МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

СЕВЕРО-КАВКАЗСКАЯ ГОСУДАРСТВЕННАЯ АКАДЕМИЯ

А.М. Кочкаров
Р.И. Селимсултанова

МАТЕМАТИКА

Методические рекомендации по выполнению расчетно-графических работ
для обучающихся 1-2 курсов по направлению подготовки
09.03.03 Прикладная информатика ОФО

г. Черкесск 2023 г

УДК 51
ББК 22.1
К 75

Рассмотрено на заседании кафедры «Математика»
Протокол № 1 от 02. 09. 2022 г.
Рекомендовано к изданию редакционно-издательским советом СКГА.
Протокол №24 от 26.09.2022 г.

Рецензенты:
Коркмазова З.О. –к. ф. – м. н., доцент
Шапошникова О.И. – к. ф. – м. н., доцент

К75 **Кочкаров, А.М**. Математика: учебно-методическое пособие к выполнению расчетно-графических работ по дисциплине «Математика» для обучающихся 1 курса направления подготовки 09.03.03 Прикладная информатика / А.М. Кочкаров, Р.И. Селимсултанова.– Черкесск: СКГА, 2023. – 76 с.

Учебно-методическое пособие предназначено для обучающихся по направлению подготовки 09.03.03 Прикладная информатика содержит краткий теоретический материал по курсу математики, который сопровождается рассмотрением большого количества образцов решения задач и заданий для выполнения расчетно-графических работ.

УДК 51
ББК 22.1

СОДЕРЖАНИЕ

Введение 4
1.Линейная алгебра с элементами аналитической геометрии 6
1.1 Понятие матрицы и определителя второго порядка 6
1.2 Системы двух линейных уравнений с двумя неизвестными 7
1.3 Определитель матрицы третьего порядка 8
2. Введение в анализ 25
2.1 Функция 25
2.2. Предел и непрерывность функции 31
3.Дифференциальное исчисление 38
3.1 Определение производной функции 38
3.2 Дифференциал и его приложения 40
3.3 Исследование функции с помощью производной 42
4. Интегральное исчисление функции одной переменной 45
4. 1 Вычисление неопределенного интеграла 45
4.2 Вычисление площади плоской фигуры 49
4.3. Несобственные интегралы 51
5.Функция нескольких переменных 53
5.1Функции нескольких независимых переменных 53
5.2 Экстремум функции двух независимых переменных 54
Задания расчетно-графических работ 56
Список литературы 74

ВВЕДЕНИЕ

Цель изучения математики в вузах – развитие логического и алгоритмического мышления; обучение основным математическим методам, необходимым для анализа и моделирования устройств, процессов и явлений, а также для решения различных прикладных (инженерных и экологических) задач, приобщение к самостоятельному изучению учебной литературы по математике и ее приложениям; овладение основными численными методами исследования и решения математических задач.

Подготовка кадров квалифицированных специалистов, способных обеспечить все ступени планирования обоснованными и наиболее выгодными расчетами возможна только при поступлении этих расчетов на надежной математической основе. Поэтому становится необходимым улучшение уровня математических знаний обучающихся. Этой цели служит издание методических указаний, отражающих специфику программы по математике .

Предлагаемое методическое указание дает возможность обучающимся очной формы обучения систематически закреплять полученные теоретические знания самостоятельным решением примеров и задач по разделам: линейная алгебра с элементами аналитической геометрии, введение в анализ, дифференциальное исчисление функции одной и нескольких переменных, интегральное исчисление.

В процессе изучения курса математики обучающийся должен выполнить ряд контрольных работ, главная цель которых – оказать обучающемуся помощь в его работе. Рецензии на эти работы позволяют обучающемуся судить о степени усвоения им соответствующего раздела курса, указывают на имеющиеся у него пробелы, на желательное направление дальнейшей работы, помогают сформулировать вопросы для постановки их перед преподавателем.

ПРАВИЛА ВЫПОЛНЕНИЯ РАСЧЕТНО-ГРАФИЧЕСКОЙ РАБОТЫ

Перед выполнением задания следует изучить соответствующие разделы курса по изданиям, которые рекомендуются ниже. В методических указаниях даются некоторые начальные теоретические сведения для решения задач из расчетно-графических работ.

Каждая расчетно-графическая работа должна быть сделана в отдельной тетради, на обложке которой следует разборчиво написать свою фамилию, инициалы, направление подготовки, название группы, вариант лабораторной работы, название дисциплины.

Задачи расчетно-графических работ выбираются из таблицы вариантов в соответствии с номером, который совпадает с последней цифрой учебного шифра обучающегося. Решения задач необходимо проводить в последовательности, указанной в таблице вариантов. При этом условие задачи должно быть полностью переписано. В том случае, когда несколько задач имеют общую формулировку, следует переписывая условие задачи, заменить общие данные конкретными из соответствующего номера.

Решение задач нужно излагать подробно и аккуратно, объясняя все действия. В конце решения, следует записать ответ. Работа, выполненная не по-своему варианту, не допускается к собеседованию. К собеседованию не допускается также работа, в которой выполнены не все задания.

Зачтенные расчетно-графические работы предъявляются преподавателю при сдаче зачета или экзамена.

1. <u>**Линейная алгебра с элементами аналитической геометрии**</u>

Понятие матрицы и основанный на нем раздел математики – *матричная алгебра* – имеет чрезвычайно важное значение для математиков и физиков, экономистов и юристов и т.д. Объясняется это тем, что значительная часть математических моделей различных объектов и процессов записывается в достаточно простой, а главное – компактной матричной форме.

1.1 ПОНЯТИЕ МАТРИЦЫ И ОПРЕДЕЛИТЕЛЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Прямоугольную таблицу из чисел, содержащую произвольное число m строк и n столбцов, называют *матрицей*. Числа, составляющие матрицу. называют *элементами* матрицы.

Матрицы обозначают прописными буквами латинского алфавита, например, A; B; C;…, а для обозначения элементов матрицы используют строчные буквы с двойной индексацией: a_{ij}, где i – номер строки, j – номер столбца.

Например, матрица $$\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{i1} & x_{i2} & \dots & x_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{m1} & x_{m2} & \dots & x_{mn} \end{pmatrix}, \qquad (1)$$

или в сокращенной форме $A=(x_{ij})$, $i=1; 2; \dots; m$; $j=1; 2; \dots; n$.

Например, $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 13{,}1 \\ 7{,}2 & 1 & 0 \\ -9 & 7 & 9 \end{pmatrix}$.

Если число строк матрицы совпадает с числом ее столбцов, то матрица называется *квадратной.*

Рассмотрим квадратную матрицу, состоящую из четырех элементов:

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} \qquad (2)$$

Эта матрица называется квадратной матрицей *второго порядка*.

Определителем матрицы второго порядка (2) называется число, равное $a_1b_2 - a_2b_1$ и обозначается символом $$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1b_2 - a_2b_1 \qquad (3)$$

Элементы, составляющие матрицу данного определителя обычно называются элементами этого определителя.

Справедливо следующее утверждение: *для того, чтобы определитель второго порядка был равен нулю, необходимо и достаточно, чтобы элементы его строк (или, соответственно, его столбцов) были пропорциональны,* то есть

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \text{ и } \frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} \qquad (4)$$

1.2 СИСТЕМА ДВУХ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ С ДВУМЯ ПЕРЕМЕННЫМИ

Покажем, как применяются определители второго порядка для исследования и отыскания решения системы двух линейных уравнений с двумя переменными:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = h_1, \\ a_2x + b_2y = h_2; \end{cases} \qquad (5)$$

(коэффициенты a_1; a_2; b_1; b_2 и свободные члены h_1 и h_2 считаются при этом заданными). Напомним, что пара чисел x_0 и y_0 называются решением системы (5), если подстановка этих чисел на место x и y в систему (5)обращает оба уравнения (5) в тождества.

Умножая первое уравнение системы (5) на b_2, а второе на b_1 и затем складывая полученные при этом равенства, будем иметь

$$(a_1b_2 - a_2b_1)\, x = b_2h_1 - b_1h_2 \qquad (6)$$

Аналогично, путем умножения уравнений системы (1.5) на a_1 и $-a_2$ соответственно получим:

$$(a_1b_2 - a_2b_1)\, y = a_1h_2 - a_2h_1 \qquad (7)$$

Введем следующие обозначения $\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$; $\Delta_x = \begin{vmatrix} h_1 & b_1 \\ h_2 & b_2 \end{vmatrix}$; $\Delta_y = \begin{vmatrix} a_1 & h_1 \\ a_2 & h_2 \end{vmatrix}$ (8)

С помощью этих обозначений выражения для определителя второго порядка (6) и (7) могут быть переписаны в виде

$$\Delta\cdot x = \Delta_x,\ \Delta\cdot y = \Delta_y, \qquad (9)$$

откуда

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta};\ y = \frac{\Delta_y}{\Delta}. \qquad (10)$$

Определитель Δ, составленный из коэффициентов при переменных системы (5) принято называть ***определителем этой системы*** или ***главным определителем системы (5).*** Заметим, что определители Δ_x и Δ_y получаются из определителя Δ посредством замены первого, или, соответственно, второго столбцов свободными членами.

Пример 1. Решить систему уравнений с двумя переменными $\begin{cases} 2x - 3y = 21, \\ -x + 4y = -23. \end{cases}$

▲ $\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = 2\cdot 4 - (-1)\cdot(-3) = 5$; $\Delta_x = \begin{vmatrix} 21 & -3 \\ -23 & 4 \end{vmatrix} = 21\cdot 4 - (-23)\cdot(-3) = 15$;

$\Delta_y = \begin{vmatrix} 2 & 21 \\ -1 & -23 \end{vmatrix} = 2\cdot(-23) - (-1)\cdot 21 = -25$;

Отсюда $x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{15}{5} = 3;\ y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = -\frac{25}{5} = -5;\ x = 3,\ y = -5.$

Могут представиться два случая: 1) определитель Δ системы отличен от нуля; 2) определитель равен нулю.

Рассмотрим сначала случай $\Delta \neq 0$. В этом случае из уравнений (9) мы сразу получим формулы для переменных (10).

Полученные нами так называемые, формулы Крамера дают решение системы (9) и поэтому доказывают единственность решения исходной системы (5).

Итак, *если у исходной системы (5) существует при $\Delta \neq 0$ решение, то это решение однозначно определяется формулами Крамера (10).*

Рассмотрим теперь тот случай, когда определитель Δ системы (5) равен нулю. Могут представиться два подслучая: *а*) хотя бы один из определителей Δ_x или Δ_y отличны от нуля; *б*) оба определителяΔ_x и Δ_y равны нулю.

В подслучае *а*) оказывается невозможным хотя бы одно из равенств (9), то есть система (9) не имеет решения, а поэтому не имеет решения и исходная система (5).

В подслучае *б*) исходная система (5) имеет бесчисленное множество решений.

Приходим к следующему выводу: если определитель Δ системы (5) равен нулю, то система (5) либо вовсе не имеет решения (в случае, если хотя бы один из определителей Δ_x или Δ_y отличны от нуля), либо имеет бесчисленное множество решений (в случае, когда $\Delta_x = \Delta_y = 0$).

1.3.ОПРЕДЕЛИТЕЛЬ МАТРИЦЫ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА

Рассмотрим квадратную матрицу $\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}$ (11),

состоящую из девяти элементов.

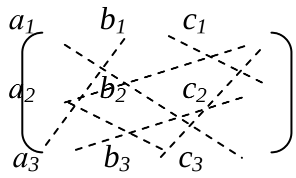
Определителем третьего порядка, соответствующим матрице (11), называется число $a_1b_2c_3+b_1c_2a_3+c_1a_2b_3-c_1b_2a_3-b_1a_2c_3-a_1c_2b_3$ (12) и обозначается

символом: $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1b_2c_3+b_1c_2a_3+c_1a_2b_3-c_1b_2a_3-b_1a_2c_3-a_1c_2b_3$ (13).

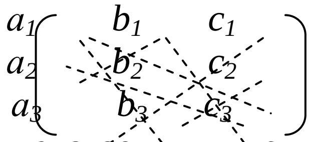
Как и в случае определителя второго порядка, элементы матрицы (11) будем называть элементами самого определителя. Кроме того, договоримся называть диагональ, образованную элементами a_1; b_2 ; c_3 *главной*, а диагональ отраженную элементами a_3; b_2 ; c_1 – *побочной*.

Для запоминания конструкции слагаемых, входящих в выражение для определителя (12), укажем два правила.

Заметим, что первые три слагаемых, стоящих в выражении (12) со знаком «плюс», представляют собой произведение элементов определителя, взятых по три так, как указано пунктирами на нижеприведенной схеме:



Последние же три слагаемых, стоявших в выражении (12) со знаком «минус», представляют собой произведение элементов, взятых по три так, как указано различными пунктами на следующей схеме:



Правило составления шести слагаемых, входящих в выражение (12) для определителя, опирающиеся на указанные две схемы обычно называют *правилом треугольника.*

Пример 2. Вычислить определитель матрицы: $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$.

▲ $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = 1\cdot5\cdot9+2\cdot6\cdot7+4\cdot8\cdot3-7\cdot5\cdot3-4\cdot2\cdot9-8\cdot6\cdot1=0.$

1.4 СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ ТЕОРИИ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

Пусть дана система *m* линейных уравнений с *n* неизвестными вида:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases} \qquad (1)$$

Определение. Решением системы (1) называется упорядоченная совокупность *n* чисел $x_1, x_2, \ldots x_n$, при подстановке обращающих каждое уравнение системы (1) в верное числовое равенство.

Определение. Две системы называются **эквивалентными**, если множества их решений совпадают.

Определение. Система называется **совместной**, если у нее существует, по крайней мере, одно решение.

Например, решением системы $\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 = 7, \\ 3x_1 - x_2 = 2; \end{cases}$ является набор чисел $x_1 = 1, x_2 = 1$, поэтому система совместна.

Определение. Если система не имеет ни одного решения, то она называется **несовместной.**

Например, система $\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 = 17, \\ 2x_1 + 5x_2 = 10; \end{cases}$ несовместна.

Определение. Система называется **неопределенной**, если она имеет бесконечное множество решений.

Например, система $\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 = 3, \\ 4x_1 + 10x_2 = 6; \end{cases}$ имеет бесконечное множество решений.

Определение. Система называется **определенной**, если она имеет единственное решение.

Обозначим $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix};\ X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$

Матричная запись системы имеет вид

$AX=B$.

Методы решения систем линейных уравнений с невырожденной матрицей коэффициентов

Пусть $m=n$, т.е. задана система n линейных уравнений с n неизвестными

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n. \end{cases} \tag{1}$$

Системе (1) соответствуют матрицы

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Наиболее распространенными методами решения систем n линейных уравнений с n неизвестными являются метод Крамера и матричный метод.

Теорема Крамера. *Если матрица A системы (1) невырожденная, то система (1) имеет единственное решение*

$$X = A^{-1} \cdot B. \tag{2}$$

Из равенства (2) вытекает покомпонентная запись:

$$x_j = \frac{\Delta_j}{\Delta} \quad j = 1,2,...,n \quad , \qquad (3)$$

где $\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$, Δ_j – определитель, получаемый из определителя Δ заменой j-го столбца на столбец свободных членов.

Формулы (3) называются **формулами Крамера**. Из формул (2) и (3) вытекают два метода решения систем уравнений, для которых матрица коэффициентов должна быть невырожденной: метод Крамера и матричный метод.

Алгоритм решения системы линейных уравнений методом Крамера.

1. Составить основной определитель $\Delta = detA$. Если $\Delta = 0$, то применять правило Крамера нельзя. Если $\Delta \neq 0$, то п.2^0.

2. Если $\Delta \neq 0$, то вычислить вспомогательные определители Δ_j, $j=1,2,\dots n$.

3. Найти отношения $\tilde{o}_j = \frac{\Delta_j}{\Delta}$, $j=1,2,\dots n$. Решение окончено.

Пример. Решить систему методом Крамера:

$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 - x_3 = 0, \\ x_1 + 5x_2 + 7x_3 = -3, \\ 4x_1 + 6x_2 + x_3 = 2. \end{cases}$$

Решение.

1. Вычислим основной определитель системы:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 4 & -1 \\ 1 & 5 & 7 \\ 4 & 6 & 1 \end{vmatrix} = 10 + 112 - 6 + 20 - 4 - 84 = 48 \neq 0 .$$

Так как $\Delta \neq 0$, то система имеет единственное решение.

2. Вычислим вспомогательные определители.

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & 4 & -1 \\ -3 & 5 & 7 \\ 2 & 6 & 1 \end{vmatrix} = 96, \qquad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & -3 & 7 \\ 4 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -48,$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 1 & 5 & -3 \\ 4 & 6 & 2 \end{vmatrix} = 0 .$$

3. По формулам Крамера имеем:

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{96}{48} = 2, \; x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{-48}{48} = -1, \; x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{0}{48} = 0.$$

Ответ: $x_1=2$, $x_2=-1$, $x_3=0$.

Алгоритм матричного метода (метода обратной матрицы).

1. Выписать матрицы A, B, X по заданной системе линейных уравнений.

2. Найти $detA$. Если $detA \neq 0$, то п.3^0. Если $detA=0$, то матрица А не имеет обратной.

3. Найти обратную матрицу A^{-1}.

4. Умножить обратную матрицу A^{-1} на матрицу B слева. Полученная матрица–столбец будет решением системы.

Пример. Решить систему матричным методом:

$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 - x_3 = 0, \\ x_1 + 5x_2 + 7x_3 = -3, \\ 4x_1 + 6x_2 + x_3 = 2. \end{cases}$$

Решение. 1^0. Представим систему в матричном виде $A \cdot X = B$, где

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -1 \\ 1 & 5 & 7 \\ 4 & 6 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

2. Так как $detA=48 \neq 0$, то система имеет единственное решение.

Согласно формуле (2), решением является матрица $X = A^{-1} \cdot B$.

3. Найдем обратную матрицу:

$$A^{-1} = \frac{1}{48}\begin{pmatrix} -37 & -10 & 33 \\ 27 & 6 & -15 \\ -14 & 4 & 6 \end{pmatrix}.$$

4. Тогда решение:

$$X = A^{-1} \cdot B = \frac{1}{48}\begin{pmatrix} -37 & -10 & 33 \\ 27 & 6 & -15 \\ -14 & 4 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{48}\begin{pmatrix} -37 \cdot 0 - 10 \cdot (-3) + 33 \cdot 2 \\ 27 \cdot 0 + 6 \cdot (-3) + 15 \cdot 2 \\ -14 \cdot 0 + 4 \cdot (-31) + 6 \cdot 2 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{48}\begin{pmatrix} 30 + 66 \\ -18 - 30 \\ -12 + 12 \end{pmatrix} = \frac{1}{48}\begin{pmatrix} 96 \\ -48 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} = x_1 \\ = x_2 \\ = x_3 \end{matrix}$$

Ответ: $x_1=2,\ x_2=-1,\ x_3=0$.

Решение произвольных систем линейных уравнений

Пусть задана система m линейных уравнений с n неизвестными общего вида

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \quad . \quad . \quad . \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases} \qquad (1)$$

Теорема Кронекера–Капелли. *Для того чтобы система (1) была совместной, необходимо и достаточно, чтобы*

$$r(A) = r(\bar{A}), \qquad (2)$$

где $\bar{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & | & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & | & b_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & | & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} & | & b_m \end{pmatrix}$ – расширенная матрица системы (1).

Рассмотрим возможные случаи для *r(A)*. Пусть $r(A) = r(\bar{A}) = r$. Если $r = n$ – числу неизвестных, то система (1) имеет единственное решение.

Если $r < n$, то система (1) имеет бесконечное множество решений, т.е. является неопределенной. Будем считать, что базисный минор расположен в первых r $(1 \le r \le min(m,n))$ строках и столбцах матрицы *A*. Отбросим последние $m - r$ уравнений системы (1) и запишем **укороченную систему**:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1r}x_r + a_{1r+1}x_{r+1} + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ \quad . \quad . \quad . \\ a_{r1}x_1 + a_{r2}x_2 + \ldots + a_{rr}x_r + a_{rr+1}x_{r+1} + \ldots + a_{rn}x_n = b_r, \end{cases} \qquad (3)$$

которая эквивалентна исходной. Назовем неизвестные $x_1, x_2, \ldots, x_r$ **базисными**, а $x_{r+1}, \ldots, x_n$ – **свободными**, и перенесем слагаемые, содержащие свободные неизвестные, в правую часть уравнений (3). Получим систему относительно базисных неизвестных $x_1, x_2, \ldots, x_r$:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1r}x_r = b_1 - a_{1r+1}x_{r+1} - \cdots - a_{1n}x_n, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2r}x_r = b_2 - a_{2r+1}x_{r+1} - \cdots - a_{2n}x_n, \\ \quad . \quad . \quad . \\ a_{r1}x_1 + a_{r2}x_2 + \cdots + a_{rr}x_r = b_r - a_{rr+1}x_{r+1} - \cdots - a_{rn}x_n. \end{cases} \qquad (4)$$

Определитель системы (4) для каждого набора значений свободных неизвестных $x_{r+1} = c_1, x_{r+2} = c_2, \ldots, x_n = c_{n-r}$ отличен от нуля (это базисный минор матрицы *A*), и поэтому система (4) имеет единственное решение $x_1, x_2, \ldots x_r$, зависящее от выбора чисел $c_1, c_2, \ldots c_{n-r}$. Это решение можно найти, например, методом Крамера. Решение исходной системы можно записать в виде матрицы–столбца:

$$X(c_1,c_2,\ldots,c_{n-r}) = \begin{pmatrix} x_1(c_1,c_2,\ldots,c_{n-r}) \\ \vdots \\ x_r(c_1,c_2,\ldots,c_{n-r}) \\ c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_{n-r} \end{pmatrix}. \qquad (5)$$

Формула (5), дающая зависимость произвольного решения системы (1) от свободных неизвестных $x_{r+1},\ldots,x_n$, называется **общим решением системы.**

Наиболее универсальным методом решения системы линейных уравнений является **метод Гаусса**, который заключается в последовательном исключении неизвестных с помощью **элементарных преобразований.**

К элементарным преобразованиям системы линейных уравнений относятся:

1) перестановка уравнений местами;
2) удаление из системы уравнений, все коэффициенты и свободные члены которых равны нулю;
3) умножение обеих частей уравнения на одно и то же ненулевое число;
4) прибавление к уравнению другого уравнения этой системы, умноженного на некоторое число.

Элементарные преобразования системы удобнее проводить с расширенной матрицей $\overline{A}$.

Алгоритм метода Гаусса.

1. Выписать расширенную матрицу $\overline{A}$.

2. Определить ранги $r(A)$ и $r(\overline{A})$ с помощью элементарных преобразований, преобразовав при этом матрицы A и $\overline{A}$ в матрицы A' и $\overline{A'}$ соответственно.

3. Сравнить ранги $r(A)=r(A')$ и $r(\overline{A})= r(\overline{A'})$.

Если $r(A) \neq r(\overline{A})$, то система несовместна. Решение окончено. Если $r(A) = r(\overline{A})=r$, то система совместна, переходим к п. 4^0.

4. Сравнить ранг r с числом неизвестных n. Если $r=n$, то система имеет единственное решение, переходим к п.5^0. Если $r<n$, то система имеет бесконечное множество решений, переходим к п.6^0.

