МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

СЕВЕРО-КАВКАЗСКАЯ ГОСУДАРСТВЕННАЯ АКАДЕМИЯ

З.О. Коркмазова
Р.И. Селимсултанова,

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

Учебно-методическое пособие
для обучающихся по направлению подготовки
01.03.04 «Прикладная математика»

Черкесск
2023

УДК 517
ББК 22.16
К 66

Рассмотрено на заседании кафедры «Математика»
Протокол №1 от «02» 09. 2022 г.
Рекомендовано к изданию редакционно-издательским советом СКГА.
Протокол №24 от «26» 09. 2022 г.

Рецензенты:
Токова А.А.– к.ф.м.н., доцент,
Шапошникова О.И.– к.ф.м.н., доцент

К66 **Коркмазова, З.О.** Математический анализ: учебно-методическое пособие для обучающихся по направлению подготовки 01.03.04 «Прикладная математика» / З.О. Коркмазова, Р.И. Селимсултанова, – Черкесск: БИЦ СКГА, 2023. – 72 с.

Учебно-методическое пособие к выполнению расчетно-графических работ составлен в соответствие с требованиями ФГОС3 ВО и программой дисциплины «Математический анализ» для обучающихся первого курса направления подготовки 01.03.04. «Прикладная математика». Они содержат примеры решений задач расчетно-графических работ, задания расчетно-графических работ, вопросы к коллоквиуму, а также вопросы к экзамену.

УДК 517
ББК 20.16

СОДЕРЖАНИЕ

Введение 4
1. Функция. Способы задания функции. 6
2. Пределы и непрерывность функции. 12
3. Непрерывность функции. 17
4. Определение производной 21
5 Дифференциал и его приложение 21
6. Исследование функций с помощью производной 27
Вопросы на коллоквиум за первый семестр 27
2 семестр
1. Интегралы 29
1.1. Вопросы на коллоквиум 29
1.2. Решение типовых примеров 30
2. Ряды 36
2.1. Вопросы на коллоквиум 36
2.2. Решение типовых примеров 36
3.Функция нескольких переменных 41
3.1. Вопросы на коллоквиум 41
3.2. Решение типовых примеров 41
Требования к оформлению расчетно-графической работы 44
Задания для расчетно-графических работ за 1 семестр. 45
Задания для расчетно-графических работ за 2 семестр 50
Вопросы на экзамен за 1 семестр 64
Вопросы на экзамен за 2 семестр 67
Список использованных источников 67

ВВЕДЕНИЕ

Настоящее учебное пособие является справочным пособием по решению примеров и задач из расчетно-графических работ по дисциплине «Математический анализ» для обучающихся по направлению подготовки 01.03.04 Прикладная математика. Содержание пособия охватывает следующие разделы: функции и пределы, производная и ее применение, неопределенный интеграл, определенный интеграл, функции нескольких переменных, ряды, ряды Фурье.

В каждом раздела приводится контрольные вопросы на коллоквиум. Подробно разъясняется решение подобных задач из расчетно-графической работы и методы их решения. После всех разделов приводятся задачи расчетно-графической работы с индивидуальными заданиями для самостоятельного решения, а также вопросы на экзамен по дисциплине «Математический анализ».

1. ФУНКЦИЯ

Метод координат представляет собой один из наиболее универсальных математических методов и используется для решения самых разнообразных задач. В основе метода лежит понятие **системы координат** на прямой, плоскости и в пространстве.

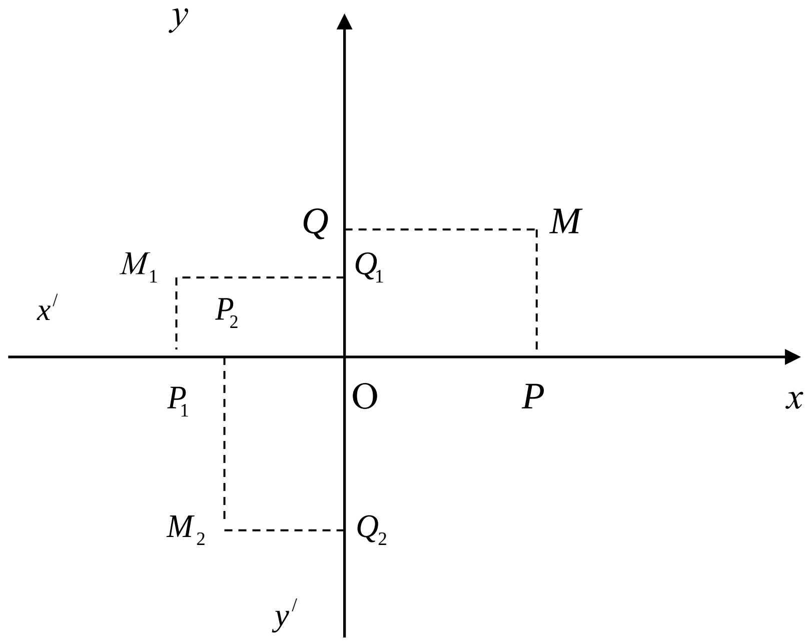


Рисунок 1 – Система координат

Две взаимно перпендикулярные прямые xx' и yy' образуют **прямоугольную (декартову)** систему координат. Прямые xx' и yy' называют **осями координат**, одна из них xx' (обычно изображается горизонтально) называется **осью абсцисс**, другая yy' – **осью ординат;** точка О их пересечения **– началом координат.** На каждой из осей выбирается по произвольному масштабу.

Взяв произвольную точку М на плоскости, в которой расположены оси, найдем ее проекции Р и Q на координатной оси. Отрезок ОР на оси абсцисс, также число х, измеряющие его в избранном масштабе, называется **абсциссой** точка М; отрезок OQ на оси ординат, а также измеряющее его число у – **ординатой** точки М. Величины х = ОР и у = OQ называются **прямоугольными координатами** (или просто **координатами**) точки М. Они считаются положительными или отрицательными в соответствии с заранее установленными направлениями положительных отрезков на каждой оси. Обычно на оси абсцисс положительные отрезки откладываются вправо, а на оси ординат – вверх от начала координат.

На рисунке 1 (масштабы на обеих осях одинаковы) точка М имеет абсциссу х = 3 и ординату у = 2 точка M_1 - абсциссу x_1 = -2, ординату y_1 = 1. Сокращено это записывается так: М (3;-2); M_1 (-2;1); M_2 (-1,5;-3) и т.д.

Каждой точке плоскости соответствует одна пара чисел х; у. Каждой паре действительных чисел х; у соответствует одна точка М.

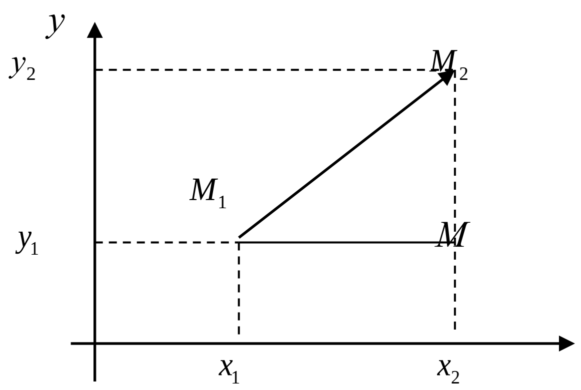


Рисунок 2

Каждой точке плоскости соответствует одна пара чисел x; y. Каждой паре действительных чисел x; y соответствует одна точка М.

В школе было доказано, что расстояние между двумя точками плоскости M_1 $(x_1;\ y_1)$ и M_2 $(x_2;\ y_2)$ вычисляется по формуле $M_1 M_2 = \sqrt{(x_2 - x_2)^2 + (y_2 - y_1)^2}$. Доказательство основано на применении теоремы Пифагора к прямоугольному треугольнику $M M_1 M_2$ (рисунок 2).

СПОСОБЫ ЗАДАНИЯ ФУНКЦИИ

1. Наиболее удобным для изучения свойства функции является **аналитический** способ задания (если он возможен). Этот способ заключается в том, что правило составления задается в виде аналитического выражения, или формулы, содержащей указания на те операции или действия, которые надо произвести с аргументом x, чтобы получить соответствующее значение y = f (x) функции f. Например, если функция f определена формулой $f(x) = \dfrac{1}{x^3 - 1}$, то здесь указано правило: каждому значению x≠1 ставится в соответствие частное отделения единицы на разность между третьей степенью числа x и единицей.

Заметим, что правило, характеризующее одну и ту же функцию может задаваться разными формулами. Так, функции f (x)=cos x ($x \in [0; \frac{\pi}{2}]$) и g (x) = $\sqrt{1 - \sin^2 x}(x \in [0; \frac{\pi}{2}])$ совпадают, так как правило, определяющее их, одно и то же хотя и выражено разными символами. В то же время функции f (x)=cos x ($x \in [0; \frac{\pi}{2}]$) и h (x)=cos x ($x \in [0; \pi]$) различны.

Часто рассматриваются функции, которые на разных частях множества своего существования задаются разными формулами.

Пример 1 Функция φ определена на промежутке [0;1] следующим образом: φ (x) = $\begin{cases} 0, \ \textit{если} \ 0 \le x < 1; \\ 1, \ \textit{если} \ x = 1 \end{cases}$

Пример 2 Функция g определена на промежутке (-∞; +∞) следующим образом:

$$g\,(x) = \begin{cases} x^2 - 1, \text{ если } x \in (-\infty; -1) \cup (1; \infty); \\ 1 - x^2, \text{ если } x \in [-1; 1] \end{cases}$$

областью определения функция g разбита на две части: одна часть состоит из интервалов (-∞; -1) и (+1; ∞), другая – из обрезка [-1; 1]. Формулы, определяющие функцию g, различные на каждой из этих частей.

Пример 3 Функция Дирихле:

$$D\,(x) = \begin{cases} 1, \text{ если } x \text{ рационально} \\ 0, \text{ если } x \text{ иррационально} \end{cases}$$

Пример 4 Функция «**СИГНУМ**»**

$$\operatorname{Sgn} x = \begin{cases} 1, \text{ если } x > 0; \\ 0, \text{ если } x = 0; \\ -1, \text{ если } x < 0 \end{cases}$$

2. Иногда бывает так, что нужную нам функцию не удается задать с помощью формулы (или формул), содержащей известные нам символы. В этом случае правило, характеризующее функцию, описывается словами. Это **описательный способ** задания функции.

3. В естественных науках, технике и других областях человеческой деятельности зависимость между величинами часто устанавливается экспериментально или путем наблюдений. Эту зависимость удобно задавать таблицей, где просто составлены полученные из опыта данные. Это **табличный способ** задания функции. Этот способ заключается в том, имеется таблица, в которой даны значения аргумента и соответствующие им значения функции. Например, в таблице приведены результаты измерения силы звука самолета, (она обозначается V и измеряется в децибелах (дб)) на различных расстояниях от точки взлета (расстояние обозначается, как обычно, через S и измеряется в километрах):

S	1	2,5	3	5,5	7	8,5	10	15	20	30
V	115	108	102	98	93	89	87	72	60	65

Заметим, что область определения функции, заданной таблицей, является «не сплошным» множеством (промежутком), а содержит лишь некоторое фиксированное число элементов.

4. В некоторых случаях функция задается **графиком**. Но не всякое множество может служить графиком функции.

О графическом способе задания функции и свойствах графиков функции мы расскажем в следующем параграфе.

ГРАФИЧЕСКОЕ ИЗОБРАЖЕНИЕ ФУНКЦИИ

Чтобы графически изобразить заданную функциональную зависимость, на оси абсцисс отличаем ряд значений x_1; x_2; x_3;… одной из переменных x (обычно аргументы) и строим ординаты y_1; y_2; y_3;…, представляющие соответствующие значения другой переменной у (функции), получим ряд точек M_1 $(x_1; y_1)$; M_2 $(x_2;\ \ y_2)$; $M_3(x_3;\ y_3)$;…. Соединяя их на глаз плавной кривой линией, получим график данной функциональной зависимости.

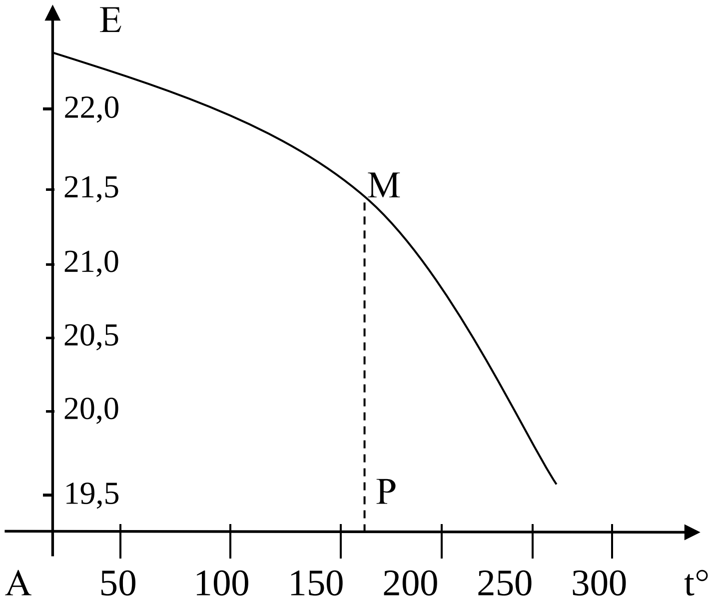


Рисунок 3– Графическое изображение функции

Преимуществом графического изображения в сравнении с табличным является его наглядность; недостатком – малая степень точности. Большое практическое значение имеет удачный выбор масштаба.

На рисунок 3 графически изображена функциональная зависимость между модулем упругости (модулем Юнга) кованного железа У и температурой железа t Масштаб абсцисс (t) и ординат (E) показаны числовыми промежутками. Начало координат и ось абсцисс на чертеже не показаны, чтобы не увеличивать без нужды размеры графика.

График рисунка 3 составлен на основании следующей таблицы:

t° C	0	50	100	150	200	250
$E\,\frac{m}{см^2}$	21,5	21,4	21,2	20,9	20,5	19,9

По графику можно найти (приближенно) значение функции и для тех значений аргумента, которые в таблице не помещены. Например, пусть требуется найти значение t при t° = 170° C. Отметив на оси абсцисс (или на прямой At, ей параллельной) абсциссу t = AP = 170 и поставив перпендикуляр PM, найдем ординату E = PM = 20,745, т.е. M (170; 20,75).

Нахождение промежуточных значений функции по ее графику называется **графической интерполяцией**.

На практике всякий график строится «по точкам», т. е. от руки проводится плавная линия, соединяющая ряд последовательных точек M_1; M_2; M_3;…. При этом теоретически никогда не исключается возможность, что промежуточные точки, не нанесенные на график лежат очень далеко от проведенной плавной кривой. Ввиду этого теоретически следует определить график как **геометрическое место точек М (х; у), координаты которых связаны данной функциональной зависимостью.**

О НЕКОТОРЫХ КЛАССАХ ФУНКЦИЙ

Рассмотрим функцию f, определенную на некотором промежутке X.

Если f $(x_1) \le$ f (x_2) при $x_1 \le x_2$ $(x_1;\ x_2 \in$ X), то функция f называется **возрастающей.**

Если f $(x_1) \ge$ f (x_2) при $x_1 \le x_2$ $(x_1;\ x_2 \in$ X), то функция f называется **убывающей.**

Если f $(x_1) <$ f (x_2) при $x_1 < x_2$ $(x_1;\ x_2 \in$ X), то функция f – **строго возрастающая**.

Если f $(x_1) >$ f (x_2) при $x_1 < x_2$ $(x_1;\ x_2 \in$ X), то функция f – **строго убывающей.**

Возрастающая или убывающая функции называются **монотонными**, а строго возрастающая или строго убывающая – строго монотонной.

Пусть теперь функция f определена на некотором симметрическом промежутке X. (**Симметричным** называется любой из промежутков вида ((-а; а); [а; а]; а>0; и (-∞; +∞)). Тогда, если для любого х и X f (-x)=f(x), что функция f называется **четной**, если же f (-x) = -f (x), то – **нечетной**. Если же не выполняется ни одно из этих условий, то функция называется **функцией общего вида** (или ни четной, ни не четной).

Нетрудно показать, что **график четной функции симметричен относительно оси ординат**, а **график нечетной функции симметричен относительно начала координат.**

Функция f, определенная на некотором множестве X, **называется ограниченной**, если существует число L>0 такое, что $|$f (x)$| \le$ L для любого х $\in$ X.

Функция f, определенная на некотором множестве X, **называется периодической**, если существует такое число T$\neq$ 0, то для любого х $\in$ X: 1) х+Т $\in$ X; 2) х-Т $\in$ X; 3) f (x+T)=f (x). Число Т при этом называется **периодом** функции f.

Заметим, что если число Т является периодом функции f, то и число $\pm T_w$ (n$\in$N) также является ее периодом.

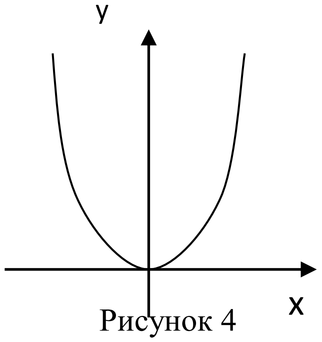


Рисунок 4

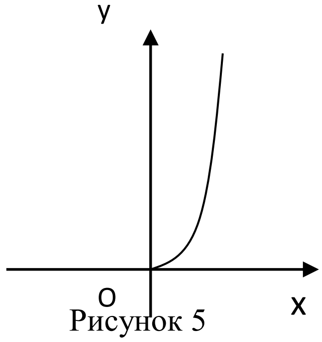


Рисунок 5

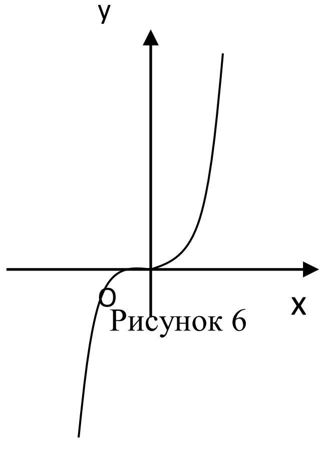


Рисунок 6

ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ ФУНКЦИИ

Кроме функций, перечисленных выше, изучаются еще тригонометрические функции синус, косинус, тангенс, котангенс, секанс и косеканс, причем последние четыре просто выражаются через синус и косинус: tg x = $\frac{\sin x}{\cos x}$; ctg x = $\frac{\cos x}{\sin x}$; sec x = $\frac{1}{\cos x}$; cosec x = $\frac{1}{\sin x}$

Функция называется **явной,** если она задана формулой, в которой правая часть не содержит зависимой переменной; например, функция $y = x^2$-5x+4 – явная.

Функция y аргумента x называется **неявной**, если она задана уравнением F (x; y) = 0, не разрешенным относительно зависимой переменной. Например, функция y ($y \geq 0$), заданная уравнением $x^3 + y^2 - y \ln x + x \sin y = 0$ неявная, так как она не разрешима ни относительно x, ни относительно y.

Из основных функций новые функции могут быть получены двумя способами при помощи: а) алгебраических действий; б) операций образования сложенной функции.

Пусть функция y = f (u) есть функция от переменной U, определенной на множестве U с областью значений Y, а переменная U в свою очередь является функцией U = φ(x) от переменной x, определенной на множестве X с областью значений U. Тогда заданная на множестве X функция y = f (φ (x)) называется **сложной** функцией (или **композицией** функций, суперпозицией функций, **функцией от функции**).

Например, y = log sin x – сложная функция, так как ее можно представить в виде y = lg U, где U = sin x.

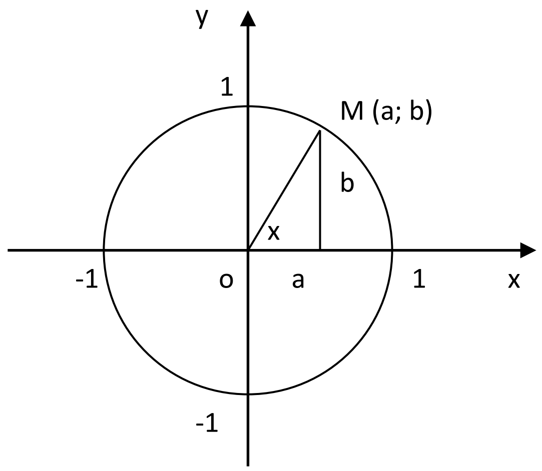


Рисунок 7

Определение. Функции, построенные из элементарных функций с помощью конечного числа алгебраических действий и конечного числа операций образования сложной функции, называется **элементарными**.

