МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

СЕВЕРО-КАВКАЗСКАЯ ГОСУДАРСТВЕННАЯ АКАДЕМИЯ

Кафедра «Медицинская кибернетика»

Ф. Ю. Боташева
А.С. Байрамукова

ФИЗИКА, МАТЕМАТИКА

Практикум для обучающихся 1 курса по специальности
31.05.01 Лечебное дело, 31.05.02 Педиатрия,
31.05.03 Стоматология
(Часть 1)

Черкесск
2024

УДК 22,3
ББК 53
Б 86

Рекомендовано к изданию редакционно-издательским советом СКГА.
Протокол № от «27» февраля 2024 г.

Рецензенты: Лайпанов М.З. – к. ф.-м. н, зав. кафедрой Физики КЧГУ

Б86 **Боташева, Ф. Ю.** Физика, математика: практикум для обучающихся 1 курса по специальности 31.05.01 Лечебное дело, 31.05.02 Педиатрия, 31.05.03 Стоматология Часть 1. / Ф. Ю. Боташева, А.С. Байрамукова. – Черкесск: БИЦ СКГА, 2024. – 60 с.

Учебно-методическое пособие составлено в соответствии с программой по высшей математике для студентов медицинских ВУЗов и включает основные разделы математического анализа: дифференциальное и интегральное исчисление, дифференциальные уравнения первого и второго порядков. Каждый раздел содержит решенные примеры и задачи. В пособии кратко изложены теоретические основы четырех разделов математического анализа, приведены упражнения для самостоятельного решения и тестовые задания.

УДК 22,3
ББК 53

Содержание

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА

1. ПРОИЗВОДНАЯ ФУНКЦИИ

1.1 ПРОИЗВОДНАЯ ФУНКЦИИ И МЕТОДЫ ЕЕ НАХОЖДЕНИЯ

Решение любой задачи на определение скорости неравномерного движения по данному уравнению этого движения $s = f(t)$ приводит к нахождению предела вида

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{f(t+\Delta t) - f(t)}{\Delta t}$$

Предел этого вида играет весьма важную роль во многих областях науки **и** техники, поэтому в анализе бесконечно малых величин ему дано специальное название «производная функции».

Производной данной функции ***y*** *= f(x) при данном значении аргумента x называется предел отношения приращения* Δ***y*** *этой функции к приращению* Δx *аргумента, когда приращение аргумента стремиться к нулю.*

На основании этого определения, например, можно сказать, что *скорость движения в данный момент t есть производная от пути S по времени* ***t.***

Производную функции y = f(x) принято обозначать следующими символами:

y'_x (читается «игрек штрих по икс»);

$f'(x)$ (читается «эф штрих от икс»);

y' (читается «игрек штрих»).

Пользуясь этими обозначениями, можно написать

$$y'_x = f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \qquad (1)$$

Аналогично, если s=$\varphi(t)$, то

$$s'_t = \varphi'(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\varphi(t+\Delta t) - \varphi(t)}{\Delta t} \qquad (2)$$

Для того, чтобы функция y = f(x) при данном значении аргумента x имела производную $y'_x = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$, необходимо, чтобы бесконечно малому Δx соответствовало бесконечно малое приращение Δy функции, т.е. чтобы при $\Delta x \to 0$ и $\Delta y \to 0$.

Отсюда следует, что функция y = f(x) имеет производную лишь при таких значениях аргумента, при которых она непрерывна

Процесс нахождения производной называется дифференцированием.

Из определения производной вытекает общее правило дифференцирования любой функции y = f(x) , которое можно свести к следующим этапам, рассмотренным ниже на примере функции $y = x^2$.

Аргументу x даем приращение Δx и находим новое (наращенное) значение функции: y + Δy = (x + Δx)2.

1)Находим приращение функции:

$$\Delta y = (y + \Delta y) - y = (x^2 + 2x\Delta x + \Delta x^2) - x^2 = 2x\Delta x + \Delta x^2.$$

2) Находим отношение приращения функции к приращению аргумента:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = 2x + \Delta x$$

3) Находим производную функции, т.е. предел отношения приращения функции к приращению аргумента при стремлении последнего к нулю:

$$y'_x = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} (2x + \Delta x) = 2x$$

Производная $y'_x = 2x$.

Значение производной функции y = f(x) при данном численном значении аргумента x называется частным значением производной. Например, частным значением найденной производной функции при $x = -3$, будет $y'(-3) = 2 \cdot (-3) = -6$.

Пример: найти производную функции y$= x^2$-x при x = 2 .

<u>Решение:</u> при $x = 2$ будем иметь $y = 2^2 - 2 = 2$. Теперь проведем дифференцирование по общему правилу:

1) $y + \Delta y = (2 + \Delta x)^2 - (2 + \Delta x)$

2 $\Delta y = (y + \Delta y) - y = \left[(2 + \Delta x)^2 - (2 + \Delta x)\right] - 2 = 4 + 4\Delta x + \Delta x^2 - 2 - \Delta x = 3\Delta x + \Delta x^2 = (3 + \Delta x)\Delta x$

3) $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{(3 + \Delta x)\Delta x}{\Delta x} = 3 + \Delta x$

4) $y'_x = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} (3 + \Delta x) = 3$

таким образом, производная исходной функции $y'_x = 3$.

Аналогичным образом произведено дифференцирование элементарных функций. Нахождение их производных сводится к определению по таблице, приведенной ниже.

ОСНОВНЫЕ ФОРМУЛЫ ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ

Тип функции	Обозначение	Производная
Постоянная величина	$y = C$	$y' = 0$
Линейная функция	$y = a \cdot x + b$	$y' = a$
Степенная функция $(x > 0)$	$y = x^n$	$y' = n \cdot x^{n-1}$
Показательная функция $(a > 0,\ a \neq 1)$	$y = e^x$	$y' = e^x$
	$y = a^x$	$y' = a^x \cdot \ln a$
Логарифмическая функция $(a > 0,\ a \neq 1)$	$y = \ln x$	$y' = 1/x$
	$y = \log_a x$	$y' = 1/(x \cdot \ln a)$
Тригонометрические функции	$y = \sin x$	$y' = \cos x$
	$y = \cos x$	$y' = -\sin x$
	$y = \operatorname{tg} x$	$y' = 1/\cos^2 x$
	$y = \operatorname{ctg} x$	$y' = -1/\sin^2 x$
Обратные тригонометрические функции	$y = \arcsin x$	$y' = 1/\sqrt{1-x^2}$
	$y = \arccos x$	$y' = -1/\sqrt{1-x^2}$
	$y = \operatorname{arctg} x$	$y' = 1/(1+x^2)$
	$y = \operatorname{arcctg} x$	$y' = -1/(1+x^2)$

Кроме таблицы производных, для вычислений используются правила дифференцирования. Они легко получаются на основании определения производной.

ПРАВИЛА ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ ФУНКЦИЙ.

1. Постоянный множитель можно вынести за знак производной.
2. Производная алгебраической суммы двух или нескольких функций равна алгебраической сумме производных этих функций. (Функции предполагаются дифференцируемыми, т.е. имеющими производные).
3. Производная произведения двух дифференцируемых функций вычисляется по формуле: (uv)' = u'v + v'u .
4. Производная частного двух дифференцируемых функций, в котором знаменатель отличен от нуля, вычисляется по формуле:

$$(\frac{u}{v})' = \frac{u'v - v'u}{v^2}$$

Определение: Если функция $y = f(x)$ имеет аргумент x, в свою очередь являющийся функцией некоторой переменной t, т.е. $x = \varphi(t)$, то говорят, что y сложная функция от t, т.е. $y = f[\varphi(t)]$.

Производная функции y по переменной t вычисляется по следующему правилу («правило цепочки»)):

$$y'_t = y'_x \cdot x'_t ,$$

т.е. производная сложной функции по независимой переменной *t* равна произведению производной от функции по промежуточной переменной *X* на производную промежуточной переменной. Пользуясь таблицей и правилами дифференцирования функций, вычисляют производные более сложных функций.

1.2 ФИЗИЧЕСКИЙ СМЫСЛ ПРОИЗВОДНОЙ ФУНКЦИИ

Если зависимость между пройденным путем *s* и временем *t* выражается уравнением

$$s = f(t), \tag{3}$$

то скорость движения в момент t определяется по формуле

$$\upsilon = s'_t = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{f(t+\Delta t) - f(t)}{\Delta t} \tag{4}$$

Всякое уравнение вида $y = f(x)$ независимо от физического смысла переменных x и y выражает процесс изменения переменной величины y (функции) в зависимости от изменения переменной x (аргумента). *Поэтому все сказанное выше о нахождении закона изменения скорости по данному закону движения применимо к скорости изменения любой функции* $y = f(x)$ *по отношению к аргументу x.*

Таким образом, как это следует из выражения (4), первая производная от пути *S* по времени *t* есть скорость движения υ.

В этом и заключается **механический или физический смысл производной. Пример 2:** при нагревании тела температура его *T* изменяется в зависимости от времени *t*, т.е. *T* является функцией от *t*: $T = f(t)$.

Если обозначим повышение температуры за промежуток времени от момента *t* до момента $t + \Delta t$ через ΔT, то получим

$$\Delta \mathrm{T} = f(t+\Delta t) - f(t)$$

тогда отношение

$$\frac{\Delta \mathrm{T}}{\Delta t} = \frac{f(t+\Delta t) - f(t)}{\Delta t}$$

будет средней скоростью изменения температуры за промежуток времени от момента *t* до момента $t + \Delta t$, а предел этого отношения при $\Delta t \to 0$, т.е.

$$\mathrm{T}'_t = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \mathrm{T}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{f(t+\Delta t) - f(t)}{\Delta t},$$

явится выражением скорости изменения температуры *T* в момент *t*.

1.3 ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ СМЫСЛ ПРОИЗВОДНОЙ

Пусть кривая *EF* (рис. 2.1) является графиком непрерывной функции $y = f(x)$. Возьмем на этой кривой точку $A(x, y)$. Получим

$$OA_1 = x,\ A_1A = y = f(x).$$

Дадим абсциссе x приращение $\Delta x = A_1 B_1$. Тогда наращенному значению абсциссы, равному

$$OB1 = OA1 + A1B1 = x + \Delta x,$$

будет соответствовать наращенное значение ординаты, равное

$$B_1B = y + \Delta y = f(x + \Delta x) \qquad (5)$$

Из точки A проведем прямую AB_2, параллельную оси абсцисс, и секущую AB . Получим прямоугольник $A_1AB_2B_1$ и прямоугольный треугольник ABB_2.

Очевидно, $AB_2 = A_1B_1 = \Delta x$ и

$$B_lB_2 = A_1A = y = f(x) \qquad (6)$$

как противоположные стороны прямоугольника $A_1\ AB_2\ B_1$. Вычитая из равенства (5) равенство (6), найдем $B_lB - B_lB_2 = f(x+\Delta x) - f(x) = \Delta y$, или $B_2B = \Delta y$.

Обозначив угол между секущей AB и положительным направлением оси абсцисс через β, получим $\angle B_2AB = \angle .A_1KA = \beta$.

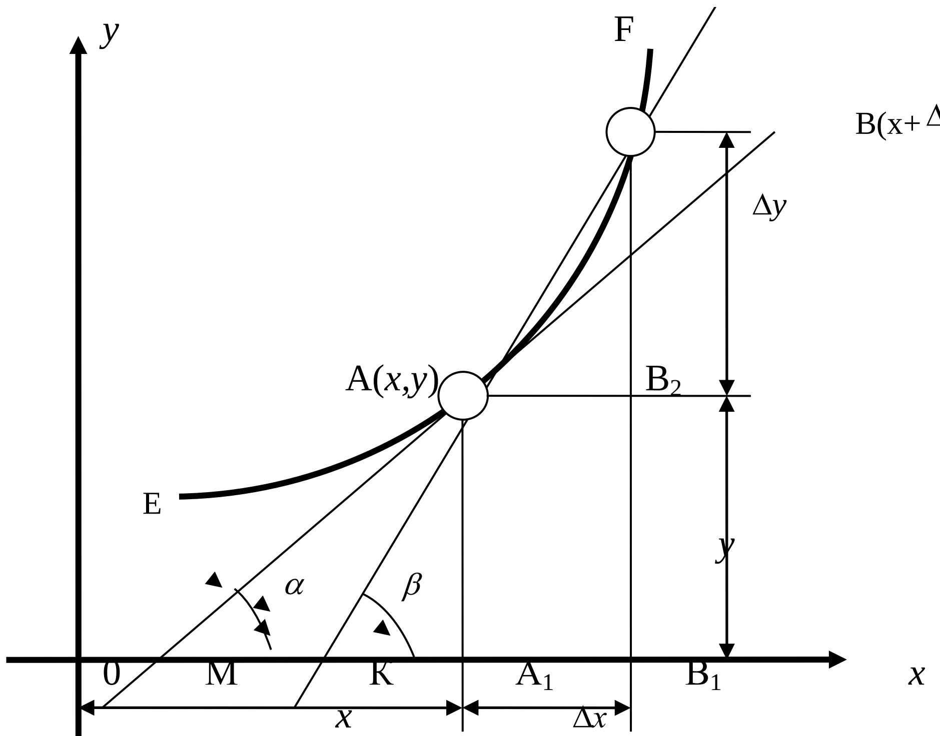


Рисунок 2.1

Тогда из прямоугольного треугольника B2AB ,будем иметь

$$tg\angle B_2AB = \frac{B_2B}{AB_2}, \text{ или } \quad tg\beta = \frac{\Delta y}{\Delta x} \tag{7}$$

Равенство (7) показывает, что с геометрической точки зрения отношение приращения функции к приращению аргумента является тангенсом угла наклона к оси абсцисс секущей, проходящей через точки A(x, y) и B(x+Δx,y+Δy).

При $\Delta x \to 0$ точка B, перемещаясь по кривой, будет неограниченно приближаться к неподвижной точке A(x, y), секущая AB, поворачиваясь около точки A, будет стремиться занять предельное Δx положение, а именно положение касательной AM. При этом, очевидно, угол β будет стремиться к углу α, образуемому касательной AM с положительным направлением оси абсцисс. Получим

$$\lim_{\Delta x \to 0} tg\beta = tg\alpha \tag{8}$$

С другой стороны, из равенства (8) следует, что

$$\lim_{\Delta x \to 0} tg\beta = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \quad \text{или} \quad \lim_{\Delta x \to 0} tg\beta = y'_x \tag{9}$$

Левые части равенства (8) и (9) равны между собой, следовательно, должны быть равны и правые части, т.е.

$$y'_x = tg\alpha, или \quad y'_x = k, \tag{10}$$

где к- угловой коэффициент касательной AM к графику функции $y = f(x)$ в точке A(x, y) .

Итак, производная функции $y = f(x)$ при данном значении аргумента x равна угловому коэффициенту касательной, проведенной к графику этой функции в точке, абсцисса которой равна x, т.е. можно сказать, что геометрически производная выражает наклон касательной в данной точке.

1.4 ПРОИЗВОДНЫЕ ВТОРОГО И ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ. МЕХАНИЧЕСКИЙ СМЫСЛ ВТОРОЙ ПРОИЗВОДНОЙ

Производная $y'_x = f(x)$ от функции $y = f(x)$ тоже является функцией от x, следовательно, ее можно дифференцировать, т.е. найти производную от производной.

Производная от производной называется производной второго порядка, или просто второй производной, и обозначается символом y''_{xx} или $f''(x)$.

Следовательно, $y''_x = (y'_x)'_x$.

Так как вторая производная в свою очередь есть функция от x, то ее то-же можно дифференцировать. Получается третья производная: $y'''_{xxx} = (y''_{xx})'_x$ и т.д.