5. В случае $r=n$ матрица А преобразована в треугольную матрицу $\grave{A}'$. Матрица $\overline{A'}$ в этом случае имеет вид:

$$\overline{A'} = \left(\begin{array}{cccc|c} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} & d_1 \\ 0 & c_{22} & \dots & c_{2n} & d_2 \\ 0 & 0 & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & c_{nn} & d_n \end{array}\right). \qquad (6)$$

Преобразование матрицы A к треугольному виду называется **прямым ходом Гаусса.**

6. Если $r \neq n$, матрица $\grave{A}'$ трапециевидная, расширенная матрица $\overline{A'}$ имеет вид:

$$\overline{A'} = \left(\begin{array}{cccccc|c} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1r} & \dots & c_{1n} & d_1 \\ & c_{22} & \dots & c_{2r} & \dots & c_{2n} & d_2 \\ & & . & . & . & & \dots \\ & & & c_{rr} & \dots & c_{rn} & d_n \end{array}\right). \qquad (7)$$

Найти общее решение системы.

7. Восстановить по матрице (7) систему, дописывая неизвестные x_j к соответствующим неизвестным c_{ij}:

$$\begin{cases} c_{11}x_1 + c_{12}x_2 + \ldots + c_{1r}x_r + c_{1,r+1}x_{r+1} + \ldots + c_{1n}x_n = d_1, \\ \qquad c_{22}x_2 + \ldots + c_{2r}x_r + c_{2,r+1}x_{r+1} + \ldots + c_{2n}x_n = d_2, \\ \qquad\qquad \vdots \\ \qquad\qquad c_{rr}x_r + c_{r,r+1}x_{r+1} + \ldots + c_{rn}x_n = d_n. \end{cases}$$

8. Выбрать в матрице A' базисный минор М. Неизвестные, соответствующие базисному минору, назовем **базисными**, остальные – **свободными.**

9. Перенести свободные неизвестные в правую часть, то есть получить **укороченную систему.**

10^0. Придать свободным неизвестным произвольные значения $x_{r+1} = c_1, x_{r+2} = c_2, ..., x_n = c_{n-r}$ и решить полученную систему относительно базисных неизвестных $x_1, x_2, ..., x_r$:

$$x_1 = x_1(c_1, c_2, ..., c_{n-r}), ..., x_r = x_r(c_1, c_2, ..., c_{n-r}).$$

Полученное решение является общим решением.

11. Записать общее решение в виде матрицы–столбца (5).

12. Для получения частных решений подставить вместо $c_1, c_2, ..., c_{n-r}$ конкретные значения.

13. Если необходимо, произвести проверку.

Проведенные рассуждения доказывают следующую теорему.

Теорема. *Любая система линейных уравнений приводится посредством элементарных преобразований к системе с трапециевидной матрицей вида (6) или (7).*

Пример. Установить совместность и найти общее решение системы:

$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 - 8x_3 + 4x_4 = 1, \\ x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 1, \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = 2, \\ 5x_1 + 2x_2 - 4x_3 + 2x_4 = 5. \end{cases}$$

Решение. 1^0. Выпишем основную и расширенную матрицы:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -8 & 4 \\ 1 & 1 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & 2 & -1 \\ 5 & 2 & -4 & 2 \end{pmatrix}, \quad \bar{A} = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 4 & -8 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 & -1 & 2 \\ 5 & 2 & -4 & 2 & 5 \end{array}\right).$$

2. Вычислим ранги матриц A и $\bar{A}$. Для этого сделаем следующие элементарные преобразования:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 4 & -8 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 & -1 & 2 \\ 5 & 2 & -4 & 2 & 5 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 4 & -8 & 4 & 1 \\ 0 & -3 & 6 & -3 & 0 \\ 0 & -9 & 18 & -9 & 0 \\ 0 & -18 & 36 & -18 & 0 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 4 & -8 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 4 & -8 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} \\ 0 & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 4 & -8 & 4 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 4 & -8 & 4 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \end{array}\right)$$

3. $A' = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -8 & 4 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$. Ранг матриц A и $\bar{A}$ равен 2:

$r(A) = r(\bar{A}) < 4$, где 4 – число неизвестных системы. Следовательно, система совместна и неопределенна. Найдём общее решение и несколько частных решений.

Выберем в качестве базисного минора $M = \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$.

Восстановим систему по полученной матрице:

$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 - 8x_3 + 4x_4 = 1, \\ \quad - x_2 + 2x_3 - \ x_4 = 0. \end{cases}$$

Неизвестные x_1, x_2 – базисные, x_3, x_4 – свободные. Запишем систему в укороченном виде:

$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 = 1 + 8x_3 - 4x_4, \\ \quad - x_2 = -2x_3 + x_4. \end{cases}$$

Положим $x_3 = c_1, x_4 = c_2$:

$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 = 1 + 8c_1 - 4c_2, \\ \quad - x_2 = -2c_1 + c_2. \end{cases}$$

Выразим x_2 из второго уравнения:

$$x_2 = 2c_1 - c_2,$$

подставим полученное значение в первое уравнение:

$$x_1 + 4(2c_1 - c_2) = 1 + 8c_1 - 4c_2,$$

$$x_1 + 8c_1 - 4c_2 = 1 + 8c_1 - 4c_2.$$

Отсюда $x_1 = 1$.

12. Общее решение системы имеет вид

$$X(c_1, c_2) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2c_1 - c_2 \\ c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}.$$

13. Подставим $c_1 = 1,\ c_2 = 0$, получим частное решение:

$$x_1 = 1,\ x_2 = 2 \cdot 1 - 0 = 2,\ x_3 = c_1 = 1,\ x_4 = c_2 = 0.$$

14. Проверка**.**

$$\begin{cases} 1 + 4 \cdot 2 - 8 \cdot 1 + 4 \cdot 0 = 1, \\ 1 + 2 - 2 \cdot 1 + 0 = 1, \\ 2 \cdot 1 - 2 + 2 \cdot 1 - 0 = 2, \\ 5 \cdot 1 + 2 \cdot 2 - 4 \cdot 1 + 2 \cdot 0 = 5; \end{cases} \qquad \begin{cases} 1 = 1, \\ 1 = 1, \\ 2 = 2, \\ 5 = 5. \end{cases}$$

Подставим $c_1 = 1, c_2 = 1$. Получим другое частное решение:

$$x_1 = 1, x_2 = 2 - 1 = 1, x_3 = 1, x_4 = 1.$$

1.4. Элементы матричного анализа.

В данном разделе изучаются векторные величины (или просто векторы), т.е. такие величины, которые, кроме своего численного значения, характеризуются еще **направленностью**.

Физическими примерами векторных величин могут служить смещение материальной точки, двигающейся в пространстве, скорость и ускорение этой точки, а также действующая на нее сила.

Мы рассмотрим простейшие операции над векторами (сложение векторов, умножение вектора на число), введем понятие линейной зависимости векторов и рассмотрим основные приложения этого понятия, изучим различные типы произведений векторов, актуальные для физических приложений (скалярное и векторное произведение двух векторов, смешанное произведение векторов).

ПОНЯТИЕ ВЕКТОРА. ЛИНЕЙНЫЕ ОПЕРАЦИИ НАД ВЕКТОРАМИ

Понятие вектора.

Абстрагируясь от конкретных свойств, встречающихся в период физических векторных величин, мы приходим к понятию **геометрического вектора** или просто, **вектора**.

Геометрическим вектором, или просто, вектором, будем называть направленный отрезок (рис. 1)

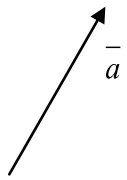


Рис. 1

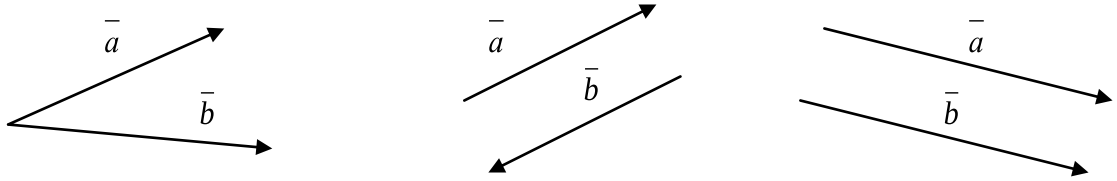
Вектор обозначают символом $\overline{AB}$, где точки A и B обозначают, соответственно, начало и конец данного направленного отрезка, либо Рис. 1 латинской буквой $\bar{a}$; $\bar{b}$ и т.п.

Начало вектора называют точкой его приложения. Если точка A является началом вектора $\bar{a}$, то говорят, что вектор $\bar{a}$ приложен в точке A. Для обозначения длины вектора будем пользоваться символом $|\overline{AB}|$ или $|\bar{a}|$.

Вектор называется **нулевым**, если начало и конец его совпадают. Нулевой вектор не имеет определенного направления и имеет длину, равную нулю. Это позволяет нам при записи отождествлять нулевой вектор с вещественными числами и нулем.

Векторы называются коллинеарными, если они лежат на одной прямой, или на параллельных прямых.

Два вектора называются равными, если они коллинеарны, имеют одинаковую длину и одинаковое направление. Все нулевые векторы равны.



а) б) в)

Рис. 2

На рис. 2 изображены слева неравные векторы (а и б), а справа – равные векторы (в). Из определения равенства векторов непосредственно вытекает следующее утверждение: **каковы бы ни были векторы** $\overline{a}$ **и точка Р, существует, и при том единственный, вектор** $\overline{PQ}$ **с началом в точке Р, равный вектору** $\overline{a}$.Иными словами, точка приложения данного вектора $\overline{a}$ **может быть выбрана произвольно (!)**

2. Линейные операции над векторами.

Линейными операциями принято называть операцию сложения векторов и операцию умножения вектора на вещественное число $\lambda \neq 0$.

Сначала определим **операцию сложения** двух векторов.

Определение. Суммой $\overline{a} + \overline{b}$ двух векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$ называется **вектор С**, идущий из начала вектора $\overline{a}$ в конец вектора $\overline{b}$, при условии, что вектор $\overline{b}$ приложен к концу вектора $\overline{a}$ (рис. 3).

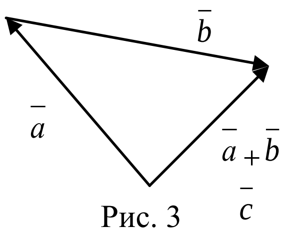


Рис. 3

Правило сложения двух векторов, содержащееся в этом определении (рис. 3) обычно называют **«правилом Треугольника».**

Правила сложения векторов обладают свойствами:

1) $\overline{a}+\overline{b} = \overline{b} + \overline{a}$ - переместительное свойство;

2) $(\overline{a}+\overline{b})+\overline{c} = \overline{a}+(\overline{b}+\overline{c})$ – сочетательное свойство;

3) существует нулевой вектор $\overline{O}$ такой, что $\overline{a}+\overline{O} = \overline{a}$ для любого вектора $\overline{a}$;

4) для каждого вектора $\overline{a}$ существует противоположный ему вектор $\overline{a'}$ такой, что $\overline{a}+\overline{a'} = \overline{O}$.

При сложении нескольких векторов пользуются следующим правилом: если приложить вектор $\overline{a_2}$ к концу вектора $\overline{a_1}$; вектор $\overline{a_3}$ к концу вектора $\overline{a_2}$,..., вектор $\overline{a_n}$ к концу вектора $\overline{a}_{n-1}$, то сумма $\overline{a_1}+\overline{a_2}+\ldots+\overline{a}_{n-1}$ будет представлять собой вектор, идущий из начала вектора $\overline{a_1}$ в конец вектора $\overline{a}_{n-1}$ (рис. 4).

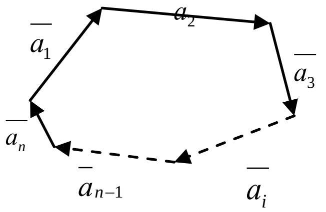


Рис. 4

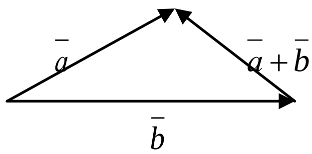


Рис. 5

Определение. Разностью $\overline{a}$ - $\overline{b}$ вектора $\overline{a}$ и вектора $\overline{b}$ называется такой вектор $\overline{c}$, который в сумме с вектором $\overline{b}$ дает вектор $\overline{a}$ (рис. 5).

Определение. Произведением $\alpha\overline{a}$ (или $\overline{a}\alpha$) вектора $\overline{a}$ на действительное число α называется вектор $\overline{b}$, коллинеарный вектору $\overline{a}$, имеющий длину, равную $|\alpha| \times |\overline{a}|$ и имеющий направление, совпадающее с направлением вектора $\bar{a}$ в случае α>0 и противоположное направлению вектора $\bar{a}$ в случае α<0.

Замечание. В случае, когда α= 0 или $\bar{a}$ = $\bar{O}$ произведение α$\bar{a}$ представляет собой нулевой вектор, направление которого неопределенно.

Операция умножения вектора на число обладает следующими свойствами:

5) α ($\bar{a}+\bar{b}$) = α$\bar{a}$+α$\bar{b}$ – распределительное свойство числового множителя относительно суммы векторов;

6) (α+β) $\bar{a}$ = α$\bar{a}+\bar{\alpha}$ – распределительное свойство векторного множителя относительно суммы чисел;

7) α (β$\bar{a}$) = (αβ) $\bar{a}$ - сочетательное свойство числовых множителей.

СКАЛЯРНОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ ДВУХ ВЕКТОРОВ

1. Под углом между двумя векторами будем подразумевать тот угол, который не превосходит π (180°).

Определение. Скалярным произведением двух векторов называется число, равное произведению длин этих векторов на косинус угла между ними.

Скалярное произведение векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$ обозначают $\bar{a}\cdot\bar{b}$. Если угол между векторами $\bar{a}$ и $\bar{b}$ равен φ, то по определению скалярное произведение этих векторов выражается формулой

$$\bar{a}\cdot\bar{b} = |\bar{a}|\cdot|\bar{b}|\times\cos\varphi \qquad (14).$$

Два нулевых вектора $\bar{a}$ и $\bar{b}$ составляют острый (тупой) угол тогда и только тогда, когда их скалярное произведение положительно (отрицательно). На самом деле, если $0<\varphi<\frac{\pi}{2}$, то $\cos\varphi>0$ и $\bar{a}\cdot\bar{b}>0$; если $\frac{\pi}{2}<\varphi<\pi$, то $\cos\varphi<0$ и $\bar{a}\times\bar{b}<0$.

Если $\varphi=\frac{\pi}{2}$, то $\cos\varphi=0$ и $\bar{a}\perp\bar{b}$.

Алгебраические свойства скалярного произведения векторов

Скалярное произведение векторов обладает следующими четырьмя свойствами:

1) $\bar{a}\cdot\bar{b} = \bar{b}\cdot\bar{a}$ – переместительное свойство;

2) (α$\bar{a}$)β = α($\bar{a}\cdot\bar{b}$) – сочетательное свойство числового множителя;

3) $(\bar{a}+\bar{b})\cdot\bar{c} = \bar{a}\cdot\bar{c}+\bar{b}\cdot\bar{c}$ – распределительное свойство относительно суммы векторов;

4) $\bar{a}\cdot\bar{a}>0$, если $\bar{a}$ – не нулевой вектор и $\bar{a}\cdot\bar{a}=0$, если $\bar{a}$ – нулевой вектор.

2. Выражение скалярного произведения в декартовых координат.

Если два вектора $\bar{a}$ и $\bar{b}$ определены своими декартовыми координатами $\bar{a}=(x_1;\ y_1;\ z_1)$ и $\bar{b}=(x_2;\ y_2;\ z_2)$, то скалярное произведение этих векторов равно сумме попарных произведений их соответствующих координат, т.е.

$$\bar{a}\cdot\bar{b} = x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2$$

Следствие 1. Необходимым и достаточным условием перпендикулярности векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$ является равенство $x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2 = 0$.

Следствие 2. Угол φ между векторами $\bar{a} = (x_1;\ y_1;\ z_1)$ и $\bar{b} = (x_2;\ y_2;\ z_2)$ определяется по формуле

$$\cos\varphi = \frac{x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + x_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}$$

3. Длина вектора. Вектор $\overline{AB}$, имеющий начало в точках А $(x_1;\ y_1;\ z_1)$ и конец в точке В $(x_2;\ y_2;\ z_2)$, то его длина вычисляется по формуле:

$$|\overline{AB}| = d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

Доказательство этой формулы было приведено в учебниках по математике для средних школ и основывается на основании теоремы Пифагора.

Пример 3. Найти скалярное произведение векторов $\bar{a}$=(3; 4; 7) и $\bar{b}$=(2;-5; 2).

▲ Находим: $\bar{a} \cdot \bar{b}$ = 3×2+4×(-5)+7×2 = 0 , т.к. $\bar{a} \cdot \bar{b}$ =0, то $\bar{a} \perp \bar{b}$.

Пример 4. Даны векторы $\bar{a}$ = (m; 3; 4) и $\bar{b}$ = (4; m; -7). При каком m $\bar{a} \perp \bar{b}$?

▲ Находим скалярное произведение векторов по формуле 2: $\bar{a} \cdot \bar{b}$ = 4m+3m-28=0, 7m = 28; m = 4. При m = 4 векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$ перпендикулярны.

Пример 5. Найти угол между векторами $\bar{a}$ = (1; 2; 3) и $\bar{b}$ = (6; 4; -2).

▲ Так как $\bar{a} \cdot \bar{b} = |\bar{a}| \times |\bar{b}| \times \cos\varphi$, то $\cos\varphi = \dfrac{\bar{a} \cdot \bar{b}}{|\bar{a}| \times |\bar{b}|}$. $\cos\varphi =$

$$\frac{x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + x_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}} = \frac{1\times 6 + 2\times 4 - 3\times 6}{\sqrt{1+4+9} \times \sqrt{36+16+4}} = \frac{2}{7}$$ и $\varphi = \arccos\frac{2}{7}$.

Пример 6. Найти длины сторон треугольника ABC, если A(1;1;1;); B(2;3;4); C (4;3;2;).

▲ Находим длины векторов $\overline{AB}$; $\overline{BC}$ и $\overline{AC}$. Имеем

$|\overline{AB}| = \sqrt{(2-1)^2 + (3-1)^2 + (4-1)^2} = \sqrt{44}$; $|\overline{BC}| = \sqrt{(4-2)^2 + (3-3)^2 + (2-4)^2} = 2\sqrt{2}$; $|\overline{AC}| = \sqrt{(4-1)^2 + (3-1)^2 + (2-1)^2} = \sqrt{14}$.

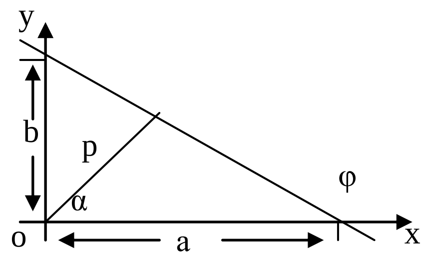
Следовательно, стороны треугольника имеют длину AB = AC = $\sqrt{14}$; BC = $2\sqrt{2}$.

1.4 Прямая на плоскости. Понятие об уравнении плоскости и прямой в пространстве.

1 Прямой линии на плоскости соответствует уравнение первой степени с двумя неизвестными.

а) Общее уравнение прямой Ax+By+C=0 , где A;B; C – произвольные коэффициенты, причем $A^2+B^2 \neq 0$.

б) Уравнение прямой с угловым коэффициентом y=kx+b, где k = tgφ – угловой коэффициент прямой; φ – угол наклона прямой к положительному направлению оси OX, b – величина отрезка, отсекаемая прямой на оси OY от начала координат (рис. 2)



в) Уравнение прямой в отрезках $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$ **(15),** здесь a; b – величины отрезков, которые прямая отсекает от осей координат (рис. 6).

г) Уравнение прямой, проходящей через две данные точки $M_1(x_1;y_1)$ и $M_2(x_2;y_2)$

$$\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{x-x_1}{x_2-x_1} \quad \textbf{(16).}$$

Рис. 6

д) Нормальное уравнение прямой $x*\cos\alpha+y*\sin\alpha-p=0$ **(17).**

Здесь P- длина перпендикуляра, опущенного на прямую из начала координат, α- угол, отсчитываемый от положительного направления оси Ox, против часовой стрелки, до перпендикуляра p (рис. 1). Чтобы привести общее уравнение прямой к нормальному виду, нужно общее уравнение прямой умножить на нормирующий множитель $\mu=\frac{1}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}$, взятый со знаком, противоположный знаку свободного члена C.

1.5 Кривые и поверхности второго порядка.

Кривыми второго порядка называются кривые, уравнения которых в прямоугольных координатах представляют уравнения второй степени с двумя неизвестными $Ax^2+2Bxy+Cy^2+2Dx+2Ey+F=0$

Существуют три типа таких кривых: 1) если $AC-B^2>0$, кривая эллиптического типа; 2) если $AC-B^2<0$ - гиперболического типа; 3) $AC-B^2=0$ - параболического типа

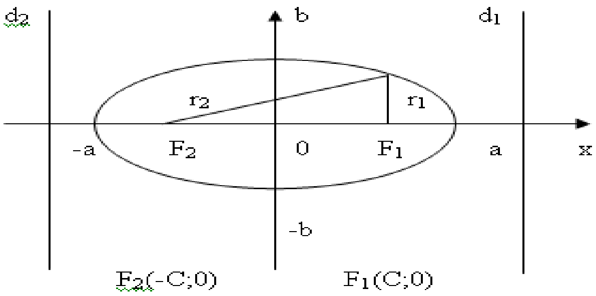


Рис. 7

а) Окружностью называется геометрическое место точек, равноудаленных от одной точки, называемой центром окружности. Уравнение окружности имеет вид $(x-a)^2+(y-b)^2=R^2$, где a и b- координаты центра, R- радиус окружности.

Если центр окружности находится в начале координат, то ее уравнение $x^2+y^2=R^2$

б) Эллипсом называется геометрическое место точек, сумма расстояний которых до двух данных точек плоскости, называемых фокусами эллипса, есть величина постоянная $r_1+r_2=2a$, a- const (рис. 7)

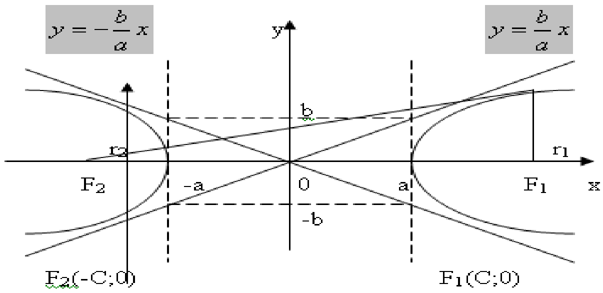


Рис. 8

Каноническое уравнение эллипса имеет вид $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, где a и b-большая и малая полуоси эллипса. Эксцентриситетом эллипса называется отношение фокусного расстояния $F_1F_2=C$ к его большой полуоси

$$\varepsilon=\frac{c}{a}$$

в) Гиперболой называется геометрическое место точек, абсолютная величина разности расстояний которых до двух данных точек, называемых фокусами, есть величина постоянная r_2-r_1=2a, a- const(рис8). Каноническое уравнение гиперболы имеет вид $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$, где a- действительная полуось, b- мнимая полуось гиперболы.

Уравнение асимптоты $y=\pm\frac{b}{a}x$

г) Параболой называется

геометрическое место точек, равноудаленных от точки, называемой ее фокусом от данной прямой, называемой ее директрисой (рис 9). Каноническое уравнение

параболы имеет вид y^2= 2Px, где P- параметр параболы, равный расстоянию от фокуса до биссектрисы. Общее уравнение параболы, ось симметрии которой параллельна оси Oy, имеет вид y= ax^2+ bx+c , где a,b,c- постоянные коэффициенты.

