МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

СЕВЕРО-КАВКАЗСКАЯ ГОСУДАРСТВЕННАЯ АКАДЕМИЯ

З.О. Коркмазова
Р.И. Селимсултанова

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ

Лабораторный практикум для обучающихся на 3 курса
направление подготовки 01.03.04 Прикладная математика
очной формы обучения

г. Черкесск 2024 г

УДК 519.85
ББК 22.185.4
К 66

Рассмотрено на заседании кафедры «Математика»
Протокол № 1 от «31» августа 2023 г.
Рекомендовано к изданию редакционно-издательским советом СКГА.
Протокол № 26 от «29» сентября 2023 г.

Рецензенты:
Чех С.А. –Ст. преподаватель кафедры
Шапошникова О.И.– к. ф. – м. н., доцент

К66 **Коркмазова, З.О.** Математическое программирование: Лабораторный практикум для обучающихся на 3 курса направление подготовки 01.03.04 Прикладная математика очной формы обучения / З.О. Коркмазова, Р.И. Селимсултанова. – Черкесск: БИЦ СКГА, 2024. – 32 с.

Данный лабораторный практикум предназначен для обучающихся направление подготовки 01.03.04 Прикладная математика содержит краткий теоретический справочный материал по Математическому программированию, варианты индивидуальных заданий к лабораторным работам.

УДК 519.85
ББК 22.185.4

ВВЕДЕНИЕ

Предмет математического программирования. При решении многочисленных проблем управления и планирования производства, при проектировании и перспективном планировании в разных областях практической деятельности человека возникают многовариантные задачи.

Среди множества возможных способов их решения приходится отыскивать наилучшие в некотором смысле при ограничениях, налагаемых на природные, экономические, технологические и другие возможности. В рамках современных масштабов производства неудачный выбор варианта решения может привести к значительным потерям. В связи с этим возникла необходимость применять для анализа и синтеза экономических ситуаций и систем математические методы и современную вычислительную технику.

Однако непосредственное применение здесь классических методов, основанных на аппарате дифференциального исчисления, наталкивается на серьезные вычислительные трудности, что делает соответствующий аппарат неэффективным. Мощным инструментом разрешения подобного рода задач стали специальные методы поиска экстремума, составляющие содержание раздела математики, который называется ***математическим программированием***. В данном случае, в отличие от программирования для ЭВМ, понятие «программирование» употребляется в смысле ***планирование, выбор программы действий***.

Математическое программирование – раздел высшей математики, разрабатывающий теорию и численные методы решения многомерных экстремальных задач с ограничениями, т. е. задач на экстремум функции многих переменных с ограничениями на область изменения этих переменных.

Характерной особенностью вычислительной стороны методов решения задач математического программирования является то, что применение этих методов неразрывно связано с использованием ЭВМ. В первую очередь это обусловлено тем, что указанные задачи, формализующие ситуации управления реальными системами, являются задачами большого объема, недоступными для ручного счета.

ЗАДАЧИ ДЛЯ ПРАКТИЧЕСКИХ ЗАНЯТИЙ ПО МАТЕМАТИЧЕСКОМУ ПРОГРАММИРОВАНИЮ

1. Задача L_1 (об оптимальном планировании производства).

Для производства двух видов продукции $П_1$ и $П_2$ предприятие использует четыре вида ресурсов P_1, P_2, P_3, P_4. Расход каждого вида ресурсов на единицу продукции каждого вида, запасы ресурсов и прибыль от реализации единицы продукции каждого вида приведены в следующей таблице. Составить план выпуска продукции. Составить план выпуска продукции, обеспечивающий максимальную прибыль от её реализации.

Таблица 1.1

	Виды П		
Виды Р	$П_1$	$П_2$	Запасы Р
P_1	1	1	12
P_2	1	2	16
P_3	1	0	10
P_4	0	2	12
Пр. от ед.	1 р.	3 р.	

Ответ: $x^* = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix}$, $Z(x^*) = 22$.

Таблица 1.2

	Виды П		
Виды Р	$П_1$	$П_2$	Запасы Р
P_1	1	1	12
P_2	2	1	16
P_3	2	0	12
P_4	0	1	10
Пр. от ед.	1 р.	3 р.	

Ответ: $x^* = \begin{pmatrix} 2 \\ 10 \end{pmatrix}$, $Z(x^*) = 32$.

<u>Задание</u>:

1) Построить математическую модель задачи L_1;
2) Решить задачу L_1 графическим методом;
3) Решить задачу L_1 симплекс-методом;
4) Построить математическую модель задачи L_1^* (об оценивании ресурсов);
5) Решить задачу L_1^* с помощью двойственных симплекс-таблиц;
6) Решить задачу L_1^* с помощью теорем двойственности.