Пример: дана функция $y = \sin ax$. Найти третью производную. **Решение:** первая производная $y'_x = a\cos ax$,

вторая производная $y''_{xx} = (a \cos ax)' = -a^2 \sin ax$,

третья производная $y''''_{xxx} (-a^2 \sin ax)' = -a^3 \cos ax$.

Мы знаем, что если в прямолинейном движении пройденный путь *s* в зависимости от времени *t* выражается уравнением *s = f(t)* , то скорость этого движения в данный момент времени определяется как производная от пути по времени, т.е. $\upsilon = s'_t = f'(t)$.

Возьмем производную от скорости $\upsilon = f'(t)$ по времени *t*, следуя общему правилу дифференцирования.

1) $\upsilon + \Delta\upsilon = f'(t+\Delta t)$ - мы нашли выражение скорости движения в момент $t + \Delta\ t$;

2) $\Delta\upsilon = (\upsilon + \Delta\upsilon) - \upsilon = f'(t+\Delta t) - f'(t)$ - очевидно, второй этап, выражает скорости движения за время от момента *t* до момента $t+\Delta t$;

3) $\dfrac{\Delta\upsilon}{\Delta t} = \dfrac{f'(t+\Delta t) - f'(t)}{\Delta t}$ - третий этап выражает изменение скорости движения за единицу времени в предположении, что в промежутке $(t, t+\Delta t)$ скорость изменялась равномерно, т.е. среднее ускорение за промежуток времени от момента *t* до момента $t+\Delta t$. Обозначив среднее ускорение через $\bar{a}$, получим $\bar{a} = \dfrac{\Delta\upsilon}{\Delta t} = \dfrac{f'(t+\Delta t) - f'(t)}{\Delta t}$;

4) $\lim\limits_{\Delta t\to 0} \bar{a} = \lim\limits_{\Delta t\to 0} \dfrac{\Delta\upsilon}{\Delta t} = \lim\limits_{\Delta t\to 0} \dfrac{f'(t+\Delta t) - f'(t)}{\Delta t}$.

Пределом среднего ускорения $\bar{a}$ за время от момента t до момента $t+\Delta$ t

при $\Delta t \to 0$, очевидно, является ускорение в момент времени t :

$$a = \lim_{\Delta t\to 0} \bar{a} = \lim_{\Delta t\to 0} \frac{\Delta\upsilon}{\Delta t}.$$

Согласно определению производной можно утверждать, что

$$\lim_{\Delta t\to 0} \frac{\Delta\upsilon}{\Delta t} = \upsilon'_t = (s'_t)'_t = s''_{tt}, т.е. \quad a = \upsilon' = s''_{tt} = f''(t).$$

Из последнего выражения следует, что ускорение в данный момент времени равно второй производной от пути по времени. В этом и заключается механический или физический смысл второй производной.

1.5 ПРАВИЛО НАХОЖДЕНИЯ МАКСИМУМА И МИНИМУМА ФУНКЦИИ

Рассуждения, которые здесь не проводятся, приводят к следующим признакам существования максимума и минимума функции.

Функция y =f(x) при x = a имеет максимум, если при этом значении аргумента первая производная равна нулю, а вторая производная отрицательна, т.е.

$f'(a) = 0, f''(a) < 0.$

Функция y = f(x) при x=c имеет минимум, если при этом значении аргумента первая производная равна нулю, а вторая производная положительна, т.е.

$f'(c) = 0, f''(c) > 0.$

При исследовании функции на экстремум необходимо выполнять следующие этапы:

1)найти первую производную y'x = f'(x) данной функции;

2)приравнять первую производную к нулю [f'(x) =0] и найти критические значения аргумента, т.е. те его значения, при которых данная функция может иметь максимум и минимум;

3)найти вторую производную $f''(x)$. Если при данном критическом значении аргумента вторая производная оказывается отрицательной, то при этом значении аргумента данная функция имеет максимум. Если при критическом значении аргумента вторая производная положительна, то при этом значении аргумента данная функция имеет минимум. Если же при данном значении аргумента вторая производная обращается в нуль или в бесконечность, то исследуется значение производной вокруг окрестности критической точки x = xo. Если при переходе слева направо через эту точку производная меняет знак с плюса на минус, то при x = x0 функция имеет максимум. Если же при переходе через точку x0 слева направо производная меняет знак с минуса на плюс, то функция имеет в этой точке минимум.

Таким образом, если

$\begin{cases} f'(x) > 0, x < x_0 \\ f'(x) < 0, x > x_0 \end{cases}$, то в точке x0 функция имеет максимум.

$\begin{cases} f'(x) < 0, x < x_0 \\ f'(x) > 0, x > x_0 \end{cases}$, то в точке x0 функция имеет минимум.

Точка кривой, отделяющая участок выпуклости от участка вогнутости, называется точкой перегиба.

Правило нахождения точки перегиба кривой, как показывает анализ, сводится к анализу второй производной в окрестности критической точки x = x0. Если при переходе аргумента через значение x = x 0 вторая производная меняет знак, т.е. если f"(x0 - h) > 0 и $f''(x_0 - h) > 0,$ или $f(x_0 - h) < 0$ и $f''(x_0 + h) > 0$, то при x = x0 график функции y = f(x) имеет точку перегиба.

Пример: исследовать на максимум и минимум функцию y = 1-x4.

Решение:

1)находим критические точки:

$y' = -4x^3$,

-4x3=0,

x=0

2)находим вторую производную и определяем знак второй производной при x = 0 :

$y'' = -12x^2$,

$(y'')_{x=0} = 0$

Следовательно, выяснить характер критической точки с помощью знака второй производной в данном случае нельзя.

3)исследуем характер изменения первой производной в окрестности критической точки:

$(y')_{x<a} > 0, (y')_{x>a} < 0.$

Следовательно, при x=0 функция имеет максимум, именно $(y)_{x=0} = 1$. График рассмотренной функции изображен на рис. 2.2

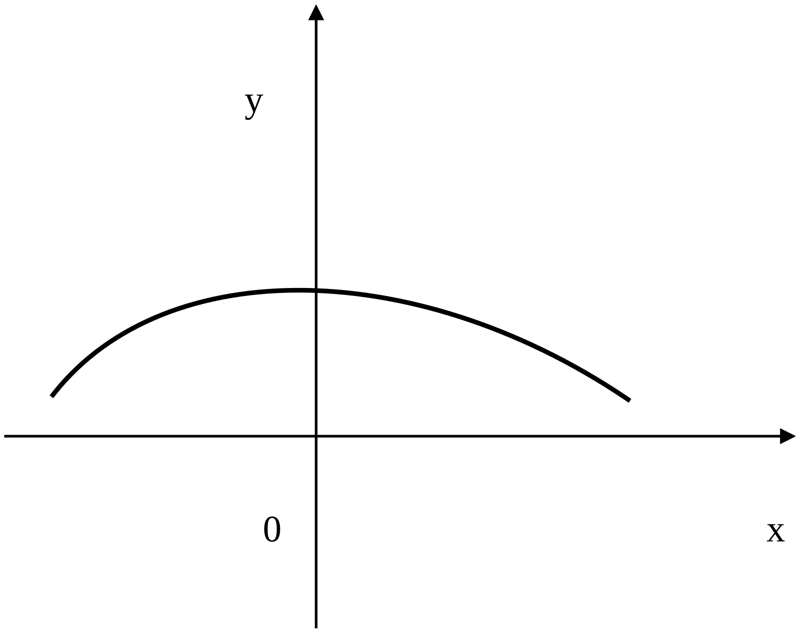


Рисунок 2.2

УПРАЖНЕНИЯ.

Найти производные указанных функций.

1. $y = (4x^3 - 2x^2 - 5x)(x^2 - 7x)$

2. $y = (9 - 2x)(2x^3 - 9x^2 + 1)$

3. $y = (\frac{2}{x} + 3x)(\sqrt{x} - 1)$

4. $y = (6 \cdot \sqrt[3]{x} - \frac{1}{x^2})(7x - 3)$

5. $y = (3x^2 - \frac{1}{x^3})(\sqrt[3]{x} + 0{,}1x)$

11. $y = \frac{x^2 + 2x}{3 - 4x}$

12. $y = \frac{1 + \sqrt{x}}{1 - \sqrt{x}}$

13. $y = \frac{\sqrt[3]{x} - 2}{\sqrt[3]{x} + 2}$

14. $s = \frac{\sqrt[3]{t^2} - t}{t + \sqrt[3]{t^2}}$

6. $s=(2\cdot\sqrt[4]{t^3}+t^3)(\frac{2}{t}-\sqrt{t})$

7. $y=\frac{x}{x+1}$

8. $y=\frac{x-1}{5x-2}$

9. $y=\frac{2x+3}{3x+7}$

10. $y=\frac{5x^2}{x-3}$

15. $y=\frac{x^2+7x+5}{x^2-3x}$

16. y=5x-x5

17. $y=(6x+\cos x)(\sqrt{x}-\sin x)$

18. y=x4e2xlnx

19. y=$\sqrt{\ln(tgx)}$

20. y=$\frac{\cos\sqrt{x}}{3}\ \frac{\ln x}{\sin x}$

Найти производные второго порядка от указанных функций.

1. $y=3x^4-5x^3+2x^2-x$

2. $y=(2x+5)^3$

3. $y=\frac{1}{x-1}$

4. $y=\cos^2 x$

5. $y=e^{-x^2}$

6. $y=5^{\sqrt{x}}$

7. $y=arctg3x$

8. $y=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$

9. $y=x\cdot\sin 2x$

10. $y=\ln tgx$

11. $y=e^x\cos x$

12. $y=\frac{1}{6}(e^{3x}+e^{-3x})$

Определить наибольшее и наименьшее значения следующих функций.

1. $y=x^5-5x^3-8$ на отрезке [0,2]

2. $y=\sqrt{9-x^2}$ на отрезке [-3,3]

3. $y=\arcsin x^2$ на отрезке [-$\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}$]

4. $y=x\ln x$ на отрезке [l,e]

5. $y = \dfrac{1}{1+x^2}$ в интервале (- ∞, +∞)

6. $y = 2x^2 - 8x + 1$ на отрезке [0,3]

7. $f(x) = 2x^3 - 12x^2 + 18x + 3$ на отрезке $[-1; 2]$

8. $f(x) = 3x^4 - 12x^2 + 5, \quad [-2; 1]$

2. ДИФФЕРЕНЦИАЛ ФУНКЦИИ

2.1 ДИФФЕРЕНЦИАЛ ФУНКЦИИ КАК ГЛАВНАЯ ЧАСТЬ ПРИРАЩЕНИЯ ФУНКЦИИ

Пусть нам дана некоторая функция $y = f(x)$. Производная $y'_x = f'(x)$ этой функции при данном значении x: есть предел отношения $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ при $\Delta x \to 0$, т.е.

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = y'_x .$$

Нам известно, что разность между переменной величиной (в данном случае такой переменной величиной является $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$) и ее пределом – величина бесконечно малая. Следовательно,

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} - y'_x = \alpha, \text{ или}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = y'_x + \alpha,$$

где α - бесконечно малая величина при $\Delta x \to 0$.

Из последнего равенства находим, $\Delta y = (y'_x + \alpha)\Delta x$, или

$$\Delta y = y'_x \Delta x + \alpha \Delta x \qquad (1)$$

Это равенство показывает, что приращение функции составляется из двух слагаемых: $y'_x \Delta x$ и $\alpha \Delta x$. Первое из этих слагаемых при любом x ,при котором $y'_x \neq 0$, - бесконечно малая величина одинакового порядка с Δx, так как

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{y'_x \Delta x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} y'_x = y'_x$$

Второе слагаемое – бесконечно малая величина высшего порядка малости, чем Δx , потому что

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\alpha \Delta x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} y'_x = y'_x$$

Это означает, что в равенстве (1) при $\Delta x \to 0$ второе слагаемое стремиться к нулю "гораздо быстрее", чем первое. Поэтому первое слагаемое принято называть главной частью приращения функции.

Главная часть $y'_x \Delta x$ *приращения функции y = f(x) иначе называется дифференциалом этой функции и обозначается символом dy (читается "дэ игрек"):*

$$dy = y'_x \Delta x$$

Следовательно, дифференциал функции равен произведению производной этой функции на приращение аргумента.

Если в формуле $dy = y'_x \Delta x$ принять *y = x,* получим

$dy = x'_x dx = x'_x \bullet \Delta x$, или

$$dx = \Delta x \qquad (3)$$

Это равенство показывает, *что дифференциал dx аргумента есть его приращение* Δx.

Заменив в формуле (2) Δx равным ему *dx*, получаем

$dy = y'_x dx$, или

$$dy = f'(x)dx \qquad (4)$$

Эта формула читается так: *дифференциал функции равен произведению производной этой функции на дифференциал аргумента.*

Следует знать и помнить, что **дифференциал аргумента, как и его приращение, не зависит от x.**

Разделив обе части равенства (4) на *dx,* получаем

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y'_x dx}{dx}, \text{ или}$$

$$y'_x = \frac{dy}{dx} \qquad (5)$$

Из формулы (4) видно, что *производная* (y'_x) *функции y = f(x) есть отношение дифференциала dy этой функции к дифференциалу dx аргумента x.* Это отношение читается так: «дэ игрек по дэ икс».

Пользуясь формулой (4) и основными формулами для нахождения производной, можно легко вывести формулу для нахождения дифференциала любой функции.

Пусть нам дано $y = u\upsilon$, где $u = f(x)$, $\upsilon = \varphi(x)$

$dy = d(u\upsilon) = (u\upsilon)'_x dx = (u\upsilon'_x + \upsilon u'_x)dx = u\upsilon'_x dx + \upsilon u' dx = u(\upsilon'_x dx) + \upsilon(u'_x dx)$,

а так как $\upsilon' dx = d\upsilon, u'_x x = du$, то

$$d(u\upsilon) = \upsilon du + ud\upsilon \qquad (6)$$

Рассмотрим еще функцию $y' = \frac{u}{\upsilon}$, где $u = f(x), \upsilon = \varphi(x)$.

Получим

$$d(\frac{u}{\upsilon}) = (\frac{u}{\upsilon})'_x dx = \frac{\upsilon u'_x - u\upsilon'_x}{\upsilon^2} dx = \frac{\upsilon u'_x dx - u\upsilon'_x dx}{\upsilon^2} = \frac{\upsilon(u'_x dx) - u(\upsilon'_x dx)}{\upsilon^2},$$

или

$$d(\frac{u}{\upsilon}) = \frac{\upsilon du - ud\upsilon}{\upsilon^2} \qquad (7)$$

Пример 1: найти дифференциал функции $y = \sqrt{1+\sin 3x}$.

Решение: по формуле (4) находим

$$dy = y'_x dx = (\sqrt{1+\sin 3x})'_x dx = \frac{(1+\sin 3x)'_x}{2\sqrt{1+\sin 3x}} dx = \frac{\cos 3x \cdot (3x)'_x}{2\sqrt{1+\sin 3x}} dx = \frac{3\cos 3x dx}{2\sqrt{1+\sin 3x}}$$

Пример 2: найти дифференциал функции $y' = \ln(\sin kx + \cos kx)$.

Решение:

$$dy = \left[\ln(\sin kx + \cos kx)\right]'_x = \frac{(\sin kx + \cos kx)'_x}{\sin kx + \cos kx} dx = \frac{(\sin kx)'_x + (\cos kx)'_x}{\sin kx + \cos kx} dx =$$

$$= \frac{\cos kx \cdot (kx)'_x - \sin kx \cdot (kx)'_x}{\sin kx + \cos kx} dx = \frac{k\cos kx(1 - \frac{\sin kx}{\cos kx})}{\cos kx(\frac{\sin kx}{\cos kx + 1)}} dx = \frac{k(1 - tgkx)}{tgkx + 1} dx$$

2.2 ПРИЛОЖЕНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛА ФУНКЦИИ К ПРИБЛИЖЕННЫМ ВЫЧИСЛЕНИЯМ

Выше дифференциал функции был определен как главная часть приращения функции.