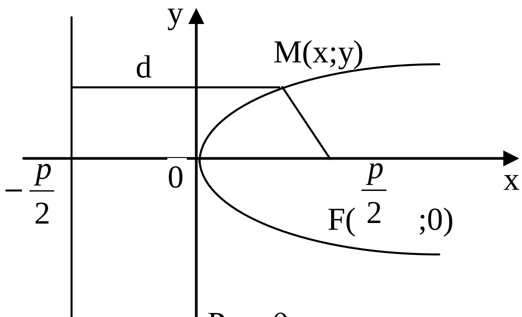
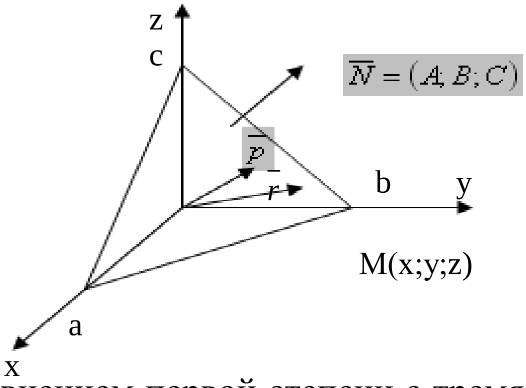


Рис. 9



а) Всякая плоскость определяется уравнением первой степени с тремя неизвестными Ax+By+Cz+Д=0, где A, B, C и Д, постоянные коэффициенты, причем $A^2+B^2+C^2\neq 0$

б) Нормальное уравнение плоскости $\bar{r}\cdot\bar{n}-p=0$ или x cosα+y cosβ+z cos -p =0, где P – длина перпендикуляра, опущенного на плоскость из начала координат, α,β,γ- углы, которые перпендикуляр образует с положительным направлением координатных осей; $\bar{n}$ единый вектор направления OP (рис 10). Для приведения общего уравнения плоскости к нормальному виду нужно его уравнение умножить на нормирующий множитель $\mu=\frac{1}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$, при этом знак нормирующего множителя должен быть противоположен знаку Д в уравнении в) Уравнение плоскости в отрезках на осях $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}$, где a, b, c- отрезки, которые отсекает плоскость на координатных осях (рис 10).

г) Уравнение плоскости, проходящей через данную точку $\grave{I}_1(x_1;y_1)$ и перпендикулярной данному вектору $\overline{N}$=(A;B;C) $A(x-x_1)+B(y-y_1)+C(z-z_1)$

д) Точка пересечения трех плоскостей находится из совместного решения их уравнений.

е) Уравнение плоскости, проходящей через три точки $M_1(x_1;y_1)$; $M_2(x_2;y_2)$ и $M_3(x_3;y_3)$ $\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix} = 0$

ж) Угол между двумя плоскостями равен углу между нормальными к ним векторами $\overline{N_1} = (A_1;B_1;C_1)$ и $\overline{N_2} = (A_2;B_3;C_4)$

$$\cos\varphi = \frac{\overline{N_1}\cdot\overline{N_2}}{|\overline{N_1}|\cdot|\overline{N}_2|} = \pm\frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\cdot\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}}$$

Если плоскости перпендикулярны, то $A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0$. Если плоскости параллельны, то $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}$

з) Расстояние от точки $M_1(x_1;y_1)$ до плоскости $d = \frac{|\ Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D\ |}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$)

а) Уравнение прямой в общем виде $\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}$ б) Уравнение прямой в каноническом виде $\frac{x-x_0}{l} = \frac{y-y_0}{m} = \frac{z-z_0}{n}$, где $l = \begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix}$; $m = -\begin{vmatrix} A_1 & C_1 \\ A_2 & C_2 \end{vmatrix}$; $n = \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}$ проекции направляющего вектора $\overline{a} = (l;m;n)$ прямой, проходящей через точку $Ì_{01}(x_0;y_0)$.

в) Параметрические уравнения прямой, проходящей через точку $M_{01}(x_0;y_0;z_0)$ в направлении вектора $\overline{a} = (l;m;n)$ имеет вид $x = x_0 + lt$; $y = y_0 + mt$; $z = z_0 + nt$;

5^0 а) Уравнение прямой, приходящей через две данные точки $\frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{y-y_1}{z_2-z_1} = \frac{z-z1}{z_2-z_1}$

б) Угол между двумя прямыми $\cos\varphi = \pm\frac{l_1l_2 + m_1m_2 + n_1n_2}{\sqrt{l_1^2+m_1^2+n_1^2} * \sqrt{l_2^2+m_2^2+n_2^2}}$

Если прямые взаимно- перпендикулярны, то $l_1l_2 + m_1m_2 + n_1n_2 = 0$, если две прямые параллельны, то $\frac{l_1}{l_2} = \frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2}$

6. Угол между прямой и плоскостью $\sin\varphi = \frac{Al + Bm + Cn}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\sqrt{l^2}+m^2+n^2}$

Условие параллельности прямой и плоскости Аl+Вm+Сn=0, условие перпендикулярности прямой и плоскости $\frac{A}{l} = \frac{B}{m} = \frac{C}{n}$. Точка пересечения прямой $\frac{x-x_0}{l} = \frac{y-y_0}{m} = \frac{z-z_0}{n}$ и плоскости Ax+By+Cz+D=0 находится по формулам $x = x_0 + lt$; $y = y_0 + mt$; $z = z_0 + nt$; где $t = \frac{Ax_0 + By_0 + Cz_0 + d}{Al + Bm + Cn}$

2.ВВЕДЕНИЕ В АНАЛИЗ
2.1 ФУНКЦИЯ

Метод координат представляет собой один из наиболее универсальных математических методов и используется для решения самых разнообразных задач. В основе метода лежит понятие **системы координат** на прямой, плоскости и в пространстве.

Две взаимно перпендикулярные прямые $xx^{/}$ и $yy^{/}$ образуют **прямоугольную (декартову)** систему координат. Прямые $xx^{/}$ и $yy^{/}$ называют **осями координат**, одна из них $xx^{/}$ (обычно изображается горизонтально) называется **осью абсцисс**, другая $yy^{/}$ – **осью ординат;** точка О их пересечения **– началом координат.** На каждой из осей выбирается по произвольному масштабу.

Взяв произвольную точку М на плоскости, в которой расположены оси, найдем ее проекции Р и Q на координатной оси. Отрезок ОР на оси абсцисс, также число x, измеряющие его в избранном масштабе, называется **абсциссой** точка М; отрезок ОQ на оси ординат, а также измеряющее его число y – **ординатой** точки М. Величины x = ОР и y = ОQ называются **прямоугольными координатами** (или просто **координатами**) точки М. Они считаются положительными или отрицательными в соответствии с заранее установленными направлениями положительных отрезков на каждой оси. Обычно на оси абсцисс положительные отрезки откладываются вправо, а на оси ординат – вверх от начала координат.

Каждой точке плоскости соответствует одна пара чисел x; y. Каждой паре действительных чисел x; y соответствует одна точка М.

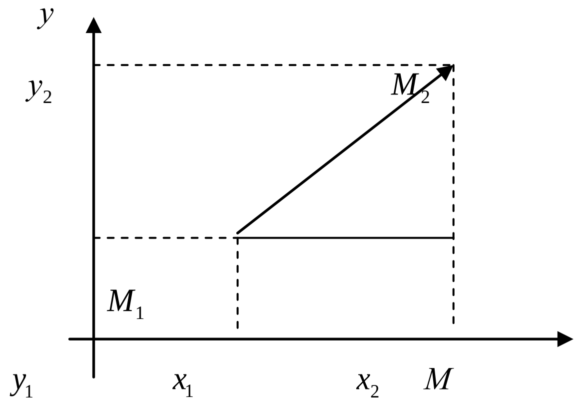


Рис. 12

Каждой точке плоскости соответствует одна пара чисел x; y. Каждой паре действительных чисел x; y соответствует одна точка М.

В школе было доказано, что расстояние между двумя точками плоскости M_1 $(x_1;\ y_1)$ и M_2 $(x_2;\ y_2)$ вычисляется по формуле $M_1\,M_2 = \sqrt{(x_2 - x_2)^2 + (y_2 - y_1)^2}$. Доказательство основано на применении теоремы Пифагора к прямоугольному треугольнику $MM_1\,M_2$ (рис. 12).

СПОСОБЫ ЗАДАНИЯ ФУНКЦИИ.

1. Наиболее удобным для изучения свойства функции является **аналитический** способ задания (если он возможен).Этот способ заключается в том, что правило составления задается в виде аналитического выражения, или формулы, содержащей указания на те операции или действия, которые надо произвести с аргументом x, чтобы получить соответствующее значение y = f (x) функции f. Например, если функция f определена формулой $f(x)=\frac{1}{x^3-1}$, то здесь указано правило: каждому значению $x\neq 1$ ставится в соответствие частное отделения единицы на разность между третьей степенью числа x и единицей.

Заметим, что правило, характеризующее одну и ту же функцию может задаваться разными формулами. Так, функции f (x)=cos x ($x\in[0;\frac{\pi}{2}]$) и g (x) = $\sqrt{1-\sin^2 x}(x\in[0;\frac{\pi}{2}])$ совпадают, так как правило, определяющее их, одно и то же хотя и выражено разными символами. В то же время функции f (x)=cos x ($x\in[0;\frac{\pi}{2}]$) и h (x)=cos x ($x\in[0;\pi]$) различны.

Часто рассматриваются функции, которые на разных частях множества своего существования задаются разными формулами.

Пример 7. Функция φ определена на промежутке [0;1] следующим образом: φ (x) = $\begin{cases}0,\ \text{если}\ 0\le x<1;\\ 1,\ \text{если}\ x=1\end{cases}$

Пример 8. Функция g определена на промежутке (-∞; +∞) следующим образом:

g (x) = $\begin{matrix}x^2-1,\ \text{если}\ x\in(-\infty;-1)\cup(1;\infty);\\ 1-x^2,\ \text{если}\ x\in[-1;1]\end{matrix}$

областью определения функция g разбита на две части: одна часть состоит из интервалов (-∞; -1) и (+1; ∞), другая – из обрезка [-1; 1]. Формулы, определяющие функцию g, различные на каждой из этих частей.

Пример 9. Функция Дирихле:

D (x) = $\begin{cases}1,\ \text{если}\ x\ \text{рационально}\\ 0,\ \text{если}\ x\ \text{иррационально}\end{cases}$

Пример 10. Функция «**СИГНУМ**»**

Sgn x = $\begin{cases}1,\ \text{если}\ x>0;\\ 0,\ \text{если}\ x=0;\\ -1,\ \text{если}\ x<0\end{cases}$

2. Иногда бывает так, что нужную нам функцию не удается задать с помощью формулы (или формул), содержащей известные нам символы. В этом случае правило, характеризующее функцию, описывается словами. Это **описательный способ** задания функции.

3. В естественных науках, технике и других областях человеческой деятельности зависимость между величинами часто устанавливается экспериментально или путем наблюдений. Эту зависимость удобно задавать таблицей, где просто составлены полученные из опыта данные. Это **табличный способ** задания функции. Этот способ заключается в том, имеется таблица, в которой даны значения аргумента и соответствующие им значения функции. Например, в таблице приведены результаты измерения силы звука самолета, (она обозначается V и измеряется в децибелах (дб)) на различных расстояниях от точки взлета (расстояние обозначается, как обычно, через S и измеряется в километрах):

S	1	2,5	3	5,5	7	8,5	10	15	20	30
V	115	108	102	98	93	89	87	72	60	65

Заметим, что область определения функции, заданной таблицей, является «не сплошным» множеством (промежутком), а содержит лишь некоторое фиксированное число элементов.

4. В некоторых случаях функция задается **графиком**. Но не всякое множество может служить графиком функции.

О графическом способе задания функции и свойствах графиков функции мы расскажем в следующем параграфе.

ГРАФИЧЕСКОЕ ИЗОБРАЖЕНИЕ ФУНКЦИИ

Чтобы графически изобразить заданную функциональную зависимость, на оси абсцисс отличаем ряд значений x_1; x_2; x_3;… одной из переменных x (обычно аргументы) и строим ординаты y_1; y_2; y_3;…, представляющие соответствующие значения другой переменной y (функции), получим ряд точек M_1 $(x_1; y_1)$; M_2 $(x_2; y_2)$; $M_3(x_3; y_3)$;…. Соединяя их на глаз плавной кривой линией, получим график данной функциональной зависимости.

По графику можно найти (приближенно) значение функции и для тех значений аргумента, которые в таблице не помещены. Например, пусть требуется найти значение t при t° = 170° C. Отметив на оси абсцисс (или на прямой At, ей параллельной) абсциссу t = AP = 170 и поставив перпендикуляр PM, найдем ординату E = PM = 20,745, т.е. M (170; 20,75).

Нахождение промежуточных значений функции по ее графику называется **графической интерполяцией**.

На практике всякий график строится «по точкам», т. е. от руки проводится плавная линия, соединяющая ряд последовательных точек M_1; M_2; M_3;…. При этом теоретически никогда не исключается возможность, что промежуточные точки, не нанесенные на график лежат очень далеко от проведенной плавной кривой. Ввиду этого теоретически следует определить график как **геометрическое место точек M (x; y), координаты которых связаны данной функциональной зависимостью.**

О НЕКОТОРЫХ КЛАССАХ ФУНКЦИЙ

Рассмотрим функцию f, определенную на некотором промежутке X.

Если f $(x_1) \le$ f (x_2) при $x_1 \le x_2$ $(x_1;\ x_2 \in$ X), то функция f называется **возрастающей.**

Если f $(x_1) \ge$ f (x_2) при $x_1 \le x_2$ $(x_1;\ x_2 \in$ X), то функция f называется **убывающей.**

Если f $(x_1) <$ f (x_2) при $x_1 < x_2$ $(x_1;\ x_2 \in$ X), то функция f – **строго возрастающая**.

Если f $(x_1) >$ f (x_2) при $x_1 < x_2$ $(x_1;\ x_2 \in$ X), то функция f – **строго убывающей.**

Возрастающая или убывающая функции называются **монотонными**, а строго возрастающая или строго убывающая – строго монотонной.

Пусть теперь функция f определена на некотором симметрическом промежутке X. (**Симметричным** называется любой из промежутков вида ((-a; a); [a; a]; a>0; и (-∞; +∞)). Тогда, если для любого x и X f (-x)=f(x), что функция f называется **четной**, если же f (-x) = -f (x), то – **нечетной**. Если же не выполняется ни одно из этих условий, то функция называется **функцией общего вида** (или ни четной, ни не четной).

Нетрудно показать, что **график четной функции симметричен относительно оси ординат**, а **график нечетной функции симметричен относительно начала координат.**

Функция f, определенная на некотором множестве X, **называется ограниченной**, если существует число L>0 такое, что $|f\ (x)| \le L$ для любого x ∈ X.

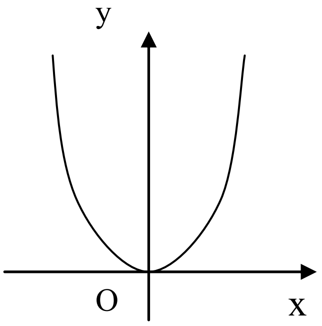


Рис. 19

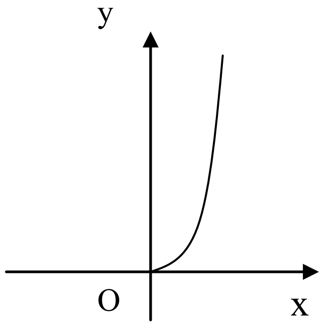


Рис. 20

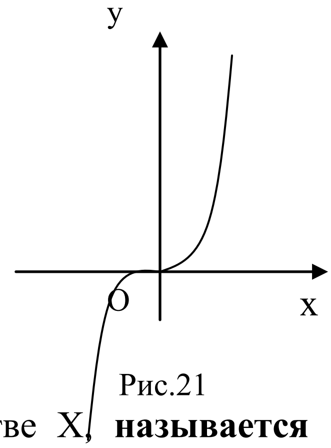


Рис.21

Функция f, определенная на некотором множестве X, **называется периодической**, если существует такое число T≠ 0, то для любого x ∈ X: 1) x+T ∈ X; 2) x-T ∈ X; 3) f (x+T)=f (x). Число T при этом называется **периодом** функции f. Заметим, что если число T является периодом функции f, то и число ± T_w (n∈ N) также является ее периодом.

ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ ФУНКЦИИ

Кроме функций, перечисленных выше, изучаются еще тригонометрические функции синус, косинус, тангенс, котангенс, секанс и косеканс, причем последние четыре просто выражаются через синус и косинус: tg x = $\frac{\sin x}{\cos x}$; ctg x = $\frac{\cos x}{\sin x}$; sec x = $\frac{1}{\cos x}$; cosec x = $\frac{1}{\sin x}$

Функция называется **явной,** если она задана формулой, в которой правая часть не содержит зависимой переменной; например, функция $y = x^2$-5x+4 – явная.

Функция y аргумента x называется **неявной**, если она задана уравнением F (x; y) = 0, не разрешенным относительно зависимой переменной. Например, функция y (y≥0), заданная уравнением $x^3 + y^2$ - y ln x+x sin y = 0 неявная, так как она не разрешима ни относительно x, ни относительно y.

Из основных функций новые функции могут быть получены двумя способами при помощи: а) алгебраических действий; б) операций образования сложенной функции.

Пусть функция y = f (u) есть функция от переменной U, определенной на множестве U с областью значений Y, а переменная U в свою очередь является функцией U = φ(x) от переменной x, определенной на множестве X с областью значений U. Тогда заданная на множестве X функция y = f (φ (x)) называется **сложной** функцией (или **композицией** функций, суперпозицией функций, **функцией от функции**).

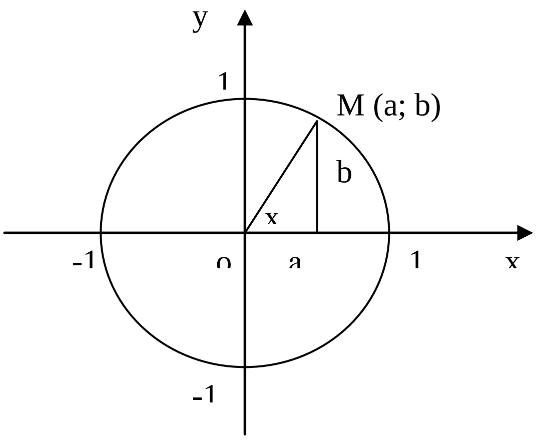


Рис. 22

Например, y = log sin x – сложная функция, так как ее можно представить в виде y = lg U, где U = sin x.

Определение. Функции, построенные из элементарных функций с помощью конечного числа алгебраических действий и конечного числа операций образования сложной функции, называется **элементарными**.

Например, функция y = $\frac{\sqrt{x}\cdot\sin^3 x}{\sqrt[5]{x+5}+7^{3x-7}}+\sqrt{\ln^{3x}-1}$ является элементарной, так как здесь число операций сложения, вычитания, умножения, деления и возведения в степень, и образования сложной функции $\sin^3 x$; 7^{3x-7}; $\sqrt{\ln^3 x-1}$ конечно.

Примерами неэлементарных функций являются функции y = |x|; y = [x]– целая часть x; y = {x} – дробная часть x и др.

Рассмотрим более подробно некоторые элементарные функции - тригонометрические. По определению sin x = a; cos x = b, где (a; b) координаты точки M, которая лежит на окружности единичного радиуса с центром в начале координат (рис. 22), а x – угол, образованный вектором $\overrightarrow{OM}$ и осью Ox.

Если точка М сделает полный оборот и придет в исходное положение, то угол x увеличится на 2π*. Но числа a и b в результате этой процедуры, не изменяются. Отсюда следует, что синус, косинус и другие тригонометрические функции будут **периодическими функциями с периодом T = 2π**, т.е. для них

$\sin x = \sin(x+2\pi)+\ldots+\sin(x+2\pi k);\ k \in z;$

$\cos x = \cos(x+2\pi)+\cos(x+4\pi)+\ldots+\cos(x+2\pi k);\ k\in z.$

Периодичность – важнейшее специфическое свойство тригонометрических функций. Другие функции – степенная, показательная, логарифмическая – периодическими не являются. С помощью тригонометрических функций описываются самые разнообразные периодические процессы, происходящие в живой и не живой природе: колебательные и вращательные движения, движение планет, биологический ритм и т.п.

Функции, как и числа, можно складывать, вычитать, умножать и делить. Например, если разделить одну линейную функцию на другую, то получим функцию, которая получила название **дробно-линейной или дробно-рациональной.** Например, y = $\frac{ax+b}{cx+d}$, (cx+d ≠ 0; a; b; c и d – любые рациональные числа).

Если сложить несколько степенных функций вида y = ax^n, где n ∈ N или n = 0, то получим **многочлен**. Например, y = ax^3+bx^2+cx+c – многочлен 3-й степени.

Аналогично получается многочлен любой степени n: y = $a_0x^4+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\ldots+a_{n-1}x+a_n$. Многочлены в математике играют важную роль, и не только в математике, но и в ее приложениях.

Карл Вейерштрасс – выдающийся математик XIX века, доказал, что любую непрерывную функцию можно приближать с любой степенью точности. В частности, приближенное значение функций находят по формулам:

$$e^x \approx 1+x+\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{3!}x^3+\frac{1}{4!}x^4+\ldots+\frac{1}{n!}x^n+\ldots$$

$$\sin x \approx x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\ldots+(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}+\ldots$$

$$\cos x \approx x-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\ldots+(-1)^n\frac{x^{-2n}}{(2n)!}+\ldots$$

$$(1+x)^m \approx 1+mx+\frac{m(m-1)}{2!}x^2+\frac{m(m-1)(m-2)}{3!}x^3+\ldots+\frac{m(m-1)(m-2)\ldots(m-n+1)}{n!}x^n+\ldots$$

$$\ln(1+x)^m \approx x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\ldots(-1)^n\frac{x^{n+1}}{n+1}+\ldots$$

Чем больше n (число слагаемых), тем выше точность, т.е. тем меньше приближенное значение отличается от ее истинного значения.

2.2 ПРЕДЕЛ И НЕПРЕРЫВНОСТЬ ФУНКЦИИ

Теперь остановимся на примерах вычисления пределов, когда теоремы о связи предела с алгебраическими операциями непосредственно применить нельзя.

Если ищется предел при $x \to x_0$ дроби, числитель и знаменатель которой многочлены, обращающиеся в нуль, то, используя теорему Безу, легко показать, что числитель и знаменатель делится без остатка на x-x_0, т.е. данную дробь всегда можно преобразовать тождественно, сократив на x-x_0 (здесь нет сокращения на нуль, так как $x \neq x_0$). Если и после сокращения на x-x_0 числитель и знаменатель обращается в нуль при $x \to x_0$, то надо проводить повторное сокращение на x-x_0 и т.д. Приведем соответствующие примеры.

Пример 11.

$$\lim_{x\to 1}\frac{x+x^2+x^3-3}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x^2+2x+3)}{x-1}=\lim_{x\to 1}(x^2+2x+3)=1^2+2\cdot 1+3=6.$$

Пример 12.

$$\lim_{x\to -3}\frac{x^3+27}{x+3}=\lim_{x\to -3}\frac{(x+3)(x^2-3x+9)}{x+3}=\lim_{x\to -3}(x^2-3x+9)=(-3)^2-3\cdot(-3)+9=27.$$

Пример 13. Пусть m и n натуральные числа (m≠n). Тогда имеем:

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^m-1}{x^n-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x^{m-1}+x^{m-2}+\ldots+x+1)}{(x-1)(x^{n-1}+x^{n-2}+\ldots+x+1)}=\lim_{x\to 1}\frac{x^{m-1}+x^{m-2}+\ldots+x+1}{x^{n-1}+x^{n-2}+\ldots+x+1}=\lim_{x\to 1}\frac{\overbrace{1+1+\ldots+1}^{m\ раз}}{\underbrace{1+1+\ldots+1}_{n\ раз}}=\frac{m}{n}.$$

Прием, примененный в рассмотренных примерах позволяет вычислить и пределы некоторых выражений, у которых в числителе и знаменателе фигурируют тригонометрические функции или выражения.