Например, функция у = $\frac{\sqrt{x}\cdot\sin^3 x}{\sqrt[5]{x+5+7^{3x-7}}}+\sqrt{\ln^{3x}-1}$ является элементарной, так как здесь число операций сложения, вычитания, умножения, деления и возведения в степень, и образования сложной функции $\sin^3 x$; 7^{3x-7}; $\sqrt{\ln^3 x-1}$ конечно.

Примерами неэлементарных функций являются функции у = |х|; у = [х]– целая часть х; у = {х} – дробная часть х и др.

Рассмотрим более подробно некоторые элементарные функции – тригонометрические. По определению sin x = a; cos x = b, где (a; b) координаты точки М, которая лежит на окружности единичного радиуса с центром в начале координат (рисунок 7), а х – угол, образованный вектором $\overrightarrow{OM}$ и осью Ох.

Если точка М сделает полный оборот и придет в исходное положение, то угол х увеличится на 2π*. Но числа a и b в результате этой процедуры, не изменяются. Отсюда следует, что синус, косинус и другие тригонометрические функции будут **периодическими функциями с периодом Т = 2π**, т.е. для них

sin x = sin (x+2π)+…+sin (x+2πk); k ∈ z;

cos x= cos (x+2π)+cos (x+4π)+…+cos (x+2πk); k ∈ z.

Периодичность – важнейшее специфическое свойство тригонометрических функций. Другие функции – степенная, показательная, логарифмическая – периодическими не являются. С помощью тригонометрических функций описываются самые разнообразные периодические процессы, происходящие в живой и не живой природе: колебательные и вращательные движения, движение планет, биологический ритм и т.п.

Функции, как и числа, можно складывать, вычитать, умножать и делить. Например, если разделить одну линейную функцию на другую, то получим функцию, которая получила название **дробно-линейной или дробно-рациональной.** Например, у = $\frac{ax+b}{cx+d}$, (cx+d ≠ 0; a; b; c и d – любые рациональные числа).

Если сложить несколько степенных функций вида у = ax^n, где n ∈ N или n = 0, то получим **многочлен**. Например, у = ax³+ bx²+ cx +c – многочлен 3-й степени.

Аналогично получается многочлен любой степени n: у = $a_0x^4+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+...+a_{n-1}x+a_n$. Многочлены в математике играют важную роль, и не только в математике, но и в ее приложениях.

Карл Вейерштрасс – выдающийся математик XIX века, доказал, что любую непрерывную функцию можно приближать с любой степенью точности. В частности, приближенное значение функций находят по формулам:

$$e^x \approx 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{4!}x^4 + \ldots + \frac{1}{n!}x^n + \ldots$$

$$\sin x \approx x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \ldots$$

$$\cos x \approx x - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{-2n}}{(2n)!} + \ldots$$

$$(1+x)^m \approx 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{3!}x^3 + \ldots + \frac{m(m-1)(m-2)\ldots(m-n+1)}{n!}x^n + \ldots$$

$$\ln(1+x)^m \approx x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots(-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} + \ldots$$

Чем больше n (число слагаемых), тем выше точность, т.е. тем меньше приближенное значение отличается от ее истинного значения.

2. ПРЕДЕЛЫ И НЕПРЕРЫВНОСТЬ ФУНКЦИИ

Теперь остановимся на примерах вычисления пределов, когда теоремы о связи предела с алгебраическими операциями непосредственно применить нельзя.

Если ищется предел при $x \to x_0$ дроби, числитель и знаменатель которой многочлены, обращающиеся в нуль, то, используя теорему Безу, легко показать, что числитель и знаменатель делится без остатка на x-x_0, т.е. данную дробь всегда можно преобразовать тождественно, сократив на x-x_0 (здесь нет сокращения на нуль, так как $x \neq x_0$). Если и после сокращения на x-x_0 числитель и знаменатель обращается в нуль при $x \to x_0$, то надо проводить повторное сокращение на x-x_0 и т.д. Приведем соответствующие примеры.

Пример 5 $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x + x^2 + x^3 - 3}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1}\frac{(x-1)(x^2 + 2x + 3)}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1}(x^2 + 2x + 3) = 1^2 + 2\cdot 1 + 3 = 6.$

Пример6 $\lim\limits_{x\to -3}\frac{x^3 + 27}{x+3} = \lim\limits_{x\to -3}\frac{(x+3)(x^2 - 3x + 9)}{x+3} = \lim\limits_{x\to -3}(x^2 - 3x + 9) = (-3)^2 - 3\cdot(-3) + 9 = 27.$

Пример 7

Пусть m и n натуральные числа (m≠n). Тогда имеем:

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^m - 1}{x^n - 1} = \lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x^{m-1} + x^{m-2} + \ldots + x + 1)}{(x-1)(x^{n-1} + x^{n-2} + \ldots + x + 1)} = \lim_{x\to 1}\frac{x^{m-1} + x^{m-2} + \ldots + x + 1}{x^{n-1} + x^{n-2} + \ldots + x + 1} = \lim_{x\to 1}\frac{\overbrace{1 + 1 + \ldots + 1}^{m\ раз}}{\underbrace{1 + 1 + \ldots + 1}_{n\ раз}} = \frac{m}{n}.$$

Прием, примененный в рассмотренных примерах позволяет вычислить и пределы некоторых выражений, у которых в числителе и знаменателе фигурируют тригонометрические функции или выражения.

Пример 8

$$\lim_{x\to \pi}\frac{\sin^2 x}{1 + \cos^3 x} = \lim_{x\to \pi}\frac{1 - \cos^2 x}{1 + \cos^3 x} = \lim_{x\to \pi}\frac{(1 + \cos x)(1 - \cos x)}{(1 + \cos x)(1 - \cos x + \cos^2 x)} = \lim_{x\to \pi}\frac{1 - \cos x}{1 - \cos x + \cos^2 x} = \frac{2}{3}.$$

Пример 9 $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{1-\sin x}{\cos^2 x}=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{1-\sin x}{1-\sin^2 x}=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{1-\sin x}{(1-\sin x)(1+\sin x)}=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{1}{1+\sin x}=\frac{1}{2}.$

Пример 10

Найдем $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{6}}\frac{1-4\sin^2 x}{\cos 3x}.$

Решение: Проведем тождественные преобразования

$$1-4\sin^2 x=4\left(\frac{1}{4}-\sin^2 x\right)=4\left(\frac{1}{2}-\sin x\right)\cdot\left(\frac{1}{2}+\sin x\right);$$

$$\cos 3x=4\cos^3 x-3\cos x=4\cos x\left(\cos^2 x-\frac{3}{4}\right)=4\cos x\left(\cos x-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\cdot\left(\cos x+\frac{\sqrt{3}}{2}\right).$$

отсюда, учитывая, что $\frac{1}{2}=\sin\frac{\pi}{6}$ *и* $\frac{\sqrt{3}}{2}=\cos\frac{\pi}{6}$, имеем:

$$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{6}}\frac{1-4\sin^2 x}{\cos 3x}=\frac{\left(\sin\frac{\pi}{6}-\sin x\right)\cdot\left(\sin\frac{\pi}{6}+\sin x\right)}{\cos x\left(\cos x-\cos\frac{\pi}{6}\right)\cdot\left(\cos x+\cos\frac{\pi}{6}\right)}=-\frac{1}{\cos x}.$$

Следовательно, искомый предел есть $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{6}}\frac{1-4\sin^2 x}{\cos 3x}=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{6}}\left(-\frac{1}{\cos x}\right)=-\frac{2}{\sqrt{3}}.$

В связи с последним примером, заметим, что ели выражение предел которого ищется содержит сумму или разность тригонометрических функций, то часто бывает полезным тождественно преобразовывать их в произведение по известным тригонометрическим формулам.

Рассмотрим теперь случай, когда ищется предел при $x\to\infty$ или $x\to-\infty$ дроби. Числитель и знаменатель которой есть многочлены. Для нахождения предела в этом случае можно тождественно преобразовать дробь так, чтобы были применимы теоремы (1 – 5) из 3.3 п. 3^0, или заменить предельный переход при $x\to\infty$ ($x\to-\infty$) предельным переходом при $\alpha\to 0$, получив, что $\alpha=\frac{1}{x}$.

Пример 11

$$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^3+x^2+5}{3x^3+x+1}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2+\frac{1}{x}+\frac{5}{x^2}}{3+\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x^3}}=\frac{2}{3}\ \text{или}\ \lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^3+x^2+5}{3x^3+x+1}=\lim\limits_{\alpha\to 0}\frac{\frac{2}{\alpha^3}+\frac{1}{\alpha^2}-5}{\frac{3}{x^3}+\frac{1}{\alpha}-1}=\lim\limits_{\alpha\to 0}\frac{2+\alpha+5\alpha^3}{3+\alpha-\alpha^3}=\frac{2}{3}.$$

Чтобы найти предел дроби, содержащей иррациональные выражения, необходимо тождественно преобразовать дробь, перенеся иррациональность из числителя в знаменатель или из знаменателя в числитель, и после этого сделать необходимые упрощения. Если же имеется предел выражения, содержащего иррациональность (но не являющегося дробью), то можно поступить аналогично, считая данное выражение дробью со знаменателем, равным единице.

Пример 12 Найдем $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{x^2+3}-3}{x-2}$.

Решение: Проведем преобразования: $\dfrac{\sqrt{x^2+3}-3}{x-2}=\dfrac{\left(\sqrt{x^2+3}-3\right)\cdot\left(\sqrt{x^2+3}+3\right)}{(x-2)\cdot\left(\sqrt{x^2+3}+3\right)}=$

$$=\frac{x^2-4}{(x-2)\cdot\left(\sqrt{x^2+3}+3\right)}=\frac{x+2}{\sqrt{x^2+5}+3};$$

откуда $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{x^2+3}-3}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x+2}{\left(\sqrt{x^2+3}+3\right)}=\dfrac{2+2}{\sqrt{4+5}+3}=\dfrac{4}{6}=\dfrac{2}{3}$.

Пример 13

$$\lim_{x\to 3}\frac{\sqrt{3x+7}-\sqrt{2x+10}}{\sqrt{4x+13}-\sqrt{x+22}}=\lim_{x\to 3}\frac{\left(\sqrt{3x+7}-\sqrt{2x+10}\right)\cdot\left(\sqrt{3x+7}+\sqrt{2x+10}\right)\cdot\left(\sqrt{4x+13}+\sqrt{x+22}\right)}{\left(\sqrt{4x+13}-\sqrt{x+22}\right)\cdot\left(\sqrt{3x+7}+\sqrt{2x+10}\right)\cdot\left(\sqrt{4x+13}+\sqrt{x+22}\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 3}\frac{(x-3)\cdot\left(\sqrt{4x+13}+\sqrt{x+22}\right)}{3(x-3)\left(\sqrt{3x+7}+\sqrt{2x+10}\right)}=\lim_{x\to 3}\frac{\sqrt{4x+13}+\sqrt{x+22}}{3\left(\sqrt{3x+7}+\sqrt{2x+10}\right)}=\frac{5}{12}.$$

Пример 14 Найдем $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x-2}-\sqrt{x}\right)$.

Решение: Представим данный предел в виде дроби:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x-2}-\sqrt{x}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(\sqrt{x-2}-\sqrt{x}\right)}{1}=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(\sqrt{x-2}-\sqrt{x}\right)\cdot\left(\sqrt{x-2}+\sqrt{x}\right)}{\sqrt{x-2}+\sqrt{x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{-2}{\sqrt{x-2}+\sqrt{x}}=0.$$

Пример 15 Найдем $\lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{1}{x-2}-\dfrac{4}{x^2-4}\right)$.

Решение: Так как $\dfrac{1}{x-2}-\dfrac{4}{x^2-4}=\dfrac{x-2}{x^2-4}=\dfrac{1}{x+2}$; искомый предел равен следующему $\lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{1}{x-2}-\dfrac{4}{x^2-4}\right)=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{1}{x+2}=\dfrac{1}{4}$.

Мы рассмотрим только два самых важных предела, которые называются *замечательными пределами.*

1^0 Первым замечательным пределом называется $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$ (1)

Для доказательства формулы (1) рассмотрим круг радиуса R с центром в точке O (рисунок 8). Пусть OB – подвижный радиус, образующий угол x $\left(0<x<\dfrac{\pi}{2}\right)$ с осью Ox. Из геометрических соображений следует, что площадь треугольника OAB меньше площади сектора AOB, которая в свою очередь меньше площади прямоугольного треугольника AOC, то есть $S_{\Delta AOB}<S_{сек\ AOB}<S_{\Delta AOC}$. Так как

$$S_{\Delta AOB}=\frac{1}{2}R\cdot R\cdot\sin x=\frac{1}{2}R^2\sin x;\ S_{сек\ AOB}=\frac{1}{2}R^2x;\ S_{\Delta AOC}=\frac{1}{2}AO\cdot OC=\frac{1}{2}AO\cdot\left(AO\cdot tgx\right)=\frac{1}{2}R^2tgx,$$

то имеем $\dfrac{1}{2}R^2\sin x<\dfrac{1}{2}R^2x<\dfrac{1}{2}R^2tgx,$ откуда, разделив части двойного неравенства на $\dfrac{1}{2}R^2\sin x>0,$ получим $1<\dfrac{x}{\sin x}<\dfrac{1}{\cos x}$, или $\cos x<\dfrac{\sin x}{x}<1.$

Так как функции cos x и $\frac{\sin x}{x}$ четные, то полученные неравенства справедливы и при $-\frac{\pi}{2} < x < 0$. Переходя к пределу при x→0, получим $\lim\limits_{x\to 0} 1 = 1$, $\lim\limits_{x\to 0}\cos x = 1$.

На основании признака существования предела промежуточной функции

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1.$$

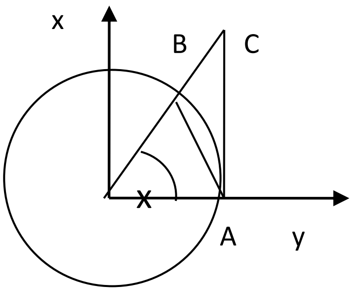


Рисунок 8

Пример 16 Найдем $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 6x}{4x} = 1.$

Решение: Так как $\frac{\sin 6x}{4x} = \frac{3\cdot\sin 6x}{3\cdot 4x} = \frac{3\sin 6x}{2\cdot 6x}$, то $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 6x}{4x} = \frac{3}{2}$, $\frac{3}{2}\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 6x}{6x} = \frac{3}{2}\cdot 1 = \frac{3}{2}$.

Пример 17 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2} = \frac{1}{2}\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\sin^2\frac{x}{2}}{x^2}\right)^2 = \frac{1}{2}\cdot 1^2 = \frac{1}{2}.$

Пример18

$$\lim_{x\to 0}\frac{tgx-\sin x}{2x^3} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{\sin x}{\cos x}-\sin x}{2x^3} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin x(1-\cos x)}{2x^3\cos x} = \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\cos x}\cdot\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{1-\cos x}{2x^2}\right) =$$

$$= \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\cos x}\cdot\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{\sin^2\frac{x}{2}}{x^2}\right) = \lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2\frac{x}{2}}{4\cdot\frac{x^2}{2}} = 1\cdot 1\cdot\frac{1}{4} = \frac{1}{4}.$$

2 Вторым замечательным пределом называется $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$ (2)

Чтобы доказать равенство (2), вспомним, прежде всего, что предел не зависит от выбора последовательности значений переменного, стремящегося к бесконечности. Составим эту последовательность из натуральных чисел 1; 2; 3; … и найдем соответствующие функции

$$f(x)=\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}: f(1)=\left(1+\frac{1}{1}\right)^{1}=2;\ f(2)=\left(1+\frac{1}{2}\right)^{2}=\left(\frac{3}{2}\right)^{2};\ f(3)=\left(1+\frac{1}{3}\right)^{3}=\left(\frac{4}{3}\right)^{3};\ \ldots;\ f(n)=\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}.$$

Теперь воспользуемся биномом Ньютона :

$$(a+b)^{n}=a^{n}+n\cdot a^{n-1}b+\frac{n(n-1)}{2!}a^{n-2}b^{2}+\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}a^{n-3}b^{3}+\ldots+\frac{n(n-2)(n-2)\ldots\cdot 2}{(n-1)!}ab^{n-1}+b^{n}$$

Подставляя в выражение $f(n)=\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}$ вместо a единицу, а вместо b дробь $\frac{1}{n}$, мы получим следующее:

$$f(n)=2+\frac{1}{2!}\cdot\frac{n-1}{n}+\frac{1}{3!}\cdot\frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-2}{n}+\frac{1}{4!}\cdot\frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-2}{n}\cdot\frac{n-3}{n}+\ldots+\frac{1}{(n-1)!}\cdot\frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-2}{n}\cdot\ldots\cdot\frac{2}{n}+$$

$$+\frac{1}{n!}\frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-2}{n}\cdot\ldots\cdot\frac{1}{n}$$

(3)

Каждая из дробей $\frac{n-1}{n};\frac{n-2}{n};\frac{n-3}{n};\ldots$ меньше единицы. Поэтому, если в последней сумме эти дроби заменить единицами, то получим число, большее

$$f(n):\ f(n)<2+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\ldots+\frac{1}{n} \qquad (4)$$

Вернемся теперь снова к сумме (3). В ней все слагаемые положительные, поэтому если часть последних слагаемых отбросить и оставить k первых слагаемых, то сумма уменьшится:

$$2+\frac{1}{2!}\cdot\frac{n-1}{n}+\frac{1}{3!}\cdot\frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-2}{n}+\ldots+\frac{1}{k!}\cdot\frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-2}{n}\cdot\ldots\cdot\frac{n-k+1}{n}<f(n) \qquad (6)$$

Устремим в этом неравенстве n к бесконечности. Так как каждая из дробей $\frac{n-1}{n};\frac{n-2}{n};\frac{n-3}{n};\ldots$ стремится при этом к единице, то в результате получится такое неравенство: $2+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\ldots+\frac{1}{k!}\le\lim\limits_{x\to\infty}f(n)$. Из вышеуказанного вытекает, что k – число слагаемых слева – может быть любым, поэтому неравенство сохранится, если k устремить в бесконечность. Но тогда слева получится бесконечный ряд, то есть число e. Таким образом,

$$e\le\lim_{x\to\infty}f(n) \qquad (7)$$

Из неравенств (6) и (7) следует, что $\lim\limits_{x\to\infty}f(n)=e$, что и требовалось доказать.

Число e (число Эйлера) играет весьма важную роль в математическом анализе. График функции $y=e^{x}$ получил название *экспоненты* (рисунке 9). Широко используются логарифмы по основанию e, называемые *натуральными*, которые обозначаются символом: $log_e x=ln\ x$.

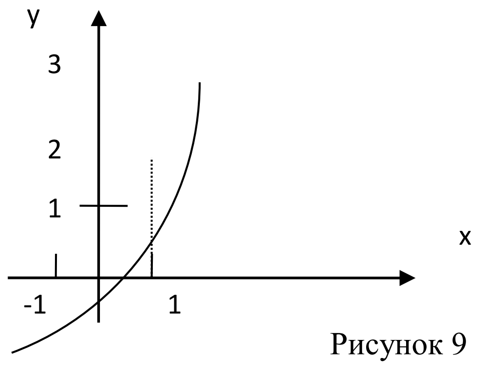


Рисунок 9

3 НЕПРЕРЫВНОСТЬ ФУНКЦИИ

1. Если аргумент функции получает приращение $\Delta x = x_2 - x_1$, что значение функции при новом значении аргумента равно $f(x+\Delta x)=y+\Delta y$. Отсюда приращение функции

$\Delta y= f(x+\Delta x) - f(x)$, т.е. приращение функции равно разности наращенного значения функции (при наращенном значении аргумента) и начального значения функции.

Приращение аргумента может быть не только положительным, но и отрицательным числом.

2. Определение непрерывности функции:

а) функция $y=f(x)$ непрерывна в точки $x=a$, если пределы слева и справа равны и равны значению в этой точке, т.е. $\lim\limits_{x\to a-0} f(x)= \lim\limits_{x\to a+0} f(x)=f(a)$.