2. Задача L_2 (о диете).

Для откорма животного используется два вида кормов $К_1$ и $К_2$. Количество питательных веществ B_1, B_2, B_3, B_4 в единице корма каждого вида, минимальная суточная потребность животного в питательных веществах, цена корма каждого вида приведены в следующей таблице. Составить наиболее дешёвый дневной рацион питания животного.

Таблица 2.1

	Виды К		
Виды В	$К_1$	$К_2$	min B
B_1	1	1	12
B_2	1	2	16
B_3	2	0	4
B_4	0	1	2
Цена К	1к	3к	

Ответ: $x^* = \binom{12}{2}$, $Z(x^*) = 18$.

Таблица 2.2

	Виды К		
Виды В	$К_1$	$К_2$	min B
B_1	1	1	12
B_2	2	1	16
B_3	2	0	2
B_4	0	1	4
Цена К	1к	3к	

Ответ: $x^* = \binom{8}{4}$, $Z(x^*) = 20$.

<u>Задание</u>:

1) Построить математическую модель задачи L_2;
2) Решить задачу L_2 графическим методом;
3) Решить задачу L_2 с помощью двойственных симплекс-таблиц.

3. Задача L_3 (транспортная).

Однородный груз необходимо доставить от поставщиков A_i к потребителям B_j. Запасы груза у поставщиков, потребности потребителей, тарифы (транспортные расходы при перевозке единицы груза от каждого поставщика к каждому потребителю) приведены в таблице. Составить такой план транспортировки грузов от поставщиков к потребителям, чтобы суммарная стоимость перевозки была минимальной.

Таблица 3.1

Поставщики \ Потребители		B_1	B_2	B_3	B_4
		20	10	60	90
A_1	60	1	4	3	4
A_2	40	4	3	3	2
A_3	80	1	1	1	1

Ответ: $Z_{\min} = 240$.

Таблица 3.2

Поставщики \ Потребители		B_1	B_2	B_3	B_4
		10	60	20	10
A_1	50	2	3	1	1
A_2	30	4	1	2	2
A_3	20	1	4	2	1

Ответ: $Z_{\min} = 160$.

Задание:

1) Проверить критерий разрешимости задачи L_3 (суммарный объём запасов поставщиков равен суммарному спросу потребителей);

2) Построить исходный спорный план задачи L_3 по правилу северо-западного угла и проверить его невырожденность ($m + n - 1$ равно числу клеток распределительной таблицы, где m — число поставщиков, n — число потребителей);

3) Решить задачу L_3 методом потенциалов.

ИНДИВИДУАЛЬНОЕ ЗАДАНИЕ №1 НА ТЕМУ: ЗАДАЧА ОБ ОПТИМАЛЬНОМ ПЛАНИРОВАНИИ ПРОИЗВОДСТВА

В следующей таблице приведена информация, необходимая для формулировки задач L_1 (об оптимальном планировании производства) и L_1^* (об оценивании ресурсов).

Таблица 1

	Виды продукции		
Виды ресурсов	$П_1$	$П_2$	Запасы ресурсов
P_1	1	$a+2$	$(c+1)(a+2)(b+1)$
P_2	c	1	$c\,(a+3)(b+1)$
Прибыль от ед. продукции	$\frac{a+3}{a+2}$	$\frac{c+1}{c}$	

Задание:

1) Сформулировать задачу L_1 (об оптимальном планировании производства);
2) Построить математическую модель задачи L_1;
3) Решить задачу L_1 графическим методом;
4) Решить задачу L_1 симплекс-методом;
5) Сформулировать задачу L_1^* (об оценивании ресурсов);
6) Построить математическую модель задачи L_1^*;
7) Решить задачу L_1^* с помощью двойственных симплекс-таблиц;
8) Решить задачу L_1^* с помощью теорем двойственности.

Ответ: $x = \begin{pmatrix} (a+2)(b+1) \\ c(b+1) \end{pmatrix}$, $Z = (a+c+4)(b+1)$.

Замечание.

В таблице 1 параметры a, b, c имеют следующий смысл:

ab — порядковый номер студента по журналу;

a — число десятков в номере;

b — число единиц в номере;

c — однозначный номер группы (1, 2, 3, 4).

ИНДИВИДУАЛЬНОЕ ЗАДАНИЕ №2 НА ТЕМУ:
ЗАДАЧА О ДИЕТЕ

В следующей таблице приведена информация, необходимая для формулировки задачи L_2 (о диете).