Пример 14.

$$\lim_{x\to\pi}\frac{\sin^2 x}{1+\cos^3 x}=\lim_{x\to\pi}\frac{1-\cos^2 x}{1+\cos^3 x}=\lim_{x\to\pi}\frac{(1+\cos x)(1-\cos x)}{(1+\cos x)(1-\cos x+\cos^2 x)}=\lim_{x\to\pi}\frac{1-\cos x}{1-\cos x+\cos^2 x}=\frac{2}{3}.$$

Пример 15.

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{1-\sin x}{\cos^2 x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{1-\sin x}{1-\sin^2 x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{1-\sin x}{(1-\sin x)(1+\sin x)}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{1}{1+\sin x}=\frac{1}{2}.$$

Пример 16. Найдем $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{6}}\dfrac{1-4\sin^2 x}{\cos 3x}$.

Решение: Проведем тождественные преобразования

$$1-4\sin^2 x=4\left(\frac{1}{4}-\sin^2 x\right)=4\left(\frac{1}{2}-\sin x\right)\cdot\left(\frac{1}{2}+\sin x\right);$$

$$\cos 3x=4\cos^3 x-3\cos x=4\cos x\left(\cos^2 x-\frac{3}{4}\right)=4\cos x\left(\cos x-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\cdot\left(\cos x+\frac{\sqrt{3}}{2}\right).$$

отсюда, учитывая, что $\frac{1}{2}=\sin\frac{\pi}{6}$ *и* $\frac{\sqrt{3}}{2}=\cos\frac{\pi}{6}$, имеем:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{6}}\frac{1-4\sin^2 x}{\cos 3x}=\frac{\left(\sin\frac{\pi}{6}-\sin x\right)\cdot\left(\sin\frac{\pi}{6}+\sin x\right)}{\cos x\left(\cos x-\cos\frac{\pi}{6}\right)\cdot\left(\cos x+\cos\frac{\pi}{6}\right)}=-\frac{1}{\cos x}.$$

Следовательно, искомый предел есть $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{6}}\frac{1-4\sin^2 x}{\cos 3x}=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{6}}\left(-\frac{1}{\cos x}\right)=-\frac{2}{\sqrt{3}}$.

В связи с последним примером, заметим, что ели выражение предел которого ищется, содержит сумму или разность тригонометрических функций, то часто бывает полезным тождественно преобразовывать их в произведение по известным тригонометрическим формулам.

Рассмотрим теперь случай, когда ищется предел при $x\to\infty$ или $x\to-\infty$ дроби. Числитель и знаменатель которой есть многочлены. Для нахождения предела в этом случае можно тождественно преобразовать дробь так, чтобы были применимы теоремы (1 – 5) из 3.3 п. 3^0, или заменить предельный переход при $x\to\infty$ ($x\to-\infty$) предельным переходом при $\alpha\to 0$, получив, что $\alpha=\frac{1}{x}$.

Пример 17.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^3+x^2+5}{3x^3+x+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{2+\frac{1}{x}+\frac{5}{x^2}}{3+\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x^3}}=\frac{2}{3}\ \textit{или}\ \lim_{x\to\infty}\frac{2x^3+x^2+5}{3x^3+x+1}=\lim_{\alpha\to 0}\frac{\frac{2}{\alpha^3}+\frac{1}{\alpha^2}-5}{\frac{3}{x^3}+\frac{1}{\alpha}-1}=\lim_{\alpha\to 0}\frac{2+\alpha+5\alpha^3}{3+\alpha-\alpha^3}=\frac{2}{3}.$$

Чтобы найти предел дроби, содержащей иррациональные выражения, необходимо тождественно преобразовать дробь, перенеся иррациональность из числителя в знаменатель или из знаменателя в числитель, и после этого сделать необходимые упрощения. Если же имеется предел выражения, содержащего иррациональность (но не являющегося дробью), то можно поступить аналогично, считая данное выражение дробью со знаменателем, равным единице.

Пример 18. Найдем $\lim\limits_{x\to 2}\frac{\sqrt{x^2+3}-3}{x-2}$.

Решение: Проведем преобразования: $\frac{\sqrt{x^2+3}-3}{x-2}=\frac{\left(\sqrt{x^2+3}-3\right)\cdot\left(\sqrt{x^2+3}+3\right)}{(x-2)\cdot\left(\sqrt{x^2+3}+3\right)}=$

$$=\frac{x^2-4}{(x-2)\cdot\left(\sqrt{x^2+3}+3\right)}=\frac{x+2}{\sqrt{x^2+5}+3};$$

откуда $\lim\limits_{x\to 2}\frac{\sqrt{x^2+3}-3}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2}\frac{x+2}{\left(\sqrt{x^2+3}+3\right)}=\frac{2+2}{\sqrt{4+5}+3}=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$.

Пример 19.

$$\lim_{x\to 3}\frac{\sqrt{3x+7}-\sqrt{2x+10}}{\sqrt{4x+13}-\sqrt{x+22}}=\lim_{x\to 3}\frac{\left(\sqrt{3x+7}-\sqrt{2x+10}\right)\cdot\left(\sqrt{3x+7}+\sqrt{2x+10}\right)\cdot\left(\sqrt{4x+13}+\sqrt{x+22}\right)}{\left(\sqrt{4x+13}-\sqrt{x+22}\right)\cdot\left(\sqrt{3x+7}+\sqrt{2x+10}\right)\cdot\left(\sqrt{4x+13}+\sqrt{x+22}\right)}=$$

$$= \lim_{x\to 3}\frac{(x-3)\cdot\left(\sqrt{4x+13}+\sqrt{x+22}\right)}{3(x-3)\left(\sqrt{3x+7}+\sqrt{2x+10}\right)} = \lim_{x\to 3}\frac{\sqrt{4x+13}+\sqrt{x+22}}{3\left(\sqrt{3x+7}+\sqrt{2x+10}\right)} = \frac{5}{12}.$$

Пример 20. Найдем $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x-2}-\sqrt{x}\right)$.

Решение: Представим данный предел в виде дроби:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x-2}-\sqrt{x}\right) = \lim_{x\to\infty}\frac{\left(\sqrt{x-2}-\sqrt{x}\right)}{1} = \lim_{x\to\infty}\frac{\left(\sqrt{x-2}-\sqrt{x}\right)\cdot\left(\sqrt{x-2}+\sqrt{x}\right)}{\sqrt{x-2}+\sqrt{x}} = \lim_{x\to\infty}\frac{-2}{\sqrt{x-2}+\sqrt{x}} = 0.$$

Пример 21. Найдем $\lim\limits_{x\to 2}\left(\frac{1}{x-2}-\frac{4}{x^2-4}\right)$.

Решение: Так как $\frac{1}{x-2}-\frac{4}{x^2-4}=\frac{x-2}{x^2-4}=\frac{1}{x+2}$; искомый предел равен следующему $\lim\limits_{x\to 2}\left(\frac{1}{x-2}-\frac{4}{x^2-4}\right)=\lim\limits_{x\to 2}\frac{1}{x+2}=\frac{1}{4}$.

Мы рассмотрим только два самых важных предела, которые называются *замечательными пределами.*

1. Первым замечательным пределом называется $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$ (22)

Для доказательства формулы (22) рассмотрим круг радиуса R с центром в точке О (рис.23). Пусть ОВ – подвижный радиус, образующий угол x $\left(0<x<\frac{\pi}{2}\right)$ с осью Ox. Из геометрических соображений следует, что площадь треугольника ОАВ меньше площади сектора АОВ, которая в свою очередь меньше площади прямоугольного треугольника АОС, то есть $S_{\Delta AOB}<S_{сек\ AOB}<S_{\Delta AOC}$. Так как

$$S_{\Delta AOB}=\frac{1}{2}R\cdot R\cdot\sin x=\frac{1}{2}R^2\sin x;\ S_{сек\ AOB}=\frac{1}{2}R^2x;\ S_{\Delta AOC}=\frac{1}{2}AO\cdot OC=\frac{1}{2}AO\cdot\left(AO\cdot tgx\right)=\frac{1}{2}R^2tgx,$$

то имеем $\frac{1}{2}R^2\sin x<\frac{1}{2}R^2x<\frac{1}{2}R^2tgx,$ откуда, разделив части двойного неравенства на $\frac{1}{2}R^2\sin x>0,$ получим $1<\frac{x}{\sin x}<\frac{1}{\cos x}$, или $\cos x<\frac{\sin x}{x}<1.$

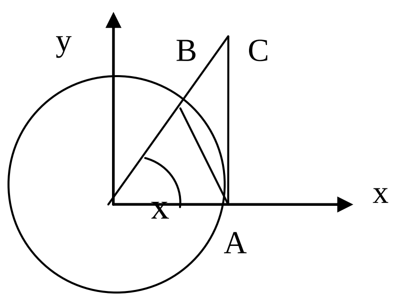


Рис.23

Так как функции cos x и $\frac{\sin x}{x}$ четные, то полученные неравенства справедливы и при $-\frac{\pi}{2}<x<0$. Переходя к пределу при x→0, получим $\lim\limits_{x\to 0}1=1$, $\lim\limits_{x\to 0}\cos x=1$.

На основании признака существования предела промежуточной функции

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1.$$

Пример 22. Найдем $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 6x}{4x}$

Решение: Так как $\dfrac{\sin 6x}{4x}=\dfrac{3\cdot\sin 6x}{3\cdot 4x}=\dfrac{3\sin 6x}{2\cdot 6x}$, то $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 6x}{4x}=\dfrac{3}{2}$, $\dfrac{3}{2}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 6x}{6x}=\dfrac{3}{2}\cdot 1=\dfrac{3}{2}$

Пример 23. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\sin^2\dfrac{x}{2}}{x^2}=\dfrac{1}{2}\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin^2\dfrac{x}{2}}{x^2}\right)^2=\dfrac{1}{2}\cdot 1^2=\dfrac{1}{2}.$

Пример 24.

$$\lim_{x\to 0}\frac{tgx-\sin x}{2x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\sin x}{\cos x}-\sin x}{2x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x(1-\cos x)}{2x^3\cos x}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\cos x}\cdot\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{1-\cos x}{2x^2}\right)=$$

$$=\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\cos x}\cdot\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{\sin^2\frac{x}{2}}{x^2}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2\frac{x}{2}}{4\cdot\frac{x^2}{2}}=1\cdot 1\cdot\frac{1}{4}=\frac{1}{4}.$$

2. Вторым замечательным пределом называется $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=e$ (23)

Чтобы доказать равенство (23), вспомним, прежде всего, что предел не зависит от выбора последовательности значений переменного, стремящегося к бесконечности. Составим эту последовательность из натуральных чисел 1; 2; 3; … и найдем соответствующие функции

$$f(x)=\left(1+\frac{1}{x}\right)^x:\ f(1)=\left(1+\frac{1}{1}\right)^1=2;\ f(2)=\left(1+\frac{1}{2}\right)^2=\left(\frac{3}{2}\right)^2;\ f(3)=\left(1+\frac{1}{3}\right)^3=\left(\frac{4}{3}\right)^3;\ ...;\ f(n)=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n.$$

Теперь воспользуемся биномом Ньютона:

$$(a+b)^n=a^n+n\cdot a^{n-1}b+\frac{n(n-1)}{2!}a^{n-2}b^2+\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}a^{n-3}b^3+\ldots+\frac{n(n-2)(n-2)\ldots\cdot 2}{(n-1)!}ab^{n-1}+b^n$$

Подставляя в выражение $f(n)=\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$ вместо a единицу, а вместо b дробь $\dfrac{1}{n}$, мы получим следующее:

$$f(n)=2+\frac{1}{2!}\cdot\frac{n-1}{n}+\frac{1}{3!}\cdot\frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-2}{n}+\frac{1}{4!}\cdot\frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-2}{n}\cdot\frac{n-3}{n}+\ldots+\frac{1}{(n-1)!}\cdot\frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-2}{n}\cdot\ldots\cdot\frac{2}{n}+$$ 24

$$+\frac{1}{n!}\frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-2}{n}\cdot\ldots\cdot\frac{1}{n}$$

Каждая из дробей $\frac{n-1}{n};\frac{n-2}{n};\frac{n-3}{n};\ldots$ меньше единицы. Поэтому, если в последней сумме эти дроби заменить единицами, то получим число, большее

$$f(n):\ f(n)<2+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\ldots+\frac{1}{n} \qquad (25)$$

Заметим, что правая часть неравенства (3.13) есть в точности сумма первых n слагаемых того самого ряда, с помощью которого мы определили ненулевое число (см. глава 1): $e=2+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+\ldots$. Поэтому, устремляя в неравенстве (25) n к бесконечности, мы получим $\lim\limits_{x\to\infty} f(n)\le e$. (26)

Вернемся теперь снова к сумме (24). В ней все слагаемые положительные, поэтому если часть последних слагаемых отбросить и оставить k первых слагаемых, то сумма уменьшится:

$$2+\frac{1}{2!}\cdot\frac{n-1}{n}+\frac{1}{3!}\cdot\frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-2}{n}+\ldots+\frac{1}{k!}\cdot\frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-2}{n}\cdot\ldots\cdot\frac{n-k+1}{n}<f(n) \qquad (27)$$

Устремим в этом неравенстве n к бесконечности. Так как каждая из дробей $\frac{n-1}{n};\frac{n-2}{n};\frac{n-3}{n};\ldots$ стремится при этом к единице, то в результате получится такое неравенство: $2+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\ldots+\frac{1}{k!}\le\lim\limits_{x\to\infty} f(n)$. Из вышеуказанного вытекает, что k – число слагаемых слева – может быть любым, поэтому неравенство сохранится, если k устремить в бесконечность. Но тогда слева получится бесконечный ряд, то есть число e. Таким образом,

$$e\le\lim_{x\to\infty} f(n) \qquad (28)$$

Из неравенств (26) и (28) следует, что $\lim\limits_{x\to\infty} f(n)=e$, что и требовалось доказать.

Число e (число Эйлера) играет весьма важную роль в математическом анализе. График функции $y=e^x$ получил название *экспоненты*. Широко используются логарифмы по основанию e, называемые *натуральными*, которые обозначаются символом: $\log_e x=\ln x$.

Непрерывность функции

1. Если аргумент функции получает приращение $\Delta x=x_2-x_1$, что значение функции при новом значении аргумента равно $f(x+\Delta x)=y+\Delta y$. Отсюда приращение функции $\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x)$, т.е. приращение функции равно разности наращенного значения функции (при наращенном значении аргумента) и начального значения функции. Приращение аргумента может быть не только положительным, но и отрицательным числом.

2. Определение непрерывности функции:

а) функция y=f(x) непрерывна в точки x=a, если пределы слева и справа равны и равны значению в этой точке, т.е. $\lim\limits_{x\to a-0} f(x)=\lim\limits_{x\to a+0} f(x)=f(a)$.

б) функция y=f(x) непрерывна в точке x=a , если она определена в этой точке и если бесконечно малому приращению аргумента соответствует бесконечно малое приращение функции, т.е. $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta y=0$ вблизи точки а.

3. Значения аргумента, которые не удовлетворяют условиям непрерывности, называют точками разрыва функции. При этом различают два рода разрыва функции. Если при $x\to a$ слева функция имеет конечный предел k_1, а при $x\to a$ справа функция имеет конечный предел k_2 и $k_2\neq k_1$, то говорят что функция при x=a имеет разрыв первого рода.

Разность $|k_1 - k_2|$ определяет скачек функции в точке x=a . Значение функции при x=a при этом может быть равно какому угодно числу k_3.

Если $k_1 = k_2 \neq k_3$, то говорят, что функция имеет в точке а устранимый разрыв.

Если при $x\to a$ справа и слева предел функции не существует или равен бесконечности,

т.е. $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\infty$, то говорят, что при x=a функция имеет разрыв второго рода.

Решение типовых примеров.

№1. Вычислить четность (нечетность) функции: а) $f(x)=x-ctg^3 x$; б)$y=x\bullet\frac{2^x+1}{2^x-1}$

Решение: а)$f(-x)=-x-ctg^3(-x)=-x+ctg^3 x=-(x-ctg^3 x)$. Т.к. $f(-x)=-f(x)$, то данная функция нечетна.

б) $f(-X)=(-X)\cdot\frac{2^{-x}+1}{2^{-x}-1}=x\cdot\frac{2^x+1}{2^x-1}$ (после преобразования). Т.к. $f(-x)=f(x)$, то данная функция четная.

№2. Найти область определения функции: а)$y=\sqrt{x}-lg(2x-3)$; б)$y=\arccos\frac{2x}{1+x^2}$.

Решение: а) Область определения x найдем из системы неравенств: $\begin{cases} x\geq 0\\ 2x-3>0\end{cases}$

Откуда $x>\frac{3}{2}$ или $D(y)=\left(\frac{3}{2};\infty\right)$.

б) Область определения найдем из неравенства $\left|\frac{2x}{1+x^2}\right|\leq 1$, откуда $-1\leq\frac{2x}{1+x^2}\leq 1$. Т.к. при любом x $1+x^2>0$, то перейдем к равносильному неравенству $-1-x^2\leq 1+x^2$, откуда

$$\begin{cases} 2x\geq -1-x^2\\ 2x\leq 1+x^2\end{cases} \text{или} \begin{cases} (1+x)^2\geq 0\\ (1-x)^2\geq 0\end{cases}$$

Очевидно, что полученные неравенства справедливы при любом X т.е. область определения функции Д(y)=(-∞;∞).

№ 3. Найти пределы:

а) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-4}{x^2+6x-16}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{4-x}-\sqrt{4+x}}{3x}$; в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x+\sin 4x}{6x}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^4-4x^2+1}{2+5x-2x^4}$;

д) $\lim\limits_{x\to}(\dfrac{1}{x^2-1}-\dfrac{2}{x-1})$; е) $\lim\limits_{x\to\infty}(\dfrac{x+4}{x})^{5x}$; ж) $\lim\limits_{x\to\infty}(\dfrac{x+2}{x+1})^{1+3x}$.

Решение:

а) Разложим на множители числитель и знаменатель т.к. здесь неопределенность вида $(\dfrac{0}{0})$

$$\lim_{x\to}\frac{x^2-4}{x^2+6x-16}=(\frac{0}{0})=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x+2)}{(x-2)(x+8)}=\lim_{x\to 2}\frac{x+2}{x+8}=\frac{4}{10}=0.4.$$

б) Умножим числитель и знаменатель на выражение, сопряженное числителю:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{4-x}-\sqrt{4+x}}{3x}=(\frac{0}{0})=\lim_{x\to 0}\frac{(\sqrt{4-x}-\sqrt{4+x})(\sqrt{4-x}+\sqrt{4+x})}{3x(\sqrt{4-x}+\sqrt{4+x})}=\lim_{x\to 0}\frac{-2x}{3x(\sqrt{4-x}+\sqrt{4+x})}=-\frac{2}{3}\lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt{4-x}+\sqrt{4+x}}=-\frac{1}{6}$$

в) Применим первый замечательный предел, выполнив соответствующие преобразования:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x+\sin 4x}{6x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{6x}+\lim_{x\to 0}\frac{\sin 4x}{6x}=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{3x}+\frac{2}{3}\lim_{x\to 0}\frac{\sin 4x}{4x}=\frac{7}{6}$$

г) Разделим числитель и знаменатель на x^4 т.к. здесь неопределенность вида $(\dfrac{\infty}{\infty})$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^4-4x^2+1}{2+5x-2x^4}=(\frac{\infty}{\infty})=\lim_{x\to\infty}\frac{3-\frac{4}{x^2}+\frac{1}{x^4}}{\frac{2}{x^4}+\frac{5}{x^3}-2}=-\frac{3}{2},$$ т.к. величины $\dfrac{2}{x^4}$, $\dfrac{1}{x^3}$, $\dfrac{1}{x^2}$ есть величины при $x\to\infty$ бесконечно малые.

д) приведем к общему знаменателю, т.к. здесь неопределенность вида $(\infty-\infty)$

$$\lim_{x\to 1}(\frac{1}{x^2-1}-\frac{2}{x-1})=\lim_{x\to 1}\frac{1-2(x+1)}{x^2-1}=\lim_{x\to 1}\frac{-2x-1}{x^2-1}=\infty$$ при $x\to 1$ знаменатель стремится к 0

е) Разделим почленно на x и применим второй замечательный придел:

$$\lim_{x\to\infty}(\frac{x+4}{x})^{5x}=\lim_{x\to\infty}(1+\frac{4}{x})^{5x}=\lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{4}{x}\right)^{\frac{x}{4}}\right]^{20}=e^{20}$$ т.к. если сделать замену x=4t, то при $x\to\infty$, $t\to\infty$ и $$\lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{4}{x}\right)^{\frac{x}{4}}\right]^{20}=\lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{4}{t}\right)^{t}\right]^{20}=e^{20}$$

ж) Выделим целую часть и почленно разделим числитель на знаменатель

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+1}{x+1}\right)^{1+3x}=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+1+1}{x+1}\right)^{1+3x}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x+1}\right)^{1+3x}$$

Сделаем замену x+1=t, тогда при x→∞, t→∞ и предел примет вид при x=1-t $\lim_{t\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{t}\right)^{t}\right]^{3}\lim_{t\to\infty}(1+\frac{1}{t})^{-2}=e^{3}$ т.к. второй предел неопределенности не представляет и равен 1

№ 4. Найти точки разрыва функций и определить их вид:

$$f(x)=\begin{cases}\sin 2x & \text{при } x\le 0;\\ x^{3} & \text{при } 0<x\le 2,\\ \dfrac{3x}{x-6} & \text{при } x>2.\end{cases}$$

Решение:

Т.к. Данная функция не определена в точке x=6, то данная точка является «подозрительной» на разрыв. Вычислим односторонние пределы в этой точке $\lim_{x\to 6-0}\frac{3x}{x-6}=-\infty$; $\lim_{x\to 6+0}\frac{3x}{x-6}=+\infty$. Т.к. оба предела равны бесконечности, следовательно, точка x=6 является точкой разрыва второго ряда.

Также «подозрительными» на разрыв являются те точки, в которых изменяется аналитическое выражение функции, т.е. точки x=0 и x=2. Вычислим односторонние пределы в этих точках.

Для точки x=0 имеем: $\lim_{x\to 0}\sin 2x=0;\lim_{x\to 0}x^{3}=0$, x_0 – точка непрерывности

Для точки x=2 имеем: $\lim_{x\to 2-0}x^{3}=8;\ \lim_{x\to 2+0}\frac{3x}{x-6}=-\frac{6}{4}=-\frac{3}{2}$

Односторонние пределы функции в точке x=2 существует, но не равны между собой. Следовательно, те точки являются точкой разрыва первого ряда.

3.Дифференциальное исчисление.

3.1 ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПРОИЗВОДНОЙ ФУНКЦИИ.

1. Дифференцируемость функции и производная. Производной функции y = f (x)называется предел отношения приращения функции к приращению аргумента, когда приращение аргумента стремиться к нулю, т.е. y' = $\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}$.