б) функция $y=f(x)$ непрерывна в точке $x=a$, если она определена в этой точке и если бесконечно малому приращению аргумента соответствует бесконечно малое приращение функции, т.е. $\lim\limits_{\Delta x\to 0} \Delta y=0$ вблизи точки а.

3. ^{O} Значения аргумента, которые не удовлетворяют условиям непрерывности, называют точками разрыва функции. При этом различают два рода разрыва функции. Если при $x \to a$ слева функция имеет конечный предел k_1, а при $x \to a$ справа функция имеет конечный предел k_2 и $k_2 \neq k_1$, то говорят что функция при $x=a$ имеет <u>разрыв первого рода</u>.

Разность $|k_1 - k_2|$ определяет скачек функции в точке $x=a$. Значение функции при $x=a$ при этом может быть равно какому угодно числу k_3.

Если $k_1 = k_2 \neq k_3$, то говорят, что функция имеет в точке а <u>устранимый разрыв</u>.

Если при $x \to a$ справа и слева предел функции не существует или равен бесконечности,

т.е. $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\infty$, то говорят, что при $x=a$ функция имеет <u>разрыв второго рода</u>.

Решение типовых примеров.

№1 Вычислить четность (нечетность)функции: а) f(x)=x-ctg ^{3} x; б)y=x$\bullet \frac{2^x+1}{2^x-1}$

Решение: а)f(-x)=-x-ctg ^{3} (-x)=-x+ctg ^{3} x=-(x-ctg ^{3} x). Т.к. f(-x)=-f(x), то данная функция нечетна.

б) f(-X)=(-X)$\cdot \frac{2^{-x}+1}{2^{-x}-1}$=x$\cdot \frac{2^x+1}{2^x-1}$ (после преобразования). Т.к. f(-x)=f(x), то данная функция четная.

№2 Найти область определения функции: а)y=$\sqrt{x}$ -lg(2x-3); б)y=arccos$\frac{2x}{1+x^2}$.

Решение: а) Область определения x найдем из системы неравенств:$\begin{cases} x \geq 0 \\ 2x-3>0 \end{cases}$

Откуда x>$\frac{3}{2}$ или D(y)=$\left(\frac{3}{2};\infty\right)$.

б) Область определения найдем из неравенства$\left|\frac{2x}{1+x^2}\right| \leq 1$, откуда -1$\leq \frac{2x}{1+x^2} \leq 1$.

Т.к. при любом x 1+x ^{2} >0, то перейдем к равносильному неравенству -1-x ^{2} ≤ 1+x ^{2} , откуда

$\begin{cases} 2x \geq -1-x^2 \\ 2x \leq 1+x^2 \end{cases}$ или $\begin{cases} (1+x)^2 \geq 0 \\ (1-x)^2 \geq 0 \end{cases}$

Очевидно, что полученные неравенства справедливы при любом X т.е. область определения функции *D (y)*=(-∞;∞).

№ 3 Найти пределы:

а) $\lim\limits_{x\to 2} \frac{x^2-4}{x^2+6x-16}$; б)$\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sqrt{4-x}-\sqrt{4+x}}{3x}$; в) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin 3x+\sin 4x}{6x}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{3x^4-4x^2+1}{2+5x-2x^4}$

д) $\lim\limits_{x\to} (\frac{1}{x^2-1}-\frac{2}{x-1})$; е) $\lim\limits_{x\to\infty} (\frac{x+4}{x})^{5x}$; ж) $\lim\limits_{x\to\infty} (\frac{x+2}{x+1})^{1+3x}$.

Решение:

а) Разложим на множители числитель и знаменатель т.к. здесь неопределенность вида ($\frac{0}{0}$)

$$\lim\limits_{x\to} \frac{x^2-4}{x^2+6x-16} = (\frac{0}{0}) = \lim\limits_{x\to 2} \frac{(x-2)(x+2)}{(x-2)(x+8)} = \lim\limits_{x\to 2} \frac{x+2}{x+8} = \frac{4}{10} = 0.4.$$

б) Умножим числитель и знаменатель на выражение, сопряженное числителю:

$$\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sqrt{4-x}-\sqrt{4+x}}{3x} = (\frac{0}{0}) = \lim\limits_{x\to 0} \frac{(\sqrt{4-x}-\sqrt{4+x})(\sqrt{4-x}+\sqrt{4+x})}{3x(\sqrt{4-x}+\sqrt{4+x})} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{-2x}{3x(\sqrt{4-x}+\sqrt{4+x})} = -\frac{2}{3}$$

$$\lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{\sqrt{4-x}+\sqrt{4+x}} = -\frac{1}{6}$$

в) Применим первый замечательный предел, выполнив соответствующие преобразования:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x+\sin 4x}{6x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{6x}+\lim_{x\to 0}\frac{\sin 4x}{6x}=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{3x}+\frac{2}{3}\lim_{x\to 0}\frac{\sin 4x}{4x}=\frac{7}{6}$$

г) Разделим числитель и знаменатель на x^4 т.к. здесь неопределенность вида $(\frac{\infty}{\infty})$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^4-4x^2+1}{2+5x-2x^4}=(\frac{\infty}{\infty})=\lim_{x\to\infty}\frac{3-\frac{4}{x^2}+\frac{1}{x^4}}{\frac{2}{x^4}+\frac{5}{x^3}-2}=-\frac{3}{2},$$ т.к. величины $\frac{2}{x^4}$, $\frac{1}{x^3}$, $\frac{1}{x^2}$ есть величины при $x\to\infty$ бесконечно малые.

д) приведем к общему знаменателю, т.к. здесь неопределенность вида $(\infty-\infty)$

$$\lim_{x\to 1}(\frac{1}{x^2-1}-\frac{2}{x-1})=\lim_{x\to 1}\frac{1-2(x+1)}{x^2-1}=\lim_{x\to 1}\frac{-2x-1}{x^2-1}=\infty$$ при $x\to 1$ знаменатель стремится к 0

е) Разделим почленно на x и применим второй замечательный придел:

$$\lim_{x\to\infty}(\frac{x+4}{x})^{5x}=\lim_{x\to\infty}(1+\frac{4}{x})^{5x}=\lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{4}{x}\right)^{\frac{x}{4}}\right]^{20}=e^{20}$$ т.к. если сделать замену x=4t, то при $x\to\infty$, $t\to\infty$ и $$\lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{4}{x}\right)^{\frac{x}{4}}\right]^{20}=\lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{4}{t}\right)^{t}\right]^{20}=e^{20}$$

ж) Выделим целую часть и почленно разделим числитель на знаменатель

$$\lim_{x\to\infty}(\frac{x+1}{x+1})^{1+3x}=\lim_{x\to\infty}(\frac{x+1+1}{x+1})^{1+3x}=\lim_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x+1})^{1+3x}$$

Сделаем замену x+1=t, тогда при $x\to\infty$, $t\to\infty$ и предел примет вид при x=1-t

$$\lim_{t\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{t}\right)^{t}\right]^{3}\lim_{t\to\infty}(1+\frac{1}{t})^{-2}=e^{3}$$ т.к. второй предел неопределенности не представляет и равен 1

№ 4 Найти точки разрыва функций и определить их вид:

$$f(x)=\begin{cases}\sin 2x & \text{при } x\le 0;\\ x^3 & \text{при } 0<x\le 2,\\ \frac{3x}{x-6} & \text{при } x>2.\end{cases}$$

Решение:

Т.к. Данная функция не определена в точке x=6, то данная точка является «подозрительной» на разрыв. Вычислим односторонние пределы в этой точке

$\lim\limits_{x\to 6-0}\frac{3x}{x-6}=-\infty$; $\lim\limits_{x\to 6+0}\frac{3x}{x-6}=+\infty$. Т.к. оба предела равны бесконечности, следовательно, точка x=6 является точкой разрыва второго ряда.

Также «подозрительными» на разрыв являются те точки, в которых изменяется аналитическое выражение функции, т.е. точки x=0 и x=2. Вычислим односторонние пределы в этих точках.

Для точки x=0 имеем: $\lim\limits_{x\to 0}\sin 2x=0; \lim\limits_{x\to 0}x^3=0$, x_0 – точка непрерывности

Для точки x=2 имеем: $\lim\limits_{x\to 2-0}x^3=8$; $\lim\limits_{x\to 2+0}\frac{3x}{x-6}=-\frac{6}{4}=-\frac{3}{2}$

Односторонние пределы функции в точке x=2 существует, но не равны между собой. Следовательно, те точки являются точкой разрыва первого ряда.

Вопросы на коллоквиум

1. Понятие множеств. Операции над множествами.
2. Понятие функций. Основные свойства функций.
3. Элементарные функции. Классификация функций.
4. Применение функции в экономике.
5. Предел числовой последовательности.
6. Предел функции в бесконечности и в точке.
7. Бесконечно малые величины. Свойства бесконечно малых величин.
8. Бесконечно большие величины. Свойства бесконечно больших величин.
9. Основные теоремы о пределах. Признаки
10. Задача о непрерывном начислении процентов.
11. Первый замечательный предел.
12. Второй замечательный предел.
13. Непрерывность функции. Свойства функций непрерывных на отрезке.
14. Определение производной. Зависимость между непрерывностью и дифференцируемой функции.
15. Схема вычисления производной. Основные свойства дифференцирования.
16. Производная сложной и обратной функций.
17. Производная логарифмической функции.
18. Производная показательной функции.
19. Производная степенной функции.
20. Производная степенно-показательной функции.
21. Производные тригонометрических функций.
22. Производные неявной и параметрической заданной функции.
23. Понятие производных высших порядков.
24. Понятие дифференциала функции.
25. Применения дифференциала в приближенных вычислениях.
26. Экономический смысл производной.

27. Использование понятия производной в экономике.
28. Теорема Ферма.
29. Теорема Ролля.
30. Теорема Лагранжа.
31. Правило Лопиталя.
32. Возрастание и убывание функций.
33. Экстремум функции.
34. Наибольшее и наименьшее значение функции на отрезке.
35. Выпуклость функции. Точка перегиба.
36. Асимптоты графика функции и построение их графиков.
37. Основные понятия функции нескольких переменных.
38. Предел и непрерывность функции нескольких переменных.
39. Частные производные функций двух переменных.
40. Дифференциал функции двух переменных.
41. Производная по направлению. Градиент.
42. Экстремум функции нескольких переменных.
43. Наибольшее и наименьшее значение функции.
44. Условный экстремум. Метод множителя Лагранжа.
45. Понятие об эмпирических формулах. Метод наименьших квадратов.

4.ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПРОИЗВОДНОЙ

1.1 Дифференцируемость функции и производная. Производной функции y = f (x)называется предел отношения приращения функции к приращению аргумента, когда приращение аргумента стремиться к нулю, т.е. $y' = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$.

В основу операции по нахождению производной (дифференцированию) функции кладется ее определение.

Пример 1. При равномерном движении пройденный путь пропорционален времени, т.е. S (t) = Vt, где V – постоянная величина (скорость). Если только движение прямолинейно, но не равномерно, то скорость в каждый момент времени равная. Скорость тела в момент времени t называют мгновенной скоростью в точке t и обозначается V(t).

Предположим, что к моменту времени t тело прошло путь S (t), а к моменту времени t + Δt (Δt – малый промежуток времени) – путь S (t + Δt), тогда за время Δt оно прошло путь S(t + Δt)-S(t), и средняя скорость тела будет на этом участке ΔV. Пусть промежуток времени Δt уменьшается и стремится к нулю, т.е. $\Delta t \to 0$, тогда и путь, пройденный за это время, так же стремится к нулю, а средняя скорость V_{cp} за промежуток времени Δt стремится к скорости тела в момент времени t. Используя определение предела, можно записать: V (t) = $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{S(t+\Delta t)-S(t)}{\Delta t}$. Эта формула является строгим определением мгновенной скорости и одновременно дает способ для ее вычисления.

Отказавшись от физических терминологий, перейдем к стандартным обозначениям. Вместо «путь S(t)» будем говорить «функция f (x)», а вместо «скорость» – «производная функции f (x) в точке x».

Итак, по определению f' (x) = $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$

Это позволяет вывести свойства и установить формулы производной. Необходимые навыки для этого приобретаются на примерах дифференцирования простейших функций.

1.2º Начальные формулы производной.

а) Основные свойства дифференцирования.

1) для y = C; C' = 0 (c = const); 2) для y = x; y' = 1; 3) для y = U±V; y' = U'±V', где U = U(x), V = V (x); 4) y = mu; y' = mu' (m = const); 5) y = UV; y' = U'V+UV'; 6) y = $\dfrac{U}{V}$; y' = $\dfrac{U'V-UV'}{V^2}$; V ≠ 0.

б) Основные формулы дифференцирования

1) $(x^n)'$ = n x^{n-1}; 2) $(\sqrt{U})' = \dfrac{U'}{2\sqrt{U}}$;

3) $(U^n)' = \mathrm{n}u^{n-1}\cdot u'$; 4) $(\sqrt[n]{u})' = \dfrac{u'}{n\sqrt[n]{u^{n-1}}}$;

5) $\left(\dfrac{U}{C}\right)' = \dfrac{1}{C}U'$ (C = const) если y = f (x); A U = φ(x), то y = f (φ(x)), т.е. y – сложная функция от функции и y'=f' (U)× φ'(x)

6) $\left(\dfrac{C}{V}\right)' = \dfrac{-CV'}{V^2}$ (C = const)

1.3º Примеры

1) Используя определение производной, найти y', если y = x^2+8x+5.

▲y+Δy = $(x+\Delta x)^2+8(x+\Delta x)+5$; Δy = $((x+\Delta x)^2+8(x+\Delta x)+5)$ – $(x^2+2\Delta x\times x+\Delta x^2+8x+8\Delta x+5-x^2-8x-5 = 2x\Delta x+8\Delta x+\Delta x^2)$;

$\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{2x\Delta x+\Delta x^2+8\Delta x}{\Delta x}$ = 2x+8+Δx; $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x\to 0}$ (2x+8+Δx = 2x+8; y' = 2x+8

2) Найти производную сложной функции y = $\sqrt[4]{3-x^2}$

▲y = $\sqrt[4]{3-x^2} = (3-x^2)^{\frac{1}{4}}$; y' = $\dfrac{1}{4}(3-x^2)^{-\frac{3}{4}}(3-x^2)' = \dfrac{1}{4}(3-x^2)^{-\frac{3}{4}}\times(-2x) = -\dfrac{x}{2\sqrt[4]{(3-x^2)^3}}$

1.4ºФормулы производных от некоторых трансцендентных функций.

(sin x)' = cos x; $(a^x)' = a^x \ln a$; (ln x)' = $\dfrac{1}{x}$

$(\sin U)' = U'\cos U$; $(e^x)' = e^x$; $(\ln U)' = \dfrac{U'}{U}$;

$(\cos x)' = -\sin x$; $(e^U)' = U'e^U$; $(\log_a U)' = \dfrac{U'}{U\ln a}$

$(\cos U)' = U'\sin U$; $(\log_a x)' = \dfrac{\log_a e}{x} = \dfrac{1}{x\ln a}$

1.5º Примеры

1) Найти производные следующих функций: а) y = $\sqrt{\ln x - 1} + \ln(\sqrt{x}+1)$;

б) y = $5^{x^3}\ln^2 x$; в) y = $\dfrac{\sin^2 x}{\sqrt{\cos 2x}}$.

▲а) y = $\sqrt{\ln x - 1} + \ln(\sqrt{x}+1)$; y' = $\dfrac{1}{2\sqrt{\ln x+1}}\times(\ln x+1)' + \dfrac{1}{\sqrt{x}+1}(\sqrt{x}+1)' =$

$$\frac{1}{2\sqrt{\ln x+1}}\times(\ln x+1)' + \frac{1}{\sqrt{x}+1}(\sqrt{x}+1)' = \frac{1}{2\sqrt{\ln x+1}}\times\frac{1}{x} + \frac{1}{\sqrt{x}+1}\times\frac{1}{2\sqrt{x}} =$$

$$\frac{1}{2\sqrt{x}}\left(\frac{1}{\sqrt{x(\ln x+1)}} + \frac{1}{\sqrt{x}+1}\right);$$

б) y= $5^{x^3}\ln^2 x$; y' =

$$(5^{x^3})'\ln^2 x + 5^{x^3}(\ln^2 x)' = [5^{x^3}\ln 5(x^3)']\ln^2 x + 5^{x^3}[2\ln x(\ln x)'] =$$

$$5^{x^5}\ln 5\times 3x^2\ln^2 x + 5^{x^2}\times 2\ln x\times\frac{1}{2} = 5^{x^3}\ln x(3\ln 5x^2\ln x + \frac{2}{x});$$

в) y = $\dfrac{\sin^2 x}{\sqrt{\cos 2x}}$; y' = $\dfrac{(\sin^2 x)'\times\sqrt{\cos 2x} - \sin^2 x(\sqrt{\cos 2x})'}{(\sqrt{\cos 2x})^2}$; учитывая, что $(\sin^2 x)'$ =

2 sin x(sinx)' = 2sin x cjs x = sin2x; $(\sqrt{\cos 2x})' = \dfrac{1}{2\sqrt{\cos 2x}}\times(\cos 2x)' =$

$$\frac{1}{2\sqrt{\cos 2x}}\times(-\sin 2x)\times(21x)' = -\frac{\sin 2x}{\sqrt{\cos 2x}}.$$

Получим после преобразования y' = $\dfrac{\sin 2\times\cos^2 x}{\sqrt{\cos^3 2x}}$.

1.6ºДифференцирование неявной функции

Выше было рассмотрено дифференцирование явных функций, заданных в виде y = f (x). Рассмотрим дифференцирование неявной функции, заданной уравнением F (x; y) = 0.

Для нахождения производной функции y, заданной неявно, нужно продифференцировать обе части уравнения, рассматривая y как функцию от x, а затем из полученного уравнения найти производную y'. Фактически этим методом мы пользовались при выводе производных y = e^x; y = x^n и других.

Пример. Найти производную y' не решая уравнения x^3-x^2y-x^2y^2+a = 0 относительно y.

▲ Так как в правой части уравнения стоит нуль, а производная постоянной равна нулю, то имеем: $\frac{d}{dx}$(x^3-x^2y-x^2y^4 +a) = 0; применяя почленное дифференцирование, находим: (x^3-x^2y-x^2y^2+a)' = $(x^3)'$-$(x^2y)'$-$(x^2y^4)'$+(a)' = $3x^2$-2xy- x^2y'-2x y^4 -4x^2y^3y' = 0; Собирая в левой части члены, содержащие производную y' и перенося остальные члены в правую часть, имеем: y' (x^2+4x^2y^3) = 3x^2-2xy-2xy^4 ;

y' = $\frac{3x^2-2xy-2xy^4}{x^2+4x^2y^3}=\frac{3x-2y-2y^4}{x-4xy^3}$.

5. ДИФФЕРЕНЦИАЛ И ЕГО ПРИЛОЖЕНИЯ

Для дифференциала функции y = f (x) применяется формула *dy = f' (x)dx* или *dy = y'dx.*

Дифференциал применяется для приближенного вычисления наращенного значения функции по следующей формуле: f (x+Δx) ≈ f (x) + df (x) или *f (x-Δx) ≈ +f (x) +f' (x)Δx.*

Примеры.

1. Найти дифференциал, функции y = e^x(x+3).

▲ dy = y'dx; dy = [e^{-x}([+3))' dx ①. Найдем производную: [e^{-x}(x+3)]' = (e^{-x})' (x+3)+ +e^{-x} (x+3)'= -e^{-x} (x+3)+ e^{-x} = -e^{-x} (x+2).

Найденную производную подставим в равенство ① и получим: dy = -e^{-x} (x+2)dx.

2. Зная, что ln 99 = 4,59512, найти без таблицы ln 100, пользуясь дифференциалом логарифмической функции.

▲ Имеем y = ln x, dy = $\frac{1}{x}$Δx, значит, ln (x+Δx) ≈ lnx+$\frac{\Delta x}{x}$. В частности, при Δx = 1 формула дает: ln 100 = ln (99+1) ≈ 4,59512+$\frac{1}{99}\times 1$ ≈ 4,60522. По таблице находим ln 100 = 4,60517. Как видим, ошибка не значительна.

3. Вычислить $\sqrt{26}$.