Докажем, что при $\Delta x \to 0$ и $y' \neq 0$ приращение Δy функции $y = f(x)$ и ее дифференциал dy - эквивалентные бесконечно малые величины. Нам известно, что

$$\Delta y = y'_x \Delta x + \alpha \Delta x;$$

$$dy = y'_x dx \qquad (9)$$

где α - бесконечно малая при $\Delta x \to 0$, т.е. $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \alpha = 0$

Найдем предел отношения $\frac{\Delta y}{dy}$ при $\Delta x \to 0$:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{dy} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{y'_x \Delta x + \alpha \Delta x}{y'_x \Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} (\frac{y'_x \Delta x}{y'_x \Delta x} + \frac{\alpha \Delta x}{y'_x \Delta x}) = \lim_{\Delta x \to 0} (1 + \frac{\alpha}{y'_x}) = 1 + \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\alpha}{y'_x} = 1 + \frac{0}{y'_x} = 1$$

Получаем

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{dy}=1. \qquad (10)$$

Это значит что Δy и dy – эквивалентные бесконечно малые величины.

Вследствие этого при значениях Δx, близких к нулю, можно принять

$$\Delta y \approx dy = y'_x \Delta x.$$

Вычисление приращения функции обычно приводит к громоздким вычислениям. Формула (10) при значениях Δx, близких к нулю, дает возможность находить приближенное значение приращения Δy функции $y = f(x)$ с незначительным отклонением от его истинного значения, при этом вычислительная работа значительно упрощается.

Пример 1: вычислить приращение функции $y = 2x^2-3x + 3$ при переходе аргумента от значения $x_1=1$ к значению $x_2=1{,}001$: 1) приближенно; 2)точно; 3)найти разность между его точным и приближенным значением.

Решение: в данном случае принимаем $x=1$, $dx=\Delta x=0{,}001$; найдем приближенное значение

$$\Delta y \approx dy = (2x^2-3x+3)'_x\, dx = (4x-3)dx.$$

Заменив x и dx их значениями, получим

$$\Delta y \approx (4\cdot 1-3)\cdot 0{,}001 = 0{,}001. \qquad (11)$$

Для точного значения приращения функции получим:

$$\begin{aligned}&\Delta y=(y+\Delta y)-y=2(1+\Delta x)^2-3(1+\Delta x)+3-(2\cdot 1^2-3\cdot 1+3)=2+4\Delta x+2(\Delta x)^2-3-3\Delta x+3-\\&-2+3-3=(4-3+2\Delta x)\Delta x=(1+2\cdot 0{,}001)\cdot 0{,}001=0{,}001002\end{aligned} \qquad (12)$$

Сравнивая (11) и (12), видим, что точное значение отличается от приближенного значения лишь в шестом и десятичном знаке:

0,001002-0,001=0,000002

Пример 2: найти приближенно приращение функции $y=\sqrt[4]{3x+1}$ при переходе аргумента от значения $x_1=5$ к значению $x_2=5{,}1$.

Решение: принимаем $x=5, dx=\Delta x=0{,}1$:

$$\Delta y \approx (\sqrt[4]{3x+1})'_x\, dx = \left[(3x+1)^{\frac{1}{4}}\right]'_x dx = \frac{1}{4}(3x+1)^{-\frac{3}{4}}(3x+1)'_x\, dx = \frac{3}{4\sqrt[4]{(3x+1)^3}}dx$$

Подставив в полученный результат вместо x и dx их значения, находим

$$\Delta y \approx \frac{3}{4\sqrt[4]{(3\cdot 5+1)^3}}\cdot 0{,}1 = \frac{3\cdot 0{,}1}{4\sqrt[4]{(2^4)^3}} = \frac{3}{32}\cdot 0{,}1 = 0{,}09375\cdot 0{,}1 \approx 0{,}009$$

Пример 3: найти приращение Δy и дифференциал dy функции $y = x^2 - x + 1$ при $x = 3, \Delta x = 0{,}01$. Каковы абсолютная и относительная погрешности, которые допускаются при замене приращения функции ее дифференциалом?

Решение: имеем

$$\Delta y = y(x + \Delta x) - y(x) = y(3 + 0{,}001) - y(3) = \left[(3 + 0{,}01)^2 - (3 + 0{,}01) + 1\right] - (3^3 - 3 + 1) = 0{,}0501$$

Дифференциал функции найдем по формуле:

$$dy = y'(x) \cdot \Delta x = y'(3) \cdot 0{,}01 = (2x - 1)_{x=3} \cdot 0{,}01 = (2 \cdot 3 - 1) \cdot 0{,}01 = 0{,}05$$

Абсолютная погрешность

$$|dy - \Delta y| = |0{,}05 - 0{,}0501| = 0{,}0001.$$

Относительная погрешность

$$\left|\frac{dy - \Delta y}{\Delta y}\right| = \frac{0{,}0001}{0{,}0501} \approx 0{,}002 = 0{,}2\%$$

2.3 ЧАСТНЫЕ ПРОИЗВОДНЫЕ. ПОЛНЫЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛ ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

Рассмотрим функцию двух переменных $z = f(x, y)$. Зафиксируем один из ее аргументов, например y, положив $y = y_0$. Тогда функция $f(x, y_0)$ будет функцией одной переменной x. Пусть она имеет производную в точке x_0:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x}$$

Эта производная называется частной производной (или частной производной первого порядка) функции $z=f(x,y)$ по x в точке $P_0(x_0, y_0)$ и обозначается символом $f'_x(x_0, y_0)$.

Разность $f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)$ называется *частным приращением по x функции*

$z=f(x,y)$ в точке $P_0(x_0,y_0)$ и обозначается символом $\Delta_x z$:

$$\Delta_x z = f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0).$$

Учитывая эти обозначения, можно записать :

$$f'_x(x_0, y_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_x z}{\Delta z}$$

Аналогично определяются и обозначаются частное приращение функции *z=f(x,y)* по *y* и частная производная по *y* в точке $P_0(x_0,y_0)$:

$$f'_y(x_0, y_0) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta_y z}{\Delta y}$$

Таким образом, *частная производная функции двух переменных по одному из ее аргументов равна пределу отношения частного приращения функции к вызвавшему его приращению аргумента, когда приращение аргумента стремиться к нулю.*

Значение частной производной зависит от точки *P(x, y)* , в которой она вычисляется. Поэтому частная производная функции двух переменных *z = f(x, y),* вообще говоря, есть функция точки *P(x, y)* , т.е. тоже является функцией двух переменных *x* и *y* . Частные производные, рассматриваемые как функции двух переменных, обозначаются следующим образом:

$$f'_x(x, y);\ f'_y(x, y); z'_x; z'_y; \frac{\partial z}{\partial x}; \frac{\partial z}{\partial y}$$

Частные приращения и частные производные функции ***n*** переменных при ***n*** > *2* определяются и обозначаются аналогично. Например, для функции трех переменных *u = f(x,y, z)*частное приращение по *x* в точке $P_0(x_0, y_0)$ получается, если *x* получит приращение Δx, а остальные аргументы останутся неизменными:

$$u'_x(x_0, y_0, z_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_x u}{\Delta x}$$

Таким образом, частная производная функции нескольких переменных определяется как производная функции одной из этих переменных. Вследствие этого все правила и формулы дифференцирования, выведенные для производных функций одной переменной, сохраняются для частных производных функций нескольких переменных. Следует лишь помнить, что во всех этих правилах и формулах при нахождении частной производной по какому-либо аргументу все остальные аргументы считаются постоянными.

Пример 1: найти частные производные функции

$$z = f(x, y) = x^2 y - 3y^2 + 5x$$

Решение: частную производную $f'_x(x,y)$ находим как производную функции $f=(x,y)$ по аргументу x в предположении, что $y=const$. Поэтому

$$f'_x(x,y)=(x^2y-3y^2+5x)'_x=2xy-0+5=2xy+5$$

Аналогично

$$f'_x(x,y)=(x^2y-3y^2+5x)'_y=x^2-6y+0=x^2-6y$$

Пример 2: найти смешанные частные производные второго порядка функции $z=x^2y^3$

Решение: находим частные производные первого порядка

$$\frac{\partial z}{\partial x}=2xy^3;\frac{\partial z}{\partial y}=3x^2y^2$$

Затем находим смешанные частные производные второго порядка

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial(\frac{\partial z}{\partial x})}{\partial y}=(2xy^3)'_y=6xy^2;\quad \frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=\frac{\partial(\frac{\partial z}{\partial y})}{\partial x}+(3x^2y)'_x=6xy^2$$

Мы видим, что смешанные частные производные $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$ и $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$ отличающиеся между собой лишь порядком дифференцирования, т.е. последовательностью, в которой производится дифференцирование по различным переменным, оказались тождественно равными.

Частные производные функции нескольких переменных являются функциями тех же переменных. Эти функции, в свою очередь, могут иметь частные производные, которые мы будем называть вторыми частными производными (или частными производными второго порядка) исходной функции.

Так, например, функция $z = f(x,y)$ двух переменных имеет четыре частные производные второго порядка, которые определяются и обозначаются следующим образом:

$$\frac{\partial(\frac{\partial z}{\partial x})}{\partial x}=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=f''_{x^2}(x,y);\qquad \frac{\partial(\frac{\partial z}{\partial x})}{\partial y}=\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=f''_{xy}(x,y)$$

$$\frac{\partial(\frac{\partial z}{\partial y})}{\partial x} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = f''_{yx}(x,y); \qquad \frac{\partial(\frac{\partial z}{\partial y})}{\partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = f''_{y^2}(x,y)$$

Функция $u=f(x,y,z)$ трех переменных имеет девять частных производных второго порядка:

$$\frac{\partial(\frac{\partial z}{\partial x})}{\partial x} = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = f''_{x^2}(x,y); \frac{\partial(\frac{\partial z}{\partial x})}{\partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = f''_{xy}(x,y)$$

$$\frac{\partial(\frac{\partial u}{\partial x})}{\partial z} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = f''_{xz}(x,y,z)$$ и т.д.

Подробный анализ, который здесь не приводится, показывает, что, например, для дифференцируемой функции трех переменных $u=f(x,y,z)$ полное приращение Δu выражается формулой

$$\Delta u = \frac{\partial u}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial u}{\partial y}\Delta y + \frac{\partial u}{\partial z}\Delta z + \omega(\Delta x, \Delta y . \Delta z), \qquad (13)$$

а ее полный дифференциал имеет вид

$$du = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy + \frac{\partial u}{\partial z}dz \qquad (14)$$

Пример 1: найти полный дифференциал функции $z = xy^2$ в произвольной точке.

Решение: полный дифференциал функции $dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy$ существует при условии непрерывности частных производных $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$. Находим

$$dz = y^2 dx + 2xydy$$

Пример 2: найти значение полного дифференциала функции $u = \frac{x+y}{z}$ при x=1; y=-2; z=-1; Δx =0,1; Δy =0,2; Δz =0,5.

Решение: находим частные производные

$$\frac{\partial u}{\partial x}=(\frac{x+y}{z})'_x=\frac{1}{z};\frac{\partial u}{\partial y}=(\frac{x+y}{z})'_y=\frac{1}{z};\frac{\partial u}{\partial z}=(\frac{x+y}{z})'_z=-\frac{x+y}{z^2}$$

а затем полный дифференциал

$$du=\frac{1}{z}\Delta x+\frac{1}{z}\Delta y-\frac{x+y}{z^2}\Delta z.$$

Теперь находим значение этого полного дифференциала:

$$du=\frac{1}{-1}\cdot 0{,}1+\frac{1}{-1}\cdot 0{,}2-\frac{1-2}{(-1)^2}\cdot 0{,}5=0{,}2.$$

Полным дифференциалом функции нескольких перченых можно пользоваться для приближенных вычислений. Пусть дана дифференцируемая функция $z=f(x,y)$. Ее полное приращение выражается формулой

$$\Delta z=f'_x(x,y)\Delta x+f'_y(x,y)\Delta y+\omega(\Delta x,\Delta y)$$

Здесь $\omega(\Delta x,\Delta y)$ стремится к нулю быстрее, чем $\rho=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}$. Поэтому при малых ρ, т.е. при малых $|\Delta x|$ и $|\Delta y|$, слагаемым $\omega(\Delta x,\Delta y)$ можно пренебречь и писать:

$$\Delta z\approx f'_x(x,y)\Delta x+f'_y(x,y)\Delta y, \qquad (15)$$

т.е. приращение функции приближенно можно заменить ее полным дифференциалом.

Так как $z=f(x,y),$ то

$$\Delta z=f(x+\Delta x,y+\Delta y)-f(x,y)\approx f'_x(x,y)\Delta x+f'_y(x,y)\Delta y,$$

откуда

$$f(x+\Delta x,y+\Delta y)\approx f(x,y)+f'_x(x,y)\Delta x+f'_y(x,y)\Delta y \qquad (16)$$

Формулой (16) можно пользоваться для приближенных вычислений значений функции двух переменных в точке $P(x+\Delta x,y+\Delta y)$, близкой к точке $P(x,y)$, если известны значения функции и ее частных производных в самой точке $P(x,y)$.

Аналогичные формулы можно вывести для функции *n* переменных при *n*>2. Например, при *n*=3 получим

$$f(x+\Delta x,y+\Delta y,z+\Delta z)\approx f(x,y,z)+f'_x(x,y,z)\Delta x+f'_y(x,y,z)\Delta y+f'_z(x,y,z)\Delta z \qquad (17)$$

Пример 3: вычислить приближенно с помощью полного дифференциала $arctg(\frac{1{,}97}{1{,}02}-1).$

Решение: рассмотрим функцию $f(x,y)=arctg(\frac{x}{y}-1).$ Применяя формулу (16) к этой функции получим

$$arctg(\frac{x+\Delta x}{y+\Delta y}-1)\approx arctg(\frac{x}{y}-1)+\left[arctg(\frac{x}{y}-1)\right]'_x\Delta x+\left[arctg(\frac{x}{y}-1)\right]'_y\Delta y,$$

или

$$arctg(\frac{x+\Delta x}{y+\Delta y}-1)\approx arctg(\frac{x}{y}-1)+\frac{y}{y^2+(x-y)^2}\Delta x+\frac{x}{y^2+(x-y)^2}\Delta y.$$

Положим теперь x=2; y=1; тогда $\Delta x=$-0,03; $\Delta y=0{,}02$.

Следовательно,

$$arctg(\frac{2-0{,}03}{1+0{,}02}-1)\approx arctg(\frac{2}{1}-1)+\frac{1}{1^2+(2-1)^2}(-0{,}03)-\frac{2}{1^2+(2-1)^2}\cdot 0{,}02,$$ или

$$arctg(\frac{1{,}97}{1{,}02}-1)\approx arctg1-\frac{1}{2}\cdot 0{,}03-0{,}02=\frac{\pi}{4}-0{,}015-0{,}02\approx 0{,}75$$

Пример 4: центральный угол кругового сектора, равный 80^0 , желают уменьшить на $15'$. Насколько надо удлинить радиус $r=30см$, для того, чтобы компенсировать изменение площади?

Решение: площадь *S* кругового сектора выражается формулой

$$S=\frac{\pi r^2\varphi}{360},$$

где *r*- радиус круга, $\varphi-$ центральный угол в градусах.