В основу операции по нахождению производной (дифференцированию) функции кладется ее определение.

Пример 1. При равномерном движении пройденный путь пропорционален времени, т.е. S (t) = Vt, где V – постоянная величина (скорость). Если только движение прямолинейно, но не равномерно, то скорость в каждый момент времени равная. Скорость тела в момент времени t называют мгновенной скоростью в точке t и обозначается V(t).

Предположим, что к моменту времени t тело прошло путь S (t), а к моменту времени t + Δt (Δt – малый промежуток времени) – путь S (t + Δt), тогда за время Δt оно прошло путь S(t + Δt)-S(t), и средняя скорость тела будет на этом участке ΔV. Пусть промежуток времени Δt уменьшается и стремится к нулю, т.е. Δt→0, тогда и путь, пройденный за это время, так же стремится к нулю, а средняя скорость Vср за промежуток времени Δt стремится к скорости тела в момент времени t. Используя определение предела, можно записать: V (t) = $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{S(t+\Delta t) - S(t)}{\Delta t}$. Эта формула является строгим определением мгновенной скорости и одновременно дает способ для ее вычисления.

Отказавшись от физических терминологий, перейдем к стандартным обозначениям. Вместо «путь S(t)» будем говорить «функция f (x)», а вместо «скорость» – «производная функции f (x) в точке x».

Итак, по определению f' (x) = $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$ = $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x}$ = $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$.

2. Начальные формулы производной.

а) Основные свойства дифференцирования.

1) для y = C; C' = 0 (c = const); 2) для y = x; y' = 1; 3) для y = U±V; y' = U'±V', где U = U(x), V = V (x); 4) y = mu; y' = mu' (m = const); 5) y = UV; y' = U'V+UV'; 6) y = $\frac{U}{V}$; y' = $\frac{U'V - UV'}{V^2}$; V ≠ 0.

б) Основные формулы дифференцирования

1) $(x^n)' = n\ x^{n-1}$; 2) $(\sqrt{U})' = \frac{U'}{2\sqrt{U}}$;

3) $(U^n)' = n u^{n-1} \cdot u'$; 4) $(\sqrt[n]{u})' = \frac{u'}{n\sqrt[n]{u^{n-1}}}$;

5) $\left(\frac{U}{C}\right)' = \frac{1}{C}U'$ (C = const) если y = f (x); А U = φ(x), то y = f (φ(x)), т.е. y – сложная функция от функции и y'=f' (U)× φ'(x)

6) $\left(\frac{C}{V}\right)' = \frac{-CV'}{V^2}$ (C = const)

Примеры.

1) Используя определение производной, найти y', если $y = x^2+8x+5$.

▲ $y+\Delta y = (x+\Delta x)^2+8(x+\Delta x)+5$; $\Delta y = ((x+\Delta x)^2+8(x+\Delta x)+5) - (x^2+2\Delta x \times x+\Delta x^2+8x+8\Delta x+5-x^2-8x-5 = 2x\Delta x+8\Delta x+\Delta x^2)$;

$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2x\Delta x + \Delta x^2 + 8\Delta x}{\Delta x}$ = 2x+8+Δx; $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ = $\lim\limits_{\Delta x \to 0}$ (2x+8+Δx = 2x+8; y' = 2x+8

2) Найти производную сложной функции y = $\sqrt[4]{3-x^2}$

▲y = $\sqrt[4]{3-x^2}$ = $(3-x^2)^{\frac{1}{4}}$; y' = $\frac{1}{4}(3-x^2)^{-\frac{3}{4}}(3-x^2)'$ = $\frac{1}{4}(3-x^2)^{-\frac{3}{4}}\times(-2x)$ = $-\frac{x}{2\sqrt[4]{(3-x^2)^3}}$

3°. Формулы производных от некоторых трансцендентных функций.

(sin x)' = cos x; $(a^x)' = a^x \ln a$; $(\ln x)' = \frac{1}{x}$

(sin U)' = U'cosU; $(e^x)' = e^x$; $(\ln U)' = \frac{U'}{U}$;

(cosx)' = - sin x; $(e^U)' = U'e^U$; $(\log_a U)' = \frac{U'}{U\ln a}$

(cos U)' = U'sinU; $(\log_a x)' = \frac{\log_a e}{x} = \frac{1}{x\ln a}$

Примеры.

1) Найти производные следующих функций: а) y = $\sqrt{\ln x - 1} + \ln(\sqrt{x}+1)$;

б) y = $5^{x^3}\ln^2 x$; в) y = $\frac{\sin^2 x}{\sqrt{\cos 2x}}$.

▲ а) y = $\sqrt{\ln x - 1} + \ln(\sqrt{x}+1)$; y' = $\frac{1}{2\sqrt{\ln x + 1}}\times(\ln x + 1)'$ + $\frac{1}{\sqrt{x}+1}(\sqrt{x}+1)' =$

$$\frac{1}{2\sqrt{\ln x+1}}\times(\ln x+1)' + \frac{1}{\sqrt{x}+1}(\sqrt{x}+1)' = \frac{1}{2\sqrt{\ln x+1}}\times\frac{1}{x} + \frac{1}{\sqrt{x}+1}\times\frac{1}{2\sqrt{x}} =$$

$$\frac{1}{2\sqrt{x}}\left(\frac{1}{\sqrt{x(\ln x+1)}} + \frac{1}{\sqrt{x}+1}\right);$$

б) y= $5^{x^3}\ln^2 x$; y' =

$$(5^{x^3})'\ln^2 x + 5^{x^3}(\ln^2 x)' = [5^{x^3}\ln 5(x^3)']\ln^2 x + 5^{x^3}[2\ln x(\ln x)'] =$$

$$5^{x^5}\ln 5\times 3x^2\ln^2 x + 5^{x^2}\times 2\ln x\times\frac{1}{2} = 5^{x^3}\ln x(3\ln 5x^2\ln x + \frac{2}{x});$$

в) y = $\frac{\sin^2 x}{\sqrt{\cos 2x}}$; y' = $\frac{(\sin^2 x)'\times\sqrt{\cos 2x} - \sin^2 x(\sqrt{\cos 2x})'}{(\sqrt{\cos 2x})^2}$; учитывая, что $(\sin^2 x)'$ =

2 sin x(sinx)' = 2sin x cos x = sin2x; $(\sqrt{\cos 2x})' = \frac{1}{2\sqrt{\cos 2x}}\times(\cos 2x)' =$

$$\frac{1}{2\sqrt{\cos 2x}}\times(-\sin 2x)\times(21x)' = -\frac{\sin 2x}{\sqrt{\cos 2x}}.$$

Получим после преобразования y' = $\frac{\sin 2\times\cos^2 x}{\sqrt{\cos^3 2x}}$.

4. Дифференцирование неявной функции.

Выше было рассмотрено дифференцирование явных функций, заданных в виде y = f (x). Рассмотрим дифференцирование неявной функции, заданной уравнением F (x; y) = 0.

Для нахождения производной функции y, заданной неявно, нужно продифференцировать обе части уравнения, рассматривая y как функцию от x, а затем из полученного уравнения найти производную y'. Фактически этим методом мы пользовались при выводе производных y = e^x; y = x^n и других.

Пример. Найти производную y' не решая уравнения $x^3-x^2y-x^2y^2+a = 0$ относительно y.

▲ Так как в правой части уравнения стоит нуль, а производная постоянной равна нулю, то имеем: $\frac{d}{dx}(x^3-x^2y-x^2y^4+a) = 0$; применяя почленное дифференцирование, находим: $(x^3-x^2y-x^2y^2+a)' = (x^3)'-(x^2y)'-(x^2y^4)'+(a)' = 3x^2-2xy-x^2y'-2xy^4-4x^2y^3y' = 0$; Собирая в левой части члены, содержащие производную y' и перенося остальные члены в правую часть, имеем: $y'(x^2+4x^2y^3) = 3x^2-2xy-2xy^4$;

$$y' = \frac{3x^2-2xy-2xy^4}{x^2+4x^2y^3} = \frac{3x-2y-2y^4}{x-4xy^3}.$$

3.2 ДИФФЕРЕНЦИАЛ И ЕГО ПРИЛОЖЕНИЯ

Для дифференциала функции y = f (x) применяется формула dy = f' (x)dx или dy = y'dx.

Дифференциал применяется для приближенного вычисления наращенного значения функции по следующей формуле: f (x+Δx) ≈ f (x) + df (x) или f (x-Δx) ≈ +f (x) +f' (x)Δx.

Примеры.

1. Найти дифференциал, функции y = e^x(x+3).

▲ dy = y'dx; dy = [e^{-x}([+3))' dx ①. Найдем производную: [e^{-x}(x+3)]' = (e^{-x})' (x+3)+ +e^{-x} (x+3)'= -e^{-x} (x+3)+ e^{-x} = -e^{-x} (x+2.

Найденную производную подставим в равенство ① и получим: dy = -e^{-x} (x+2)dx.

2. Зная, что ln 99 = 4,59512, найти без таблицы ln 100, пользуясь дифференциалом логарифмической функции.

▲ Имеем y = ln x, dy = $\frac{1}{x}$Δx, значит, ln (x+Δx) ≈ lnx+$\frac{\Delta x}{x}$. В частности, при Δx = 1 формула дает: ln 100 = ln (99+1) ≈ 4,59512+$\frac{1}{99}\times 1$ ≈ 4,60522. По таблице находим ln 100 = 4,60517. Как видим, ошибка не значительна.

3. Вычислить $\sqrt{26}$.

▲ Имеем y = $\sqrt{x}$; dy = $\frac{1}{2\sqrt{x}}dx$. Пусть x = 25; Δx = 1, тогда по формуле f (x+Δx) ≈

f (x)+f''(x)Δx имеем $\sqrt{26} = \sqrt{25+1} \approx \sqrt{25} + \frac{1}{2\sqrt{25}}\times 1 = 5+\frac{1}{10} = 5{,}1$.

По таблицам квадратов находим $\sqrt{26}$ = 5,0990, ошибка не значительна.

3.3 ИССЛЕДОВАНИЕ ФУНКЦИИ С ПОМОЩЬЮ ПРОИЗВОДНОЙ.

Уравнение касательной к кривой $y = f(x)$ в точке (x_0;y_0) имеет вид $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$, уравнение нормали к кривой $y = f(x_0) - \frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0)$.

ВОЗРАСТАНИЕ И УБЫВАНИЕ

Признаком возрастания функции y = f (x) в некотором промежутке (a; b) является положительное значение ее производной для всех значений x в этом промежутке, т.е. f' (x)>0.

Аналогично, признаком убывания функции y = f (x) служит значение производной во всех точках рассматриваемого промежутка, т.е. f' (x)<0.

Другое важное приложение производной – задача о нахождении наибольших и наименьших (экстремальных) значений. Оно основано на следующем простом факте: **Если функция принимает в некоторой точке экстремальное значение, и производная в этой точке существует, то она (т.е. производная) равна нулю.**

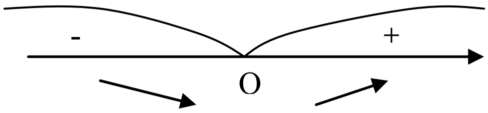
Пример. В тюрьме города Дрюкова собрались строить железную камеру для содержания особо опасных преступников. Какое наименьшее количество железа нужно для этой цели. Если по санитарным условиям высота камеры должна быть не менее 2,5 м, а ее площадь не менее 6 м²?

▲ Количество железа пропорционально площади поверхности камеры, которая, как и обыкновенная комната, имеет вид прямоугольного параллелепипеда. Обозначим длину камеры через x, а ширину – через y. Тогда пол и потолок имеют площадь xy каждый, две боковые стенки по 2,5 x, две другие по 2,5 y. Общая площадь получается S = 2xy+5+5y. При этом, согласно санитарным нормам, xy=6. Отсюда выразим y и подставим в выражение для S=2×6+(5x+$\frac{5\times 6}{x}$) = 12+5 (x+$\frac{6}{x}$).

Итак, мы учли все данные, но величину x еще можно выразить произвольно, т.е. она является **переменной величиной**. Ее нужно выбрать так, чтобы значение S получилось наименьшим. Согласно теорем для минимизации функции S (x) следует приравнять нулю производную S' (x). Пользуясь правилами вычисления производных, находим: S' = 0+5 (x'+($\frac{6}{x}$)') = 5(1-$\frac{6}{x^2}$). Из уравнения 1-$\frac{6}{x}$ = 0 находим, что x = $\sqrt{6}$. При этом значении x площадь будет наименьшей. Она равна: S = 12+10$\sqrt{6}$ $\approx$ 36,5 (м²).

Пример. Исследовать на возрастание и убывание функцию y = x²+2.

▲ Найдем производную функции: y' = 2x. Определим корни производной (положив f' (x) = 0), 2x = 0; x =0. Разобьем область существования функции (в данном случае на два промежутка) (-∞; 0) и (0; +∞). В первом промежутке при всех значениях x<0 f' (x)<0, т.е. функция убывает. Во втором промежутке – при всех значениях x > f' (x)>0, т.е. функция возрастает.



Есть и другие, не менее важные, приложения производной. Например, в геометрии часто используется тот факт, что производная от функции y = f (x) в точке x = a, равна тангенсу угла наклона касательной к графику функции f (x) в точке x = a; y' = tgα.

Пример. Применяя формулы и правила дифференцирования, найти производную функции $y = x\sqrt{x}(3\ln x - 2)$.

▲ Перепишем заданную функцию в виде $y = x^{\frac{3}{2}}(3\ln x - 2)$. Тогда:
$y' = \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}(3\ln x - 2) + x^{\frac{3}{2}} * \frac{3}{x} = \frac{9}{2}x^{\frac{1}{2}}\ln x - 3x^{\frac{1}{2}} + 3x^{\frac{1}{2}} = \frac{9}{2}\sqrt{x}\ln x.$

Пример. Логарифмируя предварительно данную функцию:
$y = \frac{x^2\sqrt{x+1}}{(x-1)^3 * \sqrt[5]{5x-1}}$, найти ее производную.

▲ Логарифмируем функцию $\ln y = 2\ln x + \frac{1}{2}\ln(x+1) - 3\ln(x-1) - \frac{1}{5}\ln(5x-1).$

Дифференцируем по x левую и правую части, получим
$\frac{y'}{y} = \frac{2}{x} + \frac{1}{2(x+1)} - \frac{3}{x-1} - \frac{5}{(5x-1)5}$, отсюда получим:
$y' = \frac{x^2\sqrt{x+1}}{(x-1)^3 * \sqrt[5]{5x-1}} * \left(\frac{2}{x} + \frac{1}{2(x+1)} - \frac{3}{x-1} - \frac{1}{5x-1}\right).$

Пример. Найти производную y' неявной функции $x^3 - x^2 y - x^2 y^4 + a = 0$, не решая уравнения относительно y.

▲ Так как в правой части стоит нуль, а производная постоянной равна 0, то имеем: $\frac{d}{dx}\left(x^3 - x^2 y - x^2 y^4 + a\right) = 0;$ применяя почленное дифференцирование, находим: $3x^2 - 2xy - x^2 y' - 2xy^4 - 4x^2 y^3 y' = 0;$ собирая в левой части уравнения члены, содержащие производную y' и перенося остальные члены в правую часть, имеем $y'(x^2 - 4x^2 y^3) = 3x^2 - 2xy - 2xy^4$, отсюда:

$$y' = \frac{3x^2 - 2xy - 2xy^4}{x^2 - 4x^2 y^3} = \frac{x(3x - 2y - 2y^4)}{x^2(1 - 4y^3)} = \frac{3x - 2y - 2y^4}{x(1 - 4y^3)}.$$

Пример. Найти $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^n}{e^x}$, если n – целое положительное число.

▲ В данном случае имеем неопределенность $\frac{\infty}{\infty}$. Применим правило Лопиталя – Бернулли n раз:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^n}{e^x} = \frac{\infty}{\infty} = \lim_{x\to\infty}\frac{n\cdot x^{n-1}}{e^x} = \lim_{x\to\infty}\frac{n(n-1)\cdot e^{n-2}}{e^x} = \ldots = \lim_{x\to\infty}\frac{n(n-1)(n-2)\ldots 1}{e^x} = 0.$$

Пример. Найти

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x}\right) = \lim_{x\to 0}\frac{\sin x - x}{x\sin x} = \lim_{x\to 0}\frac{\cos x - 1}{\sin x + \cos x} = \lim_{x\to 0}\frac{-\sin x}{\cos x + \cos x - x\sin x} = 0.$$

Под исследованием функции понимают изучение их изменений в зависимости от аргумента. На основании исследования функции строят ее график, предварительно изображая характерные точки.

Исследование функции и построение ее графика можно проводить по следующей схеме:

1. Найти область определения функции, ее точки разрыва.
2. Изучить изменение функции при стремлении аргумента к концам промежутка ОДЗ.
3. Найти точки экстремумов, промежутки возрастания и убывания.
4. Вычислить значения экстремумов, построить соответствующие точки.
5. Определить промежутки выпуклости и вогнутости графика, найти точки перегиба.
6. Найти точки пересечения графика с координатными осями.
7. Найти асимптоты графика функции.

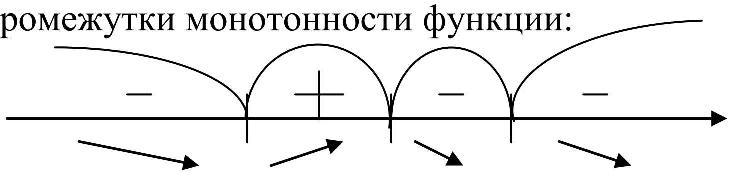
Порядок исследования иногда целесообразно выбирать исходя из конкретных особенностей данной функции.

Пример. Построить график функции $y=-\frac{x^3}{(x+1)^2}$. Написать уравнение касательной и нормали в точке x_0=1.

▲ 1) Область определения: $(-\infty;-1)\cup(-1;\infty)$. Функция общего вида. Находим предельное значение функции $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{-x^3}{(x+1)^2}=\infty;\lim\limits_{x\to\infty}\frac{-x^3}{(x+1)^2}=-\infty;\lim\limits_{x\to-1}\frac{-x^3}{(x+1)^2}=\infty$. График функции имеет одну вертикальную асимптоту x=-1. Наклонные асимптоты ищем по формулам $k=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{-x^3}{(x+1)^2x}=-1; в=\lim\limits_{x\to\infty}(f(x)-kx)=\lim\limits_{x\to\infty}\left(-\frac{x^3}{(x+1)^2}+x\right)=2.$ Уравнение наклонной асимптоты y=-x+2. График функции пересекает координатные оси в точке (0;0).[если x=0, то y=0].

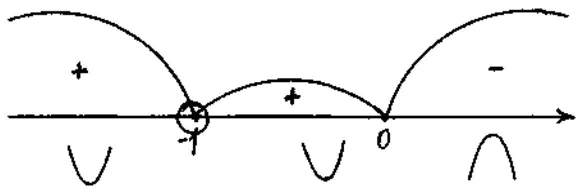
2) Находим первую производную: $y'=-\frac{x^2(x+3)}{(x+1)^3}$. Из уравнений $y'=0, y'=\infty$ получим точки «подозрительные» на экстремум:

$\frac{-x^2(x+3)}{(x+1)^3}=0; x_1=0; x_2=-3; \frac{-(x+3)x^2}{(x+1)^3}=\infty$ при x_3=-1. Исследуем эти точки, т. е. находим промежутки монотонности функции:



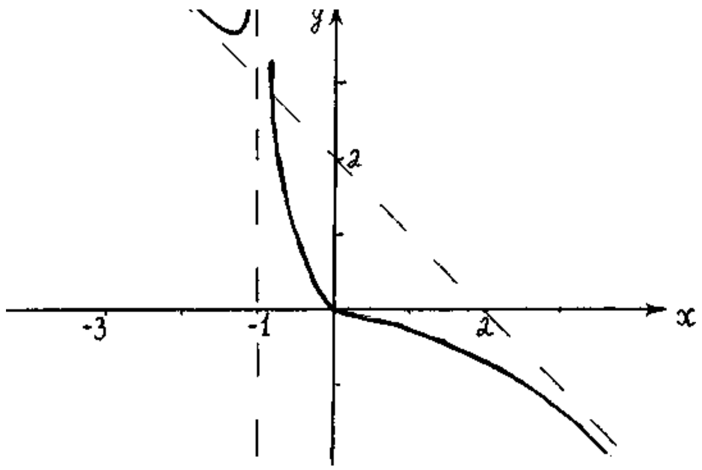
На промежутках $(-\infty;-3)\cup(-1;0)\cup(0;-\infty)$ – функция убывающая (производная на них отрицательна). На (-3;-1) – возрастает (производная на нем положительна). В точке x=-3, $y_{\min}=4{,}75$; в точке x=-1 функция не определена; при x=0; y=0.

3) Вторая производная $y''=-\frac{6x}{(x+1)^4}$ обращается в бесконечность при x=-1 и $y''=0$ при $-\frac{6x}{(x+1)^4}=0; x=0,$ которая является единственной точкой перегиба на $(-\infty;-1)$ - график вогнутый, на (-1;0) – график вогнутый,



на $(0;\infty)$ - график выпуклый, точка (0;0) – точка перегиба.

Учитывая полученные результаты, строим график функции $y=-\frac{x^3}{(x+1)^2}$.



Напишем уравнение касательной в точке $x_0=1$: $f(1)=-\frac{1}{4}; f'(1)=-1; y=-\frac{1}{4}-(x-1); 4x+4y-3=0.$ Напишем уравнение нормали в точке $x_0=1$: $y=-\frac{1}{4}+(x-1); 4x-4y-5=0.$

4. ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИИ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

4. 1 Вычисление неопределенного интеграла

Неопределенным интегралом от функции f(x) называется выражение вида $\int f(x)dx=F(x)+c$, если $F'(x)=f(x)$. Функция F(x) называется первообразной для заданной функции f(x). При интегрировании наиболее часто используется следующие методы:

1) Если $\int f(x)dx=F(x)+C$, то $\int f(ax)dx=\frac{1}{a}F(ax)+C$;

$$\int f(x+b)dx=F(x+b)+C,$$

где a и b некоторые постоянные.

2) Подведение под знак дифференциала: $\int f(\varphi(x))\varphi'(x)dx = \int f(\varphi(x))d(\varphi(x))$, где $\varphi'(x)dx = d(\varphi(x))$

3) Формула интегрирования по частям: $\int UdV = UV - \int VdU$, где U=f(x) и V=f(x) непрерывно дифференцируемые функции от x. С помощью этой формулы нахождение интеграла $\int UdV$ сводится к отысканию другого интеграла $\int VdU$. Ее применение целесообразно в тех случаях, когда последний интеграл либо проще исходного , либо ему подобен. При этом за U берется такая функция, которая при дифференцировании упрощается, а за dV – та часть подынтегрального выражения, интеграл от которого известен или может быть найден.

Пример 1 . Найти интеграл Y=$\int e^x \sin x dx$.

▲ Пусть U=e^x; dV=sinxdx; тогда dU=e$^x dx$; V=$\int \sin x dx = -\cos x$.

Следовательно $Y = -e^x \cos x + \int e^x \cos x dx$. Проинтегрируем по частям $\int e^x \cos x dx$: пусть U=e^x, dV=cosxdx, откуда $dU = e^x dx$; V = sinx, получаем $Y = -e^x \cos x + (e^x \sin x - Y)$, т.е. .$Y = -e^x \cos x + e^x \sin x - Y$. Применяя дважды операцию интегрирования по частям, мы в правой части снова получим исходный интеграл. Таким образом, приходим к уравнению с неизвестным интегралом Y. Из этого уравнения находим

$2Y = -e^x \cos x + e^x \sin x$ т.е. $Y = \frac{e^x}{2}(\sin x + \cos x) + C$

Пример 2. Найти интеграл Y=$\int arctqxdx$.