▲ Имеем y = $\sqrt{x}$; dy = $\frac{1}{2\sqrt{x}}dx$. Пусть x = 25; Δx = 1, тогда по формуле f (x+Δx) ≈

f (x)+f''(x)Δx имеем $\sqrt{26}$ = $\sqrt{25+1}$ ≈ $\sqrt{25}$ + $\frac{1}{2\sqrt{25}}\times 1 = 5+\frac{1}{10}=5{,}1$.

По таблицам квадратов находим $\sqrt{26}$ = 5,0990, ошибка не значительна.

УРАВНЕНИЕ КАСАТЕЛЬНОЙ И НОРМАЛИ К КРИВОЙ *y = f(x)*

Уравнение касательной к кривой $y = f(x)$ в точке (x_0; y_0)имеет вид:
$y - y_0 = y_0'$ $(x - x_0)$, где $y_0' = f'(x_0)$, или $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$.

Уравнение нормали к кривой $y = f(x)$ в точке (x_0; y_0) имеет вид:
$y - y_0 = \frac{1}{y_0'}(x - x_0)$, или $(x - x_0) + y_0'(y - y_0)$, или $y = -\frac{1}{f'}(x_0)(x - x_0)$.

Примеры.

1. Составить уравнение касательной и нормами к кривой $y = \ln(x-2)$ в точке $x_0 = 3$.

▲ Определим ординату этой точки. В уравнение кривой поставим вместо x число 3; ln (3-2) = ln1 = 0; y = 0.

Далее найдем угловой коэффициент касательной в данной точке, для чего и найдем значение производной в точке (3; 0): $y' = \frac{1}{x-2}$; $y_0' = \frac{1}{3-2} = 1$. Таким образом уравнение касательной имеет вид: y-0 = 1(x-3) или x-y-3=0.

Уравнение нормали: $y - 0 = -\frac{1}{1}(x-3)$ или x+y-3 = 0.

ВОЗРАСТАНИЕ И УБЫВАНИЕ

Признаком возрастания функции $y = f(x)$ в некотором промежутке $(a; b)$ является положительное значение ее производной для всех значений x в этом промежутке, т.е. $f'(x) > 0$.

Аналогично, признаком убывания функции $y = f(x)$ служит значение производной во всех точках рассматриваемого промежутка, т.е. $f'(x) < 0$.

Другое важное приложение производной – задача о нахождении наибольших и наименьших (экстремальных) значений. Оно основано на следующем простом факте:

Если функция принимает в некоторой точке экстремальное значение, и производная в этой точке существует, то она (т.е. производная) равна нулю.

Пример. В тюрьме города Дрюкова собрались строить железную камеру для содержания особо опасных преступников. Какое наименьшее количество железа нужно для этой цели. Если по санитарным условиям высота камеры должна быть не менее 2,5 м, а ее площадь не менее 6 м²?

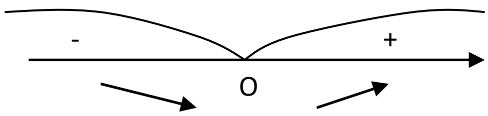
▲ Количество железа пропорционально площади поверхности камеры, которая, как и обыкновенная комната, имеет вид прямоугольного параллелепипеда. Обозначим длину камеры через x, а ширину – через y. Тогда пол и потолок имеют площадь xy каждый, две боковые стенки по 2,5 x, две другие по 2,5 y. Общая площадь получается S = 2xy+5+5y. При этом, согласно санитарным нормам, xy=6. Отсюда выразим y и подставим в выражение для $S=2\times6+(5x+\frac{5\times6}{x})=12+5\,(x+\frac{6}{x})$.

Итак, мы учли все данные, но величину x еще можно выразить произвольно, т.е. она является **переменной величиной**. Ее нужно выбрать так, чтобы значение S получилось наименьшим. Согласно теорем для минимизации функции S (x) следует приравнять нулю производную S' (x). Пользуясь правилами вычисления

производных, находим: $S' = 0+5\,(x'+(\frac{6}{x})') = 5(1-\frac{6}{x^2})$. Из уравнения $1-\frac{6}{x}$ = 0 находим, что $x = \sqrt{6}$. При этом значении x площадь будет наименьшей. Она равна: $S = 12+10\sqrt{6} \approx 36{,}5$ (м²).

Пример Исследовать на возрастание и убывание функцию $y = x^2+2$.

▲ Найдем производную функции: y' = 2x. Определим корни производной (положив f' (x) = 0), 2x = 0; x =0. Разобьем область существования функции (в данном случае на два промежутка) (-∞; 0) и (0; +∞). В первом промежутке при всех значениях x<0 f' (x)<0, т.е. функция убывает. Во втором промежутке – при всех значениях x > f' (x)>0, т.е. функция возрастает.



Есть и другие, не менее важные, приложения производной. Например, в геометрии часто используется тот факт, что производная от функции y = f (x) в точке x = a, равна тангенсу угла наклона касательной к графику функции f (x) в точке x = a; y' = tgα.

Пример . Применяя формулы и правила дифференцирования, найти производную функции $y = x\sqrt{x}(3\ln x - 2)$.

▲Перепишем заданную функцию в виде $y = x^{\frac{3}{2}}(3\ln x - 2)$. Тогда:

$$y' = \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}(3\ln x - 2) + x^{\frac{3}{2}} * \frac{3}{x} = \frac{9}{2}x^{\frac{1}{2}}\ln x - 3x^{\frac{1}{2}} + 3x^{\frac{1}{2}} = \frac{9}{2}\sqrt{x}\ln x.$$

Пример . Логарифмируя предварительно данную функцию:

$y = \dfrac{x^2\sqrt{x+1}}{(x-1)^3 * \sqrt[5]{5x-1}}$, найти ее производную.

▲ Логарифмируем функцию $\ln y = 2\ln x + \frac{1}{2}\ln(x+1) - 3\ln(x-1) - \frac{1}{5}\ln(5x-1).$

Дифференцируем по x левую и правую части, получим

$\dfrac{y'}{y} = \dfrac{2}{x} + \dfrac{1}{2(x+1)} - \dfrac{3}{x-1} - \dfrac{5}{(5x-1)5}$, отсюда получим:

$$y' = \frac{x^2\sqrt{x+1}}{(x-1)^3 * \sqrt[5]{5x-1}} * \left(\frac{2}{x} + \frac{1}{2(x+1)} - \frac{3}{x-1} - \frac{1}{5x-1}\right).$$

Пример. Найти производную y' неявной функции $x^3 - x^2 y - x^2 y^4 + a = 0$, не решая уравнения относительно y.

▲Так как в правой части стоит нуль, а производная постоянной равна 0, то имеем: $\frac{d}{dx}\left(x^3 - x^2 y - x^2 y^4 + a\right) = 0;$ применяя почленное дифференцирование, находим: $3x^2 - 2xy - x^2 y' - 2xy^4 - 4x^2 y^3 y' = 0;$ собирая в левой части уравнения члены, содержащие производную y' и перенося остальные члены в правую часть, имеем $y'(x^2 - 4x^2 y^3) = 3x^2 - 2xy - 2xy^4$, отсюда:

$$y' = \frac{3x^2 - 2xy - 2xy^4}{x^2 - 4x^2 y^3} = \frac{x(3x - 2y - 2y^4)}{x^2(1 - 4y^3)} = \frac{3x - 2y - 2y^4}{x(1 - 4y^3)}.$$

Пример. Найти $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^n}{e^x}$, если n – целое положительное число.

▲ В данном случае имеем неопределенность $\frac{\infty}{\infty}$. Применим правило Лопиталя – Бернулли n раз:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^n}{e^x} = \frac{\infty}{\infty} = \lim_{x\to\infty} \frac{n \cdot x^{n-1}}{e^x} = \lim_{x\to\infty} \frac{n(n-1) \cdot e^{n-2}}{e^x} = \ldots = \lim_{x\to\infty} \frac{n(n-1)(n-2)\ldots 1}{e^x} = 0.$$

Пример 3. Найти

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x}\right) = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x - x}{x \sin x} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos x - 1}{\sin x + \cos x} = \lim_{x\to 0} \frac{-\sin x}{\cos x + \cos x - x \sin x} = 0.$$

6. ИССЛЕДОВАНИЕ ФУНКЦИЙ С ПОМОЩЬЮ ПРОИЗВОДНОЙ

Уравнение касательной к кривой $y = f(x)$ в точке(x_0;y_0) имеет вид $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$, уравнение нормали к кривой $y = f(x_0) - \frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0)$.

Под исследованием функции понимают изучение их изменений в зависимости от аргумента. На основании исследования функции строят ее график, предварительно изображая характерные точки.

Исследование функции и построение ее графика можно проводить по следующей схеме:

1. Найти область определения функции, ее точки разрыва.
2. Изучить изменение функции при стремлении аргумента к концам промежутка ОДЗ.
3. Найти точки экстремумов, промежутки возрастания и убывания.
4. Вычислить значения экстремумов, построить соответствующие точки.
5. Определить промежутки выпуклости и вогнутости графика, найти точки перегиба.
6. Найти точки пересечения графика с координатными осями.

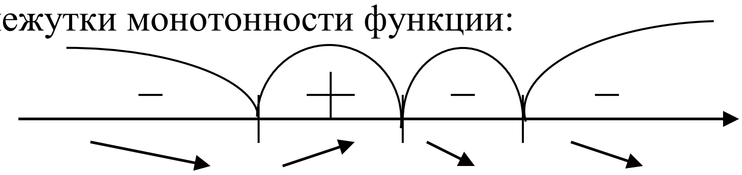
7. Найти асимптоты графика функции.

Порядок исследования иногда целесообразно выбирать исходя из конкретных особенностей данной функции.

Пример. Построить график функции $y=-\frac{x^3}{(x+1)^2}$. Написать уравнение касательной и нормали в точке x_0=1.

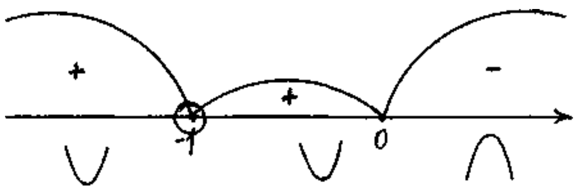
▲ 1) Область определения: $(-\infty;-1)\cup(-1;\infty)$. Функция общего вида. Находим предельное значение функции $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{-x^3}{(x+1)^2}=\infty;\lim\limits_{x\to\infty}\frac{-x^3}{(x+1)^2}=-\infty;\lim\limits_{x\to-1}\frac{-x^3}{(x+1)^2}=\infty$. График функции имеет одну вертикальную асимптоту x=-1. Наклонные асимптоты ищем по формулам $k=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{-x^3}{(x+1)^2x}=-1; в=\lim\limits_{x\to\infty}(f(x)-kx)=\lim\limits_{x\to\infty}\left(-\frac{x^3}{(x+1)^2}+x\right)=2.$ Уравнение наклонной асимптоты y=-x+2. График функции пересекает координатные оси в точке (0;0).[если x=0, то y=0].

2) Находим первую производную: $y'=-\frac{x^2(x+3)}{(x+1)^3}$. Из уравнений $y'=0, y'=\infty$ получим точки «подозрительные» на экстремум: $\frac{-x^2(x+3)}{(x+1)^3}=0; x_1=0; x_2=-3; \frac{-(x+3)x^2}{(x+1)^3}=\infty$ при x_3=-1. Исследуем эти точки, т. е. находим промежутки монотонности функции:

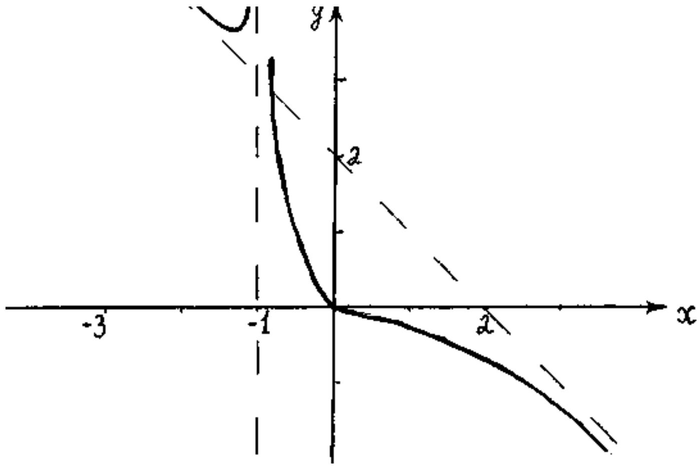


На промежутках $(-\infty;-3)\cup(-1;0)\cup(0;-\infty)$ – функция убывающая (производная на них отрицательна). На (-3;-1) – возрастает (производная на нем положительна). В точке x=-3, $y_{\min}=4{,}75$; в точке x=-1 функция не определена; при x=0; y=0.

3) Вторая производная $y''=-\frac{6x}{(x+1)^4}$ обращается в бесконечность при x=-1 и $y''=0$ при $-\frac{6x}{(x+1)^4}=0; x=0,$ которая является единственной точкой перегиба на $(-\infty;-1)$ - график вогнутый, на (-1;0) – график вогнутый, на $(0;\infty)$ - график выпуклый, точка (0;0) – точка перегиба.



Учитывая полученные результаты, строим график функции $y=-\frac{x^3}{(x+1)^2}$.



Напишем уравнение касательной в точке $x_0=1$: $f(1)=-\frac{1}{4}; f'(1)=-1; y=-\frac{1}{4}-(x-1); 4x+4y-3=0.$ Напишем уравнение нормали в точке $x_0=1$: $y=-\frac{1}{4}+(x-1); 4x-4y-5=0.$

2семестр. ИНТЕГРАЛЫ

1.1.Вопросы на коллоквиум

1. Понятие первообразной функции. Теоремы о первообразных.
2. Неопределенный интеграл, его свойства.
3. Таблица неопределенных интегралов.
4. Замена переменной и интегрирование по частям в неопределенном интеграле.
5. Разложение дробной рациональной функции на простейшие дроби.
6. Интегрирование простейших дробей. Интегрирование рациональных функций.

7 Интегрирование выражений, содержащих тригонометрические функции.

8. Интегрирование иррациональных выражений.
9. Понятие определенного интеграла, его геометрический смысл.
10. Основные свойства определенного интеграла.
11. Теорема о среднем.
12. Производная определенного интеграла по верхнему пределу. Формула Ньютона – Лейбница.
13. Замена переменной и интегрирование по частям в определенном интеграле.

14. Интегрирование биномиальных дифференциалов.
15. Вычисление площадей плоских фигур.
16. Определение и вычисление длины кривой, дифференциал длины дуги кривой.

1.2 Решение типовых примеров

Задание 1. Найти неопределенные интегралы. Результаты проверить дифференцированием

а)

$$\int \frac{e^{2x}\,dx}{1+e^{4x}} = \left| \begin{matrix} \text{полжим } t = e^{2x}, \text{тогда } dt = 2e^{2x}\,dx, \\ \text{откуда } e^{2x}\,dx = \frac{dt}{2}, \text{а } e^{4x} = t^2 \end{matrix} \right|$$

$$= \int \frac{dt}{2(1+t^2)} = \frac{1}{2} arctgt + c = \frac{1}{2} arctge^{2x} + c.$$

Проверка:

$$\left(\frac{1}{2} arctge^{2x} + c\right)' = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1+(e^{2x})^2} \cdot e^{2x} \cdot 2 = \frac{e^{2x}}{1+e^{4x}}.$$

В результате дифференцирования получена подынтегральная функция, значит, интеграл найден верно.

б)

$$\int \frac{dx}{\sqrt{2+3x-2x^2}} = \frac{1}{2} \int \frac{dx}{\sqrt{\frac{25}{16} - \left(x-\frac{3}{4}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} arcsin \frac{4x-3}{5} + C$$

в)

$$\int x \cos 5x\,dx = \left| \begin{matrix} u = x, dv = \cos 5x\,dx \\ du = dx, v = \frac{1}{5}\sin 5x \end{matrix} \right|$$

$$= x\frac{1}{5}\sin 5x - \int \frac{1}{5}\sin 5x\,dx = \frac{x\sin 5x}{5} + \frac{\cos 5x}{25} + c$$

При интегрировании применялась формула интегрирования по частям:
$\int udv = uv - \int vdu.$

Проверка:

$$\left(\frac{x\sin 5x}{5}+\frac{\cos 5x}{25}+c\right)' =$$

$$=\frac{1}{5}\sin 5x+\frac{x}{5}\cdot 5\cos 5x+\frac{1}{25}\cdot(-5\sin 5x)=$$

$$=\frac{1}{5}\sin 5x+x\cos 5x-\frac{1}{5}\sin 5x=x\cos 5x.$$

В результате дифференцирования получена подынтегральная функция, значит, интеграл найден верно.

г)

$$\int\frac{2x-1}{x^2+6x-7}dx=\int\left(\frac{1/8}{x-1}+\frac{15/8}{x+7}\right)dx=$$

$$=\frac{1}{8}ln|x-1|+\frac{15}{8}ln|x+7|+c$$

Для отыскания интеграла применяется метод неопределенных коэффициентов, согласно которому

$$x^2+6x-7=(x-1)(x+7)\Rightarrow$$

$$\frac{2x-1}{x^2+6x-7}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+7}=\frac{A(x+7)+B(x-1)}{(x-1)(x+7)},$$

и из полученного равенства следует:

$$A(x+7)+B(x-1)=2x-1.$$

Полагая $x=-7$, получим: $-8B=-15, B=\frac{15}{8}$.

Аналогично, при $x=1$получаем: $8A=1,\ A=\frac{1}{8}$.

И поэтому,

$$\frac{2x-1}{x^2+6x-7}=\frac{1/8}{x-1}+\frac{15/8}{x+7}.$$

Проверка:

$$\left(\frac{1}{8}ln|x-1|+\frac{15}{8}ln|x+7|+c\right)'=\frac{1}{8(x-1)}+\frac{15}{8(x+7)}=$$

$$=\frac{x+7+15x-15}{8(x-1)(x+7)}=\frac{2x-1}{(x-1)(x+7)}=\frac{2x-1}{x^2+6x-7}.$$

В результате дифференцирования получена подынтегральная функция, значит, интеграл найден верно.

2.Пользуясь формулой Ньютона – Лейбница вычислить определенный интеграл $\int\limits_a^b f(x)\,dx$;

$$\text{а) } \int_1^{\varepsilon}\frac{dx}{x\sqrt{1-(\ln x)^2}}$$

Решение. Данный интеграл приводится к табличному с помощью подстановки t = ln$x$. Отсюда $dt=\frac{dx}{x}$Определим пределы интегрирования новой переменной. При x = 1, t = ln1 = 0, при x = e, t = lne = 1. Произведем замену переменной и используем формулу Ньютона–Лейбница.

$$\int\limits_1^{\varepsilon}\frac{dx}{x\sqrt{1-(\ln x)^2}}=\int\limits_0^1\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}=arcsint|_0^1=arcsin1-\arcsin 0=\frac{\pi}{2}--0=\frac{\pi}{2}$$

б) Вычислить определенный интеграл .$\int_0^1\frac{\sqrt{e^x}dx}{\sqrt{e^x+e^{-x}}}$

Решение. Преобразуем подынтегральную функцию

$$\frac{\sqrt{e^x}}{\sqrt{e^x-e^{-x}}}=\frac{\sqrt{e^x}}{\sqrt{e^x+\frac{1}{e^x}}}=\frac{\sqrt{e^x}}{\sqrt{\frac{e^{2x}+1}{e^x}}}=\frac{e^x}{\sqrt{e^{2x}+1}}.$$

Обозначим t = e^x, тогда dt = e^x dx. Определим пределы интегрирования новой переменной. При x = 0, t = e^0 = 1, при x = 1, t = e^1 = e. Тогда

$$\int_0^1\frac{\sqrt{e^x}dx}{\sqrt{e^x-e^{-x}}}=\int_0^1\frac{e^x dx}{\sqrt{e^{2x}+1}}=\int_1^e\frac{dt}{\sqrt{t^2+1}}=\ln\left|t+\sqrt{t^2+1}\right|\Big|_1^e=\ln\left|e+\sqrt{e^2+1}\right|-\ln\left|1+\sqrt{2}\right|=\ln\frac{e+\sqrt{e^2+1}}{1+\sqrt{2}}$$

в) Найти площадь фигуры ограниченной линиями. Сделать чертеж. у = 8 + 2x – x^2 и у = 2x – 4.

Решение. Первая из двух данных линий – парабола, направленная ветвями вниз, поскольку коэффициент при x^2 отрицательный, а вторая линия – прямая, пересекающая обе оси координат.

