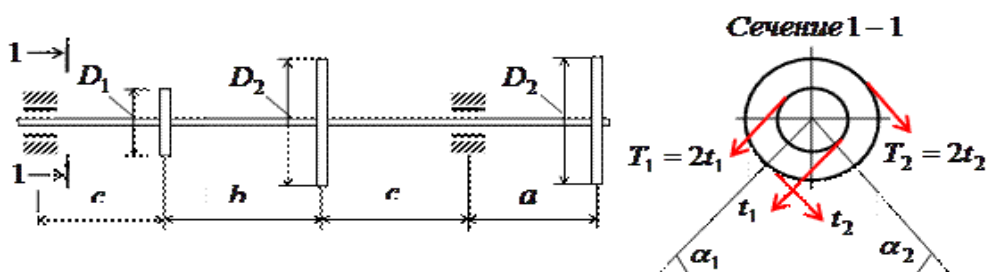


Рисунок 15 – Расчетная схема

Решение.

Крутящие моменты в сечениях вала под шкивами:

$$M_{k1} = \frac{30 \cdot N(\text{кВт})}{\pi \cdot n(\text{об/мин})} = \frac{30 \cdot 60}{\pi \cdot 500} = 1,146 \text{ кНм};$$

$$M_{k2} = \frac{30 \cdot 30}{\pi \cdot 500} = 0,573 \text{ кНм}.$$

Соответствующие этим крутящим моментам окружные усилия t_1 и t_2 определим из следующих формул:

$$M_{k1} = (T_1 - t_1) \cdot \frac{D_1}{2} = (2t_1 - t_1) \cdot \frac{D_1}{2} = t_1 \cdot \frac{D_1}{2},$$

аналогично имеем

$$M_{k2} = t_2 \cdot \frac{D_2}{2}.$$

Отсюда

$$t_1 = \frac{2M_{k1}}{D_1} = \frac{2 \cdot 1,146}{0,6} = 3,820 \text{ кН}, \quad t_2 = \frac{2M_{k2}}{D_2} = \frac{2 \cdot 0,573}{1,5} = 0,764 \text{ кН}.$$

Тогда приведенное к центру вала давление на вал в местах насадки шкивов будет равно

$$F_1 = 3 \cdot t_1 = 3 \cdot 3,820 = 11,460 \text{ кН},$$

$$F_2 = 3 \cdot t_2 = 3 \cdot 0,764 = 2,292 \text{ кН}.$$

Горизонтальные и вертикальные составляющие давления на вал, вызывающие изгиб вала в соответствующих плоскостях, определяются следующим образом:

$$F_{1x} = -F_1 \cos 60^\circ = -11,460 \cdot 0,500 = -5,730 \text{ кН},$$

$$F_{2x} = F_2 \cos 50^\circ = 2,292 \cdot 0,643 = 1,473 \text{ кН},$$

$$F_{1y} = -F_1 \sin 60^\circ = -11,460 \cdot 0,866 = -9,924 \text{ кН},$$

$$F_{2y} = -F_2 \sin 50^\circ = -2,292 \cdot 0,766 = -1,756 \text{ кН}.$$

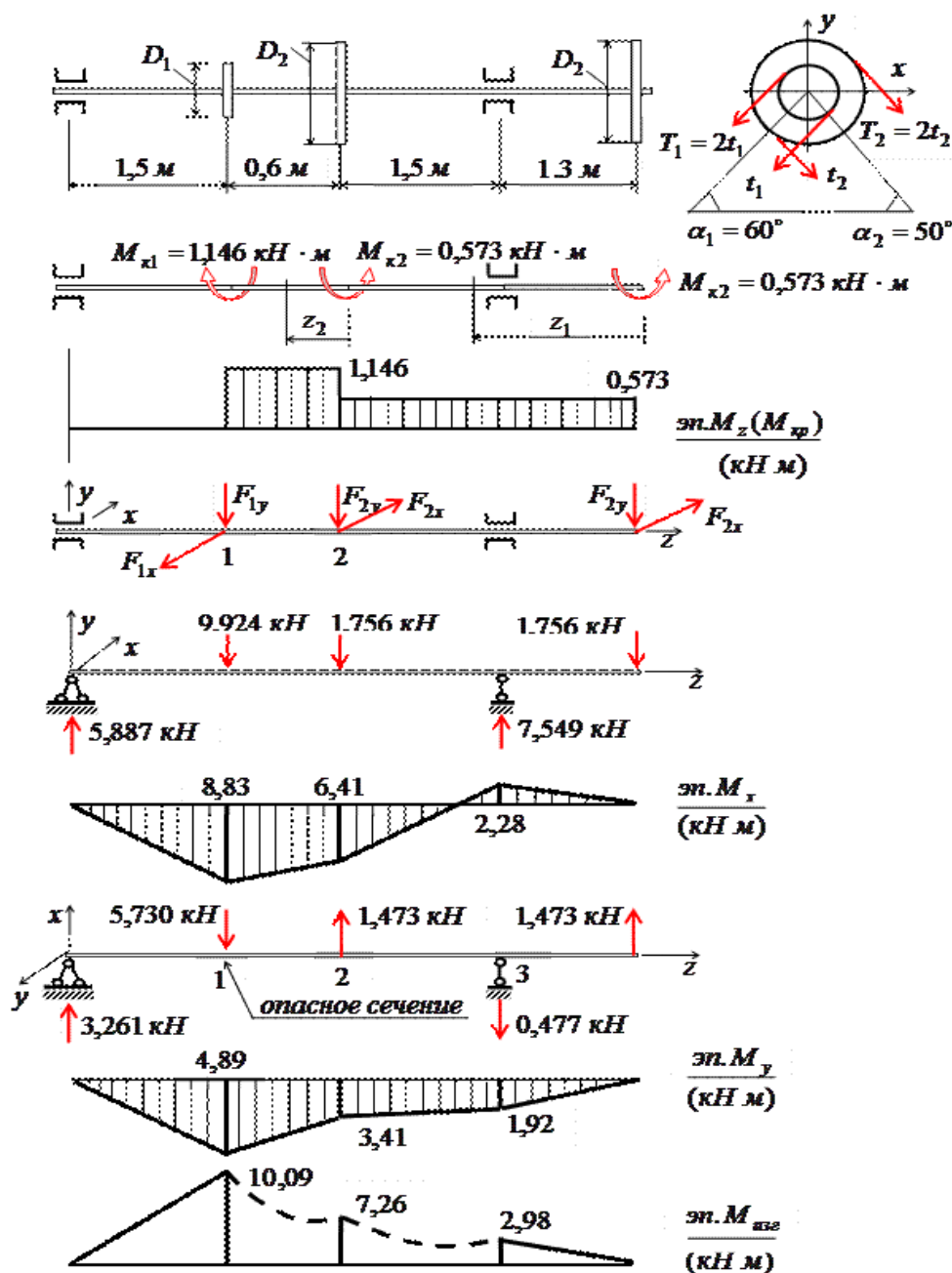


Рисунок 16 – Расчет вала

Расчетная схема представляет собой балку, установленную на двух шарнирных опорах и нагруженную сосредоточенными скручивающими моментами и сосредоточенными поперечными силами в вертикальной и горизонтальной плоскости (рис. 16).

Строим эпюры крутящих и изгибающих моментов. Для совмещения горизонтальной плоскости xoz (плоскость эп. M_y) с плоскостью страницы, повернем на 90° координатные оси относительно оси z .

Вычисляем значения суммарного изгибающего момента в характерных

сечениях вала по формуле $M_{изг} = \sqrt{M_x^2 + M_y^2}$.

$$M_{изг}^{(1)} = \sqrt{8,83^2 + 4,89^2} = 10,09 \text{ кНм};$$

$$M_{изг}^{(2)} = \sqrt{6,41^2 + 3,41^2} = 7,26 \text{ кНм};$$

$$M_{изг}^{(3)} = \sqrt{2,28^2 + 1,92^2} = 2,98 \text{ кНм}.$$

Из эпюр $M_{кр}$ и $M_{изг}$ видно, что опасным является сечение 1, для которого $M_{кр}^{max} = 1,146 \text{ кНм}$ и $M_{изг}^{max} = 10,09 \text{ кНм}$.