▲ Пусть U=arctgx; dV=dx; тогда dU=$\frac{dx}{1+x^2}$; $V = \int dx = x$.

Следовательно, $\int arctgxdx = xarctgx - \int \frac{xdx}{1+x^2} = xarctgx - \frac{1}{2}\ln\left|1+x^2\right| + C$

4) Интегрирование методом замены переменной (способ подстановки) является одним из эффективных приемов интегрирования. Замена переменной в неопределенном интеграле производится с помощью подстановок двух видов:

а) x=φ(t), гдеφ(t)-монотонная, непрерывно дифференцируемая функция новой переменной t. Формула замены переменной в этом случае имеет вид:

$$\int f(x)dx = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)dx = \int f(t)du$$

б) u=φ(t), где u – новая переменная. Формула замены переменной при такой подстановке:

$$\int f(x)dx = \int f(\varphi(x))\varphi'(x)dx = \int f(u)du$$

Пример 3. Найти интеграл $\int \frac{\sin\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x^2}}dx$.

▲ Произведем подстановку t=$\sqrt[3]{x}$, т.е. x=t^3. Эта подстановка приведет к тому, что под знаком синуса окажется переменная интегрирования, а не корень из нее. Найдем дифференциал dx=3t^2 $dt.$ Отсюда получаем

$$\int \frac{\sin\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x^2}}dx = \int \frac{3t^2 \sin t}{t^2}dt = 3\int \sin t dt = -\cos t + C .$$

Ответ должен быть выражен через старую переменную x. Подставляя в результат интегрирования t=$\sqrt[3]{x}$, получим $\int \frac{\sin\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x^2}}dx = -3\cos\sqrt[3]{x} + C$

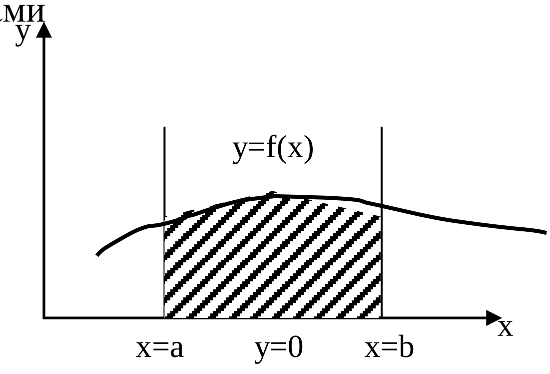
Пример 4. Найти интеграл $\int \frac{(2\ln x+3)^3 dx}{x}$.

▲ Перепишем данный интеграл в виде $\int (2\ln x+3)^3 \frac{1}{x}dx.$ Т.к. производная выражения 2lnx+3 равна $\frac{2}{x}$, а второй множитель $\frac{1}{x}$ отличается от этой производной только постоянным коэффициентом 2, то нужно применить подстановку 2 lnx + 3 = t.

Тогда $2\frac{dx}{x} = dt; \frac{dx}{x} = \frac{1}{2}dt$. Следовательно,

$$\int (2\ln x+3)^3 x \frac{dx}{x} = \int t^3 \frac{1}{2}dt = \frac{1}{2}\int t^3 dt = \frac{1}{8}t^4 + c = \frac{1}{8}(2\ln x+3)^4 + C$$

Определенным интегралом от функции f(x) на отрезке [a;b] (или в пределах от а до в) называется предел интегральной суммы при условии, что длина наибольшего из элементарных отрезков (max.$\Delta x_к$) стремится к нулю: Y=$\int_a^b f(x)dx$; числа а и в соответственно называются нижним и верхним пределами



интегрирования. Если f(x)>0 на [a;b], то определенный интеграл $\int_a^b f(x)dx$ геометрически представляет собой площадь криволинейной трапеции – фигуры, ограниченной линиями y=f(x); x=a; x=b; y=0. См. рисунок.

Правила вычисления определенного интеграла.

1) Формула Ньютона-Лейбница: $\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a);$ где F(x)-первообразная для f(x),т.е. F'(x)=f(x).

2) Интегрирование по частям: $\int_a^b UdV = UV\Big|_a^b - \int_a^b VdU,$ где U=U(x); V=V(x)-непрерывно дифференцируемые функции на отрезке [a;b].

3) Замена переменной: $\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt,$ где x=$\varphi(t)$ - функция непрерывна вместе со своей производной $\varphi'(t)$ на отрезке $\alpha \le t \ge \beta, a = \varphi(\alpha); b = \varphi(\beta).$ $f\varphi$ (t) – функция, непрерывная на $[\alpha;\beta]$.

Пример 5. Вычислить по формуле Ньютона-Лейбница $\int_{\pi/6}^{\pi/4} \frac{dx}{\cos^2 x}$

$$▲ \int_{\pi/6}^{\pi/4} \frac{dx}{\cos^2 x} = tgx\Big|_{\pi/6}^{\pi/4} = tg\frac{\pi}{4} - tg\frac{\pi}{6} = 1 - \frac{\sqrt{3}}{3}$$

Пример 6. Вычислить интеграл $\int_0^{2\pi} x\sin\frac{x}{2}dx.$

▲ Интегрируя по частям, находим

$$\int_0^{2\pi} x\sin\frac{x}{2}dx = -2\int_0^{2\pi} xd(\cos\frac{x}{2}) = -2x\cos\frac{x}{2}\Big|_0^{2\pi} + 2\int_0^{2\pi}\cos\frac{x}{2}dx =$$

$$= -2x\cos\frac{x}{2}\Big|_0^{2\pi} + 4\sin\frac{x}{2}\Big|_0^{2\pi} = 4\pi$$

Пример 7. Вычислить интеграл $\int_0^3 x^2 \sin xdx.$

▲ Дважды интегрируя по частям, получаем

$$\int_0^{\pi/2} x^2 \sin xdx = -\int_0^{\pi/2} x^2 d(\cos x) = -x^2\cos x /_0^{\pi/2} + \int_0^{\pi/2} 2x\cos xdx =$$

$$= 2\int_0^{\pi/2} xd(\sin x) = 2x\sin x\Big|_0^{\pi/2} - 2\int_0^{\pi/2}\sin xdx = \pi + 2\cos x\Big|_0^{\pi/2} = \pi - 2$$

Пример 8. Вычислить $\int_1^e \frac{\ln^2 x}{x}dx$

▲ Пусть lnx = t, тогда $\frac{dx}{x} = dt$. Если x = 1, то t = 0, если x = e, то t = 1.

Следовательно $\int\limits_1^e \frac{\ln^2 x}{x} dx = \int\limits_0^1 t^2 dt = \frac{1}{3} t^3 \Big|_0^1 = \frac{1}{3}(1^3 - 0^3) = \frac{1}{3}$

Пример 9. Вычислить $\int\limits_{\sqrt{2}}^{2} x^2 \sqrt{8 - 2x^2}\, dx$

▲ Введем новую переменную по формуле x = 2sin*t*. Поскольку dx = 2cos*t*dt, t = arcsin$\frac{x}{2}$, $t_1 = \frac{\pi}{4}$ *при* $x = \sqrt{2}$, $t_1 = \frac{\pi}{2}$ *при* $x = 2$, то

$$\int\limits_{\sqrt{2}}^{2} x^2 \sqrt{8 - 2x^2}\, dx = \int\limits_{\pi/4}^{\pi/2} (2\sin t)^2 \sqrt{8 - 2(2\sin t)^2}\; 2\cos t dt =$$

$$= 2\sqrt{2} \int\limits_{\pi/4}^{\pi/2} (1 - \cos 4t) dt = 2\sqrt{2}\left(t - \frac{\sin 4t}{4} \right)\Bigg|_{\pi/4}^{\pi/2} = \frac{\sqrt{2}\pi}{2}$$

$$= \int\limits_{\pi/4}^{\pi/2} 4\sin^2 t \sqrt{8 - 8\sin^2 t}\; 2\cos t dt = \int\limits_{\pi/4}^{\pi/2} 16\sqrt{2}\sin^2 t \cos^2 t dt = \int\limits_{\pi/4}^{\pi/2} 4\sqrt{2}\sin^2 2t dt =$$

4.2 Вычисление площади плоской фигуры

Площадь криволинейной трапеции, ограниченной кривой y=f(x) $[f(x) \geq 0]$,прямыми x = a, x = b и отрезком $[a;b]$ оси Ox, вычисляется по формуле

$$S = \int\limits_a^b f(x) dx$$

Площадь фигуры, ограниченной кривыми $y = f_1(x)$ и $y = f_2(x)\,[f_1(x) \leq f_2(x)]$ и прямыми x = a и x = b, находится по формуле

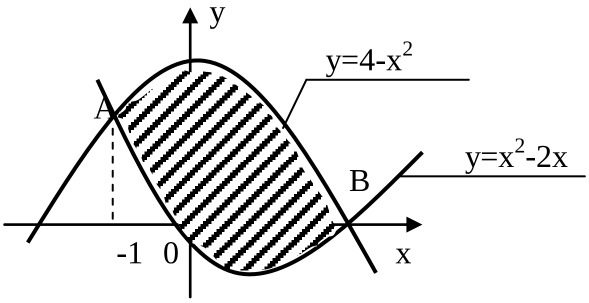
$$S = \int\limits_a^b [f_2(x) - f_1(x)] dx.$$

Если кривая задана параметрическими уравнениями x = x(t); y = y(t), то площадь криволинейной трапеции, ограниченной этой кривой, x = a, x = b и отрезком $[a;b]$ оси Ox, выражается формулой

$$S = \int\limits_{t_1}^{t_2} y(t) x'(t) dt,$$

где t_1 и t_2 определяются из уравнений a = x (t_1);b = x(t_2) $[y(t) \geq 0]$ при $t_1 \leq t \leq t_2$.

Пример 10. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями $y = 4 - x^2$; $y = x^2 - 2x$.



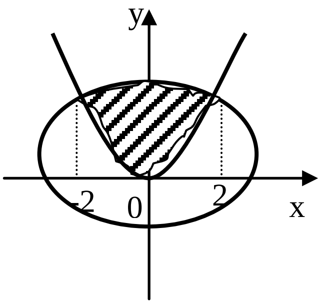
▲ Выполним рисунок. Координаты точек пересечения кривых $y = 4\text{-}x^2$ и $y = x^2\text{-}2x$ найдем из системы уравнений:

$$\begin{cases} y = 4 - x^2 \\ y = x^2 - 2x \end{cases} \Rightarrow A(-1;3);\ B(2;0)$$

Из рисунка видно, что искомая площадь – это площадь фигуры, заключенная между кривыми; при этом на отрезке $[-1;2]$ $f_2(x) = 4 - x^2 \ge f_1(x) = x^2 - 2x$.

$$S = \int_{-1}^{2}\left(4 - x^2 - \left(x^2 - 2x\right)\right)dx = \int_{-1}^{2}\left(4 - 2x^2 + 2x\right)dx = 4x\Big|_{-1}^{2} - \tfrac{2}{3}x^3\Big|_{-1}^{2} + x^2\Big|_{-1}^{2} =$$

$$= 4(2+1) - \tfrac{2}{3}\left(2^3 + 1^3\right) + 2^2 - 1 = 9(\textit{кв.ед.})$$



Пример 11. вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $x^2 + 4y^2 = 8$ и $x^2 - 4y = 0$.

▲ Данная фигура ограничена сверху дугой эллипса $x^2 + 4y^2 = 8$, снизу – дугой параболы $x^2 = 4y$. Решая систему уравнений

$$\begin{cases} x^2 + 4y^2 = 8 \\ x^2 - 4y = 0 \end{cases}$$

, находим x_1 = -2, x_2 = 2 – абсциссы точек пересечения заданных линий. Следовательно, a = -2, b = 2. Каждое уравнение разрешает относительно

$$y\!: \begin{cases} y_1 = \dfrac{x^2}{4} \\ y_2 = \dfrac{\sqrt{8 - x^2}}{2} \end{cases}.$$

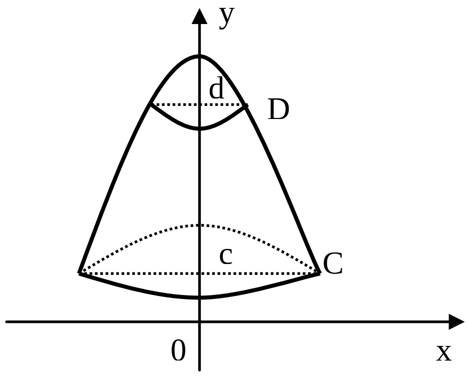
Таким образом, искомая площадь равна:

$$S = \int_{-2}^{2}\left(\frac{\sqrt{8 - x^2}}{2} - \frac{x^2}{4}\right)dx = \tfrac{1}{2}\int_{-2}^{2}\sqrt{8 - x^2}\,dx - \tfrac{1}{4}\int_{-2}^{2}x^2 dx.$$

Для вычисления первого интеграла применим подстановку $x = 2\sqrt{2}\sin t dt$, тогда $dx = 2\sqrt{2}\cos t dt$ $\quad \alpha = -\pi/4, \beta = \pi/4$

$$= 2\int_{-\pi/4}^{\pi/4}(1 - \cos 2t)dt = 2\left(t + \tfrac{1}{2}\sin 2t\right)\Big|_{-\pi/4}^{\pi/4} = \pi + 2$$

$$S_1 = \tfrac{1}{2}\int_{-2}^{2}\sqrt{8 - x^2}\,dx = \tfrac{1}{2}\int_{-\pi/4}^{\pi/4}\sqrt{8 - 8\sin^2 t}\,2\sqrt{2}dt =$$



Поскольку $S_2 = \frac{1}{2}\int\limits_{-2}^{2} x^2 dx = \frac{1}{4}\frac{x^3}{3}\Big|_{-2}^{2} = 4/3$, то

S = S_1 - S_2 = $\pi + 2 - \frac{4}{3} = \pi + \frac{2}{3}(\hat{e}\hat{a}.\mathring{a}\ddot{a})$.

Вычисление объема тела

Объем тела, полученного вращением вокруг оси OY криволинейной трапеции CcdD (см. рис.), где CD - дуга кривой x=f(y), определяется по формуле:

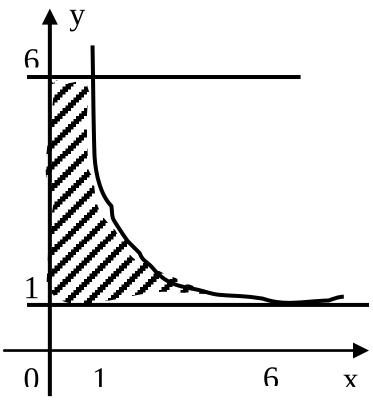
$$V_x = \pi\int\limits_a^b f^2(x)dx \text{ или } V_y = \pi\int\limits_c^d \varphi^2(y)dy$$

Пример 12. Найти объём тела, полученного вращением вокруг оси OY криволинейной трапеции, ограниченной параболой $x^2 = 4y$, прямой y = 4 и осью OY .

▲ Замечая, что пределы интегрирования c=0; d=4, находим:

$$V = \pi\int\limits_0^4 x^2 dy = \pi\int\limits_0^4 4y dy = 2\pi y^2\Big|_0^4 = 32\pi(куб.ед.).$$

Пример 13. Найти объём тела, полученного вращением вокруг оси OY криволинейной трапеции, ограниченной гиперболой xy = 6, прямыми y = 1; y = 6 и осью OY.



▲ Из уравнения кривой xy = 6 находим $x = \frac{6}{y}, x^2 = \frac{36}{y^2}$. Принимая во внимание, что c = 1. d = 6, по формуле получаем

$$v = \pi\int\limits_1^6 \frac{36}{y^2}dy = 36\pi\int\limits_1^6 \frac{dy}{y^2} = -\frac{36\pi}{y}\Big|_1^6 = -36\pi(\frac{1}{6} - 1) = 30\pi(куб.ед.).$$

4.3 Несобственные интегралы

Несобственными интегралами называются: 1) интегралы с бесконечными пределами; 2) интегралы от неограниченных функций. Несобственный интеграл от функции f(x) в пределах от a до $+\infty$ определяется равенством

$$\int_{a}^{+\infty} f(x)dx = \lim_{a\to\infty}\int_{a}^{b} f(x)dx$$

Если этот предел существует и конечен, то несобственный интеграл называется *сходящимся*; если же предел не существует или равен бесконечности – *расходится*. Аналогично

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)dx = \lim_{a\to-\infty}\int_{a}^{b} f(x)dx$$

и

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \lim_{\substack{a\to-\infty\\ b\to+\infty}}\int_{a}^{b} f(x)dx$$

Если функция f(x) имеет бесконечный разрыв в точке С отрезка $[a;b]$ и непрерывна при $a \le x < c$ и $c < x \le b$, то по определению полагают

$$\int_{a}^{b} f(x)d\alpha = \lim_{\alpha\to 0}\int_{a}^{c-\alpha} f(x)dx + \lim_{\beta\to 0}\int_{c+\beta}^{b} f(x)dx$$

Несобственный интеграл $\int_{a}^{b} f(x)dx$, где f(c) = ∞, a<c<b, называется *сходящимся*, если существует оба предела в правой части равенства, и *расходящимся*, если не существует хотя бы один их них.

Пример 14. Вычислить $\int_{e}^{\infty}\frac{dx}{x\ln x}$

▲ Это несобственный интеграл с бесконечным верхним пределом интегрирования. По формуле (10) имеем:

$$\int_{e}^{\infty}\frac{dx}{x\ln x} = \lim_{b\to\infty}\left(\ln\left|\ln x\right|\right)\Big|_{e}^{b} = \lim_{b\to\infty}\ln\left|\ln b\right| - 0 = \infty,$$

интеграл расходится.

Пример 15. Вычислить $\int_{0}^{\pi/4}\frac{dx}{\sin^2 x}$.

▲ Интеграл является несобственным интегралом неограниченной функции f(x)=1/sin ^{2} x,которая терпит бесконечный разрыв в нижнем пределе при x = 0. Согласно формуле (13) получаем

$$\int_{0}^{\pi/4}\frac{dx}{\sin^2 x} = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\varepsilon}^{\pi/4}\frac{dx}{\sin^2 x} = \lim_{\varepsilon\to 0}(tgx)\Big|_{\varepsilon}^{\pi/4} = 1 - \lim_{\varepsilon\to 0} tg\varepsilon = 1.$$

Этот несобственный интеграл сходится.

Пример 16. Вычислить $\int_{0}^{1}\frac{dx}{\sqrt{1-x}}$.

$$▲\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x}} = \lim_{b\to 1-0}\int_0^b \frac{dx}{\sqrt{1-x}} = -\lim_{b\to 1-0} 2\sqrt{1-x}\Big|_0^b = -\lim_{b\to 1-0} 2(\sqrt{1-b}-1) = 2$$

Пример 17. Вычислить $\int_{-1}^{1} \frac{dx}{x^2}$

▲ Т.к. внутри отрезка интегрирования существует точка x = 0, где подынтегральная функция разрывна, то интеграл нужно представить как сумму двух слагаемых:

$$\int_{-1}^{1} \frac{dx}{x^2} = \lim_{\varepsilon_1\to -0}\int_{-1}^{\varepsilon_1} \frac{dx}{x^2} + \lim_{\varepsilon_2\to +0}\int_{\varepsilon_2}^{1} \frac{dx}{x^2}$$

Вычислим каждый предел отдельно:

$\lim_{\varepsilon_1\to -0}\int_{-1}^{\varepsilon_1} \frac{dx}{x^2} = -\lim_{\varepsilon_1\to -0} \frac{1}{x}\Big|_{-1}^{\varepsilon_1} = \lim\left(\frac{1}{\varepsilon_1} - \frac{1}{-1}\right) = \infty$, следовательно на участке $[-1;0]$ интеграл расходится.

$\lim_{\varepsilon_2\to +0}\int_{\varepsilon_2}^{1} \frac{dx}{x^2} = \lim\left(1 - \frac{1}{\varepsilon_2}\right) = \infty$ - на участке $[0;1]$ интеграл расходится.

Поэтому на всем отрезке $[-1;1]$ данный интеграл расходится.

5. ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

5.1Функции нескольких независимых переменных

Пусть имеется n переменных величин, и каждому набору их значений $(x_1;x_2;\ldots;x_n)$ из некоторого множества X соответствует одно вполне определенное значение переменной величины Z. Тогда говорят, что задана функция нескольких переменных $Z=f(x_1;x_2;\ldots;x_n)$. Переменные $x_1;x_2;\ldots;x_n$называются независимыми переменными. Если u=f(x;y;z) есть функция нескольких переменных, то могут существовать производные функции по x, по y, по z, которые называются частными производными и обозначаются $\frac{\partial u}{\partial x};\frac{\partial u}{\partial y};\frac{\partial u}{\partial z}$ или $U'_x;U'_y;U'_z$.

Пример 18. Найти частные производные функции $U = x^2 - 3xy - 4y^2 - x + 2y + 1$.

▲ Рассмотрим y как постоянную величину, тогда $\frac{\partial u}{\partial x} = 2x - 3y - 1;$ рассмотрим x как постоянную величину, тогда $\frac{\partial u}{\partial y} = -3x - 8y + 2.$

Производной функции Z=f(x;y) в точке M (x;y) в направлении вектора $\bar{\ell} = \overline{MM_1}$ называется предел $\frac{\partial z}{\partial l} = \lim_{|MM_1|\to 0} \frac{f(M_1) - f(M)}{|MM_1|} = \lim_{\rho\to 0}\frac{\Delta z}{\rho}$, где $\rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$.

Если функция дифференцируема, то производная в данном направлении вычисляется по формуле $\frac{\partial z}{\partial l}=\frac{\partial z}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial z}{\partial y}\sin\alpha,$ где α - угол образованный вектором $\bar{\ell}$ с осью OX. В случае функции трех переменных U=f(x;y;z) производная в данном направлении вычисляется по формуле $\frac{\partial u}{\partial l}=\frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial u}{\partial y}\cos\rho+\frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma$, где $\cos\alpha;\cos\rho;\cos\gamma$ направляющие косинусы вектора $\bar{\ell}$. Градиентом функции U=f(x;y;z) [gradu] по направлению вектора $\bar{\ell}$(m;n;p) является $\frac{du}{d\ell}$, т. е.

$$grad\_u=\frac{\partial u}{\partial x}\bar{i}+\frac{\partial u}{\partial y}\bar{j}+\frac{\partial u}{\partial z}\bar{k};\frac{du}{d\ell}=\frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial u}{\partial y}\cos\rho+\frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma;$$

$$\cos\alpha=\frac{m}{\sqrt{m^2+n^2+p^2}};\cos\rho=\frac{n}{\sqrt{m^2+n^2+p^2}};\cos\gamma=\frac{p}{\sqrt{m^2+n^2+p^2}}.$$

Пример 19. Найти gradu; $|grad\_u|$ и производную по направлению $\frac{du}{d\ell}$ в точке A(1;1;1); $\bar{\ell}(1;\sqrt{2};-1)$ для функции $U=\sqrt{x^2+y^2+z^2}.$

▲

$$grad\_u=\frac{\partial u}{\partial x}\bar{i}+\frac{\partial u}{\partial y}\bar{j}+\frac{\partial u}{\partial z}\bar{k};\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}};\frac{\partial u}{\partial x}(A)=\frac{\partial u}{\partial x}\bigg|_{\substack{x=1\\y=1\\z=1}}=\frac{1}{\sqrt{1^2+1^2+1^2}}=\frac{1}{\sqrt{3}};$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}};\frac{\partial u}{\partial y}(A)=\frac{\partial u}{\partial y}\bigg|_{\substack{x=1\\y=1\\z=1}}=\frac{1}{\sqrt{3}};\quad \frac{\partial u}{\partial z}=\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}};\frac{\partial u}{\partial z}(A)=\frac{\partial u}{\partial z}\bigg|_{\substack{x=1\\y=1\\z=1}}=\frac{1}{\sqrt{3}};$$

$$grad\_u=\frac{1}{\sqrt{3}}\bar{i}+\frac{1}{\sqrt{3}}\bar{j}+\frac{1}{\sqrt{3}}\bar{k};|grad\_u|=\sqrt{\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2+\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2+\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2}=\frac{1}{2};$$

$$\frac{du}{d\ell}=\frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial u}{\partial y}\cos\rho+\frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma;$$

$$\cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{1^2+\left(\sqrt{2}\right)^2+1^2}}=\frac{1}{2};\cos\rho=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{1^2+\left(\sqrt{2}\right)^2+1^2}}=\frac{\sqrt{2}}{2};\cos\gamma=\frac{-1}{\sqrt{1^2+\left(\sqrt{2}\right)^2+1^2}}=-\frac{1}{2};$$

$$\frac{du}{d\ell}=\frac{1}{\sqrt{3}}*\frac{1}{2}+\frac{1}{\sqrt{3}}*\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{1}{\sqrt{3}}*\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{\sqrt{6}}{6}.;$$

5.2 Экстремум функции двух независимых переменных

Функция $z=f(x;y)$ имеет максимум (минимум) в точке $M_0(x_0;y_0)$, если значение функции в этой точке больше (меньше), чем ее значение в любой другой точке M(x;y) некоторой окрестности точки M_0.