Таблица 2

	Виды кормов		
Виды питательных веществ	$К_1$	$К_2$	Минимальная потребность B
B_1	1	$a+2$	$(c+1)(a+2)(b+1)$
B_2	c	1	$c\,(a+3)(b+1)$
Цена корма	$\dfrac{a+3}{a+2}$	$\dfrac{c+1}{c}$	

Задание:

1) Сформулировать задачу L_2 (о диете);
2) Построить математическую модель задачи L_2;
3) Решить задачу L_2 графическим методом;
4) Решить задачу L_2 с помощью двойственных симплекс-таблиц.

Ответ: $x = \begin{pmatrix} (a+2)(b+1) \\ c(b+1) \end{pmatrix}$, $Z = (a+c+4)(b+1)$.

Замечание.

В таблице 2 параметры a, b, c имеют следующий смысл:

ab — порядковый номер студента по журналу;

a — число десятков в номере;

b — число единиц в номере;

c — однозначный номер группы (1, 2, 3, 4).

ИНДИВИДУАЛЬНОЕ ЗАДАНИЕ №3 НА ТЕМУ: ТРАНСПОРТНАЯ ЗАДАЧА

В следующей таблице приведена информация, необходимая для формулировки задачи L_3 (транспортная).

Таблица 3

Потребители / Поставщики		B_1	B_2	B_3	B_4
		$20c(b+1)$	$10c(b+1)$	$50c(b+1)$	$40c(b+1)$
A_1	$40c(b+1)$	$a+1$	$a+3$	$a+2$	$a+4$
A_2	$60c(b+1)$	$a+2$	$a+3$	$a+4$	$a+1$
A_3	$20c(b+1)$	$a+2$	$a+1$	$a+4$	$a+2$

Задание:

1) Сформулировать задачу L_3 (транспортную);

2) Проверить критерий разрешимости задачи L_3 (суммарный объём запасов поставщиков равен суммарному спросу потребителей);

3) Построить исходный опорный план задачи L_3 по правилу северо-западного угла и проверить его невырожденность ($m+n-1$ равно числу занятых клеток распределительной таблицы, где m — число поставщиков, n — число потребителей);

4) Решить задачу L_3 методом потенциалов;

Ответ: $Z_{min} = 30c(4a+7)(b+1)$.

Замечание.

В таблице 3 параметры a, b, c имеют следующий смысл:

ab — порядковый номер студента по журналу;

a — число десятков в номере;

b — число единиц в номере;

c — однозначный номер группы (1, 2, 3, 4).

ОБРАЗЕЦ ВЫПОЛНЕНИЯ ИНДИВИДУАЛЬНОГО ЗАДАНИЯ №1 НА ТЕМУ: ЗАДАЧА ОБ ОПТИМАЛЬНОМ ПЛАНИРОВАНИИ ПРОИЗВОДСТВА

Для студента 2-ой группы с порядковым номером 30 по журналу.

1. Формулировка задачи L_1.

Полагая в таблице 1 $a = 3$, $b = 0$, $c = 2$, сформулируем задачу L_1 (об оптимальном планировании производства).

Задача L_1.

Для производства двух видов продукции $П_1$ и $П_2$ предприятие использует два вида ресурсов P_1 и P_2. Расход каждого вида ресурсов на единицу продукции каждого вида, запасы ресурсов и прибыль от реализации единицы продукции каждого вида приведены в следующей таблице.

Таблица 1

	Виды продукции		
Виды ресурсов	$П_1$	$П_2$	Запасы ресурсов
P_1	1	5	15
P_2	2	1	12
Прибыль от ед. продукции	$\frac{6}{5}$	$\frac{3}{2}$	

Составить план выпуска продукции, обеспечивающий максимальную прибыль от её реализации.

2. Математическая модель задачи L_1.

Введём следующие переменные:

x_1 — количество продукции $П_1$, выпускаемое данным предприятием;

x_2 — количество продукции $П_2$, выпускаемое данным предприятием.

Переменные x_1 и x_2 следует подчинить естественным ограничениям $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$.

Умножая удельные затраты 1 и 5 ресурса P_1 на соответствующие объёмы x_1 и x_2 продукции $П_1$ и $П_2$, выпускаемой предприятием, получим:

$1x_1$ — затраты ресурса P_1 на весь выпуск продукции $П_1$;

$5x_2$ — затраты ресурса P_1 на весь выпуск продукции $П_2$.

Тогда

$1x_1 + 5x_2$ — суммарные затраты ресурса P_1 на весь выпуск продукции $П_1$ и $П_2$.