Для этого сечения вычисляем расчетный момент, используя третью теорию прочности. Получим

$$M_{расч}^{(3)} = \sqrt{(M_{изг}^{max})^2 + (M_{кр}^{max})^2} = \sqrt{10,09^2 + 1,146^2} = 10,16 \text{ кНм}.$$

Из условия прочности вычисляем диаметр вала

$$\sigma_{расч}^{(3)} \leq [\sigma], \quad \frac{M_{расч}^{(3)}}{W_x} \leq [\sigma], \quad W_x = \frac{\pi \cdot d^3}{32}, \quad \frac{10,16 \cdot 10^3}{\pi \cdot d^3} \cdot 32 \leq 70 \cdot 10^6, \quad d \geq 0,114 \text{ м}.$$

Округлив значение диаметра, получим $d = 125 \text{ мм}$.

Задание 9: Расчет стержней на устойчивость

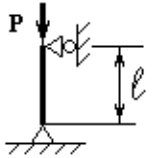
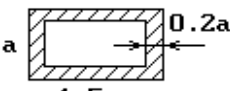
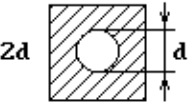
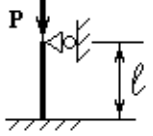
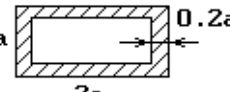
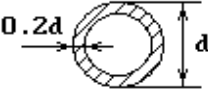
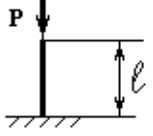
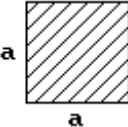
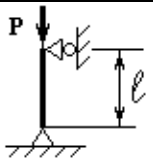
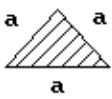
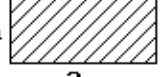
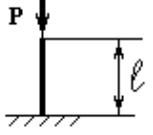
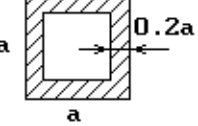
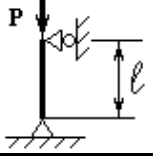
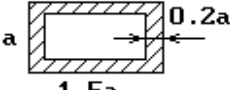
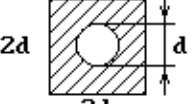
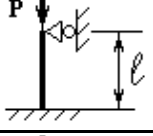
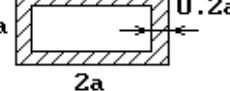
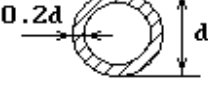
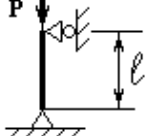
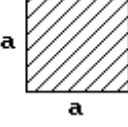
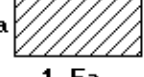
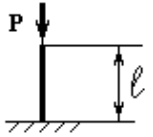
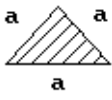
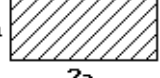
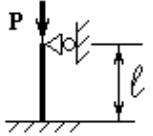
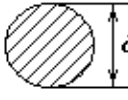
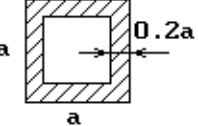
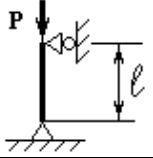
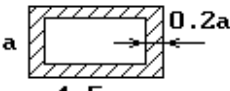
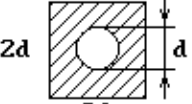
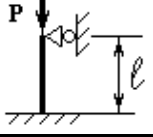
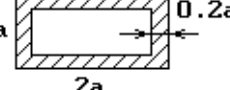
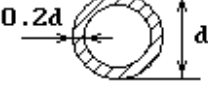
Стальной стержень длиной l сжимается силой P . Требуется найти:

1. размеры поперечного сечения при допускаемом напряжении на сжатие $[\sigma] = 160 \text{ МПа}$ (расчет производить последовательными приближениями, предварительно задаваясь величиной коэффициента $\varphi = 0,5$);
2. величину критической силы и коэффициент запаса устойчивости.

Данные взять из табл. 6.