Для построения параболы найдем координаты ее вершины: y'=2 – 2x; 2 – 2x = 0, x = 1 – абсцисса вершины; y(1) = 8 + 2·1 – 1^2 = 9 – ее ордината, N(1;9) – вершина.

Теперь найдем точки пересечения параболы и прямой, решив систему уравнений:

$$\begin{cases} y = 8 + 2x - x \\ y = 2x - 4 \end{cases}$$

Приравнивая правые части уравнения, левые части которых равны.

Получим 8 + 2x – x^2 = 2x – 4 или x^2 – 12 = 0, откуда .$y_{1,2} = \pm 4\sqrt{3-4}$

Итак, точки $M_1(2\sqrt{3}; 4(\sqrt{3}-1))$ и $M_2(-2\sqrt{3}; -4(\sqrt{3}+1))$ – точки пересечения параболы и прямой (рисунок 1).

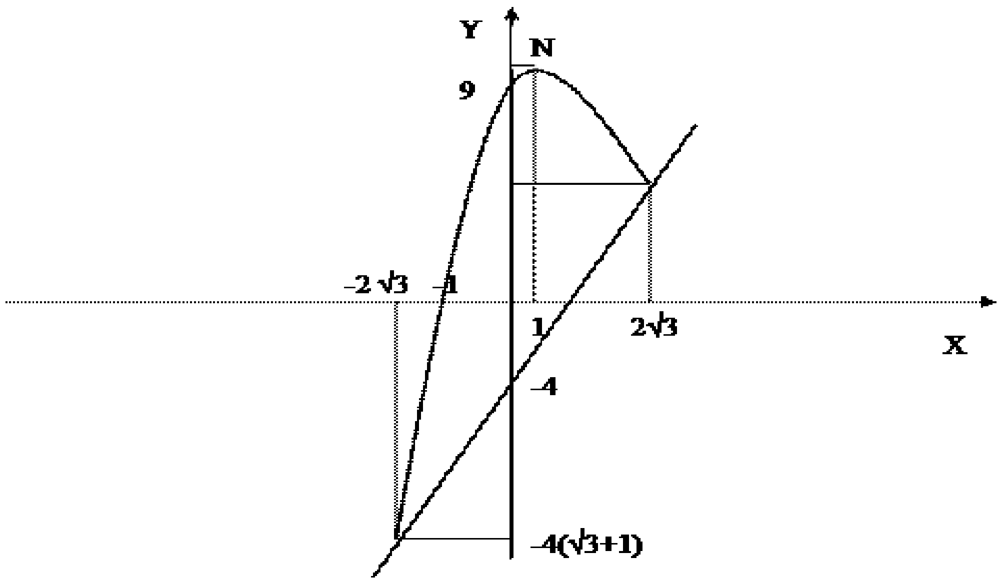


Рисунок 3 Графики функций y = 8 + 2x – x^2 и y = 2x – 4

Построим прямую y = 2x – 4. Она проходит через точки (0; -4), (2;0) на осях координат.

Для построения параболы можно еще ее точки пересечения с осью 0x, то есть корни уравнения 8 + 2x – x^2 = 0 или x^2 – 2x – 8 = 0. По теореме Виета легко найти его корни: x_1 = 2, x_2 = 4.

На рисунке 3 изображена фигура (параболический сегмент M_1N M_2), ограниченный данными линиями.

Вторая часть задачи состоит в нахождении площади этой фигуры. Ее площадь можно найти с помощью определенного интеграла по формуле

$$S = \int_a^b \big(f_1(x) - f_2(x)\big)dx$$

Применительно к данному условию, получим интеграл:

$$S = \int_{-2\sqrt{3}}^{2\sqrt{3}} [(8 + 2x - x^2) - (2x - x^2)]dx$$

$$= \int_{-2\sqrt{3}}^{2\sqrt{3}} (12 - x^2)dx = (12x - \frac{x^3}{3})\Big|_{-2\sqrt{3}}^{2\sqrt{3}} = 12 * 2\sqrt{3}$$

$$- \frac{(2\sqrt{3})^3}{3} - (12(-2\sqrt{3}) - \frac{(2\sqrt{3})^3}{3}$$

$$= 24\sqrt{3} - 8\sqrt{3} - \left(-24\sqrt{3} + 8\sqrt{3}\right) = 48\sqrt{3} - 16\sqrt{3}$$

$$= 32\sqrt{3}$$

Задание 3.Вычислить приближенное значение определенного интеграла $\int_a^b f(x)\,dx$ с помощью формулы Симпсона, разбив отрезок интегрирования на 10 частей. Все вычисления производить с округлением до третьего десятичного знака.

$$\int_0^1 \sqrt{1+4x^3}dx$$

Решение. Разбив отрезок $[0, 1]$ на 10 частей вычислим значения подынтегральной функции в точках разбиения вычисления удобно производить в таблице (табл. 3.1)

$$y_i = \sqrt{1+4x_i^3},$$

.

Таблица 3.1 Вычисление интеграла из примера 3.18

i	x_i	x_i^3	$1+4x_i^3$	$y_i = \sqrt{1+4x_i^3}$
0	0	0	1	1
1	0,1	0,001	1,004	1,002
2	0,2	0,008	1,032	1,017
3	0,3	0,027	1,108	1,053
4	0,4	0,064	1,256	1,121

5	0,5	0,125	1,500	1,225
6	0,6	0,216	1,864	1,365
7	0,7	0,343	2,372	1,540
8	0,8	0,512	3,048	1,746
9	0,9	0,729	3,916	1,979
10	1	1	5	2,236

Используя данные табл. 3.1, получаем

$$y_0 + y_{10} = 1 + 2{,}236 = 3{,}236;$$

$$4(y_1 + y_3 + y_5 + y_7 + y_9) = 4(1{,}002 + 1{,}053 + 1{,}225 + 1{,}540 + 1{,}979) = 27{,}196;$$

$$2(y_2 + y_4 + y_6 + y_8) = 2(1{,}017 + 1{,}121 + 1{,}365 + 1{,}746) = 10{,}498.$$

Подставив полученные значения в формулу Симпсона при $n = 10$, получим

$$\int_0^1 \sqrt{1+4x^3}\,dx \approx \frac{1-0}{30}(3{,}236 + 27{,}196 + 10{,}498) \approx 1{,}36433 \approx 1{,}364.$$

Задание 4. Вычислить несобственный интеграл или доказать его расходимость

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x}$$

Решение

Рассматриваемый интеграл является несобственным интегралом первого рода, так как функция $f(x) = \frac{1}{x}$ на полу бесконечном промежутке непрерывна, но правый предел интегрирования бесконечен. Согласно определению, перейдем к границе

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x} = \lim_{a\to+\infty} \int_1^{a} \frac{dx}{x} = \lim_{a\to+\infty} \ln x|_1^a = \lim_{a\to+\infty} (\ln a - 0) = +\infty$$

то есть интеграл расходится.

Ответ: Интеграл расходится.

2. РЯДЫ

2.1 Вопросы на коллоквиум

1. Сходимость и сумма ряда. Необходимое условие сходимости ряда.
2. Теоремы сравнения.
3. Признаки Даламбера и Коши.
4. Интегральный признак сходимости ряда.
5. Теорема Лейбница. Оценка остатка знакочередующегося ряда.
6. Теорема о сходимости абсолютно сходящегося ряда. Свойства абсолютно сходящегося ряда.
7. Понятие равномерной сходимости.
8. Теорема о непрерывности суммы функционального ряда.
9. Теоремы о почленном интегрировании и почленном дифференцировании функционального ряда.
10. Теорема Абеля. Интервал и радиус сходимости степенного ряда.
11. Теорема о равномерной сходимости степенного ряда. Непрерывность суммы ряда.
12. Почленное интегрирование и дифференцирование степенных рядов.
13. Разложение функции в степенной ряд. Ряд Тейлора.
14. Разложение по степеням x бинома $(1+x)^m$.
15. Условие разложимости функции в ряд Тейлора.
16. Разложение по степеням x функций e^x, $\cos x$, $\sin x$, $\ln(1+x)$.

2.2 Решение типовых примеров

Задача 1. Найти сумму ряда.

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{12}{36n^2+12n-35}.$$

Сумма ряда:

$$S=\lim_{n\to\infty}S_n,$$

где S_n – сумма n первых членов ряда.

Представим ряд в виде:

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{12}{36n^2+12n-35}=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{12}{(6n-5)(6n+7)}=\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{1}{6n-5}-\frac{1}{6n+7}\right).$$

Тогда

$$S_n=\left(\frac{1}{7}-\frac{1}{19}\right)+\left(\frac{1}{13}-\frac{1}{25}\right)+\left(\frac{1}{19}-\frac{1}{31}\right)+\left(\frac{1}{25}-\frac{1}{37}\right)\ldots+$$

$$+\left(\frac{1}{6n-17}-\frac{1}{6n-5}\right)+\left(\frac{1}{6n-11}-\frac{1}{6n+1}\right)+\left(\frac{1}{6n-5}-\frac{1}{6n+7}\right)=$$

$$=\frac{1}{7}+\frac{1}{13}-\frac{1}{6n+1}-\frac{1}{6n+7}.$$

Сумма ряда

$$S=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{20}{91}-\frac{1}{6n+1}-\frac{1}{6n+7}\right)=\frac{20}{91}.$$

Задача 5. Исследовать на сходимость ряд.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(2n)!}\operatorname{tg}\frac{1}{5^n}.$$

Сравним данный ряд с рядом $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(2n)!}\frac{1}{5^n}$. Мы можем это сделать согласно предельному признаку сравнения:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{n}{(2n)!}\operatorname{tg}\frac{1}{5^n}}{\frac{n}{(2n)!}\frac{1}{5^n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\operatorname{tg}{}^1\!/_{5^n}}{{}^1\!/_{5^n}}=1.$$

Воспользуемся признаком Даламбера:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{n+1}{(2n+1)!}\frac{1}{5^{n+1}}}{\frac{n}{(2n)!}\frac{1}{5^n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)(2n)!5^n}{n(2n+2)!5^{n+1}}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{5(2n+1)(2n+2)}=0<1.$$

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(2n)!} \frac{1}{5^n}$ сходится. Значит сходится и исследуемый ряд.

Задача 6. Исследовать на сходимость ряд.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^5 3^n}{(2n+1)^n}.$$

Воспользуемся радикальным признаком Коши:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{n^5 3^n}{(2n+1)^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{3}{2n+1} = 0 < 1.$$

Т.е. исследуемый ряд сходится.

Задача 8. Исследовать на сходимость ряд.

Пример 1.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(n+1)2^{2n}}.$$

Рассмотрим ряд из модулей $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)2^{2n}}$. При любых значениях n выполняется неравенство

$$\frac{1}{(n+1)2^{2n}} < \frac{1}{2^{2n}},$$

значит, согласно первой теореме сравнения, из сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{2n}}$ будет следовать сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)2^{2n}}$. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{2n}}$ сходится, т.к. представляет собой сумму всех членов бесконечно убывающей геометрической прогрессии: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^{2n}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4^n}=\frac{1/4}{1-1/4}=\frac{1}{3}$. Значит ряд из модулей сходится, а наш знакопеременный ряд сходится абсолютно.

Пример 2.

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n+1}{\sqrt{n^3}}.$$

Рассмотрим ряд из модулей $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{\sqrt{n^3}}$. Сравним его с рядом $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$. Мы можем это сделать согласно предельному признаку сравнения:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{n+1}{\sqrt{n^3}}}{1/\sqrt{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}(n+1)}{\sqrt{n^3}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n}=1$$

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$ расходится согласно интегральному признаку Коши:

$$\int_1^{+\infty}\frac{dx}{\sqrt{x}}=\lim_{b\to\infty}\int_1^{b}\frac{dx}{\sqrt{x}}=2\lim_{b\to\infty}\sqrt{x}\Big|_1^b=2\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{b}-1\right)=\infty.$$

Ряд из модулей расходится, значит, наш знакопеременный ряд не обладает абсолютной сходимостью, но он сходится условно согласно признаку Лейбница, т.к. $a_{n+1}=\frac{n+2}{\sqrt{(n+1)^3}}<a_n=\frac{n+1}{\sqrt{n^3}}$ для любых значений n и

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{\sqrt{n^3}}=0.$$

Задача 11. Найти область сходимости функционального ряда.

Пример 1.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\left(\sqrt[3]{n^2}+\sqrt{n}+1\right)^{2x+1}}.$$

Сравним данный ряд с рядом $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\left(\sqrt[3]{n^2}\right)^{2x+1}}$. Мы можем это сделать согласно предельному признаку сравнения:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{1}{\left(\sqrt[3]{n^2}+\sqrt{n}+1\right)^{2x+1}}}{\dfrac{1}{\left(\sqrt[3]{n^2}\right)^{2x+1}}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\sqrt[3]{n^2}\right)^{2x+1}}{\left(\sqrt[3]{n^2}+\sqrt{n}+1\right)^{2x+1}}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\left(1+\,{}^{1}\!/\!{}_{\sqrt[6]{n}}+\,{}^{1}\!/\!{}_{\sqrt[3]{n^2}}\right)^{2x+1}}=1.$$

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\left(\sqrt[3]{n^2}\right)^{2x+1}}$ будет сходиться при $\frac{4}{3}x+\frac{2}{3}>1$ (обобщенный гармонический ряд), откуда $x>\frac{1}{4}$.

Область сходимости: $x\in\left(\frac{1}{4};\quad+\infty\right)$.

Пример 2.

$$\sum_{n\to 1}^{\infty}\frac{n^2}{2^n\left(n^2+1\right)}\left(25x^2+1\right)^n.$$

Воспользуемся радикальным признаком Коши:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left|u_n\right|}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left|\frac{n^2}{2^n\left(n^2+1\right)}\left(25x^2+1\right)^n\right|}=\frac{25x^2+1}{2}<1.$$

$$25x^2<1\ \Rightarrow\ -\frac{1}{5}<x<\frac{1}{5}.$$

Исследуем сходимость на концах интервала:

$x=\pm\frac{1}{5}$: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{n^2+1}$ – ряд расходится, т.к. не выполняется необходимый признак сходимости ряда:

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{n^2+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+1/n^2}=1\neq 0.$$

Область сходимости: $x\in\left(-\frac{1}{5};\quad\frac{1}{5}\right)$.

3. ФУНКЦИЯ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

3.1Вопросы на коллоквиум:

1.Частные производные функции нескольких переменных
2. Понятие дифференцируемости функции
3.Необходимые условия дифференцируемости
4.Дотаточные условия дифференцируемости
5. Производные сложных функции
6. Дифференциал функции нескольких переменных
7. Производная по направлению. Градиент.
8.Частные производные высших порядков
9. Дифференциалы высших порядков
10. Формула Тейлора для функции двух переменных
11. Экстремумы функции двух переменных
12.Достаточные условия экстремума
13. Метод наименьших квадратов

3.2Решение типовых примеров

Задача 1. Найти частные производные первого и второго порядка.

$$z=arctg\frac{x}{y}$$

Найдем сначала частные производные первого порядка:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{1}{1+\frac{x^2}{y^2}}*\frac{1}{y}=\frac{y}{x^2+y^2},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1}{1+\frac{x^2}{y^2}}\left(-\frac{x}{y^2}\right)=-\frac{x}{x^2+y^2}$$

Теперь дифференцируем вторично:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{y}{x^2+y^2}\right) = -\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{x}{x^2+y^2}\right) = \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y}{x^2+y^2}\right) = \frac{1*(x^2+y^2)-2y*y}{(x^2+y^2)^2} = \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}$$

Задача 2. Вычислить приближённо с помощью полного дифференциала с точностью до 0.01.
а) $1.02^{3.01}$

Решение:

Рассмотрим функцию $z = x^y$. Искомое число можно считать нарощенным значением этой функции при x=1, y=3, $\Delta x = 0.02, \Delta y = 0.01$.

Первоначальное значение функции $z = 1^3 = 1$.

$$\Delta z \approx dz = yx^{y-1}\Delta x + x^y lnx \Delta y = 3*1*0.02 + 1*ln1*0.01 = 0.06.$$

Следовательно, $1{,}02^{2{,}01} \approx 1 + 0{,}06 = 1{,}06$

Задача 3. Найти градиент функции $z = f(x;y)$в точке , $M_0(x_0, y_0)$

Пример 1: $z = x^2y$ в точке $\mathrm{M}(1;1)$

Решение. Вычислим частные производные и их значения в точке М:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2xy; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = x^2 \quad \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_M = 2 \quad \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_M = 1$$

Следовательно , *grad z=2i+j*.

Пример 2:

$$z = x\cos(2xy^2), \quad M_0\left(\frac{\pi}{4};1\right), \quad \bar{a} = \{1;-7\}.$$

1) Найдем частные производные функции и вычислим их значения в точке M_0.

$$z'_x = \cos(2xy^2) - x\sin(2xy^2)\cdot 2y^2,$$

$$z'_y = -x\sin(2xy^2)\cdot 4xy,$$

$$z'_x(M_0) = \cos\left(2\cdot\frac{\pi}{4}\cdot 1\right) - \frac{\pi}{4}\sin\left(2\cdot\frac{\pi}{4}\cdot 1\right)\cdot 2\cdot 1 = -\frac{\pi}{2},$$

$$z'_y(M_0) = -\frac{\pi}{4}\sin\left(2\cdot\frac{\pi}{4}\cdot 1\right)\cdot 4\cdot\frac{\pi}{4}\cdot 1 = -\frac{\pi^2}{4}.$$

Учитывая, что

$$gradz = \{z'_x(M_0); z'_y(M_0)\},$$

получим

$$gradz = \left\{-\frac{\pi}{2}; -\frac{\pi^2}{4}\right\}.$$

Задача 4. Исследовать функцию на экстремум.

$$z = x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y$$

Найдем частные производные и составим систему уравнений:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 3x^2 + 3y^2 - 15 = 0, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 6xy - 12 = 0$$

или

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 5 = 0 \\ xy - 2 = 0 \end{cases}$$

Решая систему, получим четыре стационарные точки:

$$M_1(1;2);\ M_2(2;1);\ M_3(-1;-2);\ M_4(-2;-1).$$

Найдем производные второго порядка

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 6x, \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 6y, \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 6x$$

И составим дискриминант $\Delta = AC - B^2$ для каждой стационарной точки.

1) Для точки M_1: $A = \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right)_{M_1} = 6,\ B = \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right)_{M_1} = 12,\ C = \left(\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right)_{M_1} = 6,$
   $\Delta = AC - B^2 = 36 - 144 < 0$. Значит, в точке M_1 экстремума нет.
2) Для точки M_2: A=12, B=6, C=12; Δ=144-36> 0

Требования к оформлению расчетно-графической работы

При выполнении расчетно-графических работ необходимо придерживаться указанных ниже правил. Работы, выполненные без соблюдения этих правил, не зачитываются и возвращаются для переработки.

Каждая работа должна быть выполнена в отдельной тетради в клеточку чернилами любого цвета, кроме красного. Необходимо оставлять поля для замечаний рецензента.

В заголовке работы на обложке тетради должны быть ясно написаны фамилия обучающегося, его инициалы, здесь же следует указать название учебного заведения и группы, название дисциплины. В конце работы поставить дату ее выполнения, расписаться.

В работу должны быть включены все задачи, указанные в задании строго по положенному варианту. Решения задач надо располагать в порядке номеров, указанных в заданиях, сохраняя номера задач. Перед решением каждой задачи надо полностью выписать его условие. В том случае, если несколько задач, из которых обучающийся выбирает задачи своего варианта, имеют общую формулировку, следует, переписывая условие задачи, заменить общие данные, взятыми из соответствующего номера. Решение задач следует излагать подробно и аккуратно, мотивируя все действия по ходу решения и делая необходимые чертежи.

Работы, содержащие не все задания, а также задачи не своего варианта, не зачитываются.

После получения прорецензированной работы, как не зачтенной, так и зачтенной, обучающийся должен исправить все отмеченные рецензентом ошибки и недочеты и выполнить все его рекомендации.

Если работа зачтена и выполнены исправления с учетом замечаний рецензента, то обучающемуся назначается время защиты расчетно-графической работы во время экзаменационной сессии. Без предъявления отрецензированных расчетно-графических работ студент не допускается к экзамену.

Задания для расчетно-графических работ за 1 семестр.

Задания.

1. Доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ (указать $N(\varepsilon)$).

1. $a_n = \dfrac{3n-2}{2n-1}, \quad a = \dfrac{3}{2}.$

2. $a_n = \dfrac{4n-1}{2n+1}, \quad a = 2.$

3. $a_n = \dfrac{7n+4}{2n+1}, \quad a = \dfrac{7}{2}.$

4. $a_n = \dfrac{2n-5}{3n+1}, \quad a = \dfrac{2}{3}.$

5. $a_n = \dfrac{7n-1}{n+1}, \quad a = 7.$

6. $a_n = \dfrac{4n^2+1}{3n^2+2}, \quad a = \dfrac{4}{3}.$

7. $a_n = \dfrac{9-n^3}{1+2n^3}, \quad a = -\dfrac{1}{2}.$

8. $a_n = \dfrac{4n-3}{2n+1}, \quad a = 2.$

9. $a_n = \dfrac{1-2n^2}{2+4n^2}, \quad a = -\dfrac{1}{2}.$

10. $a_n = -\dfrac{5n}{n+1}, \quad a = -5.$

2. Найти пределы функций, не пользуясь правилом Лопиталя.

1. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1-2x}{3x-2}$; б) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{3x}$; в) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos x}{5x^2}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+3}{x-2}\right)^x$.

2.а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3+1}{2x^3+1}$; б) $\lim\limits_{x\to7}\dfrac{\sqrt{2+x}-3}{x-7}$; в) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\arcsin 3x}{5x}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x-1}{2x+1}\right)^x$

3.а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^3+x^2+5}{x^3+x-2}$; б) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x-\sqrt{x}}{x^2-x}$; в) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1-\cos 2x}}{|x|}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{4x+1}{4x}\right)^{2x}$.

4.а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^4+x^2-6}{2x^4-x+2}$; б) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x}{\sqrt{1+3x}-1}$; в) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{5x}{arctg\,5x}$; г) $\lim\limits_{x\to0}(1+2x)^{\frac{1}{x}}$.

5.а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2+6x-5}{5x^2-x-1}$; б) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\sqrt{1-x^2}}{x^2}$; в) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\cos x-\cos^3 x}{x^2}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty}x(\ln(x+1)-\ln x)$

6.а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3+x+5x^4}{x^4-12x+1}$; б) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1-3x}-\sqrt{1-2x}}{x+x^2}$; в) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^2 ctg\,2x}{\sin 3x}$;
г) $\lim\limits_{x\to\infty}(2x+1)(\ln(x+3)-\ln x)$.

7.а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x-2x^2+5x^4}{2-3x^2+x^4}$; б) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1+3x^2}-1}{x^2+x^3}$; в) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos 6x}{1-\cos 2x}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty}(x-5)(\ln(x-3)-\ln x)$.

8.а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^2-3x+1}{3x^2+x-5}$; б) $\lim\limits_{x\to5}\dfrac{\sqrt{1+3x}-\sqrt{2x+6}}{x^2-5x}$; в) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos 4x}{2x tg\,2x}$;

г) $\lim\limits_{x\to 1}(7-6x)^{\frac{x}{3x-3}}$.

9.а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{7x^4-2x^3+2}{x^4+3}$; б) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{2x-1}-\sqrt{5}}{x-3}$; в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tg^2\frac{x}{2}}{x^2}$;

г) $\lim\limits_{x\to 2}(3x-5)^{\frac{2x}{x^2-4}}$.

10.а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{8x^5-3x^2+9}{2x^5+2x^2+5}$; б) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x-2}{\sqrt{2x}-2}$; в) $\lim\limits_{x\to 0}5x\,ctg\,3x$;

г) $\lim\limits_{x\to 3}(3x-8)^{\frac{2}{x-3}}$.

3. Задана функция $y=f(x)$. Найти точки разрыва функции, если они существуют. Сделать чертеж.

1. $f(x)=\begin{cases} x+4, & x<-1 \\ x^2+2, & -1\le x<1 \\ 2x, & x\ge 1 \end{cases}$

2. $f(x)=\begin{cases} x+2, & x\le -1 \\ x^2+1, & -1<x\le 1 \\ -x+3, & x>1 \end{cases}$

3. $f(x)=\begin{cases} -x, & x\le 0 \\ -(x-1)^2, & 0<x<2 \\ x-3, & x\ge 2 \end{cases}$

4. $f(x)=\begin{cases} \cos x, & x\le 0 \\ x^2+1, & 0<x<1 \\ x, & x\ge 1 \end{cases}$

5. $f(x)=\begin{cases} -x, & x\le 0 \\ x^2, & 0<x\le 2 \\ x+1, & x>2 \end{cases}$

6. $f(x)=\begin{cases} -x, & x\le 0 \\ \sin x, & 0<x\le \pi \\ x-2, & x>\pi \end{cases}$

7. $f(x)=\begin{cases} -(x+1), & x\le -1 \\ (x+1)^2, & -1<x\le 0 \\ x, & x>0 \end{cases}$

8. $f(x)=\begin{cases} -x^2, & x\le 0 \\ tgx, & 0<x\le \dfrac{\pi}{4} \\ 2, & x>\dfrac{\pi}{4} \end{cases}$

9. $f(x)=\begin{cases}-2x, & x\le 0\\ x^2+1, & 0<x\le 1\\ 2, & x>1\end{cases}$

10. $f(x)=\begin{cases}-2x, & x\le 0\\ \sqrt{x}, & 0<x<4\\ 1, & x\ge 4\end{cases}$

4. Найти производные данных функций.

1. а) $y=2\sqrt{4x+3}-\dfrac{3}{\sqrt{x^2+x+1}}$; б) $y=\left(e^{\cos x}+3\right)^2$; в) $y=\ln\sin(2x+5)$; г) $y=x^{x^x}$;

2. д) $tg\left(\dfrac{y}{x}\right)=5x$.

3. а) $y=x^2\sqrt{1-x^2}$; б) $y=\dfrac{4\sin x}{\cos^2 x}$; в) $y=arctge^{2x}$; г) $y=x^{\frac{1}{x}}$; д) $x-y+arctgy=0$.

4. а) $y=x\sqrt{(1+x^2)(1-x)}$; б) $y=\dfrac{1}{tg^2 2x}$; в) $y=\arcsin\sqrt{1-3x}$; г) $y=x^{\ln x}$;

5. д) $y\sin x=\cos(x-y)$.

6. а) $y=(3+6x)\sqrt{3-4x+5x^2}$; б) $y=\sin x-x\cos x$; в) $y=x^m\ln x$; г) $y=x^{-tgx}$;

7. д) $\left(\dfrac{y}{x}\right)=arctg\left(\dfrac{x}{y}\right)$.

8. а) $y=\dfrac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}$; б) $y=\dfrac{\sin^2 x}{2+3\cos^2 x}$; в) $y=\dfrac{x\ln x}{x-1}$; г) $y=(arctgx)^{\ln x}$;

9. д) $(e^x-1)(e^y-1)-1=0$.

10. а) $y=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}+5\sqrt[5]{x^2+1}$; б) $y=2tg^3(x^2+1)$; в) $y=3^{arctgx^3}$; г) $y=(arctgx)^x$;

11. д) $y^2x=e^{\frac{y}{x}}$.

12. а) $y=\sqrt[3]{(1+x^2)(1-x^2)}$; б) $y=\dfrac{1}{2}tg^2x+\ln\cos x$; в) $y=arctg\dfrac{x}{1+\sqrt{1-x^4}}$;

13. г) $y=(x+x^2)^x$; д) $x^3+y^3-3axy=0$.

14. а) $y=3\sqrt[3]{\dfrac{x^5+5x^4-5}{x}}$; б) $y=\ln\sqrt{\dfrac{1-\sin x}{1+\sin x}}$; в) $y=arctg(tg^2x)$; г) $y=2tg^3(x^2+1)$;
д) $y=x^{\ln x}$.

15. а) $y=5\sqrt[5]{x^2+x+\dfrac{1}{x}}$; б) $y=2^xe^{-x}$; в) $y=\arcsin\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$; г) $y=(\cos x)^x$; д) $\ln y=arctg\left(\dfrac{x}{y}\right)$.

16. а) $y=\sqrt{x^2+1}+\sqrt[3]{x^3+1}$; б) $y=\dfrac{1}{3}tg^3x-tgx+x$; в) $y=arctg\sqrt{\dfrac{3-x}{x-2}}$; г) $y=(\cos x)^{x^2}$; д) $x-y+e^yarctgx=0$.

5. Найти $\frac{dy}{dx}$ и $\frac{d^2y}{dx^2}$ для функций:

1. а) $y=\frac{x}{x^2-1}$; б) $x=\cos(t/2)$, $y=t-\sin t$;
2. а) $y=\ln ctg\,2x$; б) $x=t^3+8t$, $y=t^5+2t$;
3. а) $y=x^3\ln x$; б) $x=t-\sin t$, $y=t-\cos t$;
4. а) $y=x\,arctg x$; б) $x=e^{2t}$, $y=\cos t$;
5. а) $y=arctg x$; б) $x=3\cos^2 t$, $y=2\sin^3 t$;
6. а) $y=e^{ctg 3x}$; б) $x=3\cos t$, $y=4\sin^2 t$;
7. а) $y=e^{\cos x}\cos x$; б) $x=3t-t^3$, $y=3t^2$;
8. а) $y=e^{-x}\sin x$; б) $x=2t-t^3$, $y=2t^2$;
9. а) $y=x\sqrt{1+x^2}$; б) $x=t+\ln\cos t$, $y=t-\ln\sin t$;
10.а) $y=xe^{-x^2}$; б) $x=\ln t$, $y=0.5\left(t+\frac{1}{t}\right)$;

6. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $y=f(x)$ на отрезке $[a,b]$.

1. $f(x)=x^3-12x+7$; $[0,3]$.
2. $f(x)=x^4+4x$; $[-2,2]$.
3. $f(x)=x^5-\frac{5}{3}x^3+2$; $[0,2]$.
4. $f(x)=\frac{\sqrt{3}}{2}x-\sin x$; $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$.
5. $f(x)=\frac{\sqrt{3}}{2}x+\cos x$; $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$.
6. $f(x)=81x-x^4$; $[-1,4]$.
7. $f(x)=3x^4-16x^3+2$; $[-3,1]$.
8. $f(x)=3-2x^2$; $[-1,3]$.
9. $f(x)=x^3-3x+1$; $\left[\frac{1}{2},2\right]$.
10. $f(x)=x-\sin x$; $[-\pi,\pi]$.

7. Провести полное исследование функции и построить ее график.

1. $y=\frac{x^2-2x+2}{x-1}$;
2. $y=\frac{x+1}{(x-1)^2}$;
3. $y=e^{\frac{1}{x+5}}$;
4. $y=\frac{x}{9-x}$;

5. $y=\dfrac{x^2}{4x^2-1}$;
6. $y=x+\dfrac{\ln x}{x}$;
7. $y=\dfrac{x^3}{x^2-x+1}$;
8. $y=x^2-2\ln x$;
9. $y=\dfrac{x^2-x-1}{x^2-2x}$;
10. $y=\ln(x^2+1)$.

8. Исследовать на экстремум функции.

1. $z=x^3+8y^3-6xy+5$;
2. $z=1+15x-2x^2-xy-2y^2$;
3. $z=1+6x-x^2-xy-y^2$;
4. $z=2x^3+2y^3-6xy+5$;
5. $z=3x^3+3y^3-9xy+10$;
6. $z=x^2+xy+y^2+x-y+1$;
7. $z=4(x-y)-x^2-y^2$;
8. $z=6(x-y)-3x^2-3y^2$;
9. $z=x^2+xy+y^2-6x-9y$;
10. $z=2xy-3x^2-2y^2+10$.

9. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z=f(x,y)$ в замкнутой области D, заданной системой неравенств.

1. $z=x^2+y^2-9xy+27$; $0\le x\le 3$, $0\le y\le 3$.
2. $z=5x^2-3xy+y^2+4$; $x\ge -1$, $y\ge -1$, $x+y\le 1$.
3. $z=x^2+2y^2+1$; $x\ge 0$, $y\ge 0$, $x+y\le 3$.
4. $z=10+2xy-x^2$; $0\le y\le 4-x^2$.
5. $z=3-2x^2-xy-y^2$; $x\le 1$, $y\ge 0$, $y\le x$.
6. $z=x^2+2xy-y^2+4x$; $x\le 0$, $y\le 0$, $x+y+2\ge 0$.
7. $z=x^2+3y^2+x-y$; $x\ge -1$, $y\ge -1$, $x+y\le 1$.
8. $z=x^2+xy-2$; $4x^2-4\le y\le 0$.
9. $z=x^2+2xy+2y^2$; $-1\le x\le 1$, $0\le y\le 2$.
10. $z=x^2+xy$; $-1\le x\le 1$, $0\le y\le 3$.

Задания для расчетно-графических работ за 2 семестр.

Интегрирование:

Задание 1. Найти неопределенные интегралы. Результаты проверить дифференцированием.

1. а) $\int \frac{\cos x\, dx}{\sqrt{\sin^2 x}}$ б) $\int \frac{dx}{x^3+8}$ в) $\int x\ln(x^2+1)dx$ г) $\int \frac{(x-7)dx}{x^2+4x+13}$

2. а) $\int \frac{\sin 2x\, dx}{\sqrt{1+\cos 2x}}$ б) $\int \frac{(x-8)dx}{\sqrt{4-2x-x^2}}$ в) $\int x\sin 3x dx$ г) $\int \frac{2x^2-3x+1}{x^3+1}dx$

3. а) $\int \frac{e^x\, dx}{4+e^{2x}}$ б) $\int \frac{(2x-1)\, dx}{\sqrt{x^2-4x+1}}$ в) $\int x\arcsin x\, dx$ г) $\int \frac{(3x-7)dx}{x^3+4x^2+4x+16}$

4. а) $\int \frac{\cos 5x\, dx}{3+2\sin 5x}$ б) $\int \frac{(x-2)\, dx}{\sqrt{x^2-2x+5}}$ в) $\int (x+2)e^{5x}dx$ г) $\int \frac{dx}{x^3+x^2+2x+2}$

5. а) $\int \frac{x^2dx}{x^4-81}$ б) $\int \frac{(5x+3)\, dx}{x^2+10x+89}$ в) $\int x\arcsin\frac{1}{x}\, dx$ г) $\int \frac{(5+3\ln x)^4}{x}dx$

6. а) $\int \frac{e^{3x}dx}{16+e^{6x}}$ б) $\int \frac{(x+1)\, dx}{5x^2+2x+1}$ в) $\int x\, arctg\, 3x\, dx$ г) $\int \frac{x^3+4x^2+3x+2}{(x+1)^2(x^2+1)}dx$

7. а) $\int \frac{\sin x\, dx}{\sqrt[3]{2+3\cos x}}$ б) $\int \frac{(x-5)\, dx}{\sqrt{6+4x-x^2}}$ в) $\int \frac{x\, dx}{\sin^2 x}$ г) $\int \frac{2x^3+7x^2+7x-1}{(x+2)^2(x^2+x+1)}dx$

8. а) $\int x^2 e^{2x^3}dx$ б) $\int \frac{(2x+3)\, dx}{\sqrt{15-4x^2+4x}}$ в) $\int x^3 arctg\, x\, dx$ г) $\int \frac{3x^3+x+46}{(x-1)^2(x^2+9)}dx$

9. а) $\int \frac{x\,dx}{x^4+1}$ б) $\int \frac{(2x+1)\,dx}{\sqrt{x^2+4x+2}}$ в) $\int x^3 \ln(1+x^2)\,dx$

г) $\int \frac{4x^3+24x^2+20x-28}{(x+3)^2(x^2+2x+2)}dx$

10. а) $\int e^{\sin^2 x}\sin 2x\,dx$ б) $\int \frac{(2x-5)dx}{x^2+6x+13}$ в) $\int \frac{\ln\cos x\,dx}{\sin^2 x}$

г) $\int \frac{x^3+6x^2+8x-8}{(x+2)^2(x^2+4)}dx$

11. а) $\int \frac{x^3 dx}{1+x^8}$ б) $\int \frac{3x-1}{\sqrt{2x^2-5x+1}}dx$ в) $\int arctg\sqrt{x}\,dx$

г) $\int \frac{-3x^3+13x^2-13x+1}{(x-2)^2(x^2-x+1)}dx$

12. а) $\int \frac{x\,dx}{(x^2+4)^6}$ б) $\int \frac{(x+2)dx}{x^2+2x+5}$ в) $\int x3^x\,dx$

г) $\int \frac{2x^2+x+3}{(x+2)(x^2+x+1)}dx$

13. а) $\int \frac{x^3 dx}{\sqrt{1-x^8}}$ б) $\int \frac{(2x-3)\,dx}{x^2+2x-7}$ в) $\int e^x \ln(1+3e^x)\,dx$

г) $\int \frac{x^3+x+1}{x^4-81}dx$

14. а) $\int \frac{dx}{\cos^2 x(3tg\,x+1)}$ б) $\int \frac{(x-2)dx}{\sqrt{3-2x^2}}$ в) $\int \frac{x\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}dx$ г) $\int \frac{x^2 dx}{x^3+1}$

15. а) $\int \frac{\cos 3x\,dx}{4+\sin 3x}$ б) $\int \frac{(x+1)dx}{2x^2+x+1}$ в) $\int x^2 e^{3x}dx$ г) $\int \frac{x^2 dx}{1-x^4}$

16. а) $\int \frac{\sin x\,dx}{\sqrt[3]{\cos^2 x}}$ б) $\int \frac{(3x+4)\,dx}{\sqrt{x^2+6x+13}}$ в) $\int \ln(x^2+4)\,dx$

г) $\int \frac{x^3+6x^2-9x+6}{(x+1)^2(x^2+2x+2)}dx$

17. а) $\int \frac{(x+arctg\,x)dx}{1+x^2}$ б) $\int \frac{(4x-1)\,dx}{4x^2-4x+5}$ в) $\int x\ln(x^2+1)\,dx$

г) $\int \frac{3x^3+6x^2+5x-1}{(x+1)^2(x^2+2)}dx$

18. а) $\int \frac{arctg\sqrt{x}\,dx}{\sqrt{x}(1+x)}$ б) $\int \frac{(x-8)\,dx}{\sqrt{3+2x-x^2}}$ в) $\int x\sin x\cos x\,dx$

г) $\int \frac{2x^3-4x^2-16x-12}{(x-1)^2(x^2+4x+5)}dx$

19. а) $\int \frac{(\arccos x)^3 - 1}{\sqrt{1+x^2}} dx$ б) $\int \frac{(5x+1)\,dx}{x^2-4x+1}$ в) $\int x^2 \sin 4x\, dx$

г) $\int \frac{2x^3+11x^2+16x+10}{(x+2)^2(x^2+2x-3)} dx$

20. а) $\int \frac{\sqrt[3]{4+\ln x}}{x} dx$ б) $\int \frac{(x-5)\,dx}{\sqrt{3x^2-6x-1}}$ в) $\int x \ln^2 x\, dx$

г) $\int \frac{x^3+9x^2+21x+21}{(x+3)^2(x^2+3)} dx$

21. а) $\int \frac{\ln(tg\, x)}{\sin x \cos x} dx$ б) $\int \frac{(8x-11)\,dx}{\sqrt{5+2x-x^2}}$ в) $\int \frac{\ln^2 x}{x^2} dx$

г) $\int \frac{x^3+5x^2+12x+4}{(x+2)^2(x^2+4)} dx$

22. а) $\int \frac{3^{arctgx}}{1+x^2} dx$ б) $\int \frac{(x-3)\,dx}{\sqrt{3-2x-x^2}}$ в) $\int x^2 \cos 4x\, dx$

г) $\int \frac{x^3+2x^2+10}{(x+1)^2(x^2-x+1)} dx$

23. а) $\int \frac{dx}{\sqrt{e^x+4}}$ б) $\int \frac{(3x-1)\,dx}{\sqrt{x^2+2x+2}}$ в) $\int x^2 e^{-\frac{x}{2}} dx$

г) $\int \frac{x^3+x+1}{(x+1)^2(x^2+x+1)} dx$

24. а) $\int \frac{(1+3x)dx}{\sqrt{1+4x^2}}$ б) $\int \frac{(2x-5)\,dx}{\sqrt{9x^2+8x+2}}$ в) $\int \cos(\ln x)\, dx$ г) $\int \frac{dx}{x(x^2+1)}$

25. а) $\int \frac{\sqrt{2+\ln x}}{x} dx$ б) $\int \frac{(2-5x)\,dx}{\sqrt{4x^2+9x+1}}$ в) $\int x^2 5^{\frac{x}{2}}\, dx$ г) $\int \frac{x\,dx}{x^3-1}$

26. а) $\int \frac{\sqrt{\arcsin x}}{\sqrt{1-x^2}} dx$ б) $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{3x^2-11x}+2}$ в) $\int x^3 e^{-x^2} dx$

г) $\int \frac{(2x^2-3x-3)\,dx}{(x-1)(x^2-2x+5)}$

27. а) $\int \frac{\sin 2x\, dx}{3\sin^2 x+4}$ б) $\int \frac{x^2\, dx}{1-x^4}$ в) $\int \sqrt{x} \ln^2 x\, dx$

г) $\int \frac{(3x-6)\,dx}{\sqrt{x^2-4x+5}}$

28. а) $\int \frac{e^{3x}\, dx}{e^{2x}+1}$ б) $\int \frac{(2x-8)\,dx}{\sqrt{1-x-x^2}}$ в) $\int \frac{x^2 arctg\, x}{1+x^2} dx$

г) $\int \frac{dx}{(x^2+1)(x^2+x)}$

29. а) $\int \frac{2x-\sqrt{\arcsin x}}{\sqrt{1-x^2}}dx$ б) $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{5x^2-2x+1}}$ в) $\int e^{3x}\sin x\,dx$

г) $\int \frac{(3x^2+x+3)\,dx}{(x-1)^3(x^2+1)}$

30. а) $\int \frac{x+\arccos 3x}{\sqrt{1-9x^2}}dx$ б) $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{2-6x-9x^2}}$ в) $\int \ln(x^2+5)\,dx$

г) $\int \frac{dx}{(x+1)^2(x^2+1)}$

31. а) $\int \frac{\arcsin x + x}{\sqrt{1-x^2}}dx$ б) $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{8+6x-9x^2}}$ в) $\int \sin(\ln x)dx$

г) $\int \frac{x^3+4x^2+4x+2}{(x+1)^2(x^2+x+1)}dx$

Задание 2. В а), б) пользуясь формулой Ньютона – Лейбница вычислить определенный интеграл $\int\limits_a^b f(x)\,dx$;

в) Найти площадь фигуры ограниченной линиями. Сделать чертеж.