Максимум или минимум функции называется ее экстремумом. Точка M_0, в которой функция имеет экстремум, называется точкой экстремума.

Если дифференцируемая функция $z=f(x;y)$ достигает экстремума в точке $M_0(x_0;y_0)$, то ее частные производные первого порядка в этой точке равны нулю: $\frac{\partial f(x_0;y_0)}{\partial x}=0;\frac{\partial f(x_0;y_0)}{\partial y}=0$ (необходимые условия). Точки, в которых частные производные равны нулю, называются стационарными. Не всякая стационарная точка является точкой экстремума.

Пусть $M_0(x_0;y_0)$ – стационарная точка функции $z=f(x;y)$. Обозначим $\grave{A}=\frac{\partial^2 f(x_0;y_0)}{\partial \tilde{o}^2};B=\frac{\partial^2 f(x_0;y_0)}{\partial \tilde{o}};C=\frac{\partial^2 f(x_0;y_0)}{\partial y^2}$ и составим дискриминант $\Delta=AC-B^2$. Тогда: 1) если $\Delta>0$, то функция имеет в точке M_0 экстремум, а именно максимум при A<0 (или C<0) и минимум при A>0 (илиC>0);

2) если $\Delta<0$, то в точке M_0 экстремума нет (достаточные условия наличия или отсутствия экстремума).

3) если $\Delta=0$, то требуется дальнейшее исследование (сомнительный случай).

Пример 20. Найти экстремум функции $z=x^2+xy+y^2-3x-6y.$

▲ Находим частные производные первого порядка $\frac{\partial z}{\partial x}=2x+y-3;\frac{\partial z}{\partial y}=x+2y-6.$ Воспользовавшись необходимыми условиями экстремума, находим стационарные точки: $\begin{cases}2x+y-3=0,\\ x+2y-6=0,\end{cases}\begin{cases}x=0,\\ y=3.\end{cases}M(0;3).$ Находим значения частных производных второго порядка в точке M: $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=2;\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=2;\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=1,$ и составим дискриминант $\Delta=AC-B^2=2*2-1=3>0;A>0.$ Следовательно, в точке M(0;3) заданная функция имеет минимум. Значение функции в этой точке Z_{min}=-9.

Пример 21. Найти экстремум функции $z=\frac{1}{2}xy+(47-x-y)\left(\frac{x}{3}+\frac{y}{4}\right).$

▲ Находим частные производные первого порядка:
$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{1}{12}y-\frac{2}{3}x+\frac{47}{3};\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{1}{2}y-\frac{1}{12}x+\frac{47}{4}.$ Воспользовавшись необходимыми условиями экстремума, находим стационарные точки:
$\begin{cases}-\frac{1}{12}y-\frac{2}{3}x+\frac{47}{3}=0,\\ -\frac{1}{2}y-\frac{1}{12}x+\frac{47}{4}=0;\end{cases}\begin{cases}8x+y=188,\\ x+6y=141;\end{cases}\begin{cases}x=21,\\ y=20.\end{cases}M(21;20).$ Найдем значение вторых производных в точке M: $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=-\frac{2}{3};\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=-\frac{1}{2};\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=-\frac{1}{12}.$

Тогда $\Delta=AC-B^2=\left(-\frac{2}{3}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)-\left(-\frac{1}{12}\right)^2=\frac{1}{3}-\frac{1}{144}>0.$ Т. к. A<0, то в точке M(21;20) функция имеет максимум: Z_{max}=282.

Задания для расчетно-графических работ за 1 семестр.

№ 1.

Тема: Операции над матрицами. Определители.

Содержание: Операции над матрицами. Вычисление определителей n – го порядка. Вычисление миноров и алгебраических дополнений.

Задание

Выполнить действия над матрицами:

вычислить:

-обратную матрицу (A) с проверкой;

-определитель матрицы A;

-произведение матриц (A и B);

-выражение по формуле;

транспонировать матрицу B.

ВАРИАНТЫ

Вариант № 1

$$2(A+B)*(2B-A), \text{где } A=\begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 4 & 5 & 2 \\ -1 & 0 & 7 \end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix} -1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & -2 & 4 \end{bmatrix}$$

Вариант № 2

$$3A-(A+2B)*B, \text{где } A=\begin{bmatrix} 4 & 5 & -2 \\ 3 & -1 & 0 \\ 4 & 2 & 7 \end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 5 & 7 & 3 \end{bmatrix}$$

Вариант № 3

$$2(A-B)*(A^2+B), \text{где } A=\begin{bmatrix} 5 & 1 & 7 \\ -10 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 7 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Вариант № 4

$$(A^2-B^2)*(A+B), \text{где } A=\begin{bmatrix} 7 & 2 & 0 \\ -7 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & -2 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Вариант № 5

$$(A-B^2)*(2A+B), \text{где } A=\begin{bmatrix} 5 & 2 & 0 \\ 10 & 4 & 1 \\ 7 & 3 & 2 \end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix} 3 & 6 & -1 \\ -1 & -2 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Вариант № 6

$$(A-B)*A+2B, \text{где } A=\begin{bmatrix} 5 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & -1 \\ -2 & -1 & 0 \end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix} 3 & 7 & -2 \\ 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Вариант № 7

$$2(A-0{,}5B)+AB,\ \text{где}\ A=\begin{bmatrix}5&3&-1\\2&0&4\\3&5&-1\end{bmatrix},B=\begin{bmatrix}1&4&16\\-3&-2&0\\5&7&2\end{bmatrix}$$

Вариант № 8

$$(A-B)A+3B,\ \text{где}\ A=\begin{bmatrix}3&2&-5\\4&2&0\\1&1&2\end{bmatrix},B=\begin{bmatrix}-1&2&4\\0&3&2\\-1&-3&4\end{bmatrix}$$

Вариант № 9

$$2A-(A^2+B)B,\ \text{где}\ A=\begin{bmatrix}1&4&2\\2&1&-2\\0&1&-1\end{bmatrix},B=\begin{bmatrix}4&6&-2\\4&10&1\\2&4&-5\end{bmatrix}$$

Вариант № 10

$$3(A^2-B^2)-2AB,\ \text{где}\ A=\begin{bmatrix}4&2&1\\3&-2&0\\0&-1&2\end{bmatrix},B=\begin{bmatrix}2&0&2\\5&-7&-2\\1&0&-1\end{bmatrix}$$

№ 2.

Тема: Системы линейных уравнений.

Содержание: Решений систем линейных уравнений методами:

По формулам Крамера;

Матричным методом;

Методом Гаусса.

Задание

Решить системы линейных уравнений методами:

По формулам Крамера;

Матричным методом;

Методом Гаусса.

Варианты:

$$1)\begin{cases}8x_1+4x_2-6x_3=-18,\\-2x_1-4x_3-6x_4=-2,\\6x_1+4x_2+4x_3+6x_4=-14,\\4x_1+6x_2+8x_3+8x_4=-6;\end{cases}\quad 2)\begin{cases}-8x_1+2x_2-2x_4=34,\\-6x_1-4x_2-2x_3-2x_4=24,\\-10x_1+2x_2+4x_4=68,\\-2x_1-6x_2+8x_3-4x_4=-36;\end{cases}$$

$$3)\begin{cases}6x_1-4x_3-4x_4=-34,\\-10x_1+10x_3=20,\\-8x_1-4x_2+2x_4=44,\\-2x_1-10x_2+6x_3+4x_4=-2;\end{cases}\quad 4)\begin{cases}8x_1+2x_2-2x_3=-32,\\2x_1+4x_3+2x_4=-14,\\2x_1-8x_2-8x_3=6,\\-10x_1-4x_2+10x_3+2x_4=24;\end{cases}$$

$$5)\begin{cases}2x_1+6x_2+4x_3=-16,\\ -6x_1+8x_2+4x_3+2x_4=34,\\ -2x_2+6x_3-10x_4=-60,\\ 6x_1-10x_2+2x_3-81x_4=-78;\end{cases}\quad 6)\begin{cases}6x_1-2x_2+10x_3+4x_4=-46,\\ -6x_1-4x_2+10x_3+10x_4=36,\\ x_3-4x_4=-19,\\ 8x_2-4x_3+10x_4=60;\end{cases}$$

$$7)\begin{cases}6x_1+8x_3-6x_4=-2,\\ 10x_1-10x_2-2x_3-8x_4=42,\\ 4x_1-2x_2-2x_3+10x_4=12,\\ -4x_1-2x_2-2x_3=4;\end{cases}\quad 8)\begin{cases}-4x_1+6x_2-4x_3-6x_4=-18,\\ 4x_1+10x_2-8x_3+2x_4=-18,\\ 2x_2-6x_3+6x_4=0,\\ -2x_3-2x_4=2;\end{cases}$$

$$9)\begin{cases}4x_1+4x_2+4x_3+8x_4=-12,\\ -8x_2-2x_3+6x_4=26,\\ -2x_1+2x_2-8x_3-8x_4=0,\\ -8x_2+2x_3-6x_4=22;\end{cases}\quad 10)\begin{cases}2x_1+8x_2+6x_3=-28,\\ -4x_2+6x_3+8x_4=6,\\ -8x_1+4x_2+10x_4=-20,\\ -6x_1-2x_2-4x_3+2x_4=4;\end{cases}$$

№ 3

Тема: Векторы. Операции над векторами.

Содержание: Операции над векторами. Скалярное, векторное и смешанное произведение векторов.

Задание

1 Найти линейную комбинацию векторов $\overrightarrow{AB}-3\overrightarrow{BC}+4\overrightarrow{CD}$

2 Найти длины векторов $\overrightarrow{AB};\quad \overrightarrow{BC};\quad \overrightarrow{CD}$

3 Найти косинусы углов между векторами $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{BC}$; $\overrightarrow{BC}$ и $\overrightarrow{CD}$

4 Найти скалярное, векторное и смешанное произведение векторов $\overrightarrow{AB};\quad \overrightarrow{BC};\quad \overrightarrow{CD}$.

Варианты:

1 A (2; 3; -1); B (0; 1; 2); C (4; -1; -1); D (2; -3; 1)
2 A (3; -1; 1); B (1; 3; 2); C (1; -1; -1); D (4; 0; 3)
3 A (4; 1; 2); B (1; 0; 1); C (-1; 2; -1); D (3; 1; 0)
4 A (3; -2; 1); B (2; -1; 1); C (4; 0; 2); D (1; 1; -1)
5 A (-2; 2; 1); B (3; 0; 4); C (7; 1; 0); D (3; 0; 5)
6 A (1; -1; -1); B (2; 5; 7); C (-3; 1; -1); D (2; 2; 3)
7 A (-3; 1; 4); B (1; -2; -3); C (2; 2; 3); D (5; 3; 1)
8 A (2; -5; 1); B (4; 3; 5); C (-1; 0; 1); D (2; 1; 0)
9 A (-2; 2; 1); B (3; -1; 0); C (4; 4; 0); D (1; -1; 1)
10 A (4; 2; 5); B (0; 1; 3); C (-1; -1; 1); D (2; -2; 1)

№ 4

Тема: Прямая и плоскость в пространстве.

Содержание: Расстояние от точки до прямой на плоскости и в пространстве. Угол между прямой и плоскостью.

Задание: Вычислить объем тетраэдра с вершинами в точках A_1, A_2, A_3, A_4 и его высоту, опущенную из вершины A_4 на грань $A_1A_2A_3$.

Варианты:

1. $A_1(1,\ 3,\ 6)$, $A_2(2,\ 2,\ 1)$, $A_3(-1,\ 0,\ 1)$, $A_4(-4,\ 6,\ -3)$.
2. $A_1(-4,\ 2,\ 6)$, $A_2(2,\ -3,\ 0)$, $A_3(-10,\ 5,\ 8)$, $A_4(-5,\ 2,\ -4)$.
3. $A_1(7,\ 2,\ 4)$, $A_2(7,\ -1,\ -2)$, $A_3(3,\ 3,\ 1)$, $A_4(-4,\ 2,\ 1)$.
4. $A_1(2,\ 1,\ 4)$, $A_2(-1,\ 5,\ -2)$, $A_3(-7,\ -3,\ 2)$, $A_4(-6,\ -3,\ 6)$.
5. $A_1(-1,\ -5,\ 2)$, $A_2(-6,\ 0,\ -3)$, $A_3(3,\ 6,\ -3)$, $A_4(-10,\ 6,\ 7)$.
6. $A_1(0,\ -1,\ -1)$, $A_2(-2,\ 3,\ 5)$, $A_3(1,\ -5,\ -9)$, $A_4(-1,\ -6,\ 3)$.
7. $A_1(5,\ 2,\ 0)$, $A_2(2,\ 5,\ 0)$, $A_3(1,\ 2,\ 4)$, $A_4(-1,\ 1,\ 1)$.
8. $A_1(2,\ -1,\ -2)$, $A_2(1,\ 2,\ 1)$, $A_3(5,\ 0,\ -6)$, $A_4(-10,\ 9,\ -7)$.
9. $A_1(-2,\ 0,\ -4)$, $A_2(-1,\ 7,\ 1)$, $A_3(4,\ -8,\ -4)$, $A_4(1,\ -4,\ 6)$.
10. $A_1(14,\ 4,\ 5)$, $A_2(-5,\ -3,\ 2)$, $A_3(-2,\ -6,\ -3)$, $A_4(-2,\ 2,\ -1)$.

№ 5.

Тема: Предел функции. Замечательные пределы**.**

Цель работы: закрепить навыки применения первого и второго замечательных пределов.

Содержание: Вычисление пределов функции

Задание: Вычислить пределы функций.

Варианты.

I.

1. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin 2x}{x}\right)^{1+x}$.
2. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{2+x}{3-x}\right)^{x}$.
3. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin 4x}{x}\right)^{2/(x+2)}$.
4. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{e^{3x}-1}{x}\right)^{\cos^2\left(\pi/4+x\right)}$.
5. $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{x+3}$.
6. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{x^2+4}{x+2}\right)^{x^2+3}$.
7. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\ln(1+x)}{6x}\right)^{x/(x+2)}$.
8. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\mathrm{tg}4x}{x}\right)^{2+x}$.

9. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{e^{x^3}-1}{x^2}\right)^{(8x+3)/(1+x)}$.

10. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{x+2}{x+4}\right)^{\cos x}$.

II.

1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+\sin x)}{\sin 4x}$.

2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 10x}{e^{x^2}-1}$.

3 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x^2-5x}{\sin 3x}$.

4 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 2x}{\cos 7x-\cos 3x}$.

5 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{4x}{\mathrm{tg}(\pi(2+x))}$.

6 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x}{\mathrm{tg}[2\pi(x+1/2)]}$.

7 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos^3 x}{4x^2}$.

8 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin 3x}{\sqrt{2+x}-\sqrt{2}}$.

9 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2^x-1}{\ln(1+2x)}$.

10 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{arctg\,2x}{\sin(2\pi(x+10))}$.

№ 6.

Тема: Производная функции.

Содержание: Нахождение производной функции с использованием правил дифференцирования и таблицы производных.

Задание: найти производные данных функций.

1. а) $y=2\sqrt{4x+3}-\dfrac{3}{\sqrt{x^2+x+1}}$; б) $y=\left(e^{\cos x}+3\right)^2$; в) $y=\ln\sin(2x+5)$; г) $y=x^{x^x}$; д) $tg\left(\dfrac{y}{x}\right)=5x$.

2. а) $y=x^2\sqrt{1-x^2}$; б) $y=\dfrac{4\sin x}{\cos^2 x}$; в) $y=arctge^{2x}$; г) $y=x^{\frac{1}{x}}$; д) $x-y+arctgy=0$.

3. а) $y=x\sqrt{(1+x^2)(1-x)}$; б) $y=\dfrac{1}{tg^2 2x}$; в) $y=\arcsin\sqrt{1-3x}$; г) $y=x^{\ln x}$; д) $y\sin x=\cos(x-y)$.

4. а) $y=(3+6x)\sqrt{3-4x+5x^2}$; б) $y=\sin x-x\cos x$; в) $y=x^m\ln x$; г) $y=x^{-tgx}$; д) $\left(\dfrac{y}{x}\right)=arctg\left(\dfrac{x}{y}\right)$.

5. а) $y=\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}$; б) $y=\frac{\sin^2 x}{2+3\cos^2 x}$; в) $y=\frac{x\ln x}{x-1}$; г) $y=(arctgx)^{\ln x}$;
д) $(e^x-1)(e^y-1)-1=0$.

6. а) $y=\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}+5\sqrt[5]{x^2+1}$; б) $y=2tg^3(x^2+1)$; в) $y=3^{arctgx^3}$; г) $y=(arctgx)^x$;
д) $y^2x=e^{\frac{y}{x}}$.

7. а) $y=\sqrt[3]{(1+x^2)(1-x^2)}$; б) $y=\frac{1}{2}tg^2x+\ln\cos x$; в) $y=arctg\frac{x}{1+\sqrt{1-x^4}}$; г) $y=(x+x^2)^x$;
д) $x^3+y^3-3axy=0$.

8. а) $y=3\sqrt[3]{\frac{x^5+5x^4-5}{x}}$; б) $y=\ln\sqrt{\frac{1-\sin x}{1+\sin x}}$; в) $y=arctg(tg^2x)$; г) $y=(arctgx)^{\ln x}$;
д) $y\sin x=\cos(x-y)$.

9. а) $y=5\sqrt[5]{x^2+x+\frac{1}{x}}$; б) $y=2^xe^{-x}$; в) $y=\arcsin\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$; г) $y=(\cos x)^x$;
д) $\ln y=arctg\left(\frac{x}{y}\right)$.

10. а) $y=\sqrt{x^2+1}+\sqrt[3]{x^3+1}$; б) $y=\frac{1}{3}tg^3x-tgx+x$; в) $y=arctg\sqrt{\frac{3-x}{x-2}}$; г) $y=(\cos x)^{x^2}$;
д) $x-y+e^y arctgx=0$.

№ 7.

Тема: Применение дифференциального исчисления к исследованию функций и построению графиков.

Содержание: Исследование функций и построению графиков с помощью понятия производной функции.

Задание:

I. Построить графики функций с помощью производной первого порядка.

II. Провести полное исследование функций и построить их графики.

Варианты:

I.

1. $y=2x^3-9x^2+12x-9.$
2. $y=3x-x^3.$
3. $y=x^2(x-2)^2.$
4. $y=(x^3-9x^2)/4+6x-9.$
5. $y=2-3x^2-x^3.$
6. $y=(x+1)^2(x-1)^2.$
7. $y=2x^3-3x^2-4.$
8. $y=3x^2-2-x^3.$
9. $y=(x-1)^2(x-3)^2.$
10. $y=(x^3+3x^2)/4-5.$

II.

1. $y=(2x+3)\mathrm{e}^{-2(x+1)}$.

2. $y=\dfrac{\mathrm{e}^{2(x+1)}}{2(x+1)}$.

3. $y=3\ln\dfrac{x}{x-3}-1$.

4. $y=(3-x)\mathrm{e}^{x-2}$.

5. $y=\dfrac{\mathrm{e}^{2-x}}{2-x}$.

6. $y=\ln\dfrac{x}{x+2}+1$.

7. $y=(x-2)\mathrm{e}^{3-x}$.

8. $y=\dfrac{\mathrm{e}^{2(x-1)}}{2(x-1)}$.

9. $y=3-3\ln\dfrac{x}{x+4}$.

10. $y=-(2x+1)\mathrm{e}^{2(x+1)}$.

№ 8.

Тема: Применение дифференциального исчисления к исследованию функций и построению графиков.

Содержание: Исследование функций и построению графиков с помощью понятия производной функции.

Задание: исследовать на экстремум функции.

1. $z=x^3+8y^3-6xy+5$;
2. $z=1+15x-2x^2-xy-2y^2$;
3. $z=1+6x-x^2-xy-y^2$;
4. $z=2x^3+2y^3-6xy+5$;
5. $z=3x^3+3y^3-9xy+10$;
6. $z=x^2+xy+y^2+x-y+1$;
7. $z=4(x-y)-x^2-y^2$;
8. $z=6(x-y)-3x^2-3y^2$;
9. $z=x^2+xy+y^2-6x-9y$;
10. $z=2xy-3x^2-2y^2+10$.

№ 9.

Тема: Применение дифференциального исчисления к исследованию функций и построению графиков.

Содержание: Исследование функций и построению графиков с помощью понятия производной функции.

Задание: найти наибольшее и наименьшее значения функции $z=f(x,y)$ в замкнутой области D, заданной системой неравенств.

1. $z=x^2+y^2-9xy+27$; $0\le x\le 3$, $0\le y\le 3$.
2. $z=5x^2-3xy+y^2+4$; $x\ge -1$, $y\ge -1$, $x+y\le 1$.
3. $z=x^2+2y^2+1$; $x\ge 0$, $y\ge 0$, $x+y\le 3$.
4. $z=10+2xy-x^2$; $0\le y\le 4-x^2$.

5. $z=3-2x^2-xy-y^2$; $x\le 1$, $y\ge 0$, $y\le x$.

6. $z=x^2+2xy-y^2+4x$; $x\le 0$, $y\le 0$, $x+y+2\ge 0$.

7. $z=x^2+3y^2+x-y$; $x\ge -1$, $y\ge -1$, $x+y\le 1$.

8. $z=x^2+xy-2$; $4x^2-4\le y\le 0$.

9. $z=x^2+2xy+2y^2$; $-1\le x\le 1$, $0\le y\le 2$.

10. $z=x^2+xy$; $-1\le x\le 1$, $0\le y\le 3$.

Задания для расчетно-графических работ за 2 семестр.

ВАРИАНТ №1

Задание № 1. Найти неопределенные интегралы:

а) $\int e^{\sin^2 x}\sin 2x dx$; б) $\int arctg\sqrt{x}dx$;

в) $\int \frac{dx}{x^3+8}$; г) $\int \frac{dx}{1+\sqrt[3]{x+1}}$.