Если изменение (приращение) площади ΔS заменить (приближенно) полным дифференциалом, то

$$\Delta S\approx\frac{\partial S}{\partial r}\Delta r+\frac{\partial S}{\partial\varphi}\Delta\varphi$$

По условию, при уменьшении центрального угла и увеличении радиуса ΔS должно равняться нулю. Поэтому полагаем

$$\frac{\partial S}{\partial r}\Delta r+\frac{\partial S}{\partial\varphi}\Delta\varphi=0,$$

откуда

$$\Delta r=-\frac{\frac{\partial S}{\partial\varphi}\Delta\varphi}{\frac{\partial S}{\partial r}}=-\frac{(\frac{\pi r^2\varphi}{360})'_\varphi\cdot\Delta\varphi}{(\frac{\pi r^2\varphi}{360})'_r}=-\frac{\frac{\pi r^2}{360}\cdot\Delta\varphi}{\frac{\pi r\varphi}{180}}=-\frac{r\cdot\Delta\varphi}{2\varphi}.$$

Положим r= 30см, φ =800, $\Delta\varphi$ =-($\frac{1}{4}$)0, получим

$$\Delta r=-\frac{30\cdot(-\frac{1}{4})}{2\cdot 80}см=\frac{3}{64}см\approx 0{,}5мм$$

УПРАЖНЕНИЯ

Найти дифференциалы функций для произвольных значений аргумента и его приращения:

1. $y = \frac{1}{x^2}$
2. $y = \frac{x+2}{x-1}$
3. $y = arctg\,2x$
4. $y = \ln(1+x^2)$
5. $y = \sin^2 x$
6. $y = 5^{x^2} \arccos\frac{1}{x}$
7. $y = \frac{tg\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$

8. Показать, что дифференциал dy и приращение Δy линейной функции $y = ax + b$ при любом значении аргумента совпадают.

9. Найти приращение и дифференциал функции $y = \sqrt{x}$ при x=9; Δx =0,2. Вычислить абсолютную и относительную погрешности, которые получаются при замене приращения функции ее дифференциалом.

10. Найти приращение и дифференциал функции $y = \frac{1}{1-x}$ при x=2; Δx =0,01. Вычислить абсолютную и относительную погрешности, получающиеся при замене приращения функции ее дифференциалом.

11. Найти полное приращение функций:

а) $u = \sin x \cos\alpha$

б) $v = \cos x \sin\alpha$

в) $u = x^2 + \sin y$

г) $v = \ln(x+y)$

12. Найти полный дифференциал функций:

а) $z = x^2 + xy^2 + \sin y$

б) $z = \ln(xy)$

в) $z = e^{x^2+y^2}$

3. НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕРВАЛ
3.1 ПОНЯТИЕ О НЕОПРЕДЕЛЕННОМ ИНТЕГРАЛЕ

Из элементарной математики известно, что всякому прямому действию соответствует обратное действие. Так, например, возведению в степень соответствует обратное действие - извлечение корня, логарифмированию - потенцирование, нахождению тригонометрической функции по углу - нахождение угла по данной тригонометрической функции.

В анализе бесконечно малых чисел мы также встречаемся с двумя взаимно обратными действиями. С одним из них, называемым дифференцированием и имеющим задачей нахождение производной или дифференциала данной функции, мы уже знакомы. В данном разделе изучается действие, обратное дифференцированию, называемое интегрированием. Цель этого действия -нахождение первообразной функции по ее производной или по ее дифференциалу.

Заметим, что всякое обратное действие усваивается тем легче, чем лучше усвоено прямое действие. Поэтому, приступать к проработке данного материала следует, основательно овладев техникой дифференцирования.

Дифференцированием, как нам известно, по данной функции $y = F(x)$ находится ее производная $F'(x) = f(x)$ или дифференциал $dy = f(dx)$. Так, например, если $F(x) = x^4$, то $F'(x) = f(x) = 4x^3$.

Следовательно, $dF(x) = f(x)dx = 4x^3dx$.

Действие, обратное дифференцированию, т.е. нахождение функции $F(x)$ по данной ее производной $F'(x) = f(x)$, или, что то же, по данному дифференциалу $f(x)dx$, называется интегрированием. При этом искомая функция $F(x)$ называется **первообразной,** или **интегралом.**

Таким образом, функция $F(x)$, имеющая данную функцию $f(x)$ своей производной, или $f(x)dx$ - своим дифференциалом, называется первообразной функцией для данной функции $f(x)$.

В примере, приведенном выше, для функции $f(x) = 4x^3$ первообразной функцией, очевидно, является функция $F(x)=x^4$.

Из дифференциального исчисления известно, что функции, отличающиеся друг от друга постоянным слагаемым, имеют одну и ту же производную и, следовательно, один и тот же дифференциал. Возьмем, например, функции:

$F(x) = x^4$; $F(x) = x^4 +11$; $F(x) = x^4 -11$; т.е.функции вида $F(x)= = x \ + C$, где С - любое число.

Все эти функции имеют функцию $f(x) = 4x^3$ своей производной и $f(x)dx = 4x^3dx$ - своим дифференциалом. Отсюда следует, что функции

$$f(x) = 4x^3 \tag{1}$$

или дифференциалу

$$f(x)dx = 4x^3dx \tag{2}$$

соответствует бесчисленное множество первообразных функций вида

$$x^4 + C \tag{3}$$

отличающиеся друг от друга постоянными слагаемыми.

Двучлен (3) называется неопределенным интегралом от функции (1) или от дифференциала (2) и обозначается символом $\int 4x^3 dx = x^4 + C$ - **неопределенный интеграл.**

Итак, если известно, что производная некоторой функции *F(x)* равняется функции *f(x)*, т.е. *F'(x) = f(x)*, то

$$\int f(x)dx = F(x) + C \tag{4}$$

где C - произвольная постоянная.

Следовательно, символу $\int f(x)dx$, называемому **неопределенным интегралом**, соответствует бесконечное множество функций - «семейство функций», отличающихся друг от друга постоянными слагаемыми. Вследствие многозначности (неопределенности) интеграл называется неопределенным и читается так: «неопределенный интеграл эф от икс по дэ икс», при этом *f(x)* называется подынтегральной функцией, *f(x)dx* - подынтегральным выражением, знак $\int$ - знаком интеграла, а x- переменной интегрирования.

3.2 ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ СМЫСЛ НЕОПРЕДЕЛЕННОГО ИНТЕГРАЛА

Из дифференциального исчисления известно, что наклон *k* кривой *y = f(x)* (угловой коэффициент касательной) в точке с абсциссой *x* равен производной, т.е.

$$k = y' = F'(x) = f(x)$$

Пусть теперь нам предлагается обратная задача: зная наклон кривой в любой ее точке как функцию абсциссы этой точки, т.е. зная, что *k = f(x)* , найти уравнение кривой.

Так как $k = y'_x = \frac{dy}{dx}$, то $\frac{dy}{dx} = f(x)$, $dy = f(x)dx$, откуда интегрирование найдем

$$y = \int f(x)dx.$$

Вычислив этот неопределенный интеграл получим уравнение

$$y = F(x) + C, \tag{5}$$

содержащее произвольную постоянную C. Очевидно, уравнению (5) на плоскости будет соответствовать бесконечное множество кривых (семейство кривых), уравнения которых будут отличаться друг от друга только постоянными слагаемыми.

Пусть нам дано $k = y'_x = 2x.$ Тогда

$$\frac{dy}{dx} = 2x, \; dy = 2xdx, \; y = 2\int xdx = x^2 + C.$$

Следовательно,

$$y = x^2 + C.$$

Придавая произвольной постоянной С последовательно значения 0,1,2,…,-1,-2,…, получим:

$$y_1 = x^2,\ y_2 = x^2 + 1,\ y_3 = x^2 + 2,\ y_4 = x^2 - 1,$$

$$y_5 = x^2 - 2,...$$

Производные этих функций равны: $y'_x = 2x$, вследствие чего промежутки убывания ($-\infty < x < 0$) и возрастания ($0 < x < \infty$) будут одинаковы. Функции имеют минимум при $x = 0$, наклон их графиков в точках с одной и той же абсциссой (рис 4.1) относительно оси Ox один и тот же, так как

$$k = tg\alpha = (x^2 + C)' = 2x.$$

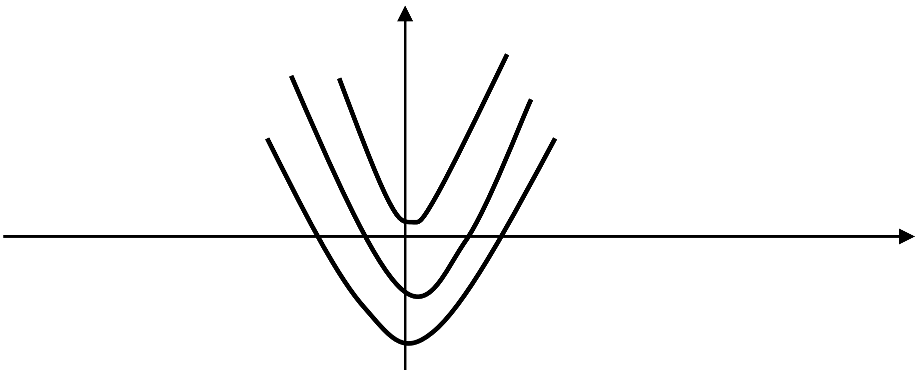


Рисунок 4.1

Построив график одной функции (например, $y = x^2$), графики остальных можно получить перемещением его параллельно оси *Ox* (рис. 4.1). Очевидно, что неопределенному интегралу от функции *f(x) = 2x* на плоскости соответствует семейство одинаковых парабол, симметричных относительно оси *Oy* и отличающихся друг от друга лишь смещением вдоль оси *Oy*.

Таким образом, геометрически неопределенный интеграл представляется семейством интегральных кривых.

Пример 1: Найти $\int 5x^4 dx.$

Решение: предлагается найти такую функцию, производная которой равна 5x4. Из дифференциального исчисления известно, что 5x4 =(x5)'x следовательно, $\int 5x^4 dx = x^5 + C.$

Пример 2: найти $\int \frac{dx}{\cos^2 x}.$

Решение: в данном случае ищется функция, производная которой равна $\frac{1}{\cos^2 x}$. Из дифференциального исчисления известно, что

$$\frac{1}{\cos^2 x} = (tgx)'_x \text{, следовательно, } \int \frac{dx}{\cos^2 x} = tgx + C.$$

3.3 ОСНОВНЫЕ СВОЙСТВА НЕОПРЕДЕЛЕННОГО ИНТЕГРАЛА.

1)Производная неопределенного интеграла равно подынтегральной функции, т.е. $\left[\int f(x)dx\right]'_x = f(x)$. Это свойство непосредственно вытекает из определения неопределенного интеграла и доказательства не требует. Так, если *f(x) = 5x⁴*, то

$$\left[\int 5x^4 dx\right]'_x = (x^5 + C)'_x = 5x^4, \text{ т.е. } \left[\int f(x)dx\right]'_x = f(x).$$

2)Дифференциал неопределенного интеграла равен подынтегральному выражению, т.е.

$$d\int f(x)dx = f(x)dx.$$

Это свойство вытекает из определения неопределенного интеграла. Для пояснения рассмотрим следующий пример:

Пусть $f(x)dx = \dfrac{dx}{\cos^2 x}$, получим

$$d\int \frac{dx}{\cos^2 x} = d(tgx + C) = (tgx + C)'_x dx = \frac{dx}{\cos^2 x},$$

или

$$d\int f(x)dx = f(x)dx.$$

3) Неопределенный интеграл от дифференциала функции равен этой функции плюс произвольная постоянная , т.е.

$$\int dF(x) = F(x) + C.$$

Например,

$$\int d(x^4) = \int 4x^3 dx = x^4 + C.$$

4) Постоянный множитель подынтегрального выражения можно вынести за знак интеграла, т.е. если α - величина постоянная, то

$$\int af(x)dx = a\int f(x)dx,$$

так как

$$\left[a\int f(x)dx\right]'_x = a\left[\int f(x)dx\right]'_x = af(x) \text{ и } \left[\int af(x)dx\right]'_x = af(x).$$

5) Интеграл от алгебраической суммы функций равен алгебраической сумме интегралов от этих функций, т.е. сумме левой и правой частей.

$$\int [f(x) - \varphi(x) + F(x)]dx = \int f(x)dx - \int \varphi(x)dx + \int F(x)dx.$$

Справедливость этой формулы легко обнаружить, сравнив производные левой и правой частей. По первому свойству неопределенного интеграла, имеем

$$\left\{\int\left[f(x)-\varphi(x)+F(x)dx\right]\right\}'_x = f(x)-\varphi(x)+F(x).$$

Применив к правой части правило дифференцирования алгебраической суммы функций, получаем

$$\left[\int f(x)dx-\int\varphi(x)dx+\int F(x)dx\right]'_x=\left[\int f(x)dx\right]'_x-\left[\int\varphi(x)dx\right]'_x+\left[\int F(x)dx\right]'_x= f(x)-\varphi(x)+F(x)$$

Следовательно,

$$\int\left[f(x)-\varphi(x)+F(x)\right]dx=\int f(x)dx-\int\varphi(x)dx+\int F(x)dx.$$

3.4 НЕПОСРЕДСТВЕННОЕ ИНТЕГРИРОВАНИЕ.

Из определения неопределенного интеграла следует

$$\int F'(x)dx = F(x)+C \qquad (6)$$

Пользуясь этой формулой можно найти интегралы простейших функций и составить таблицу основных формул интегрирования.

Предположим $F'(x)=(\frac{x^{n+1}}{n+1})'_x.$

Подставив в формулу (6) вместо $F'(x)$ его значение, найдем

$$\int\left(\frac{x^{n+1}}{n+1}\right)'_x dx=\frac{x^{n+1}}{n+1}+C,$$

а так как

$$\left(\frac{x^{n+1}}{n+1}\right)'_x=\frac{(n+1)x^{n+1-1}}{n+1}=x^n,$$

то

$$\int x^n dx=\frac{x^{n+1}}{n+1}+C.$$

Эта формула справедлива при любом постоянном n, не равном -1.

Таким же путем были получены основные формулы интегрирования, приведенные ниже.

ТАБЛИЦА ИНТЕГРАЛОВ

1) $\int dx = x + C,$

2) $\int x^n dx=\frac{x^{n+1}}{n+1}+C,$ при $n\neq -1$

3) $\int\frac{dx}{x}=\ln|x|+C, x>0,$

4) $\int e^x dx = e^x + C,$

8) $\int\frac{dx}{\cos^2 x}=\int\sec^2 xdx = tgx + C,$

9) $\int\frac{dx}{\sin^2 x}=\int\cos ec^2 x = -ctgx + C,$

10) $\int tgxdx = -\ln\cos x + C,$

11) $\int ctgxdx = \ln\sin x + C,$

5) $\int a^x dx = \dfrac{a^x}{\ln a} + C,$

6) $\int \sin x dx = -\cos x + C,$

7) $\int \cos x dx = \sin x + C$,

12) $\int \dfrac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = \arcsin x + C,$

13) $\int \dfrac{dx}{1+x^2} = arctgx + C.$

В справедливости данных формул можно убедиться дифференцированием: производная правой части каждой из них должна равняться подынтегральной функции левой части.

Нахождение интегралов, основанное на применении приведенных формул, называется **способом непосредственного интегрирования.**

Чтобы из множества первообразных функций выделить определенную функцию, необходимо иметь дополнительное условие, дающее возможность определить значение произвольной постоянной С.

Пример: найти функцию, производная которой $4x^3 - 2x + 3$, зная, что при x: = 1 эта функция принимает значение, равное 4.

Решение: обозначив искомую функцию через y получим

$$y'_x = 4x^3 - 2x + 3, \text{ или } \frac{dy}{dx} = 4x^3 - 2x + 3.$$

Отсюда

$$dy = (4x^3 - 2x + 3)dx, \int dy = \int (4x^3 - 2x + 3)dx,$$

$$y + C_1 = x^4 - x^2 + 3x + C_2, \text{ или } y = x^4 - x^2 + 3x + C.$$

Итак,

$$y = x^4 - x^2 + 3x + C \text{ -общее решение} \qquad (7)$$

Нам предложено найти ту из первообразных функций, которая при $x = 1$ принимает значение, равное 4. Эти данные ($x = 1$, $y = 4$) принято называть начальными значениями аргумента x и функции y или начальными условиями задачи.