1. а) $\int\limits_0^1 \frac{dx}{x^2+4x+5}$; б) $\int\limits_0^{16} \sqrt{256-x^2}\,dx$; в) $y=x^2;\ y=6-x;\ y=0.$

2. а) $\int\limits_0^{\pi} x\cos x\,dx$; б) $\int\limits_0^1 x^2\sqrt{1-x^2}dx$; в) $y^2=9x;\ y=x+2$.

3. а) $\int\limits_0^{\pi/3} \cos^2 3x\,dx$; б) $\int\limits_0^5 \frac{dx}{(25+x^2)\sqrt{25+x^2}}$; в) $y^2=9x;\ y=3x$.

4. а) $\int\limits_{-1}^0 \frac{dx}{x^2+x+1}$; б) $\int\limits_0^3 \frac{dx}{(9+x^2)^{3/2}}$;

в) $y=3x^2+1;\ y=3x+7$.

5. а) $\int\limits_0^1 \frac{x^2dx}{\sqrt{1+x^3}}$; б) $\int\limits_0^{\sqrt{5}/2} \frac{dx}{\sqrt{(5-x^2)^3}}$; в) $y=4-x^2;\ y=0.$

6. а) $\int\limits_0^2 xe^x\,dx$; б) $\int\limits_1^2 \frac{\sqrt{x^2-1}}{x^4}dx$; в) $y=x^3;\ y=2x.$

7. а) $\int\limits_0^{\sqrt{3}} \frac{x\,dx}{\sqrt{1+3x^2}}$; б) $\int\limits_0^{\sqrt{2}/2} \frac{x^4\,dx}{\sqrt{(1-x^2)^3}}$; в) $y=-x^2+2x;\ y=0.$

8. а) $\int_{0}^{\pi/3} \frac{\sin x\,dx}{3-2\cos x}$;   б) $\int_{0}^{\sqrt{3}} \frac{dx}{\sqrt{(4-x^2)^3}}$;

в) $xy-4=0;\ x=1; x=4; y=0.$

9. а) $\int_{0}^{\pi/4} x\sin 4x\,dx$;   б) $\int_{0}^{1} \frac{x^4\,dx}{\sqrt{(2-x^2)^{3/2}}}$;

в) $x^3-4y=0;\ y=0;\ x-2=0$

10. а) $\int_{\pi/6}^{-\pi/2} \left(\cos x+\frac{1}{\sin^2 x}\right)dx$;   б) $\int_{0}^{2} \frac{x^2\,dx}{\sqrt{16-x^2}}$;   в) $y=x^2+2x;\ y=x+2.$

11. а) $\int_{0}^{\pi/2} \sin x\cos^3 x\,dx$;   б) $\int_{0}^{2} \sqrt{4-x^2}\,dx$;

в) $y=e^x;\ x=0; x=-2;\ y=0.$

12. а) $\int_{\pi/6}^{\pi/2} ctg\,x\,dx$;   б) $\int_{0}^{4} \frac{dx}{(16+x^2)^{3/2}}$;   в) $y^2-9x=0;\ x+y=0.$

13. а) $\int_{\pi/6}^{\pi/2} \frac{\cos x\,dx}{2\sin x+3}$;   б) $\int_{0}^{4} x^2\sqrt{16-x^2}\,dx$;   в) $y=\frac{1}{4}x^3;\ y=x.$

14. а) $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin x\cos x\,dx$;   б) $\int_{0}^{5/2} \frac{x^2dx}{\sqrt{25-x^2}}$;   в)

$y=x^2-6x+5;\ y=0.$

15. а) $\int_{-2}^{0} \left(x^2-4\right)\cos 3x\,dx$;   б) $\int_{0}^{5} x^2\sqrt{25-x^2}\,dx$;   в) $x=y^2;\ x=\frac{3}{4}y^2+1.$

16. а) $\int_{1}^{2} x\ln^2 x\,dx$;   б) $\int_{0}^{4} \sqrt{16-x^2}\,dx$;   в) $xy=8;\ x+y-9=0.$

17. а) $\int_{\pi/4}^{\pi/3} \frac{x\,dx}{\sin^2 x}$;   б) $\int_{0}^{4\sqrt{3}} \frac{dx}{\sqrt{\left(64-x^2\right)^3}}$;   в) $y=\ln x;\ y=0;\ x=e.$

18. а) $\int_{0}^{2\pi} x^2\sin x\,dx$;   б) $\int_{\sqrt{2}}^{2\sqrt{2}} \frac{\sqrt{x^2-2}}{x^4}\,dx$;   в) $y=3-2x;\ y=x^2.$

19. а) $\int_{0}^{e-1} \ln(x+1)dx$;   б) $\int_{0}^{2\sqrt{2}} \frac{x^4\,dx}{(16-x^2)\sqrt{16-x^2}}$;   в) $y=x^2-4;\ x-y+8=0.$

20. а) $\int_{0}^{1} xe^{-x}dx$;   б) $\int_{-3}^{3} x^2\sqrt{9-x^2}dx$;   в) $xy=2;\ y=3x+7.$

21. а) $\int_{0}^{1} \frac{\sqrt{x}dx}{1+x}$;   б) $\int_{1}^{\sqrt{3}} \frac{dx}{\sqrt{(1+x^2)^3}}$;   в) $y=3x^2+1;\ y=3x+7.$

22. а) $\int_4^9 \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}dx$; б) $\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{(16-x^2)^3}}$; в) $y=-x^2;\ x+y+2=0.$

23. а) $\int_0^1 \frac{x^2dx}{(1+x^2)^3}$; б) $\int_0^2 \frac{x^4dx}{\sqrt{(8-x^2)^3}}$; в) $xy=20;\quad x^2+y^2=41$.

24. а) $\int_1^2 \frac{\ln x}{x^5}dx$; б) $\int_3^6 \frac{\sqrt{x^2-9}}{x^4}dx$; в) $y=x^2;\ y=\frac{1}{2}x^2;\ y=2x.$

25. а) $\int_0^{1/4} \frac{dx}{(4x+1)\sqrt{x}}$; б) $\int_0^1 \sqrt{4-x^2}\,dx$; в) $y^3=x;\ y=1;\ x=8.$

26. а) $\int_0^1 \frac{dx}{x^2+4x+5}$; б) $\int_2^4 \frac{\sqrt{x^2-4}}{x^4}dx$; в) $y^2=4x;\ x=2.$

27. а) $\int_0^{\sqrt{3}} x\,arctg\,x\,dx$; б) $\int_0^2 \frac{dx}{(4+x^2)\sqrt{4+x^2}}$; в) $y^2=4x;\ x^2=4y.$

28. а) $\int_1^{e^{\pi/2}} \cos\ln x\,dx$; б) $\int_0^{\sqrt{2}} \frac{x^4\,dx}{(4-x^2)^{3/2}}$; в) $y^2=6x;\ x^2+y^2=16.$

29. а) $\int_0^{\pi/4} \frac{x+\sin x}{1+\cos x}dx$; б) $\int_0^{1/\sqrt{2}} \frac{dx}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}}$; в) $y^2=2x+1;\ x-y-1=0.$

30. а) $\int_0^{\pi/2} e^x\cos x\,dx$; б) $\int_0^1 \frac{x^2dx}{\sqrt{4-x^2}}$; в) $y=\ln x;\ x=e;\ x=e^2;\ y=0.$

31. а) $\int_1^e \frac{1+\ln x}{x}$; б) $\int_0^{3/2} \frac{x^2dx}{\sqrt{9-x^2}}$;
в) $2y-x^3=0;\ y=0; x+1=0; x-2=0$.

Задание 3. Вычислить приближенное значение определенного интеграла $\int_a^b f(x)\,dx$ с помощью формулы Симпсона, разбив отрезок интегрирования на 10 частей. Все вычисления производить с округлением до третьего десятичного знака.

1. $\int_{-4}^{6} \sqrt{x^2+16}\,dx$ 2. $\int_0^{10} \sqrt{x^2+21}\,dx$ 3. $\int_{-5}^{5} \sqrt{x^2+2}\,dx$

4. $\int_{-9}^{1} \sqrt{x^2+10}\,dx$ 5. $\int_{-6}^{4} \sqrt{x^2+7}\,dx$ 6. $\int_{-8}^{2} \sqrt{x^2+5}\,dx$

7. $\int_{-1}^{9}\sqrt{x^2+12}\,dx$ 8. $\int_{-3}^{7}\sqrt{x^2+4}\,dx$ 9. $\int_{-2}^{8}\sqrt{x^2+6}\,dx$

10. $\int_{-7}^{3}\sqrt{x^2+8}\,dx$ 11. $\int_{-2}^{8}\sqrt{x^3+16}\,dx$ 12. $\int_{2}^{12}\sqrt{x^3+9}\,dx$

13. $\int_{-3}^{7}\sqrt{x^3+32}\,dx$ 14. $\int_{0}^{10}\sqrt{x^3+9}\,dx$ 15. $\int_{-1}^{9}\sqrt{x^3+2}\,dx$

16. $\int_{2}^{12}\sqrt{x^3+4}\,dx$ 17. $\int_{1}^{11}\sqrt{x^3+3}\,dx$ 18. $\int_{-3}^{7}\sqrt{x^3+36}\,dx$

19. $\int_{-2}^{8}\sqrt{x^3+8}\,dx$ 20. $\int_{-2}^{8}\sqrt{x^3+11}\,dx$ 21. $\int_{0}^{1}\sqrt{4+x^3\,dx}$

22. $\int_{0}^{1}\sqrt{1+x^2}$ 23. $\int_{0}^{1}\sqrt{1-x^3}\,dx$ 24. $\int_{0}^{2}\sqrt{1+x^3}\,dx$

25. $\int_{2}^{7}\sqrt{x^2+1}\,dx$ 26. $\int_{0}^{\pi}\sqrt{3-\sin x}\,dx$ 27. $\int_{0}^{\pi/2}\sqrt{2+\cos x}\,dx$

28. $\int_{0}^{4}\sqrt{32-x^2}\,dx$ 29. $\int_{0}^{\pi/2}\sqrt{3-\cos 2x}\,dx$ 30. $\int_{0}^{1}\sqrt{1+x^4}\,dx$

31. $\int_{0}^{4}\sqrt{16-x^2}\,dx$

Задание 4. Вычислить несобственный интеграл или доказать его расходимость

1. $\int_{1}^{+\infty}\frac{dx}{x^2+x}$ 2. $\int_{9}^{+\infty}\frac{dx}{x\ln^3 x}$ 3. $\int_{-\infty}^{0}\frac{dx}{1+x+x^2}$

4. $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{x^2+x+2}$ 5. $\int_{2}^{+\infty}\frac{1+x^2}{x^3}dx$ 6. $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{x^2+4x+9}$

7. $\int_{2}^{+\infty}\frac{dx}{x+\sqrt{x}}$ 8. $\int_{3}^{+\infty}\frac{x\,dx}{x^2-4}$ 9. $\int_{4}^{+\infty}\frac{dx}{x\sqrt{x}}$

10. $\int_{1}^{+\infty}\frac{x\,dx}{x^2+4}$ 11. $\int_{0}^{4}\frac{dx}{\sqrt[3]{(x-3)^2}}$ 12. $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{x^2+4x+5}$

13. $\int_{4}^{e}\frac{dx}{x\sqrt{\ln x}}$ 14. $\int_{1}^{+\infty}\frac{x^2dx}{1+x^6}$ 15. $\int_{0}^{1/4}\frac{dx}{\sqrt{x-x^2}}$

16. $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x^2+x}}$ 17. $\int\limits_1^2 \frac{x^2\,dx}{(x-1)\sqrt{x-1}}$ 18. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} xe^x dx$

19. $\int\limits_0^1 \ln x\,dx$ 20. $\int\limits_2^{+\infty} \frac{\ln x}{x}dx$ 21. $\int\limits_0^{+\infty} xe^{-x}dx$

22. $\int\limits_{-\infty}^{-3} \frac{x\,dx}{(x^2+1)^2}$ 23. $\int\limits_{-1}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+x+1}$ 24. $\int\limits_0^1 \frac{x^2dx}{\sqrt{1-x^3}}$

25. $\int\limits_1^2 \frac{dx}{(x-1)^2}$ 26. $\int\limits_{-3}^2 \frac{dx}{(x+3)^2}$ 27. $\int\limits_2^{+\infty} \frac{dx}{x\ln x}$

28. $\int\limits_0^3 \frac{dx}{(x-2)^3}$ 29. $\int\limits_0^4 \frac{dx}{\sqrt[3]{(x-3)^2}}$ 30. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+4x+5}$

31. $\int\limits_0^{+\infty} \frac{arctg\,x}{1+x^2}dx$

Ряды:

Задача 1. Найти сумму ряда.

1.1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{6}{9n^2+12n-5}$. 1.2. $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{24}{9n^2-12n-5}$.

1.3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{6}{9n^2+6n-8}$. 1.4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{9}{9n^2+21n-8}$.

1.5. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{2}{4n^2+8n+3}$. 1.6. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{14}{49n^2-28n-45}$.

1.7. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{3}{9n^2+3n-2}$. 1.8. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{7}{49n^2-7n-12}$.

1.9. $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2+n-2}$. 1.10. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{14}{49n^2-14n-48}$.

1.11. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{6}{36n^2-24n-5}$. 1.12 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{14}{49n^2-84n-13}$.

1.13 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{4}{4n^2+4n-3}$. 1.14 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{7}{49n^2+35n-6}$.

1.15. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{9}{9n^2+3n-20}$.

1.16 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{14}{49n^2-42n-40}$.

1.17. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{8}{16n^2-8n-15}$.

1.18. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{7}{49n^2-21n-10}$.

1.19. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5}{25n^2+5n-6}$.

1.20. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{6}{4n^2-9}$.

1.21. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{7}{49n^2-35n-6}$.

1.22. $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^2+n-2}$.

1.23. $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{12}{36n^2+12n-35}$.

1.24. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{7}{49n^2+21n-10}$.

1.25 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3}{9n^2-3n-2}$.

1.26. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5}{25n^2-5n-6}$.

1.27. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{8}{16n^2+8n-15}$.

1.28. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{14}{49n^2-56n-33}$.

1.29. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{12}{36n^2-12n-35}$.

1.30. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{7}{49n^2+7n-12}$.

1.31. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{14}{49n^2-70n-24}$.

Задача 2. Исследовать на сходимость ряд.

2.1. $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n+1}{2^n(n-1)!}$.

2.2. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n!)^2}{2^{n^2}}$.

2.3. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{n+1}(n^3+1)}{(n+1)!}$.

2.4. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{10^n 2n!}{(2n)!}$.

2.5. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n+2)!}{3n+5}\cdot\frac{1}{2^n}$.

2.6. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+5}{n!}\sin\frac{2}{3^n}$.

2.7. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{arctg\,\frac{5}{n}}{n!}$.

2.8. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^n}{3^n n!}$.

2.9. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(2n)!}tg\,\frac{1}{5^n}$.

2.10. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{6^n(n^2-1)}{n!}$.

2.11. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{(n+2)!}$.

2.12. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^n}{(n!)^2}$.

2.13. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{7^{2n}}{(2n-1)!}$.

2.14. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{(3n!)}$.

2.15. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1\cdot 3\cdot 5 ... (2n-1)}{3^n(n+1)!}$.

2.16. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^{n-1}}$.

2.17. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n!)^2}{(3^n+1)(2n)!}$.

2.18. $\sum_{n=1}^{\infty}n!\sin\frac{\pi}{2^n}$.

2.19. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)!}{n^n}$.

2.20. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5^n\sqrt[3]{n^2}}{(n+1)!}$.

2.21. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n n!}{n^n}$.

2.22. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5^n(n+1)!}{(2n)!}$.

2.23. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{(n+2)!4^n}$.

2.24. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3\cdot 5\cdot 7 ... (2n+1)}{2\cdot 5\cdot 8 ... (3n-1)}$.

2.25. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1\cdot 4\cdot 7 ... (3n-2)}{7\cdot 9\cdot 11 ... (2n+5)}$.

2.26. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n!}{\sqrt{2^n+3}}$.

2.27. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(3n+2)!}{10^n n^2}$.

2.28. $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{4^{n-1}\sqrt{n^2+5}}{(n-1)!}$.

2.29. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!\sqrt[3]{n}}{3^n+2}$.

2.30. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!(2n+1)!}{(3n)!}$.

2.31. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1\cdot 4\cdot 7 ... (3n-2)}{2^{n+1}n!}$.

Задача 3. Исследовать на сходимость ряд.

3.1. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{-n^2}$.

3.2. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4^n}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}$.

3.3. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n^2+1}{n^2+1}\right)^{n^2}$.

3.4. $\sum_{n=1}^{\infty}n^4\left(\frac{2n}{3n+5}\right)^n$.

6.5. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n+1}{3n-2}\right)^{n^2}$.

6.6. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n+2}{3n+1}\right)^{n}(n+1)^3$.

3.7. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{4n-3}{5n+1}\right)^{n^3}$.

3.8. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{10n+5}\right)^{n^2}$.

3.9. $\sum_{n=1}^{\infty} n\arcsin^n \frac{\pi}{4n}$.

3.10. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+2}{3n-1}\right)^{n^2}$.

3.11. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n-1}{n}\right)^{n}\frac{n}{5^n}$.

3.12. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n+3}{n+1}\right)^{n^2}$.

3.13. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3n+2}{4n-1}\right)^{n}(n-1)^2$.

3.14. $\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{n+1}{2n-3}\right)^{n^2}$.

3.15. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{3n+1}\right)^{2n+1}$.

3.16. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n-1}{3n+1}\right)^{n/2}$.

3.17. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{n+1}}{n^n}$.

3.18. $\sum_{n=1}^{\infty} n^2\sin^n \frac{\pi}{2n}$.

3.19. $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n^3}{(\ln n)^n}$.

3.20. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{3n-1}\right)^{n^3}$.

3.21. $\sum_{n=1}^{\infty} n^3 arctg^n \frac{\pi}{3n}$.

3.22. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^5 3^n}{(2n+1)^n}$.