Таблица 6 – Исходные данные

Номер строки	Вариант схемы формы сечения	P кН	l м	Схема закрепления стержня	Форма сечения стержня	
01	I	100	2,1		I	II
02	II	200	2,2			
03	III	300	2,3		III	IV
04	IV	400	2,4			
05	V	500	2,5		V	VI
06	VI	600	2,6			

07	VII	700	2,7		VII 	VIII 
08	VIII	800	2,8			
09	IX	900	2,9		IX 	X 
10	X	1000	3,0			
11	I	300	2,3		I 	II 
12	III	400	2,5			
13	III	900	2,2		III 	IV 
14	V	600	2,4			
15	V	500	2,5		V 	VI 
16	VII	900	2,8			
17	VII	300	2,7		VII 	VIII 
18	VIII	500	2,2			
19	IX	100	2,6		IX 	X 
20	X	1000	3,0			
21	I	600	2,1		I 	II 
22	II	200	2,3			
23	III	300	2,0		III 	IV 
24	IV	900	3,0			
25	V	400	2,2		V 	VI 
26	VI	600	2,5			
27	VII	700	2,4		VII 	VIII 
28	VIII	100	2,7			
29	IX	200	2,1		IX 	X 
30	X	1000	2,3			

Пример выполнения задания 9

Стальной стержень (сталь Ст.3) длиной l сжимается силой F .

Дано: $F=1000$ кН, $l=2,4$ м, схема закрепления концов стержня и форма сечения стержня показаны на рис. 17.

Требуется:

1) найти размеры поперечного сечения при допуске напряжении на простое сжатие $[\sigma]=160$ МПа (расчет производить методом последовательных приближений, в первом приближении задавшись коэффициентом $\varphi=0,5$);

2) найти значение критической силы и коэффициента запаса устойчивости.

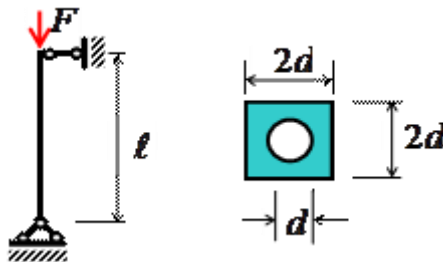


Рисунок 17 – Расчетная схема

Решение.

Расчет начинаем с вычисления всех необходимых геометрических характеристик поперечного сечения стойки, которые удобно выразить через площадь поперечного сечения A ($b=h=2d$):

$$A = 4d^2 - \frac{\pi d^2}{4} = 3,215d^2, \quad d^2 = \frac{A}{3,215} = 0,311A,$$

$$I_{min} = I_x = I_y = \frac{bh^3}{12} - \frac{\pi d^4}{64} = \frac{2d \cdot (2d)^3}{12} - \frac{\pi d^4}{64} = 1,284d^4 = 0,124A^2.$$

Радиус инерции сечения относительно оси наименьшей жесткости:

$$i_{min} = i_x = i_y = \sqrt{\frac{I_{min}}{A}} = 0,3525\sqrt{A}.$$

Гибкость стержня:

$$\lambda = \frac{\mu \cdot l}{i_{min}} = \frac{1,0 \cdot 2,4}{0,3525\sqrt{A}} = \frac{6,808}{\sqrt{A}},$$

где μ - коэффициент приведения длины стержня, зависящий от условий закрепления стержня (табл.7)

В условии устойчивости

$$\sigma_y \leq [\sigma_y], \quad \frac{F}{A} \leq [\sigma] \cdot \varphi$$

неизвестны величины A и φ , где φ - коэффициент продольного изгиба.