Подставив в уравнение (7) вместо x и y их данные значения, находим:

$$4 = 1^4 - 1^2 + 3 \cdot 1 + C, \;\; C = 1.$$

Заменяя в равенстве (7) произвольную постоянную C ее значением, получаем искомую функцию:

$$y = x^4 - x^2 + 3x + 1 \text{- частное решение.}$$

3.5 ОСНОВНЫЕ МЕТОДЫ ИНТЕГРИРОВАНИЯ.

Укажем теперь несколько приемов, которые во многих случаях позволяют сводить заданные интегралы к табличным. Такими примерами являются: интегрирование методом разложения, интегрирование методом замены переменной и интегрирование по частям.

Интегрирование методом разложения с использованием элементарных математических операций.

Этот метод основан на **разложении подынтегральной функции** на сумму функций, от каждой из которых первообразную можно найти с помощью прямого интегрирования.

Приведем простейшие примеры.

Пример 1: найти $\int \frac{x^3+4x+2}{2x}dx.$

Решение: так как $\frac{x^3+4x+2}{2x}=\frac{1}{2}x^2+2+\frac{1}{x},$ то

$$\int \frac{x^3+4x+2}{2x}dx=\int\left(\frac{1}{2}x^2+2+\frac{1}{x}\right)dx=\frac{1}{2}\int x^2dx+2\int dx+\int\frac{dx}{x}=\frac{x^3}{6}+2x+\ln|x|+C.$$

Проверка:

$$d\left(\frac{x^3}{6}+2x+\ln|x|+C\right)=\left(\frac{x^2}{2}+2+\frac{1}{x}\right)dx=\frac{x^3+4x+2}{2x}dx.$$

Пример 2: найти $\int\frac{dx}{\cos^2 x\sin^2 x}.$

Решение: имеем

$$\int\frac{dx}{\cos^2 x\sin^2 x}=\int\frac{\cos^2 x+\sin^2 x}{\cos^2 x\sin^2 x}dx=\int\left(\frac{1}{\cos^2 x}+\frac{1}{\sin^2 x}\right)dx=\int\frac{dx}{\cos^2 x}+\int\frac{dx}{\sin^2 x}=tgx-ctgx+C$$

Удачно разложив подынтегральное выражение, мы свели интеграл к табличным интегралам.

Интегрирование методом замены переменной.

Во многих случаях удается введением вместо переменной интегрирования x новой переменной z свести данный интеграл $\int f(x)dx$ к новому интегралу, который содержится в таблице основных интегралов. Этот метод интегрирования получил название **метода замены переменной** или **метода интегрирования подстановкой.**

Введем вместо x новую переменную z связанную с x соотношением $x=\varphi(z)$, где $\varphi(z)$- непрерывная монотонная функция имеющая непрерывную производную $\varphi'(z)$. Покажем, что имеет место равенство

$$\int f(x)dx=\int f[\varphi(z)]\varphi'(z)dz. \qquad (8)$$

Формула (8) называется формулой замены переменной. Для доказательства справедливости формулы (8), очевидно, достаточно убедиться, что дифференциалы обеих частей равны.

Дифференцируя левую часть соотношения (8), имеем

$$d\int f(x)dx = f(x)dx.$$

Но так как $x = \varphi(z)$, то $dx = \varphi'(z)dz.$ Поэтому

$$d\int f(x)dx = f[\varphi(z)]\varphi'(z)dz \qquad (9)$$

С другой стороны, дифференцируя правую часть соотношения (8), имеем

$$d\int f[\varphi(z)]\varphi'(z)dz = f[\varphi(z)]\varphi'(z)dz \qquad (10)$$

Соотношения (9) и (10) показывают, что

$$d\int f(x)dx = d\int f[\varphi(z)]\varphi'(z)dz.$$

Тем самым справедливость формулы (8) доказана.

Пример 1: найти $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}.$

Решение: положим $x = az$, находим $dx = adz.$ Применяя формулу (8), получаем

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \int \frac{adz}{\sqrt{a^2 - a^2 z^2}} = \int \frac{dz}{\sqrt{1 - z^2}};$$

но $\int \frac{dz}{\sqrt{1 - z^2}} = \arcsin z + C.$ Поэтому

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \int \frac{dz}{\sqrt{1 - z^2}} = \arcsin z + C.$$

Возвращаясь снова к переменной x получим

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C.$$

Пример 2: найти $\int \sin axdx.$

Решение: полагая $x = \frac{z}{a}, dx = \frac{dz}{a}$ и применяя формулу (7), имеем

$$\int \sin axdx = \int \sin z \frac{dz}{a} = \frac{1}{a}\int \sin zdz = -\frac{1}{a}\cos z + C = -\frac{1}{a}\cos ax + C.$$

Интегрирование по частям

Пусть $u = u(x)$ и $v = v(x)$ - две функции от x, имеющие непрерывные производные. Из дифференциального исчисления мы знаем, что

$$d(uv) = udv = vdu \qquad (11)$$

Интегрируя обе части равенства (11), имеем

$$\int d(uv) = \int udv + \int vdu$$

или

$$\int u\,dv = \int d(uv) - \int v\,du.$$

Но

$$\int u\,dv = uv + C,$$

поэтому

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du. \qquad (12)$$

Формула (12) называется формулой интегрирования по частям. Она дает возможность свести вычисление интеграла $\int u\,dv$ к вычислению интеграла вида $\int v\,du$, который во многих случаях оказывается более простым.

Пример 1: найти $\int (4x^3 + 6x - 7)\ln x\,dx.$

Решение: положим $u = \ln x,\ dv = (4x^3 + 6x - 7)dx$; тогда

$$du = \frac{dx}{x}, v = x^4 + 3x^2 - 7x.$$

Формула (12) дает:

$$\int (4x^3 + 6x - 7)\ln x\,dx = (x^4 + 3x^2 - 7x)\ln x - \int \frac{x^4 + 3x^2 - 7x}{x}dx =$$

$$= (x^4 + 3x^2 - 7x)\ln x - \left(\frac{x^2}{4} + \frac{3x^2}{2} - 7x\right) + C$$

Пример 2: найти $\int x\sin x\,dx$

Решение: положим $u = x, dv = \sin x\,dx$; отсюда найдем $du = dx,$ $v = \int \sin x\,dx = -\cos x$.

Применяя формулу (12), получим

$$\int x\sin x\,dx = x(-\cos x) - \int(-\cos x)dx = -x\cos x + \int \cos x\,dx.$$

Но $\int \cos x\,dx = \sin x + C,$ следовательно, $\int x\sin x\,dx = -x\cos x + \sin x + C.$

УПРАЖНЕНИЯ.

1) Найти интегралы методом непосредственного интегрирования:

$\int (1+x)^2 dx$, 1. $\int \sin 5x\,dx,$

$\int \frac{dx}{4\sqrt{x}}$, 2. $\int x^7 dx,$

3. $\int \frac{x^3}{2}dx,$

4. $\int \frac{dx}{2},$

16. $\int \sqrt{2x}dx,$

17. $\int (6\sqrt{v} - 5v^2)dv,$

5. $\int \frac{dx}{x^4}$,

6. $\int (x^4 + 5x^2 + 3)dx$,

7. $\int (-3t^3 + 6t^2 - t)dt$,

$\int \frac{1-3x+4x^2}{x}dx$

8. $\int (6x^5 - 5x^4 + 3x^2 + 2x + 1)dx$,

9. $\int (x+1)(x-2)dx$,

10. $\int u^2(u-1)(u+2)du$,

11. $\int (\sin\frac{x}{2} + \cos\frac{x}{2})^2 dx$

12. $\int tg^2 x dx$

13. $\int \frac{x^6 - x^5 + 1}{x^2}dx$

18. $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}}$,

19. $\int \frac{8}{x}dx$,

21. $\int \frac{x^3 - 3x^2 + 1}{x^5}dx$,

22. $\int \frac{x^2 - 3x + 2}{x-1}dx$,

23. $\int (1-x)(2+\sqrt{x})dx$.

24. $\int \frac{4-x}{2-\sqrt{x}}dx$

25. $\int \frac{\sin^2 x - 3}{\sin^2 x}dx$

26. $\int \sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}dx$

2)Найти интегралы методом подстановки:

1. $\int \cos 2x dx$,

2. $\int \frac{x^2 dx}{5+x^3}$,

3. $\int \frac{\sin x dx}{1+\cos x}$,

4. $\int \frac{e^{2x}dx}{\sqrt{1-e^{2x}}}$,

5. $\int \sqrt[5]{1-2x}dx$.

6. $\int \sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}dx$

7. $\int (e^x + e^{-x})dx$

8. $\int \frac{\ln^3 x}{x}dx$

9. $\int \sin^2 x \cos x dx$

3.Найти интегралы методом интегрирования по частям:

1. $\int x\sin xdx,$
2. $\int x\cos 4xdx,$
3. $\int (2x-3)\cos xdx,$
4. $\int (1-4x)\sin 2xdx,$
5. $\int x^2 \ln xdx,$
6. $\int (x-1)\ln xdx,$
7. $\int \frac{\ln x}{\sqrt{x}}dx,$
8. $\int \frac{x}{\cos^2 x}dx,$
9. $\int (2x+1)e^{2x}dx,$
10. $\int (2-x)e^{-3x}dx.$

4. ИНТЕГРАЛ

4.1 ОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ И ЕГО ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ СМЫСЛ

Пусть на сегменте $[a,b]$ (рис 5.1) задана функция *y* = *f(x)*. С помощью точек деления $x_1 < x_2 < ... < x_{i-1} < x_i, < ... < x_{n-1}$ разобьем сегмент $[a,b]$ на *n* «малых» сегментов: $[x_0,x_1],[x_1,x_2],...,[x_{i-1},x_i],...,[x_{n-1},x_n]$, где $x_0=a,\ x_n=b$. В каждом из малых сегментов $[x_{i-1},x_i](i=1,2,3,...n)$ выберем произвольную точку $\xi_i, x_{i-1}\le\xi_i\le x_i$ и умножим значение функции *y* = *f(x)* в точке ξ_i на длину $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ соответствующего сегмента:

$$f(\xi_i)\Delta x_i \qquad (1)$$

Составим сумму S_n таких произведений:

$$S_n = f(\xi_i)\Delta x_1 + f(\xi_2)\Delta x_2 + ... + f(\xi_i)\Delta x_i + f(\xi_n)\Delta x_n,$$

или

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i. \qquad (2)$$

Сумма вида (2) называется **интегральной суммой.**

Назовем наибольшую из длин малых сегментов $[x_{i-1},x_i]$ шагом разбиения и обозначим его через λ .

Пусть число *n* сегментов разбиения $[x_{i-1},x_i]$ неограниченно растет и $\lambda\to 0$. Если при этом интегральная сумма S_n имеет предел *S*, который не зависит от способа разбиения сегмента [*a,Ь*] на малые сегменты $[x_{i-1},x_i]$ и от выбора точек ξ_i в каждой из них, то это число *S* называется **определенным интегралом** от функции *f(x)* на сегменте [*a,Ь*] и обозначается символом $\int_a^b f(x)dx$ (читается так: «определенный интеграл от *a* до *b* от *f(x)* на *dx*»). При этом площадь, определяемая интегральной суммой (2) стремится к площади криволинейной трапеции, ограниченной кривой $y = f(x)$ и осью x в пределах интервала $[a,b]$ (рис. 5.1).

Таким образом,

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i, \qquad (3)$$

Числа а и b называются соответственно **нижней и верхней границами (пределами) интегрирования**, $f(x)$ - **подынтегральной функцией**, x - **переменной интегрирования**, а сегмент $[a,b]$ - **сегментом интегрирования (или областью интегрирования).**

Таким образом, приходим к следующему определению.

Определенный интеграл есть число, равное пределу, к которому стремится интегральная сумма, когда шаг разбиения стремится к нулю.

Функция $f(x)$, для которой на сегменте $[a,b]$ существует определенный интеграл $\int_a^b f(x)dx$, называется **интегрируемой на этом сегменте.**

Таким образом, анализ показывает, что площадь криволинейной трапеции, ограниченной кривой $y = f(x)$, где $f(x) \geq 0$ для всех x на сегменте [a,b], численно равна интегралу, определенному от функции $f(x)$ в интервале $[a,b]$:

$$S = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i = \int_a^b f(x)dx, \qquad (4)$$

Таким образом, с геометрической точки зрения, **определенный интеграл** от неотрицательной функции численно **равен площади криволинейной трапеции.**

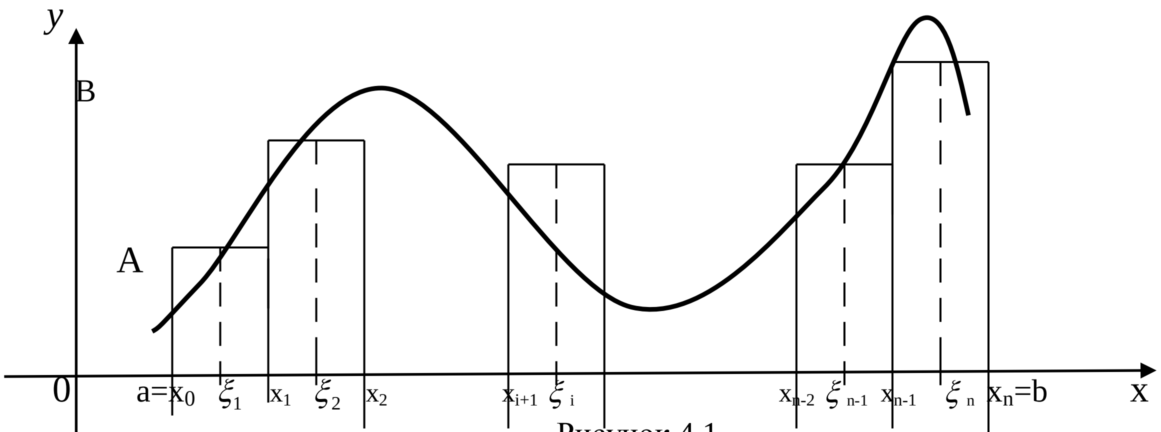


Рисунок 4.1

Простейшие свойства определенного интеграла.

1.Определенный интеграл от алгебраической суммы конечного числа функций равен алгебраической сумме определенных интегралов от слагаемых функций.

$$\int_a^b [f_1(x) + f_2(x) - f_3(x)]dx = \int_a^b f_1(x)dx + \int_a^b f_2(x)dx - \int_a^b f_3(x)dx.$$

2.Постоянный множитель можно выносить за знак определенного интеграла:

$$\int_a^b Af(x)dx = A\int_a^b f(x)dx.$$

3.При перестановке пределов интегрирования определенный интеграл меняет знак на противоположный:

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx.$$

4.Определенный интеграл с одинаковыми пределами равен нулю:

$$\int_a^a f(x)dx = 0.$$

5.Отрезок интегрирования можно разбить на части:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

4.2 ФОРМУЛА НЬЮТОНА-ЛЕЙБНИЦА.

В теореме о производной интеграла по верхней границе доказывается, что производная от интеграла по верхней границе равна подынтегральной функции, в которой переменная интегрирования заменена верхней границей:

$$\frac{d\int_a^x f(t)dt}{dx} = f(x).$$

Вычисление определенного интеграла, как предела интегральных сумм, сложно даже для простейших функций. Теорема о производной интеграла по верхней границе позволяет установить простой метод вычисления определенных интегралов, минуя суммирование и переход к пределу. Этот новый метод вычисления определенного интеграла выражается формулой Ньютона-Лейбница, вывод которой мы рассмотрим.