Из экономических соображений суммарные затраты ресурса P_1, равные $1x_1 + 5x_2$, не должны превышать его запасов, равных 15. Получим ограничение задачи L_1, лимитирующее использование ресурса P_1:

$1x_1 + 5x_2 \leq 15$.

Рассуждая аналогично, получим ограничение, лимитирующее использование ресурса P_2:

$2x_1 + 1x_2 \leq 12$.

Через $Z(x)$ обозначим прибыль, полученную предприятием от реализации всей продукции. Очевидно

$$Z(x) = \frac{6}{5}x_1 + \frac{3}{2}x_2.$$

Математическая модель задачи L_1 имеет вид

$$Z(x) = \frac{6}{5}x_1 + \frac{3}{2}x_2 \quad \longrightarrow \quad \max;$$

$$S_1 \begin{cases} 1x_1 + 5x_2 \leq 15 \ (H_1^-) \\ 2x_1 + 1x_2 \leq 12 \ (H_2^-) \\ \quad x_1 \geq 0, \ \ x_2 \geq 0. \end{cases}$$

Математическая формулировка задачи L_1:

Найти такие значения переменных x_1 и x_2, удовлетворяющие системе ограничений (S_1), которые максимизируют функцию цели $Z(x)$.

3. Графический метод решения задачи L_1.

Предварительно напомним геометрический смысл линейного уравнения и линейного неравенства в пространстве R^n.

Множество точек $x = (x_1, \ x_2, \ \dots, \ x_n)$ пространства R^n, координаты которых удовлетворяют линейному уравнению

$H\!: \ a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b,$

где $a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2 > 0$, называют гиперплоскостью.

Множество точек $x = (x_1, \ x_2, \ \dots, \ x_n)$ пространства R^n, координаты которых удовлетворяют линейному неравенству

$H^+\!: \ a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n \geq b$ или

$H^-\!: \ a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n \leq b,$

где $a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2 > 0$, называют полупространством с граничной гиперплоскостью H.

В координатной плоскости $x_1\theta x_2$ гиперплоскости

$H\!: \ a_1x_1 + a_2x_2 = b \quad (a_1^2 + a_2^2 > 0)$

соответствует прямая линия, вектор нормали $a = (a_1, \ a_2)$ к которой ортогонален (перпендикулярен) прямой H, а полупространствам

$H^+\!: \ a_1x_1 + a_2x_2 \geq b$ и

$H^-\!: \ a_1x_1 + a_2x_2 \leq b$

соответствуют полуплоскости, на которые прямая H делит всю координатную плоскость (рисунок 1).

Можно доказать, что полупространству H^+ принадлежит любая точка $x = x^0 + \lambda \cdot a \ \ (\lambda > 0)$, полученная перемещением произвольной точки $x^0 \in H$ в направлении вектора нормали **a** к граничной гиперплоскости H (рисунок 1). Отметим, что точка $x = x^0 + \lambda \cdot a \ \ (\lambda > 0)$ не принадлежит полупространству H^-.

Выбирая вектор нормали **a** так, чтобы его начало принадлежало гиперплоскости H (рисунок 2), условимся говорить, что полупространство

H^+ содержит вектор нормали **а** к граничной гиперплоскости H, а полупространство H^- не содержит его.

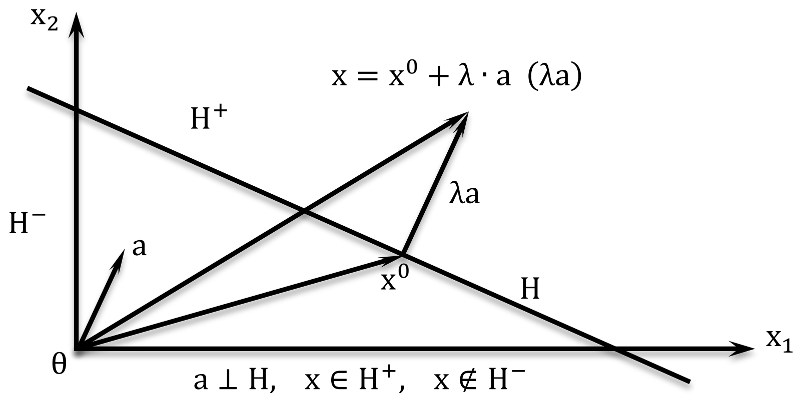
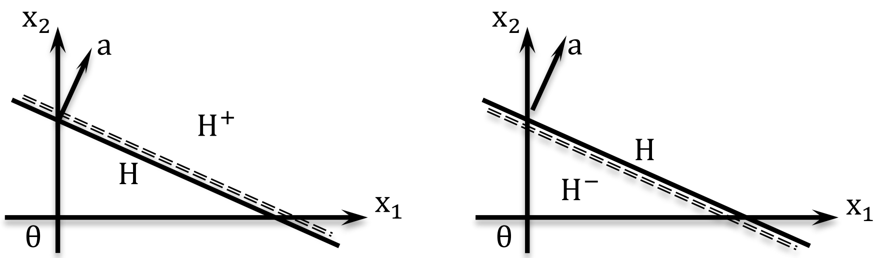