3.23. $\sum_{n=1}^{\infty} 2^{n-1}e^{-n}$.

3.24. $\sum_{n=1}^{\infty} n\left(\frac{3n-1}{4n+2}\right)^{2n}$.

3.25. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n}{4n+3}\right)^{n^2}$.

3.26. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^{n+2}}{(2n^2+1)^{n/2}}$.

3.27. $\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{n}\left(\frac{n}{3n-1}\right)^{2n}$.

3.28. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}\frac{1}{2^n}$.

3.29. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\cdot 3^{n+2}}{5^n}$.

3.30. $\sum_{n=2}^{\infty}\sqrt[3]{n}\left(\frac{n-2}{2n+1}\right)^{3n}$.

3.31. $\sum_{n=1}^{\infty} n^4 arctg^{2n} \frac{\pi}{4n}$.

Задача 4. Исследовать на сходимость ряд.

4.1. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{2n+1}{n(n+1)}$.

4.2. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\left(\frac{n}{2n+1}\right)^{n}$.

4.3. $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{\ln(n+1)}$.

4.4. $\sum_{n=3}^{\infty}\frac{(-1)^{n}}{n(\ln\ln n)\ln n}$.

4.5. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n}2n^{2}}{n^{4}-n^{2}+1}$.

4.6. $\sum_{n=3}^{\infty}\frac{(-1)^{n}}{(n+1)\ln n}$.

4.7. $\sum_{n=3}^{\infty}\frac{(-1)^{n}}{n\ln(n+1)}$.

4.8. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n\sqrt[4]{2n+3}}$.

4.9. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n}\sin\frac{\pi}{2\sqrt{n}}}{\sqrt{3n+1}}$.

4.10. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\cos\frac{\pi}{6n}$.

4.11. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n}{n!}$.

4.12. $\sum_{n=3}^{\infty}\frac{(-1)^{n}}{n\ln(2n)}$.

4.13. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\,tg\frac{1}{n}$.

4.14. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n}{n^{2}}$.

4.15. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{(n+1)2^{2n}}$.

4.16. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n}}{\cos\frac{\pi}{3\sqrt{n}}\sqrt[3]{3n+\ln n}}$.

4.17. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{(n+1)(3/2)^{n}}$.

4.18. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\frac{2n-1}{3n}$.

4.19. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n}(n+3)}{\ln(n+4)}$.

4.20. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\frac{n+1}{\sqrt{n^{3}}}$.

4.21. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n}\,tg\frac{\pi}{4\sqrt{n}}}{\sqrt{5n-1}}$.

4.22. $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n}}{(2n+1)2^{2n+1}}$.

4.23. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\frac{\sin(n\sqrt{n})}{n\sqrt{n}}$.

4.24. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n}}{n+\cos\left(2/\sqrt{n+4}\right)}$.

4.25. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \sin\frac{\pi}{2^n}$.

4.26. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2+\sin^2 n}$.

4.27. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{\sin 3^n}{3^n}$.

4.28. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right)$.

4.29. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \sin\frac{1}{n}\cdot tg\frac{1}{n}$.

4.30. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \left(1-\cos\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$.

4.31. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{n^3}{(n+1)!}$.

Задача 5. Найти область сходимости функционального ряда.

5.1. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(x+n)^{-1/5}}$.

5.2. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n-1}\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^n$.

5.3. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n+1}\frac{1}{(3x^2+4x+2)^n}$.

5.4. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{3^n}(x^2-4x+6)^n$.

5.5. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{1-x^n}$.

5.6. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+3}{n+1}\frac{1}{(27x^2+12x+2)^n}$.

5.7. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{1+x^{2n}}$.

5.8. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n2^n}{n+1}\frac{1}{(3x^2+8x+6)^n}$.

5.9. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+3}\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^n$.

5.10. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x^2-6x+12)^n}{4^n(n^2+1)}$.

5.11. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\left(\sqrt[3]{n^2}+\sqrt{n}+1\right)^{2x+1}}$.

5.12. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(x+n)^3}$.

5.13. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt[3]{x+n}}$.

5.14. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x^2-5x+11)^n}{5^n(n^2+5)}$.

5.15. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+x)^n}{n^n}$.

5.16. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+x)}$.

5.17. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(x+n)^2}$.

5.18. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1+x^n}{1-x^n}$.

5.19. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{xn^x}$.

5.20. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n}}{n^{x^2-1}}$.

5.21. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{2^n\left(n^2+1\right)}\left(25x^2+1\right)^n$.

5.22. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt[3]{n}}{x^2+n^2}$.

5.23. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n^3}{n^3+2}\frac{1}{\left(3x^2+10x+9\right)^n}$.

5.24. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{x+2^n}$.

5.25. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(x+n)(x+n+1)}$.

5.26. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|x|^n+|x|^{-n}}{2}$.

5.27. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x}{n\left(n+e^x\right)}$.

5.28. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n n}{\left(n-e^x\right)\left(n^2+1\right)}$.

5.29. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(n-x)^{1/3}}$.

5.30. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{x}}{3^{nx}+2}$.

5.31. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x}{n+x^2}$.

Функция нескольких переменных:

Задача 1. Найти частные производные первого и второго порядка функций.

1. а) $z=x^y$; б) $z=y^2\sqrt{\ln x}$

2. а) $z=\frac{1}{arctg(y/x)}$; б) $z=y^{\ln x}$

3. а) $z=x\sqrt{y}+\frac{y}{\sqrt[3]{x}}$; б) $z=\frac{1}{3}\sqrt{(x^2+y^2)^3}$

4. а) $z=arctg\,\frac{x}{y}$; б) $z=\sin^3(x+y)$

5. а) $z=arctg(xy)$; б) $z=\frac{x^2y^2}{x+y}$

6. а) $z=(2x-y)/(x+2y)$; б) $z=\frac{xy}{x+y}$

7. а) $z=\sqrt{x^2+3x^2y-y^3}$; б) $z=x^{2y}$

8. а) $z=(2xy)/(x-y)$; б) $z=\dfrac{x^2}{1-2y}$

9. а) $z=x^2\sin^2 y$; б) $z=\dfrac{x+y}{1-xy}$

10. а) $u=y/x+z/y+x/z$; б) $z=x^{2y}$

11. а) $z=\ln(x^3+y^3)$; б) $z=\dfrac{x^3}{1-5y}$

12. а) $z=arctg\,\dfrac{y}{x}$; б) $z=\arcsin(xy)$

13. а) $z=y/x$; б) $z=\dfrac{x^2}{1-2y}$

14. а) $z=\ln(tg\,\dfrac{x}{2y})$; б) $z=arctg\,\dfrac{x+y}{x}$

15. а) $z=\ln(x+\sqrt{x^2+y^2})$; б) $z=\dfrac{x^3y}{4x-y}$

16. а) $z=\ln(\sqrt{x^3+y^3})$; б) $z=e^{x/\sqrt{y}}$

17. а) $z=\dfrac{(x^3+y^3)}{(x^2+y^2)}$; б) $z=y^2\sqrt{\ln x}$

18. а) $z=x^2/y^2+\sqrt{x/y}$; б) $z=e^{-x^2/\sqrt{y}}$

19. а) $z=\dfrac{1}{(5x^2y-y^3+7)^3}$; б) $z=arctg\,\dfrac{x+y}{x}$

20. а) $z=\ln(x^2+\sqrt{x^2+y^2})$; б) $z=y^{\ln x}$

21. а) $z=\sin x\cos y$; б) $z=\sin^3(x+y)$

22. а) $z=\ln\sin(\frac{1}{x}-\frac{2}{y})$; б) $z=y^2\sqrt{\ln x}$

23. а) $z=\arcsin\sqrt{\dfrac{(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)}}$; б) $z=(1/3)^{y/x}$

24. а) $z=\dfrac{x}{\sqrt{3y^2-2x}}$; б) $z=x^3\sin^2 y$

26. а) $z=\ln(\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{\ln y})$; б) $z=e^{x/\sqrt{y}}$

27. а) $z=\sqrt{x^3+3x^2y-y^3}$; б) $z^2=xy$

28. а) $z=x^2+3xy-4y^2+x$; б) $z=xe^y$

29. а) $u=\sqrt{xy+yz+zx}$; б) $z=\dfrac{5}{x^2+y^2}$

30. а) $z=\ln(x^2+y^2)$; б) $z=\dfrac{x-y}{x+y}$

31. а) $z=x^2+3xy-4y^3$; б) $z=\ln(3x-2y)^2$

Задача 2. Вычислить приближённо с помощью полного дифференциала с точностью до $0{,}01$.

1. $(1{,}03)^2\sqrt{0{,}98}$ 2. $\sqrt{(3{,}01)^2+(3{,}96)^2}$ 3. $1{,}04^{6{,}01}$

4. $(1{,}02)^2(0{,}97)^2$ 5. $\ln(\sqrt{0{,}99}+\sqrt[3]{1{,}04}-1)$ 6. $1{,}03^{3{,}02}$

7. $(0{,}99)^4(1{,}01)^2$ 8. $e^{1{,}15\cdot 1{,}1}$ 9. $\ln(\sqrt[3]{1{,}03}+\sqrt[4]{0{,}98}-1)$

10. $\ln(\sqrt[3]{1{,}03}+\sqrt[4]{0{,}98}-1)$ 11. $\ln(\sqrt[4]{1{,}04}+\sqrt{0{,}97}-1)$ 12. $1{,}04^{2{,}02}$

13. $0{,}97^{4{,}01}$ 14. $\sqrt{(2{,}98)^2+(5{,}06)^2}$ 15. $\sqrt{(2{,}96)^2+(4{,}07)^2}$

16. $\ln(\sqrt[3]{1{,}03}+\sqrt[4]{0{,}98}-1)$ 17. $1{,}04^{6{,}01}$ 18. $\sqrt{(3{,}01)^2+(3{,}95)^2}$

19. $\ln(\sqrt{1{,}07}+\sqrt[3]{0{,}96}-1)$ 20. $\sqrt{(3{,}01)^2+(3{,}96)^2}$ 21. $(1{,}04)^3(0{,}97)^4$

22. $\sqrt{(2{,}98)^2+(5{,}06)^2}$ 23. $1{,}01^{5{,}06}$ 24. $\ln(\sqrt[3]{1{,}05}+\sqrt{0{,}98}-1)$

25. $(1{,}02)^2(0{,}97)^3$ 26. $1{,}04^{2{,}02}$ 27. $\sqrt{(1{,}03)^2+(4{,}07)^2}$

28. $0{,}96^{2{,}03}$ 29. $e^{1{,}15\cdot 1{,}1}$ 30. $1{,}01^{2{,}03}$

Задача 3. Найти градиент функции $z=f(x,y)$ в точке $M(x,y)$

1. $z=xy-2x^2+4y-5$, $M(2;3)$ 2. $z=arctg(y/x)$, $M(1;1)$

3. $z^2=xy$, $M(4;2)$ 4. $z=\dfrac{4}{x^2+y^2}$, $M(-1;2)$

5. $z=x^2+y^2$, $M(4;2)$ 6. $z=20-\dfrac{x^2}{4}-y^2$, $M(4;2)$

7. $z=5x^2y^2-3xy^3+y^4$, $M(1;1)$ 8. $z=x^2-2xy+3y-1$, $M(1;2)$

9. $z=\dfrac{5}{x^2+y^2}$, $M(-1;2)$

10. $z=5x^2y-3xy^3+y^4$, $M(4;2)$

11. $z=4-x^2-y^2$, $M(1;2)$

12. $z=\sqrt{4+x^2+y^2}$, $M(2;1)$

13. $u=\sqrt{xyz}$, $M(2;-1;1)$

14. $z=\sqrt{x^2+y^2-9}$, $M(3;3)$

15. $z=arctg(y^2/x^2)$, $M(3;3)$

16. $z^2=xy$, $M(4;2)$

17. $z=\sqrt{1+x^2+y^2}$, $M(2;2)$

18. $z=\sqrt{9-x^2-y^2}$, $M(2;-1)$

19. $z=\dfrac{2}{x^2+y^2}$, $M(1;1)$

20. $z=\dfrac{1}{x^2-y^2}$, $M(2;1)$

21. $z=arctg(xy)$, $M(1;1)$

22. $z=xe^y$, $M(1;0)$

23. $z=\ln(x^2+3y^2)$, $M(1;1)$

24. $z=\dfrac{x-y}{x+y}$, $M(4;3)$

25. $z=\arcsin\dfrac{x}{\sqrt{y}}$, $M(1;4)$

26. $z=\ln(5x^2+4y^2)$, $M(1;1)$

27. $z=\ln(3x-2y)^2$, $M(2;1)$

28. $z=x^2+3xy-4y^2+x$, $M(1;3)$

29. $z=\arcsin\dfrac{x}{\sqrt{y}}$, $M(1;4)$

30. $z=arctg(x^2y^2)$, $M(1;-1)$

Задача 4. Исследовать функцию $z=f(x,y)$ на экстремум.

1. $z=6y-3y^2-2x^2-8x-6$

2. $z=x^3+8y^3-6xy+1$

3. $z=y\sqrt{x}-y^3-x+6y$

4. $z=\dfrac{x^2}{1-2y}$

5. $z=x^3+y^2-3xy$

6. $z=2xy-4x-2y$

7. $z=e^x(x+y^2)$

8. $z=x^2+y^2-2x-2y+8$

9. $z=3x+6y-x^2-xy-y^2$

10. $z=x^3y^2(6-x-y)$, $(x>0, y>0)$

11. $z=y\sqrt{x}-y^2-x+6y$

12. $z=3x^2-2x\sqrt{y}+y-8x+8$

13. $z=x^2-xy+y^2+9x-6y+20$

14. $z=2xy-3x^2-2y^2+10$

15. $z=2x^3-xy^2+5x^2+y^2$

16. $z=x^3y^3(12-x-y)$

17. $z = x^2 - xy + y^2 + 9x - 6y + 10$

18. $z = x^2 + xy + y^2 + x - y + 1$

19. $z = 4(x - y) - x^2 - y^2$

20. $z = 2x^2 + 2xy + 3y^2 - 4x - 2y + 3$

21. $z = x^2 + 3xy - y^2 + 4x$

22. $z = 1 + 6x - x^2 - xy - y^2$

23. $z = e^{2x}(x + y^2 + 2y)$

24. $z = 4(x - y) - x^2 - y^2$

25. $z = -2x^2 + 2xy - 2y^2 + 5$

26. $z = x^3 + y^3 - 3xy$

27. $z = x^2 + y^2 - 2x + 2y$

28. $z = (x - 1)^2 + 2y^2$

29. $z = xy(3 - x - y)$

30. $z = 1 + 6x - x^2 - xy$

Вопросы к экзамену(1 семестр)

по дисциплине <u>Математический анализ</u>

1. Понятие множеств. Операции над множествами.
2. Понятие функций. Основные свойства функций.
3. Элементарные функции. Классификация функций.
4. Применение функции в экономике.
5. Предел числовой последовательности.
6. Предел функции в бесконечности и в точке.
7. Бесконечно малые величины. Свойства бесконечно малых величин.
8. Бесконечно большие величины. Свойства бесконечно больших величин.
9. Основные теоремы о пределах. Признаки
10. Задача о непрерывном начислении процентов.
11. Первый замечательный предел.
12. Второй замечательный предел.
13. Непрерывность функции. Свойства функций непрерывных на отрезке.
14. Определение производной. Зависимость между непрерывностью и дифференцируемой функции.
15. Схема вычисления производной. Основные свойства дифференцирования.
16. Производная сложной и обратной функций.
17. Производная логарифмической функции.
18. Производная показательной функции.
19. Производная степенной функции.
20. Производная степенно-показательной функции.
21. Производные тригонометрических функций.
22. Производные неявной и параметрической заданной функции.

23. Понятие производных высших порядков.
24. Понятие дифференциала функции.
25. Применения дифференциала в приближенных вычислениях.
26. Экономический смысл производной.
27. Использование понятия производной в экономике.
28. Теорема Ферма.
29. Теорема Ролля.
30. Теорема Лагранжа.
31. Правило Лопиталя.
32. Возрастание и убывание функций.
33. Экстремум функции.
34. Наибольшее и наименьшее значение функции на отрезке.
35. Выпуклость функции. Точка перегиба.
36. Асимптоты графика функции и построение их графиков.
37. Основные понятия функции нескольких переменных.
38. Предел и непрерывность функции нескольких переменных.
39. Частные производные функций двух переменных.
40. Дифференциал функции двух переменных.
41. Производная по направлению. Градиент.
42. Экстремум функции нескольких переменных.
43. Наибольшее и наименьшее значение функции.
44. Условный экстремум. Метод множителя Лагранжа.
45. Понятие об эмпирических формулах. Метод наименьших квадратов.

Вопросы на экзамен (2 семестр)

по дисциплине Математический анализ

1. Первообразная и неопределенный интеграл
2. Основные свойства неопределенного интеграла
3. Таблица основных интегралов
4. Основные методы интегрирования
5. Интегрирование рациональных функций
6. Интегрирование иррациональных и трансцендентных функций
7. Определение определенного интеграла
8. Условия существования определенного интеграла
10. Необходимое и достаточное условие интегрируемости
11. Интегрируемость непрерывных и некоторых разрывных функций
12. Основные свойства определенного интеграла
13. Оценки интегралов. Формула среднего значения
14. Интеграл с переменным верхним пределом
15. Формула Ньютона—Лейбница
16. Замена переменной в определенном интеграле

17. Формула интегрирования по частям в определенном интеграле
18. Некоторые физические и геометрические приложения определенного интеграла.
19. Несобственные интегралы с бесконечными пределами интегрирования .
20. Несобственные интегралы от неограниченных функций
21. Приближенное вычисление определенных интегралов
22. Понятие функции нескольких переменных
23. Геометрическое изображение функции двух переменных
24. Предел функции двух переменных
25. Непрерывность функции двух переменных
26. Частные производные
27. Понятие дифференцируемости функции
28. Производные сложных функций
29. Дифференциал функции
30. Касательная плоскость и нормаль к поверхности. Геометрический смысл дифференциала
31. Производная по направлению. Градиент
32. Частные производные н дифференциалы высших порядков
33. Формула Тейлора для функции двух переменных
34. Экстремумы функции двух переменных
35. Метод наименьших квадратов
36. Понятие числового ряда
37. Ряды с неотрицательными членами
38. Знакочередующиеся ряды
39. Абсолютная и условная сходимость рядов
40. Степенные ряды. Определение и общие замечания
41. Интервал сходимости степенного ряда
42. Свойства степенных рядов
43. Разложение функций в степенные ряды
44. Ряды Фурье. Тригонометрический ряд и его основные свойства
45. Сходимость ряда Фурье
46. Ряды Фурье для четных и нечетных функций
47. Ряд Фурье с периодом

Список использованных источников

1. Боронина, Е.Б. Математический анализ. [Электронный ресурс]: учебное пособие/ Боронина Е.Б.- Электрон. текстовые данные.- С.: Научная книга, 2012.- 210 с.- Режим доступа: http://www.iprbookshop.ru/6298.- ЭБС «IPRbooks», по паролю
2. Гунько, Ю.А. Математический анализ. [Электронный ресурс]: учебное пособие/ Гунько Ю.А.- Электрон. текстовые данные.- В.: Волгоградский институт бизнеса, Вузовское образование, 2013.- 151 с.- Режим доступа: http://www.iprbookshop.ru/11335.- ЭБС «IPRbooks», по паролю
3. Иванова, С.А. Математический анализ [Электронный ресурс]: учебное пособие/ Иванова С.А.— Электрон. текстовые данные.— Кемерово: Кемеровский технологический институт пищевой промышленности, 2014.— 127 с.— Режим доступа: http://www.iprbookshop.ru/61290.— ЭБС «IPRbooks»

КОРКМАЗОВА Зарема Османовна
СЕЛИМСУЛТАНОВА Рита Ильясовна

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

Учебно-методическое пособие
для обучающихся по направлению подготовки
01.03.04 «Прикладная математика»

Корректор Чагова О.Х.
Редактор Чагова О.Х.

Сдано в набор 26.07.2023 г.
Формат 60х84/16
Бумага офсетная.
Печать офсетная.
Усл. печ. л.4,18
Заказ № 4749
Тираж 100 экз.

Оригинал-макет подготовлен
в Библиотечно-издательском центре СКГА
369000, г. Черкесск, ул. Ставропольская, 36