Функция $S(x) = \int_a^x f(t)dt$ является первообразной для непрерывной подынтегральной функции *f(x)*. Как известно, всякая другая первообразная для функции *f(x)* отличается от *S(x)* только постоянным слагаемым. Поэтому, если F(*x*) - другая первообразная для f(x) , то *S(x) = F(x) + C*, или

$$\int f(t)dt = F(x) + C. \qquad (5)$$

Постоянную C легко найти, если заметить, что $S(a)=\int\limits_a^a f(t)dt=0$, как интеграл с равными границами интегрирования. Поэтому, подставляя в соотношение (5) $x = a$, получим

$$\int\limits_a^a f(t)dt = F(a)+C=0.$$

Отсюда $C=F(a)$ и, следовательно,

$$\int\limits_a^x f(t)dt = F(x)-F(a).$$

В частности, при x=b имеем

$$\int\limits_a^b f(t)dt = F(b)-F(a). \qquad (6)$$

Это и есть формула Ньютона-Лейбница. Она показывает, что для того, чтобы вычислить определенный интеграл, нужно найти какую-либо первообразную $F(x)$ для подынтегральной функции $f(x)$ и взять разность значений этой первообразной, вычисленных для значений x, равных верхней и нижней границам интегрирования. Короче говоря, определенный интеграл равен приращению первообразной от подынтегральной функции на сегменте интегрирования.

Разность $F(b)$-$F(a)$ символически обозначают $F(x)|_a^b$:

$$F(b)-F(a)=F(x)|_a^b.$$

Применяя этот символ, мы можем записать формулу Ньютона-Лейбница в таком виде:

$$\int\limits_a^b f(x)dx = F(x)|_a^b = F(b)-F(a). \qquad (7)$$

Рассмотрим несколько примеров.

Пример 1. Вычислить $\int\limits_1^2 e^x dx.$

Решение: Одной из первообразных от подынтегральной функции является функция e^x. Поэтому, применяя формулу (6) Ньютона-Лейбница, получим

$$\int\limits_1^2 e^x dx = e^x|_1^2 = e^2 - e^1 = e(e-1).$$

Пример 2. Вычислить $\int\limits_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$.

Решение: по формуле (6) Ньютона-Лейбница

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x \,\Big|_0^{\frac{1}{2}} = \arcsin\frac{1}{2} - \arcsin 0 = \frac{\pi}{6}.$$

Замечание. Формула Ньютона-Лейбница была введена в предположения, что подынтегральная функция *f(x)* непрерывна. Для разрывных функций формула Ньютона Лейбница может не иметь места.

4.3. ЗАМЕНА ПЕРЕМЕННОЙ И ИНТЕГРИРОВАНИЕ ПО ЧАСТЯМ В ОПРЕДЕЛЕННОМ ИНТЕГРАЛЕ

При вычислении определенного интеграла $\int_a^b f(x)dx$ способом замены переменной $x=\varphi(t)$ мы приходим к определенному интегралу с новой переменной интегрирования *t,* причем старые пределы интегрирования $x_1=a$ и $x_2=b$ заменяются новыми пределами $t_1=\varphi(a)$ и $t_2=\varphi(b)$:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{t_1=\varphi(a)}^{t_2=\varphi(b)} f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt.$$

Пример 1. Найти $\int_0^a \sqrt{a^2-x^2}\,dx.$

Решение: Полагая $x=a\sin t$, тогда $dx=a\cos t dt$. При *x*=0, $0=\sin t$, $t=\arcsin 0=0$; при *x=a,* $1=\sin t$, $t=\frac{\pi}{2}$. Итак, *a*=0, *b*=$\frac{\pi}{2}$.

Следовательно, применяя формулу замены переменной, найдем

$$\int_0^a \sqrt{a^2-x^2}\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{a^2-a^2\sin^2 t}\cdot a\cos t dt = a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t dt = \frac{a^2}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1+\cos 2t)dtdt =$$

$$\frac{a^2}{2}\left[\int_0^{\frac{\pi}{2}} dt + \frac{1}{2}\int \cos 2td(2t)\right] = \frac{a^2}{2}t\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{2}\sin 2t\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi a^2}{4}.$$

Пример 2. Найти $\int_3^8 \frac{xdx}{\sqrt{x+1}}.$

Решение: положим $\sqrt{x+1}=t$ или $x=t^2-1$. В данном случае *a*=3, *b*=8. При *x*=*a*=3 $t=\sqrt{3+1=2}$; при *x*=*b*=8 $t=\sqrt{8+1}=3$. Итак, *a*=2, *b*=3. Следовательно, по формуле (7) замены переменной имеем

$$\int \frac{xdx}{\sqrt{x+1}} = \int 2(t^2-1)dt = 2\left(\frac{t^3}{3}-t\right)\Big|_2^3 = 2\left(\frac{3^3}{3}-3\right)-2\left(\frac{2^3}{3}-2\right)=10\frac{2}{3}.$$

Интегрирование по частям.

Пусть u и v - дифференцируемые функции от x. Тогда $d(uv)=udv+vdu$, отсюда $udv=d(uv)-vdu.$

Интегрируя обе части последнего уравнения в пределах от a до b, получим:

$$\int_a^b udv = u\cdot v\,\Big|_a^b - \int_a^b vdu. \qquad (8)$$

Выражение (8) представляет собой формулу интегрирования по частям.

Пример 1: вычислить $\displaystyle\int_0^e \frac{\ln x}{\sqrt{x}}dx.$

Решение: положим $u=\ln x$, тогда $du=\dfrac{dx}{x}, dv=\dfrac{dx}{\sqrt{x}},$ и $v=\int x^{-\frac{1}{2}}dx=2\sqrt{x}.$ Используя формулу (8), получим:

$$\int_0^e \frac{\ln x}{\sqrt{x}}dx = 2\sqrt{x\ln x}\,\Big|_0^e - 2\int x^{-\frac{1}{2}}dx = 2\sqrt{x\ln x}\,\Big|_0^e - 4\sqrt{x}\,\Big|_0^e = 2\sqrt{e}(\ln e-2).$$

4.7 ПРИЛОЖЕНИЯ ОПРЕДЕЛЕННОГО ИНТЕГРАЛА

Вычисление площади в декартовых координатах.

Если на сегменте [a,b], функция $y=f(x)$ непрерывна и положительна, то криволинейная трапеция с основанием [a,b], ограничена сверху графиком этой функции, имеет площадь S, которую можно найти по формуле

$$S=\int_a^b f(x)dx, \qquad (27)$$

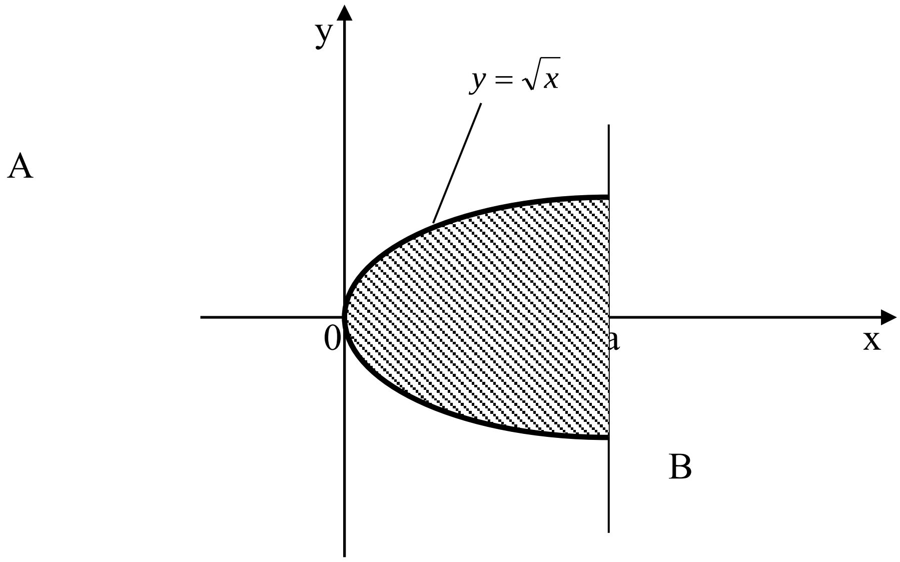
или

$$S=\int_a^b ydx. \qquad (28)$$

Пример: вычислить площадь сегмента параболы, т.е. фигуры, ограниченной дугой параболы $x=y^2$ и отрезком AB прямой $x=a$ (рис. 5.5).

Решение: исходя из сегмента параболы относительно оси *Ox*, найдем его площадь *S*, как удвоенную площадь криволинейной трапеции *OAa*:

$$S = 2\int_0^a y dx = 2\int_0^a \sqrt{x} dx = \frac{4}{3} x^{\frac{3}{2}} \Big|_0^a = \frac{4a^{\frac{3}{2}}}{3} = \frac{4}{3} a\sqrt{a}.$$



Объем тела вращения.

Рассмотрим криволинейную трапецию с основанием [*a,b*], ограниченную непрерывной кривой *y=f(x)*. Определим объем тела образованного вращением трапеции вокруг оси *Ox* (рис. 5.6). Поперечными сечениями будут круги с радиусами, равными модулю ординаты у вращающейся кривой. Следовательно, площадь сечения

$$S(x) = \pi y^2 = \pi\left[f(x)\right]^2.$$

Найдем объем тела вращения

$$V = \pi\int_a^b \left[f(x)\right]^2 dx, \qquad (29)$$

или

$$V = \pi\int_a^b y^2 dx \qquad (30)$$

Пример: определить объем тела, ограниченного поверхностью вращения параболы $y^2=x$ вокруг оси *Ox* и плоскостью *x=h* (рис.5.7).

Решение: применяя формулу (30), найдем:

$$V = \pi\int_0^h y^2 dx = \pi\int_0^h x dx = \pi\frac{x^2}{2}\Big|_0^h = \frac{\pi h^2}{2}.$$

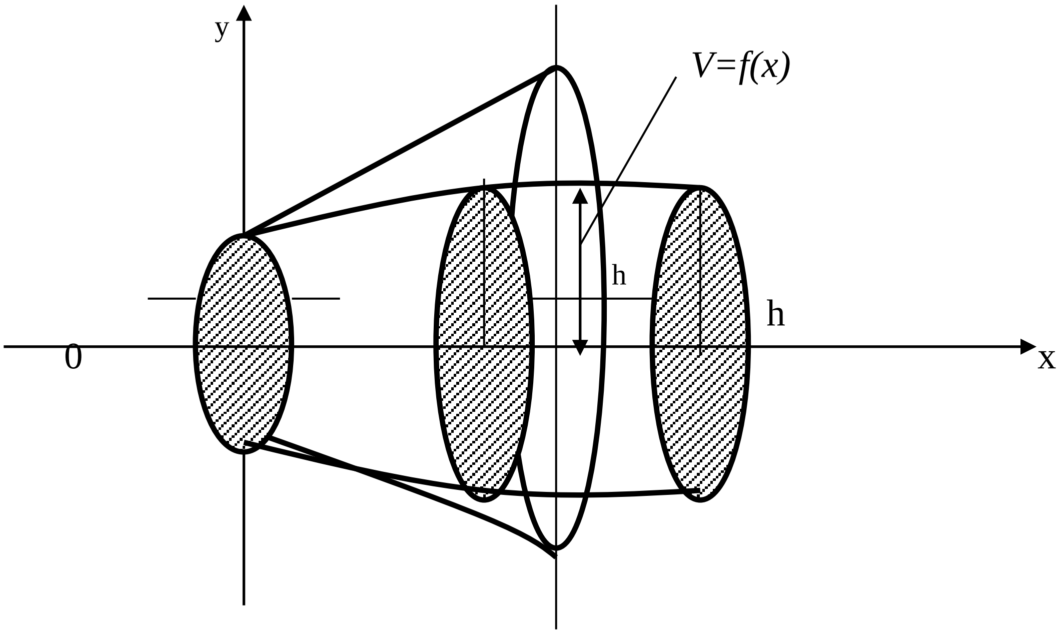


Рисунок 4.6

Длина дуги кривой.

Пусть $y=f(x)$ – непрерывная и дифференцируемая функция на промежутке $[a,b]$. Рассмотрим задачу вычисления длины l графика $f(x)$ от точки с абсциссой a до точки с абсциссой b. Обозначим через $l(x)$ длину кривой от точки с абсциссой a до точки с абсциссой x. (рис.5.8). Пусть абсцисса x получила бесконечно малое приращение dx. Тогда у получит бесконечно малое приращение Δy, которое отличается от приращения dy вдоль касательной на бесконечно малую, стремящуюся к нулю существенно быстрее, чем dx.

Рисунок 4.7

Приращение Δl длины кривой отличается от длины соответствующего отрезка касательной (рис.5.9)

$$\sqrt{dx^2+dy^2}=\sqrt{1+(y')^2}\,dx$$

на бесконечно малую, существенно меньшую, чем dx. Последняя часть относительно dx и является главной частью Δl. Следовательно,

$$dl = \sqrt{1+(y')^2}dx \text{ и } l = \int^{b} \sqrt{1+(y')^2}dx. \qquad (31)$$

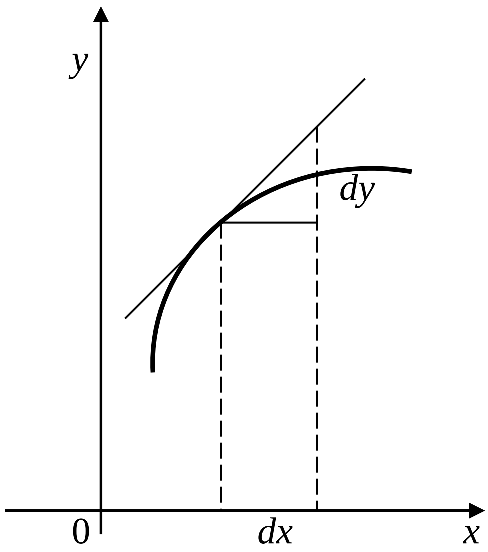


Рисунок 4.8

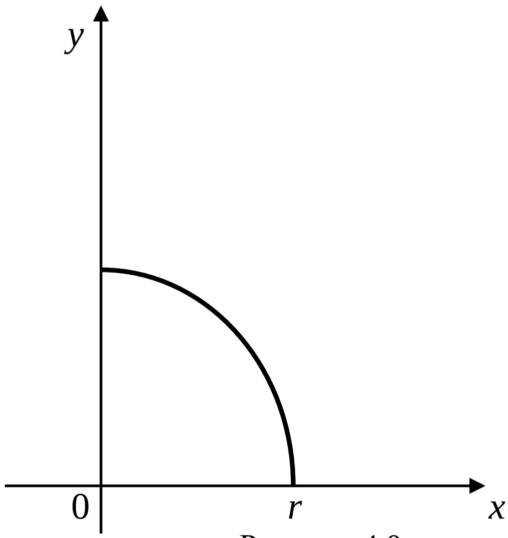


Рисунок 4.0

Пример: найти с помощью интегрирования длину четверти окружности радиуса r (рис. 5.10).

Решение: здесь $y = \sqrt{r^2 - x^2}, a = 0, b = r,$

$$y' = -\frac{2x}{2\sqrt{r^2 - x^2}} = -\frac{x}{\sqrt{r^2 - x^2}};$$

$$1+(y')^2 = 1+\frac{x^2}{r^2 - x^2} = \frac{r^2 - x^2 + x^2}{r^2 - x^2} = \frac{r^2}{r^2 - x^2}.$$

$$l = \int_0^r \frac{r}{\sqrt{r^2 - x^2}}dx = \int_0^r \frac{1}{\sqrt{1-\frac{x^2}{r^2}}} = r\int_0^r \frac{1}{\sqrt{1-\frac{x^2}{r^2}}}d\left(\frac{x}{r}\right) = r\arcsin\frac{x}{r}\Big|_{x=r} - r\arcsin\frac{x}{r}\Big|_{x=0} = \frac{r\pi}{2}.$$

что и следовало ожидать.