Задание № 2. Найти неопределенные интегралы:

Задание № 3. Вычислить определенные интегралы функции одной переменной:

а) $\int_0^4 \frac{dx}{1+\sqrt{x}}$; б) $\int_0^1 xe^{-x}dx$

Задание № 4. Вычислить определенные интегралы:

а) $\int_2^3 y\cdot\ln(y-1)dy$; б) $\int_3^8 \frac{\sqrt{x+1}+1}{\sqrt{x+1}-1}dx$;

Задание № 5. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями:

$y = x^2$; $y = 1 - x^2$

Задание № 6.

а) Исследовать сходимость несобственного интеграла:

$$\int_0^\infty e^{-x}dx$$

б) Вычислить несобственный интеграл:

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} ctgx dx$$

Задание № 7. Найти: а) частные производные для функции; б) gradz, $|grad\_z|$ и производную по направлению $\frac{dx}{d\ell}\left(\frac{dz}{d\pi}\right)$ в точке A(x;y); $\bar{\ell}=\bar{\pi}$ =(a_1;a_2).

а) $z=5^{2xy-x^2}+xar\sin y;$ б) $z=x^3y^2-4x+y^3-3;A(1;1);\bar{\ell}=\left(2;-\sqrt{5}\right).$

Задание № 8. Исследовать функцию *Z*=*f*(x;y) на экстремум.

$z=4(x-3y)-xy-4y^2-x^2+1$

ВАРИАНТ №2

Задание № 1. Найти неопределенные интегралы:

а) $\int\frac{xdx}{(x^2+4)^6};$ б) $\int e^x\ln(1+3e^x)dx;$

в) $\int\frac{2x^2-3x+1}{x^3+1}dx;$ г) $\int\frac{dx}{\sin x+tgx}.$

Задание № 2. Найти неопределенные интегралы:

а) $\int\frac{\mathrm{dx}}{(\mathrm{x}+1)\ln(\mathrm{x}+1)}$;б) $\int\frac{dx}{\sqrt{8+x^2}}$; в) $\int x\cos 3x dx$

Задание № 3. Вычислить определенные интегралы функции одной переменной:

а) $\int_0^1\frac{xdx}{(x^2+1)^2};$ б) $\int_0^{\pi/2}x\cos xdx$

Задание № 4. Вычислить определенные интегралы:

а) $\int_1^2(y-1)\ln ydy;$ б) $\int_3^8\frac{xdx}{\sqrt{x+1}};$

Задание № 5. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями:

y = cos2x; y = 0; x = 0; x = $\frac{\pi}{4}$

Задание № 6.

а) Исследовать сходимость несобственного интеграла:

$$\int_2^{\infty}\frac{xdx}{x^2-1}$$

б) Вычислить несобственный интеграл:

$$\int_0^3\frac{dx}{(x-1)^2}$$

Задание № 7. Найти а) частные производные для функции; б) gradz, $|grad\_z|$ и производную по направлению $\frac{dx}{d\ell}\left(\frac{dz}{d\pi}\right)$ в точке A(x;y); $\bar{\ell}=\bar{\pi}$ =(a_1;a_2).

а) $z=\frac{x^2}{y}ctg(3y-9x)$; б) $z=2x^2-y^2+2\sqrt{x}+3\sqrt{y}-4xy; A(4;1); \bar{\ell}=(9;12)$.

Задание № 8. Исследовать функцию *Z*=*f*(x;y) на экстремум.
$z=4x-12y-3xy+4y^2+3x^2+2$.

ВАРИАНТ №3

Задание № 1. Найти неопределенные интегралы:

а) $\int\frac{x^3dx}{\sqrt{1-x^8}}$; б) $\int x3^x dx$;

в) $\int\frac{(3x-7)dx}{x^3+4x^2+4x+16}$ г) $\int\frac{dx}{\sqrt{x+3}+\sqrt[3]{(x+3)^2}}$

Задание № 2. Найти неопределенные интегралы:

а) $\int\frac{(1+ctgx)dx}{\sin^2 x}$; б) $\int\frac{dx}{\sqrt{2-2x-x^2}}$; в) $\int\frac{\ln x}{x^2}dx$;

Задание № 3. Вычислить определенные интегралы функции одной переменной:

а) $\int_1^2\frac{xdx}{1+x^2}$; б) $\int_1^e \ln xdx$

Задание № 4. Вычислить определенные интегралы:

а) $\int_1^e\frac{\ln^2 x}{x^2}dx$; б) $\int_0^4\frac{dx}{1+\sqrt{2x+1}}$;

Задание № 5. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями:
y = $|x|$+1;y = 0; x = -2; x = 1

Задание № 6.

а) Исследовать сходимость несобственного интеграла:

$$\int_1^{\infty}\frac{arctgxdx}{1+x^2}$$

б) Вычислить несобственный интеграл

$$\int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}}$$

Задание № 7. Найти а) частные производные для функции; б) gradz, $|grad\_z|$ и производную по направлению $\frac{dx}{d\ell}\left(\frac{dz}{d\pi}\right)$ в точке A(x;y); $\bar{\ell}=\bar{\pi}$ =(a_1;a_2).

а) $z = x^2 \arccos^2(x+3y) - y^2 x + 2;$ б) $z = \sqrt[3]{x} + y^2 - 6x + 3y; A(8;-2); \bar{\ell} = (-4;3).$

Задание № 8. Исследовать функцию *Z*=*f*(x;y) на экстремум.

$z = 2x^2 + 3xy + 8y^2 - 6x - 2ó + 4$.

ВАРИАНТ №4

Задание № 1. Найти неопределенные интегралы:

а) $\int \frac{dx}{\cos^2 x(3tgx+1)}$ б) $\int \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} dx$

в) $\int \frac{dx}{x^3 + x^2 + 2x + 2}$ г) $\int \frac{x^2 + \sqrt{1+x}}{\sqrt[3]{1+x}} dx$

Задание № 2. Найти неопределенные интегралы:

а) $\int \frac{xdx}{2+3x^2}$; б) $\int \frac{dx}{\sqrt{x}+4}$; в) $\int x^3 arctgxdx$

Задание № 3. Вычислить определенные интегралы функции одной переменной:

а) $\int_0^{\ln 3} \frac{e^x dx}{\sqrt{e^x+1}}$; б) $\int_0^{e-1} \ln(x+1)dx$

Задание № 4. Вычислить определенные интегралы:

а) $\int_1^{e^2} \sqrt{x} \ln xdx$; б) $\int_0^5 \frac{xdx}{\sqrt{x+4}}$;

Задание № 5. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями:

y = sin2x; y = 1; $\frac{\pi}{4} \le x \le \frac{\pi}{2}$

Задание № 6.

а) Исследовать сходимость несобственного интеграла:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2 + 4x + 9}$$

б) Вычислить несобственный интеграл:

$$\int_{3}^{6} \frac{dx}{x^2 - 7x + 10}$$

Задание № 7. Найти: а) частные производные для функции; б) gradz, $|grad\_z|$ и производную по направлению $\frac{dx}{d\ell}\left(\frac{dz}{d\pi}\right)$ в точке А(x;y); $\bar{\ell} = \bar{\pi}$ =(a_1;a_2).

а) $z = xy + xe^{-\frac{x}{2y^2}}$; б) $z = \sqrt[3]{x^2} + y^2 - 2\tilde{o} + y - 4; A(1;2); \bar{\ell} = \left(-3; \sqrt{7}\right)$.

Задание № 8. Исследовать функцию *Z*=*f*(x;y) на экстремум.

$z = 5x^2 - 6xy + 2y^2 - 5x + y - 3$.

ВАРИАНТ №5

Задание № 1. Найти неопределенные интегралы:

а) $\int \frac{\cos 3x dx}{4 + \sin 3x}$ б) $\int x^2 e^{3x} dx$

в) $\int \frac{x^2 dx}{x^3 + 5x^2 + 8x + 4}$ г) $\int \frac{\cos dx}{1 + \cos x}$

Задание № 2. Найти неопределенные интегралы:

а) $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{1 + x^6}}$; б) $\int \frac{dx}{\sqrt{2x + 1}}$; в) $\int \frac{\ln x dx}{x^2}$; г) $\int \frac{8}{x^3 - 4x} dx$;

Задание № 3. Вычислить определенные интегралы функции одной переменной:

а) $\int_{1}^{\sqrt{e}} \frac{\ln x dx}{x\sqrt{1 - (\ln x)^4}}$; б) $\int_{0}^{\pi} e^x \cos x dx$

Задание № 4. Вычислить определенные интегралы:

а) $\int_{1}^{2} y^2 \cdot \ln y dy$; б) $\int_{2/3}^{7/3} \frac{x dx}{\sqrt{2 + 3x}}$;

Задание № 5. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями:

y = x^2 ; y = $\sqrt[3]{x}$

Задание № 6.

а) Исследовать сходимость несобственного интеграла:

$$\int_1^{\infty}\frac{1}{x^2}e^{-\frac{1}{x}}dx$$

б) Вычислить несобственный интеграл:

$$5)\int_{-1}^{1}\frac{3x^2+2}{\sqrt[3]{x^2}}dx$$

Задание № 7. Найти: а) частные производные для функции; б) gradz, $|grad\_z|$ и производную по направлению $\frac{dx}{d\ell}\left(\frac{dz}{d\pi}\right)$ в точке A(x;y); $\bar{\ell}=\bar{\pi}$ =(a_1;a_2).

а) $z=\frac{\cos xy}{x^2+y^2}+3x+4\sqrt{y};$ б) $z=\arcsin\frac{y}{x^2};A(2;2);\bar{\ell}=\left(-6;\sqrt{13}\right)$

Задание № 8. Исследовать функцию *Z*=*f*(x;y) на экстремум.

$z=4x^2-3yx+y^2-3x+2$.

ВАРИАНТ №6

Задание № 1. Найти неопределенные интегралы:

а) $\int\frac{\sin xdx}{\sqrt[3]{\cos^2 x}}$ б) $\int x\arcsin\frac{1}{x}dx$

в) $\int\frac{(x+3)}{x^3+x^2-2x}dx$ г) $\int\frac{(\sqrt[4]{x}+1)dx}{(\sqrt{x}+4)\sqrt[4]{x^3}}$

Задание № 2. Найти неопределенные интегралы:

а) $\int\frac{\cos xdx}{4+\sin^2 x}$; б) $\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+4x}}$; в) $\int\ln(1+x^2)dx;$

Задание № 3. Вычислить определенные интегралы функции одной переменной:

а) $\int_1^e\frac{1+\ln x}{x}dx$; б) $\int_0^{\pi}e^x\sin xdx$

Задание № 4. Вычислить определенные интегралы:

а) $\int_1^2\frac{\ln(x+1)}{(x+1)^2}dx$; б) $\int_{-1}^{0}\frac{dx}{1+\sqrt[3]{x+1}}$;

Задание № 5. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями:

$x^2 - y^2 = 1$; x = 2, y=0

Задание № 6.

а) Исследовать сходимость несобственного интеграла:

$$\int_{2}^{\infty} x\cos x dx$$

б) Вычислить несобственный интеграл:

$$б)\int_{0}^{\infty} xe^{-x^2}dx$$

<u>*Задание № 7*</u>. Найти: а) частные производные для функции; б) gradz, $|grad\_z|$ и производную по направлению $\frac{dx}{d\ell}\left(\frac{dz}{d\pi}\right)$ в точке A(x;y); $\bar{\ell}=\bar{\pi}$ =(a_1;a_2).

а) $z = xy^2\sin(3x-5y)$; б) $z=\ln(2+x^2-2y^2)$; $A(1;1)$; $\bar{\ell}=(3;-8)$.

<u>*Задание № 8*</u>. Исследовать функцию *Z*=*f*(x;y) на экстремум.

$z = xy(4-x-2y)$.

<u>ВАРИАНТ №7</u>

<u>*Задание № 1*</u>. Найти неопределенные интегралы:

а) $\int\frac{(x+arctgx)dx}{1+x^2}$ б) $\int x\ln(x^2+1)dx$

в) $\int\frac{(x^2-3)dx}{x^4+5x^2+6}$ г) $\int\frac{\sqrt{x+5}dx}{1+\sqrt[3]{x+5}}$

<u>*Задание № 2*</u>. Найти неопределенные интегралы:

а) $\int\frac{dx}{\sqrt{x}(3+\sqrt{x})}$; б) $\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-2x+2}}$; в) $\int\frac{\ln x}{x^4}dx$;

<u>*Задание № 3*</u>. Вычислить определенные интегралы функции одной переменной:

а) $\int_{0}^{1}(e^x-1)^4e^x dx$; б) $\int_{\pi/4}^{\pi/3}\frac{xdx}{\sin^2 x}$

<u>*Задание № 4*</u>. Вычислить определенные интегралы:

а) $\int_{1}^{e} x\ln^2\cdot xdx$; б) $\int_{-1}^{1}\frac{xdx}{\sqrt{5-4x}}$;

<u>*Задание № 5*</u>. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями:

y = $|x^2-1|$; y = 0; x = -2; x = 2

Задание № 6.

а) Исследовать сходимость несобственного интеграла:

$$\int_1^{\infty} \frac{x^2 dx}{x^3+1}$$

б) Вычислить несобственный интеграл:

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x^2-4x+3}}$$

Задание № 7. Найти: а) частные производные для функции; б) gradz, $|grad\_z|$ и производную по направлению $\frac{dx}{d\ell}\left(\frac{dz}{d\pi}\right)$ в точке A(x;y); $\bar{\ell}=\bar{\pi}$ =(a_1;a_2).

а) $z=\frac{3x^2y^3}{\sqrt{x^3-y^2}}$; б) $z=\ln(2x^2-y^2-3x+4y+1); A(1;1); \bar{\ell}=(-20;-15)$.

Задание № 8. Исследовать функцию *Z*=*f*(x;y) на экстремум.

$z=3x^2-y^2-6xy-5y+2$.

ВАРИАНТ №8

Задание № 1. Найти неопределенные интегралы:

а) $\int \frac{arctg\sqrt{x}dx}{\sqrt{x}(1+x)}$ б) $\int x\sin x\cos xdx$

в) $\int \frac{x^2dx}{x^4-81}$ г) $\int \frac{dx}{3\cos x+4\sin x}$

Задание № 2. Найти неопределенные интегралы:

а) $\int \frac{(1-tg^2x)dx}{\cos^2 x}$; б) $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{2x-7}}$; в) $\int x\sin 4xdx$;

Задание № 3 . Вычислить определенные интегралы функции одной переменной:

а) $\int_0^{\ln 2} \mathring{a}^{\tilde{o}}\sqrt{e^x-1}dx$; б) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{xdx}{\cos^2 x}$

Задание № 4. Вычислить определенные интегралы:

а) $\int_{-1}^{0} x\ln(1-x)dx$; б) $\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{x+1}+\sqrt{(x+1)^3}}$

Задание № 5. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями:

y = 4-x ^{2} ; y = 0

Задание № 6.

а) Исследовать сходимость несобственного интеграла:

$$\int_0^{\infty} \frac{arctgxdx}{1+x^2}$$

б) Вычислить несобственный интеграл:

$$\int_1^2 \frac{dx}{x\sqrt{\ln x}}$$

Задание № 7. Найти: а) частные производные для функции; б) gradz, $|grad\_z|$ и производную по направлению $\frac{dx}{d\ell}\left(\frac{dz}{d\pi}\right)$ в точке A(x;y); $\bar{\ell}=\bar{\pi}$ =(a_1;a_2).

а) $z = ctg\ln\left(\frac{x}{2}-\frac{y}{x}\right)$; б) $z = x^2 - 4\sqrt{xy} + 8y - 3x + 5; A(2;2); \bar{\ell} = (\sqrt{8};1)$

Задание № 8. Исследовать функцию *Z*=*f*(x;y) на экстремум.

$z = 5xy - 4x^2 - 3y^2 + 2x + 3y + 2$.

ВАРИАНТ №9

Задание № 1. Найти неопределенные интегралы:

а) $\int \frac{\sin xdx}{\sqrt[3]{3+2\cos x}}$ б) $\int x^2 \sin 4xdx$

в) $\int \frac{(x^2 - x + 1)dx}{x^4 + 2x^3 - 3}$ г) $\int \frac{(\sqrt{x}-1)(\sqrt[6]{x}+1)}{\sqrt[3]{x^2}}dx$

Задание № 2. Найти неопределенные интегралы:

а) $\int \frac{arctg^2 xdx}{1+x^2}$; б) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+2x+5}}$; в) $\int \sqrt{x}\ln xdx$

Задание № 3. Вычислить определенные интегралы функции одной переменной:

а) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{3+2\cos x}$; б) $\int_0^1 x^2 e^{-x} dx$

Задание № 4. Вычислить определенные интегралы:

а) $\int_1^2 \ln(3x+2)dx$; б) $\int_4^9 \frac{\sqrt{x}dx}{\sqrt{x}-1}$;

Задание № 5. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями:

y = x^2 ; y = 4x – 2

Задание № 6.

а) Исследовать сходимость несобственного интеграла:

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\infty}\frac{2dx}{\sin^2 x}$$

б) Вычислить несобственный интеграл:

$$\int_{0}^{4e}\frac{dx}{x\ln x}$$

Задание № 7. Найти: а) частные производные для функции; б) gradz, $|grad\_z|$ и производную по направлению $\frac{dx}{d\ell}\left(\frac{dz}{d\pi}\right)$ в точке A(x;y); $\bar{\ell}=\bar{\pi}$ =(a_1;a_2).

а) $z=\frac{x^3}{y}e^{-x^2y}$; б) $z=4xy-x^3+3y-4; A(-1;4); \bar{\ell}=\left(-2;2\sqrt{3}\right)$.

Задание № 8. Исследовать функцию Z=f(x;y) на экстремум.

$z=x^3+y^3-24xy-4$.

ВАРИАНТ №10

Задание № 1. Найти неопределенные интегралы:

а) $\int\frac{\sqrt[3]{4+\ln x}}{x}dx$ б) $\int x\ln^2 xdx$

в) $\int\frac{(x^3-6)}{x^4+6x^2+8}dx$ г) $\int\frac{dx}{2\sin x+\cos x+2}$

Задание № 2. Найти неопределенные интегралы:

а) $\int\frac{x^3dx}{\sqrt{1-4x^4}}$; б) $\int\frac{dx}{\sqrt{5+2x-x^2}}$; в) $\int\frac{\ln 2x}{x^3}dx$

Задание № 3. Вычислить определенные интегралы функции одной переменной:

а) $\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}\frac{dx}{1+\sin^2 x}$; б) $\int_{0}^{1}\arcsin\frac{x}{2}dx$

Задание № 4. Вычислить определенные интегралы:

а) $\int_{0}^{1}x\cdot arctgxdx$; б) $\int_{0}^{13}\frac{(x+1)dx}{\sqrt[3]{2x+1}}$

Задание № 5. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями:

y = sinx; y = 0; $0\le x\le\pi$

Задание № 6.

а) Исследовать сходимость несобственного интеграла:

$$\int_2^{\infty} \frac{dx}{1+\sqrt{x}}$$

б) Вычислить несобственный интеграл:

$$\int_0^{\pi} \frac{\cos x}{\sqrt{x}} dx$$

Задание № 7. Найти: а) частные производные для функции; б) gradz, $|grad\_z|$ и производную по направлению $\frac{dx}{d\ell}\left(\frac{dz}{d\pi}\right)$ в точке A(x;y); $\bar{\ell} = \bar{\pi}$ =(a_1;a_2).

а) $z = \frac{x^2 y^3}{x^2 + y^3}$; б) $z = 4\sqrt{x} - xy^2 + 3x - 2y^2 - 16; A(1;1); \bar{\ell} = (3;4)$.

Задание № 8. Исследовать функцию $Z=f$(x;y) на экстремум.

$z = 6xy - 2x^2 - 3y^2 + 2x + 3y - 4$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Алашеева, Е.А. Математика. Часть 1 [Электронный ресурс]: учебное пособие / Е.А. Алашеева. – Электрон. текстовые данные. – Самара: Поволжский государственный университет телекоммуникаций и информатики, 2016. – 196 с. – 2227-8397. – Режим доступа: http://www.iprbookshop.ru/71851.html
2. Гриднева, И.В. Математика. Часть 1 [Электронный ресурс]: учебное пособие/ И.В. Гриднева, Л.И. Федулова, А.Е. Попов. – Электрон. текстовые данные. – Воронеж: Воронежский Государственный Аграрный Университет им. Императора Петра Первого, 2016. – 213 с. – 2227-8397. – Режим доступа: http://www.iprbookshop.ru/72692.html
3. Математика [Электронный ресурс]: учебное пособие для студентов очной формы обучения бакалавриата 1 курса всех направлений. Базовый уровень сложности/ О.В. Бондрова [и др.]. – Электрон. текстовые данные. — Саратов: Ай Пи Эр Медиа, 2018. – 216 с. – 978-5-4486-0107-1. – Режим доступа: http://www.iprbookshop.ru/70267.html
4. Математика. Дискретная математика [Электронный ресурс]: учебник/ В.Ф. Золотухин [и др.]. – Электрон. текстовые данные. – Ростов-на-Дону: Институт водного транспорта имени Г.Я. Седова – филиал «Государственный морской университет имени адмирала Ф.Ф. Ушакова», 2016. – 129 с. – 2227-8397. – Режим доступа: http://www.iprbookshop.ru/57348.html
5. Аматова, Г.М. Математика. Упражнения и задачи [Текст]: учебник/ Г.М. Аматова, М.А. Аматов.- М.: Академия, 2008.- 332 с.
6. Горелов, В.И. Математика [Электронный ресурс]: сборник задач и упражнений/ В.И. Горелов, О.Л. Карелова, Т.Н. Ледащева. – Электрон. текстовые данные. – М.: Российская международная академия туризма, Университетская книга, 2016. – 112 с. – 978-5-98699-189-4. – Режим доступа: http://www.iprbookshop.ru/70538.html
7. Гусак, А.А. Математика [Электронный ресурс]: пособие-репетитор/ А.А. Гусак, Г.М. Гусак, Е.А. Бричикова. – Электрон. текстовые данные. – Минск: ТетраСистемс, Тетралит, 2013. – 720 с. – 978-985-7067-46-6. – Режим доступа: http://www.iprbookshop.ru/28118.html
8. Соболев, А.Б. Математика [Текст]: учеб. пособие: кн.1, кн.2/ А.Б. Соболев. - М.: Академия, 2009.- 416 с.
9. Тетруашвили, Е.В. Математика [Электронный ресурс]: практикум/ Е.В. Тетруашвили, В.В. Ершов. – Электрон. текстовые данные. – Саратов: Ай Пи Эр Медиа, 2018. – 159 с. – 978-5-4486-0220-7. – Режим доступа: http://www.iprbookshop.ru/71567.html

КОЧКАРОВ Ахмат Магомедович,
СЕЛИМСУЛТАНОВА Рита Ильясовна

МАТЕМАТИКА

Методические рекомендации по выполнению расчетно-графических работ
для обучающихся 1-2 курсов по направлению подготовки
09.03.03 Прикладная информатика ОФО

Корректор Чагова О.Х.
Редактор Чагова О.Х.

Сдано в набор 11.08.2023 г.
Формат 60х84/16
Бумага офсетная.
Печать офсетная.
Усл. печ. л.4,41
Заказ № 4756
Тираж 100 экз.

Оригинал-макет подготовлен
в Библиотечно-издательском центре СКГА
369000, г. Черкесск, ул. Ставропольская, 36