Расчет производить методом последовательных приближений, в первом приближении задавшись коэффициентом $\varphi=0,5$:

$$A \geq \frac{F}{[\sigma] \cdot \varphi_1} = \frac{1000 \cdot 10^3}{160 \cdot 10^6 \cdot 0,5} = 0,0125 \text{ м}^2 = 125 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2,$$

тогда гибкость стержня

$$\lambda = \frac{6,808}{\sqrt{A}} = \frac{6,808}{\sqrt{125 \cdot 10^{-4}}} \approx 61.$$

Таблица 7 – Коэффициенты приведения длины μ

$\mu = 1.0$	$\mu = 0.7$	$\mu = 2.0$	$\mu = 0.5$
-------------	-------------	-------------	-------------

По таблице 8, используя линейную интерполяцию, находим

$$\varphi_1^* = 0,81 + \frac{0,86 - 0,81}{10} \cdot 9 \approx 0,855.$$

Таблица 8 – Коэффициенты продольного изгиба φ для ст.3

λ	0	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100
φ	1,00	0,99	0,96	0,94	0,92	0,89	0,86	0,81	0,75	0,69	0,60
λ	110	120	130	140	150	160	170	180	190	200	
φ	0,52	0,45	0,40	0,36	0,32	0,29	0,26	0,23	0,21	0,19	

Во втором приближении принимаем

$$\varphi_2 = \frac{0,5 + 0,855}{2} \approx 0,678; \quad A \geq \frac{1000 \cdot 10^3}{160 \cdot 10^6 \cdot 0,678} = 0,0092 \text{ м}^2; \quad \lambda = \frac{6,808}{\sqrt{A}} \approx 71;$$

$$\varphi_2^* = 0,75 + \frac{0,81 - 0,75}{10} \cdot 9 \approx 0,804.$$

В третьем приближении

$$\varphi_3 = \frac{0,678 + 0,804}{2} \approx 0,741; \quad A \geq \frac{1000 \cdot 10^3}{160 \cdot 10^6 \cdot 0,741} = 0,0084 \text{ м}^2; \quad \lambda = \frac{6,808}{\sqrt{A}} \approx 74;$$

$$\varphi_2^* = 0,75 + \frac{0,81 - 0,75}{10} \cdot 6 \approx 0,786.$$

В четвертом приближении

$$\varphi_4 = \frac{0,741 + 0,786}{2} \approx 0,763; \quad A \geq \frac{1000 \cdot 10^3}{160 \cdot 10^6 \cdot 0,763} = 0,0082 \text{ м}^2; \quad \lambda = \frac{6,808}{\sqrt{A}} \approx 75;$$

$$\varphi_2^* = 0,780.$$

Полученное значение φ близко к принятому, поэтому проверим выполнение условия устойчивости:

$$\frac{F}{A} \leq [\sigma] \cdot \varphi; \quad \frac{1000 \cdot 10^3}{0,0082} \leq 160 \cdot 10^6 \cdot 0,764; \quad 122,0 \text{ МПа} \leq 122,2 \text{ МПа}.$$

Относительная погрешность между напряжениями составляет

$$\delta_\sigma = \frac{(122,2 - 120,0)}{120} \cdot 100\% \approx 0,2\%;$$

это меньше одного процента, что допустимо. Принимая $\varphi=0,763$;

получаем $A=0,0082 \text{ м}^2$; $d = \sqrt{\frac{A}{3,215}} = 0,050 \text{ м}.$

Для материала стойки (сталь 3, $E=200$ ГПа, $\sigma_{\text{пл}}=200$ МПа) значение предельной гибкости $\lambda_{\text{пред}}$ будет равно

$$\lambda_{\text{пред}} = \sqrt{\frac{\pi^2 E}{\sigma_{\text{пл}}}} = \sqrt{\frac{\pi^2 \cdot 200 \cdot 10^9}{200 \cdot 10^6}} \approx 100.$$

Поскольку в нашем случае гибкость стойки меньше предельной ($\lambda=75 < 100$), то величину критической силы определяем по формуле Ясинского (для ст.3 $a=310$ МПа, $b=1,14$ МПа):

$$F_{\text{кр}} = \sigma_{\text{кр}} \cdot A = (a - b \cdot \lambda) \cdot A = (310 - 1,14 \cdot 75) \cdot 10^6 \cdot 0,0082 = 1841 \text{ кН}.$$