Заметим, что вычисление длины эллипса сводится к вычислению «неберущегося» интеграла, не выражающегося через элементарные функции. То же относится к вычислению длины дуги гиперболы $y=1/x$, длины дуги синусоиды. Длина дуги параболы приводится к интегралу, хотя и выражающемуся через элементарные функции, но довольно сложному.

Площадь поверхности тела вращения.

Пусть тело получено посредством вращения криволинейной трапеции, ограниченной осью Ox, прямыми $x = a$ и $x = b$ и графиком дифференцируемой функции $y = f(x) \geq 0$. Требуется определить площадь боковой поверхности этого тела. Введем в рассмотрение площадь $S(x)$ такого же тела, но ограниченного переменной правой стенкой, пересекающей Ox в точке с абсциссой $\boldsymbol{x}$.

При бесконечно малом приращении dx главной частью приращения $\Delta S(x)$ будет площадь ленты длиной $2\pi y$ и шириной dl, так что $dS(x)=2\pi ydl$ и

$$S=\int_a^b 2\pi ydl=\int_a^b 2\pi y\sqrt{1+(y')^2}\,dx. \qquad (32)$$

Пример: найти площадь поверхности вращения дуги синусоиды $y=\sin x,\ 0\le x\le\pi.$

Решение: по формуле (32) получим

$$S=2\pi\int_0^\pi \sin x\sqrt{1+\left[(\sin x)'\right]^2}\ dx=2\pi\int_0^\pi \sin x\sqrt{1+\cos^2 x}dx.$$

Сделаем замену переменных, положив $\cos x=t.$ Тогда $dt=-\sin xdx,$ $t\,|_{x=\pi}=\cos\pi=-1$ и следовательно,

$$S=-2\pi\int_1^{-1}\sqrt{1+t^2}dt=2\pi\int_{-1}^{1}\sqrt{1+t^2}dt=\frac{2\pi}{2}\left[t\sqrt{1+t^2}+\ln(t+\sqrt{1+t^2})\right]_{-1}^{1}=\pi\left[2\sqrt2+\ln(3+\sqrt3)\right].$$

Упражнения.

1. $\displaystyle\int_0^{16}\frac{3\sqrt{x}-1}{2\sqrt{x}}dx,$ **2.** $\displaystyle\int_0^{\pi}(\pi-x)\sin xdx,$ **3.** $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^3 x\cos^4 xdx,$

4. $\displaystyle\int_{-5}^{-1}\frac{dx}{x^2+6x+13},$ **5.** $\displaystyle\int_2^{1}\frac{dx}{\sqrt{3+2x-x^2}},$ **6.** $\displaystyle\int_2^{3}\frac{2x-1}{x^2-4x+5}dx,$

7. $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^2 x}{\sin^2 x}dx,$ **8.** $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\cos 2xdx,$ **9.** $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}}\sin 7x\cos 3xdx,$

10. $\displaystyle\int_2^{3}(3-x)e^x dx,$ **11.** $\displaystyle\int_1^{8}\frac{dx}{\sqrt{17x+8}},$ **12.** $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{2+\sqrt{tgx}}{\cos^2 x}dx,$

13. $\int_0^{16} \frac{dx}{3+\sqrt{x}}$, **14.** $\int_1^{9} \frac{\sqrt{x}dx}{x+3}$, **15.** $\int_0^{3} \frac{dx}{\sqrt{(16+x^2)^3}}$, **16*.** $\int_{\ln 2}^{2\ln 2} \sqrt{e^x-1}dx.$

17. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \cos x dx;$ **18.** $\int_0^{1} \frac{x^3 dx}{3+x^4};$ **19.** $\int_1^{e} \frac{\ln x}{x} dx;$

*Указание**. Применить подстановку $e^x-1=t^2$.

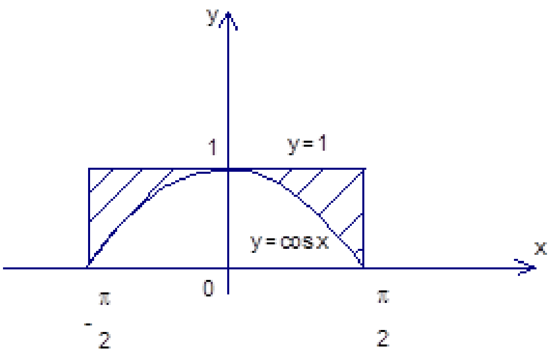
17. Вычислить площадь фигуры, ограниченной прямыми $x+2y-8=0,$ $y=1, y=3$ и осью ординат.

18. Найти объем тела, образованного вращением вокруг оси *Oy* кубической параболы $y=x^3$ в пределах от $y=1$ до $y=8$.

19. Найти площадь фигуры, лежащей в первой четверти и ограниченной окружностью $x^2+y^2=36,$ прямой $x\sqrt{3}-3y=0$ и осью абсцисс.

20. Вычислите площадь фигуры, ограниченной линиями

$y=\cos x, y=1, x=\frac{\pi}{2}, x=-\frac{\pi}{2}$.



5. ОСНОВНЫЕ СВЕДЕНИЯ О ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЯХ

5.1 ОБЩИЕ ПОНЯТИЯ О ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЯХ И ИХ ОПРЕДЕЛЕНИЕ

Дифференциальным уравнением называется такое уравнение, которое содержит переменные *x*, *y* и производные или дифференциалы функции *y*. Так, например, уравнения

$y'=x$ (1) $y''+4y=0$ (2) $x+yy'=0$ (3)

являются дифференциальными, которые в общем виде можно представить $F'(x, y, y')=c$.

Решить или проинтегрировать дифференциальное уравнение, значит найти такую функцию $y=f(x)$, которая удовлетворяет данному уравнению, т.е., будучи подставлена в это уравнение, обращает его в тождество.

Поэтому, всякая функция $y = f(x)$, удовлетворяющая данному дифференциальному уравнению, называется решением этого уравнения. Уравнение вида $\varphi(x,\ y) = 0,$ определяющее решение (искомую функцию y) дифференциального уравнения как неявную функцию y, называется интегралом дифференциального уравнения. Так, например, уравнение

$$x^2 + y^2 = C \qquad (4)$$

где C - произвольная постоянная, является интегралом уравнения (3). Чтобы убедиться в этом, достаточно взять производные от обеих частей равенств (4).

Получим:

$$(x^2 + y^2)'_x = C'_x; \quad 2x + 2yy' = 0$$

или

$$x + yy' = 0.$$

Решение (4) называется **общим решением** уравнения (3); любое решение, полученное из (4) заменой произвольной постоянной С определенным числом, называется его **частным решением.** Так, например, при $C = 4$ получается частное решение $x^2 + y^2 = 4$.

Придавая C значения 1; 2; 3; и т.д., будем получать частные интегралы: $x^2+y^2=1$; $x^2 + y^2 = 2$; $x^2 + y^2 = 3$; $x^2+y^2=4$ и т.д.

С геометрической точки зрения общий интеграл (общее решение) выражает семейство кривых, а частный интеграл (частное решение) - отдельные кривые этого семейства. В данном случае уравнению (4) соответствует множество окружностей с центром в начале координат, а частным интегралам - окружности данных радиусов (рис. 6.1).

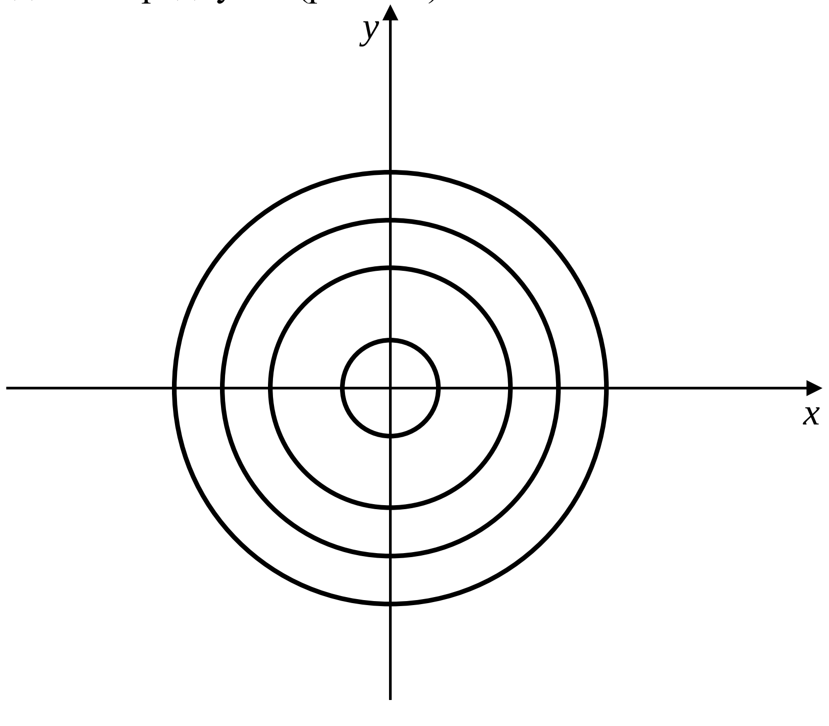


Рисунок 5.1

В дифференциальное уравнение могут входить производные разных порядков, в зависимости от этого различают уравнения 1-ого, 2-ого и т.д. порядков. Например,

$xy' - y = 0$ - уравнение первого порядка

$y'' + 4y = 0$ - уравнение второго порядка

$y''' + 5y'' + 6y = 0$ - уравнение третьего порядка.

Вообще, порядок дифференциального уравнения определяется порядком наивысшей старшей производной, входящей в это уравнение.

5.2 ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ПЕРВОГО ПОРЯДКА С РАЗДЕЛЕННЫМИ И РАЗДЕЛЯЮЩИМИМСЯ ПЕРЕМЕННЫМИ

Если дифференциальное уравнение первого порядка имеет вид

$$f(y)dy + \varphi(x)dx = 0 \qquad (5)$$

где *f(y)*- функция от *y,* $\varphi(x)$ -функция от *x*, то говорят, что в данном уравнении переменные разделены. Решение такого уравнения выполняется методом непосредственного интегрирования:

$$\int f(y)dx + \int \varphi(x)dx = C.$$

Пример 1: найти общий интеграл уравнения $ydy - (1+2x)dx = 0.$

Решение: $\int ydy - \int (1+2x)dx = C_0$; $\frac{y^2}{2} - (x + x^2) = C_0$.

или

$$y^2 = 2(x^2 + x) + 2C_0.$$

Пользуясь произвольностью *C*, можно $2C_0$ обозначить через *C* и общий интеграл переписать в следующем виде: $y^2 = 2(x^2 + x) + C.$

Если дифференциальное уравнение после приведения его к общему знаменателю и соединения в один член всех членов, содержащих множителем один и тот же дифференциал, принимает вид:

$$f(x)F(y)dx + \varphi(y)\Phi(x)dy = 0. \qquad (6)$$

то, такое уравнение называют уравнением с разделяющимися переменными. Его можно привести к виду (5), разделив все члены на произведение $F(y)\Phi(x)$.

Пример 2: проинтегрировать уравнение

$$x^2yy' + xy^2 - yy' + x = 0.$$

Решение: объединяем в один член слагаемые, содержащие y':

$$(x^2y - y)y' + xy^2 + x = 0.$$

Заменяем y' на $\frac{dy}{dx}$ и приводим уравнение к общему знаменателю:

$$(x^2y-y)dy+(xy^2+x)dx=0.$$

Разлагаем на множители коэффициенты при дифференциалах:

$$y(x^2-1)dy+x(y^2+1)dx=0.$$

Разделив это уравнение почленно на $(x^2-1)(y^2+1)$, имеем

$$\frac{ydy}{y^2+1}+\frac{xdx}{x^2-1}=0.$$

Получилось уравнение вида (5). Интегрируем его:

$$\int\frac{ydy}{y^2+1}+\int\frac{xdx}{x^2-1}=C;$$

$$\frac{1}{2}\ln(y^2+1)+\frac{1}{2}\ln(x^2-1)=C_0.$$

$$\ln(y^2+1)+\ln(x^2-1)=2C_0.$$

Пользуясь произвольностью C_0, заменяем $2C_0$ через $\ln C$:

$$\ln(y^2+1)+\ln(x^2-1)=\ln C,$$

откуда в результате потенцирования получаем

$$(y^2+1)(x^2-1)=C, \text{ или } y^2=\frac{C}{x^2-1}-1.$$

Пример 3: найти частное решение дифференциального уравнения $(1-x^2)y'+xy-ax=0,$ удовлетворяющее условию $y=2a$ при x=0.

Решение:

$$(1-x^2)\frac{dy}{dx}+xy-ax=0;$$

или

$$(1-x^2)dy+x(y-a)dx=0.$$

Делим члены этого уравнения на произведение $(1-x^2)(y-a)$:

$$\frac{dy}{y-a}+\frac{xdx}{1-x^2}=0.$$

Получили уравнение вида (5). Интегрируем это уравнение:

$$\int\frac{dy}{y-a}+\int\frac{xdx}{1-x^2}=C;$$

отсюда

$$\ln(y-a)-\frac{1}{2}\ln(1-x^2)=\ln C;$$

или

$$\ln\frac{y-a}{\sqrt{1-x^2}}=\ln C;\quad \frac{y-a}{\sqrt{1-x^2}}=C;\quad y=a+C\sqrt{1-x^2}.$$

Мы нашли общее решение. Определяем значение *C*, удовлетворяющее начальному условию $y=2a$ при x=0:

$$2a=a+C\sqrt{1-0^2}\text{, откуда } C=a.$$

Следовательно, искомым частным решением будет функция

$$y=a+a\sqrt{1-x^2}\text{, или } y=a(1+\sqrt{1-x^2}).$$

5.3 ОДНОРОДНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВЕННИЯ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

Дифференциальное уравнение первого порядка, имеющее вид

$$P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0 \tag{7}$$

называется однородным если *P(x,y)* и *Q(x,y)* являются однородными функциями переменных *x* и *y* одного и того же измерения. Так, например, уравнение

$$(x^3+x^2y)dx+(xy^2+y^3)dy=0$$

является однородным, так как в нем $P=x^3+x^2y$ и $Q=xy^2+y^3$- однородные функции переменных *x* и *y* одного и того же (третьего) измерения.

Однородное дифференциальное уравнение (7) приводится к виду уравнение с разделяющимися переменными подстановкой

$$y=ux \tag{8}$$

где *u*- новая неизвестная функция.

Пример 1: решить уравнение $y^2dx+(x^2-xy)dy=0.$

Решение: в данном случае $P=y^2$ и $Q=x^2-xy$ - однородные функции одного и того же (второго) измерения. Полагаем $y=ux$, откуда $dy=udx+xdu.$

Подставляем эти выражения *y* и *dy* в данное уравнение:

$$(ux)^2+(x^2-x\cdot ux)(udx+xdu)=0;$$

$$ux^2dx+x^3(1-u)du=0. \tag{9}$$

Получилось уравнение вида (6). Разделяя переменные, находим

$$\frac{dx}{x}+\frac{(1-u)du}{u}=0.$$

Интегрируя это уравнение:

$$\int\frac{dx}{x}+\int\frac{du}{u}-\int du=C\,;\ \ln x+\ln u-u+C\,.$$

В результате потенцирования получается общий интеграл уравнения (9):

$$\ln x+\ln u-\ln e^{u}=\ln C\,;\ \ln ux=\ln Ce^{u}\,;\ ux=Ce^{u}\,.$$

Определив u из уравнения (8) и заменив в последнем уравнении, находим общий интеграл данного уравнения:

$$\frac{y}{x}x=Ce^{\frac{y}{x}},\ \text{или}\quad y=Ce^{\frac{y}{x}}\,.$$

5.4 ЛИНЕЙНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

Дифференциальное уравнение первого порядка называется линейным, если оно первой степени относительно неизвестной функции y и ее производной y'. Такое уравнение имеет вид:

$$y'+Py=Q, \tag{10}$$

где P и Q – функции от x или постоянные величины. Уравнение (10) решается подстановкой

$$y=uv\,,$$

где u и v - неизвестные функции от x, одну из которых можно выбрать произвольно.

Пример 1: решить уравнение $y'+\frac{2}{x}y=x^{3}$.

Решение: в этом линейном уравнении $P=\frac{2}{x},Q=x^{3}$. Полагаем $y=uv$, тогда

$$y'=\frac{dy}{dx}=\frac{d(uv)}{dx}=\frac{udv+vdu}{dx}=u\frac{dv}{dx}+v\frac{du}{dx}.$$

Подставив в данное уравнение вместо y и y' их выражения, получаем:

$$\left(u\frac{dv}{dx}+v\frac{du}{dx}\right)+\frac{2}{x}uv=x^{3},\ \text{или}\ \left(\frac{dv}{dx}+v\frac{2}{x}\right)u+v\frac{du}{dx}=x^{3}. \tag{11}$$

Выше было замечено, что одна из функций (u или v) может быть выбрана произвольно. Выберем функцию v так, чтобы в уравнении (11) выражение в скобках обратилось в нуль, т.е. имело место равенство:

$$\frac{dv}{dx}+\frac{2}{x}v=0.$$

Разделив переменные и интегрируя полученное уравнение, находим

$$\int \frac{dv}{v} = -2\int \frac{dx}{x};$$

отсюда

$$\ln v = \ln \frac{1}{x^2};$$

$$v = \frac{1}{x^2}, \text{ при } C=0 \qquad (12)$$

Подставив (12) в (11), получим:

$$0 \cdot u + \frac{1}{x^2}\frac{du}{dx} = x^3,$$

откуда

$$du = x^5 dx;$$

тогда

$$u = \int x^5 dx + C.$$

Соответственно

$$u = \frac{1}{6}x^6 + C \qquad (13)$$

Подставив в равенство $y = uv$ вместо u и v их найденные выражения, получаем общее решение данного линейного дифференциального уравнения:

$$y = \left(\frac{1}{6}x^6 + C\right) \cdot \frac{1}{x^2}, \text{ или } y = \frac{1}{6}x^4 + \frac{C}{x^2}.$$

УПРАЖНЕНИЯ.

Уравнения с разделяющимися переменными.

Найти общий интеграл уравнений:

1. $\sqrt{y}dx + x^2 dy = 0,$
2. $(1-y)dx + (x+1)dy = 0,$
3. $\cos^2 y dx - (x^2+1)dy = 0,$
4. $x\sqrt{1-y^2}dx + \sqrt{1-x^2}dy = 0,$
5. $\sin u \sin v du + \cos u \cos v = 0,$
6. $e^x dx + e^y(1-e^x)dy = 0,$
7. $(xy^2 - y^2)dx - (x^2 y + x^2)dy = 0,$
8. $x(y^2+1)dx - ye^{x^2}dy = 0,$
9. $3^{x-y}dx - 4^{x+y}dy = 0,$
10. $(xy^2 + x)dx - (y + x^2 y)dy = 0,$
11. $xy' = tgy,$
12. $2xyy' = y^2 - 1,$
13. $y' = e^{2x-4y}.$

Однородные уравнения.

Найти общий интеграл уравнений:

1. $y' = 1 + \frac{y}{x}$,
2. $xy' = 3y - x$,
3. $(x - u)dx + xdy = 0$,
4. $y^2 dx - (x^2 + xy)dy = 0$,
5. $(x^2 - xy + y^2)dx - x^2 dy = 0$,
6. $y - xy' = \sqrt{x^2 - y^2}$,
7. $xy' = y + xe^{\frac{y}{x}}$
8. $xy' - y = y(\ln y - \ln x)$,
9. $xy' - x\cos^2 \frac{y}{x} = y$,
10. $(x2y)dx - (2x + y)dy = 0$.

Линейные уравнения.

Найти общее решение уравнений:

1. $y' + \frac{y}{x} = 1$,
2. $y' - 3\frac{y}{x} = x^3$,
3. $y' - 2xy = e^{x^2}$,
4. $y' + xy + x = 0$,
5. $y' + 5y = e^{-2x}$,
6. $y'(x+1) - y = 2(x+1)^3$,
7. $\frac{dy}{dx} + tgx(y-1) = 0$,
8. $xy' = 2x\ln x - y$,
9. $(y + e^x)dx - dy = 0$,
10. $y'(1 + x^2) - xy = \sqrt{1 + x^2}$,
11. $y' - \frac{xy}{1 - x^2} = \frac{1}{1 - x^2}$.

Найти частное решение уравнений, удовлетворяющих заданным начальным условиям:

1. $y' + 2py = e^{-2px}, y(0) = 0$,
2. $\frac{dy}{dx} + 4y = x^2 e^{-4x}, y(0) = \frac{1}{3}$,
3. $x^2 y' + 5xy + 4 = 0, y\left(\frac{1}{2}\right) = 62$,
4. $y' + yctgx - \cos ecx = 0, y\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2}$,
5. $x \cdot \frac{dy}{dx} + y = \cos x, y\left(\frac{1}{\pi}\right)$,

6. $\frac{dy}{dx}-\frac{xy}{x^2+1}=x, y\left(2\sqrt{2}\right)=3.$

Задачи.

Задача №1. На опытах с бактериями установлено, что при достаточном запасе пищи скорость размножения бактерий пропорциональна их количеству. Составьте дифференциальное уравнение размножения бактерий и найдите его общее и частное решения, учитывая, что по истечению суток число бактерий утроилось.

Задача №2. На опыте с бактериями установлено, что при введении препарата скорость гибели бактерий пропорциональна их количеству. Составить дифференциальное уравнение процесса гибели бактерий и найти его общее и частное решение, учитывая, что по истечению 36 часов число бактерий — уменьшилось в 5 раз.

Задача №3. Опыт показывает, что при облучении пораженного участка кожи гамма излучением скорость гибели раковых клеток пропорциональна их количеству. Определить, через сколько сеансов число раковых клеток уменьшится в 100 раз, если после трех процедур их число уменьшилось в 20 раз, при длительности процедуры 10 минут.

Задача №4.Скорость сокращения мышцы пропорциональна абсолютному сокращению l_0-l, где l_0 - длина мышцы до сокращения, l - длина мышцы для данного момента времени *t* в период сокращения. Найти закон сокращения мышцы, считая, что при *t* = 0, $l_0-l=0.$

Задача №5. В начальный момент времени в радиоактивном препарате было m_0 грамм висмута. Скорость распада висмута пропорциональна числу нераспавшихся атомов. За первые два часа после начала отсчета времени распалось 20 % от первоначального количества атомов. Через какое время распадется половина атомов висмута?

Задача №6. Скорость охлаждения тела в воздухе пропорциональна разности между температурой тела и температурой воздуха. Температура тела равна 90^0 С, а температура воздуха равна 10^0 С. Известно, что в течение 20 минут тело охлаждалось до 50 ^{0}С. В течение какого промежутка времени тело охладится до температуры 40 ^{0}С?

Задача №7. В культуре пивных дрожжей быстрота прироста действующего фермента пропорциональна его начальному количеству x. Первоначальное количество фермента a в течение часа удвоилось. Найти зависимость x(t).

Задача №8. Скорость размножения бактерий пропорциональна их количеству. В начальный момент имелось 100 бактерий, в течение трех часов их число удвоилось. Найти зависимость количества бактерий от времени.

Задача №9. По закону Ньютона, скорость охлаждения какого-либо тела в воздухе пропорциональна разности между температурой T тела и температурой воздуха Tq. Если температура воздуха равна 20° С и тело в течение 20 мин охлаждается от 100° С до 60° С, то через сколько времени его температура понизится до 30° С?

Задача №10. Скорость распада радиоактивного вещества пропорциональна его количеству. Определить, какая часть вещества останется через 200 лет, если период полураспада составляет 1600 лет.

ТЕСТОВЫЕ ЗАДАНИЯ

1. Предел отношения приращения функции в точке x к приращению аргумента, когда последнее стремится к нулю называется…
   а) производной функции
   б) неопределенным интегралом
   в) пределом функции
   г) первообразной
2. Если материальная точка движется по закону S(t), то первая производная от пути по времени есть…
   а) угловой коэффициент
   б) ускорение движения
   в) скорость в данный момент времени
   г) нет верного ответа
3. Геометрический смысл производной состоит в том, что …
   а) она равна пределу функции
   б) она равна всегда нулю
   в) она равна угловому коэффициенту касательной
   г) она равна максимальному значению функции
4. Дифференцирование – это…
   а) вычисление предела
   б) вычисление приращения функции
   в) нахождение производной от данной функции
   г) составление уравнения нормали

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

5. Эта формула выражает
   а) первый замечательный предел;
   б) первообразную
   в) угловой коэффициент касательной
   г) максимальному значению функции
6. Производная постоянной величины равна…
   а) единице
   б) самой постоянной
   в) не существует
   г) нулю
7. При вычислении производной постоянный множитель можно…
   а) возводить в квадрат
   б) выносить за знак производной
   в) не принимать во внимание
   г) принять за нуль
8. Ускорение прямолинейного движения равно…
   а) скорости от пути по времени
   б) первой производной от пути по времени

в) второй производной от пути по времени

г) нулю

9. Функция возрастает на заданном промежутке, если…

а) первая производная положительна

б) вторая производная положительна

в) первая производная отрицательна

г) первая производная равна нулю

10. Угловой коэффициент касательной, проведенной к графику функции в некоторой точке, равен

а) отношению значения функции к значению аргумента в этой точке;

б) значению производной функции в этой точке;

в) значению дифференциала функции в этой точке;

г) значению функции в этой точке;

д) значению тангенса производной функции в этой точке.

11. Дифференциал постоянной равен...

а) этой постоянной;

б) произведению данной постоянной на величину Ах;

в) бесконечно большой величине;

г) нулю;

д) невозможно определить

12. Найдите производную функции y=x3+cosx.

а) $y'=3x^2 - \sin x$ б) $y'=x^3 - \sin x$ в) $y'=3x^2 + \sin x$ г) $y'=x^3\ln 3 + \sin x$

13. Найдите производную функции y=2x – sin x.

а) $y'= x^2 - \cos x$ б) $y'=x^2 - \sin x$ в) $y'=2 - \cos x$ г) $y'= 1 + \cos x$

14.. Найдите производную функции y=2x + 1.

а) $y'=2^x \cdot \ln 2$ б) $y'=x \cdot 2^{x-1}$ в) $y'=\frac{2^x}{\ln 2}$ г) $y'=x \cdot 2^{x-1}+1$

15. Вторая производная y''(x) функции y(x)=4x^2-2x имеет вид

а) $y''=4$; б) $y''=8$; в) $y''=6$; г) $y''=7$

16.Функция F называется первообразной для функции f на некотором промежутке, если для всех x из этого промежутка существует производная F/(x), равная f(x), т.е. F/(x)=f(x) это…

а) формула Ньютона-Лейбница

б) дифференциал функции

в) первообразная для функции f

г) производная в точке

17. Множество первообразных для данной функции f(x) называется…

а) функцией

б) неопределенным интегралом

в) постоянным множителем

г) частной производной

18. Операция нахождения неопределенного интеграла называется…

а) дифференцированием функции

б) преобразованием функции

в) интегрированием функции

г) нет верного ответа

19. Непосредственное интегрирование, метод подстановки, интегрирование по частям это…

а) методы нахождения производной

б) методы интегрирования

в) методы решения задачи Коши

г) все ответы верны

20. Производная от неопределенного интеграла равна…

а) подынтегральной функции

б) постоянной интегрирования

в) переменной интегрирования

г) любой функции

21. Неопределенный интеграл от алгебраической суммы двух или нескольких функций равен…

а) произведению интегралов этих функций

б) разности этих функций

в) алгебраической сумме их интегралов

г) интегралу частного этих функций

22. Определенный интеграл вычисляют по формуле…

а) $\int_{A}^{B} f(x)dx=F(a)-F(b)$

б) $\int_{A}^{B} f(x)dx=F(b)-F(a)$

в) $\int_{A}^{B} f(x)dx=F(a)+F(b)$

г) $\int_{A}^{B} f(x)dx=F(a)$

23. Определенный интеграл с одинаковыми пределами равен…

а) единице

б) бесконечности

в) нулю

г) указанному пределу

24. При перемене местами верхнего и нижнего пределов интегрирования определенный интеграл…

а) остается прежним

б) меняет знак

в) увеличивается в два раза

г) равен нулю

25. Определенный интеграл используется при вычислении…

а) площадей плоских фигур
б) объемов тел вращения
в) пройденного пути
г) всех перечисленных элементов

26. Формула Ньютона-Лейбница

а) $\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a)$

б) $\int_a^b f(t)dt = F(a) - F(b)$

в) $\int_a^b f(t)dt = F(a) - F(b) + \tilde{n}$

г) $\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a) + \tilde{n}$

27. Укажите первообразную функции $f(x) = 3x^2 - \sin x$

а) $F(x) = x^3 - \cos x$

б) $F(x) = \frac{x^2}{2} - \sin x$

в) $F(x) = x^2 + \cos x$

г) $F(x) = 2 - \cos x$

28.Определенный интеграл $\int_1^2 4x^3 dx$ равен

а) 36; б)17; в)16; г)15

29. Уравнение, связывающее переменную, искомую функцию, ее производную (или дифференциал аргумента и дифференциал функции) называется

а) Дифференциальным
б) Интегральным
в) Логарифмическим
г) Показательным

30. Общим решением дифференциального уравнения первого порядка называется функция:

а) $y = \varphi(x, C)$

б) $y = \varphi(x)$

в) $y = \tilde{N}\varphi(x)$

г) $y = C^2\varphi(x)$

31. Если дифференциальное уравнение содержит производную или дифференциал не выше второго порядка, то оно называется:

а) Дифференциальным уравнением второго порядка

б) Дифференциальным уравнением первого порядка
в) Дифференциальным уравнением третьего порядка
г) Нет верного ответа

32. Дифференциальное уравнение $\frac{dy}{y-3} = 2dx$ в результате разделения переменных сводиться к уравнению

а) $ydx = x^2dy$

б) $\frac{dx}{x^2} = \frac{dy}{y}$

в) $\frac{dy}{y-3} = 2dx$

г) $\frac{dy}{dx} = 2$

33.Упорядоченное множество, отличающееся только порядком элементов, называется

а) перестановкой
б) размещением
в) сочетанием
г) разностью

34. Упорядоченное подмножество из n элементов по m элементов, отличающиеся друг от друга либо самими элементами либо порядком их расположения, называется …

а) сочетанием
б) размещением
в) перестановкой
г) разностью

35. … из n элементов по m называется любое подмножество из m элементов, которые отличаются друг от друга по крайней мере одним элементом.

а) перестановкой
б) размещением
в) сочетанием
г) разностью

БОТАШЕВА Фатима Юсуфовна
БАЙРАМУКОВА Асият Сулеменовна

ФИЗИКА, МАТЕМАТИКА

Практикум для обучающихся 1 курса по специальности
31.05.01 Лечебное дело, 31.05.02 Педиатрия,
31.05.03 Стоматология
(Часть 1)

Корректор Чагова О.Х.
Редактор Чагова О. Х.

Сдано в набор 20.08.2024 г.
Формат 60 х 8416
Бумага офсетная
Печать офсетная
Усл. печ. л. 3,48
Заказ № 4946
Тираж 100 экз.

Оригинал-макет подготовлен
в библиотечном издательском центре СКГА
369000,г. Черкесск, ул. Ставропольская 36