Стойка имеет коэффициент запаса устойчивости, равный

$$n_y = \frac{F_{\text{кр}}}{F} = \frac{1841}{1000} = 1,84.$$

Список рекомендуемой литературы

Основная литература

1. Агаханов, М.К. Сопротивление материалов [Электронный ресурс]: учебное пособие/ Агаханов М.К., Богопольский В.Г., Кузнецов В.В.— Электрон. текстовые данные.— М.: Московский государственный строительный университет, ЭБС АСВ, 2014.— 171 с.— Режим доступа: <http://www.iprbookshop.ru/26149>.— ЭБС «IPRbooks», по паролю
2. Бахрачева, Ю.С. Сопротивление материалов [Электронный ресурс]: учебное пособие/ Бахрачева Ю.С.— Электрон. текстовые данные.— Волгоград: Волгоградский институт бизнеса, Вузовское образование, 2013.— 170 с. — Режим доступа: <http://www.iprbookshop.ru/11346>.— ЭБС «IPRbooks», по паролю
3. Кирсанова, Э.Г. Сопротивление материалов [Электронный ресурс]: учебное пособие/ Кирсанова Э.Г.— Электрон. текстовые данные.— Саратов: Ай Пи Эр Медиа, 2012.— Режим доступа: <http://www.iprbookshop.ru/733>.— ЭБС «IPRbooks», по паролю
4. Межецкий, Г.Д. Сопротивление материалов [Электронный ресурс]: учебное пособие/ Межецкий Г.Д., Загребин Г.Г., Решетник Н.Н., ред. Межецкий Г.Д., Загребин Г.Г.— Электрон. текстовые данные.— М.: Дашков и К, 2013.— 432 с.— Режим доступа: <http://www.iprbookshop.ru/14094>.— ЭБС «IPRbooks», по паролю

Сопротивление материалов [Текст]: учебник/ А.Г. Схиртладзе, Б.В. Романовский, В.В. Волков, А.Н. Потемкин. - М.: Академия, 2012. – 416 с.

Дополнительная литература

1. Александров, А.В. Сопротивление материалов [Текст]: учебник.- 2-е изд., испр.- М.: Высшая школа, 2000. – 560 с.
2. Астахова, А.Я. Сопротивление материалов. Часть 2 [Электронный ресурс]: рабочая тетрадь для решения задач/ Астахова А.Я.— Электрон. текстовые данные.— М.: Московский государственный строительный университет, ЭБС АСВ, 2014.— 42 с.— Режим доступа: <http://www.iprbookshop.ru/23744>.— ЭБС «IPRbooks», по паролю
3. Ахметзянов, М.Х. Сопротивление материалов [Текст]: учебник/ М.Х. Ахметзянов, И.Б. Лазарев.- 2-е изд., перераб. и доп. - М.: Юрайт, 2011. – 300 с.
4. Грес, П.В. Сборник задач по сопротивлению материалов [Электронный ресурс]: учебное пособие/ Грес П.В., Агуленко В.Н., Краснов Л.А. — Электрон. текстовые данные. — М.: Высшая школа, Абрис, 2012. — 103 с. — Режим доступа: <http://www.iprbookshop.ru/9655>.— ЭБС «IPRbooks», по паролю
5. Орлова, А.Н. Сопротивление материалов. Журнал лабораторных работ [Электронный ресурс]: учебное пособие/ Орлова А.Н.— Электрон. текстовые данные. — М.: Прометей. МПГУ, 2011. — 52 с. — Режим доступа: <http://www.iprbookshop.ru/8316>.— ЭБС «IPRbooks», по паролю

Сопротивление материалов [Текст]: учебник/ под ред. Н.А.Костенко.- М.: Высшая школа, 2000.- 430 с

КИДАКОЕВ Мурат Мухадинович
КИДАКОЕВ Альберт Мухадинович
КРЫМОВА Валентина Григорьевна

СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ

Методические указания к выполнению РГР для обучающихся
ОЗФО по направлению подготовки 08.03.01 Строительство
(профиль Промышленное и гражданское строительство)

Корректор Чагова О.Х.
Редактор Чагова О.Х.

Сдано в набор 30.05.2025 г.
Формат 60х84/16
Бумага офсетная.
Печать офсетная.
Усл. печ. л. 3,48
Заказ № 5129
Тираж 100 экз.

Оригинал-макет подготовлен
в Библиотечно-издательском центре СКГА
369000, г. Черкесск, ул. Ставропольская, 36