Рисунок 1

Полупространство H^+, содержащее вектор нормали **а**, будем отмечать штриховкой, направленной от гиперплоскости H в сторону вектора нормали (рисунок 2а), а полупространство H^- не содержащее вектор нормали **а**, — штриховкой, направленной от гиперплоскости H в сторону противоположную вектору нормали (рисунок 2б).



а) б)

Рисунок 2

Изобразим, например, множество точек координатной плоскости $x_1\theta x_2$, координаты которых удовлетворяют условиям неотрицательности:

$$(S^+)\ \begin{cases} x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0. \end{cases}$$

Первому неравенству $x_1 \geq 0$ системы (S^+) соответствует полупространство, содержащее вектор нормали $e^1 = (1, 0)$ к граничной гиперплоскости

$\theta x_2\text{:}\ 5x_1 + 0x_2 = 0$.

Это полупространство отмечаем штриховкой, направленной от оси θx_2 в сторону вектора нормали e^1 (рисунок 3).

Аналогично изображаем полупространство, соответствующее второму неравенству $x_2 = 0$ системы (S^+). Отмечаем его штриховкой, направленной от оси θx_1 в сторону вектора нормали $e^2 = (0, 1)$ к граничной гиперплоскости θx_1: $x_2 = 0$ (рисунок 3).

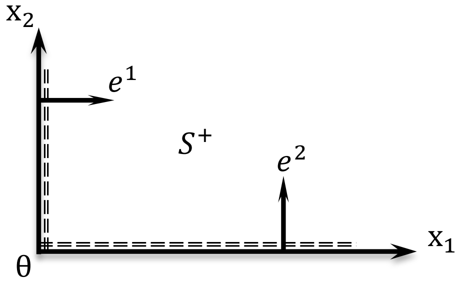


Рисунок 3

Множество S^+ точек плоскости, координаты которых удовлетворяют условиям неотрицательности (S^+), геометрически представляют собой первую четверть координатной плоскости $x_1\theta x_2$ (рисунок 3).

Решим задачу L_1 (об оптимальном планировании производства) графическим методом.

Построим множество допустимых планов S_1 задачи L_1 (множество точек плоскости $x_1\theta x_2$, координаты которых удовлетворяют системе ограничений (S_1)).

Первому ограничению

H_1^-: $1x_1 + 5x_2 \leq 15$

на плоскости $x_1\theta x_2$ соответствует полупространство (полуплоскость) с граничной гиперплоскостью (прямой)

H_1: $1x_1 + 5x_2 \leq 15$,

вектор нормали к которой $a^1 = (1, 5)$ не принадлежит H_1^-. Полагая в уравнении H_1 последовательно $x_1 = 0$ и $x_2 = 0$, получим таблицу

x_1	0	15
x_2	3	0

из которой определим две точки $(0, 3)$ и $(15, 0)$, принадлежащие прямой H_1. В координатной плоскости $x_1\theta x_2$ изобразим прямую H_1 и её вектор нормали a^1, перпендикулярный этой прямой. Штриховкой отмечаем полуплоскость H_1^-, не содержащую вектор нормали a^1.

Аналогично строим полупространство H_2^-: $2x_1 + 1x_2 \leq 12$, с граничной гиперплоскостью H_2: $2x_1 + 1x_2 = 12$, соответствующее второму ограничению. Полагая в уравнении H_2 последовательно $x_1 = 0$ и $x_2 = 0$, получим таблицу

x_1	0	6
x_2	12	0

из которой определим две точки $(0, 12)$ и $(6, 0)$, принадлежащие прямой H_2. В координатной плоскости $x_1\theta x_2$ изобразим прямую H_2 и её вектор нормали

$a^2 = (2, 1)$. Штриховкой отмечаем полуплоскость H_2^-, не содержащую вектор нормали a^2.

Выделяем штриховкой первую четверть координатной плоскости в которой лежат точки с координатами $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$.

На рисунке 4 изображено множество S_1 допустимых планов задачи L_1, представляющее собой выпуклый многогранник (многоугольник), крайними точками которого являются его вершины θ, x^1, x^2, x^3.

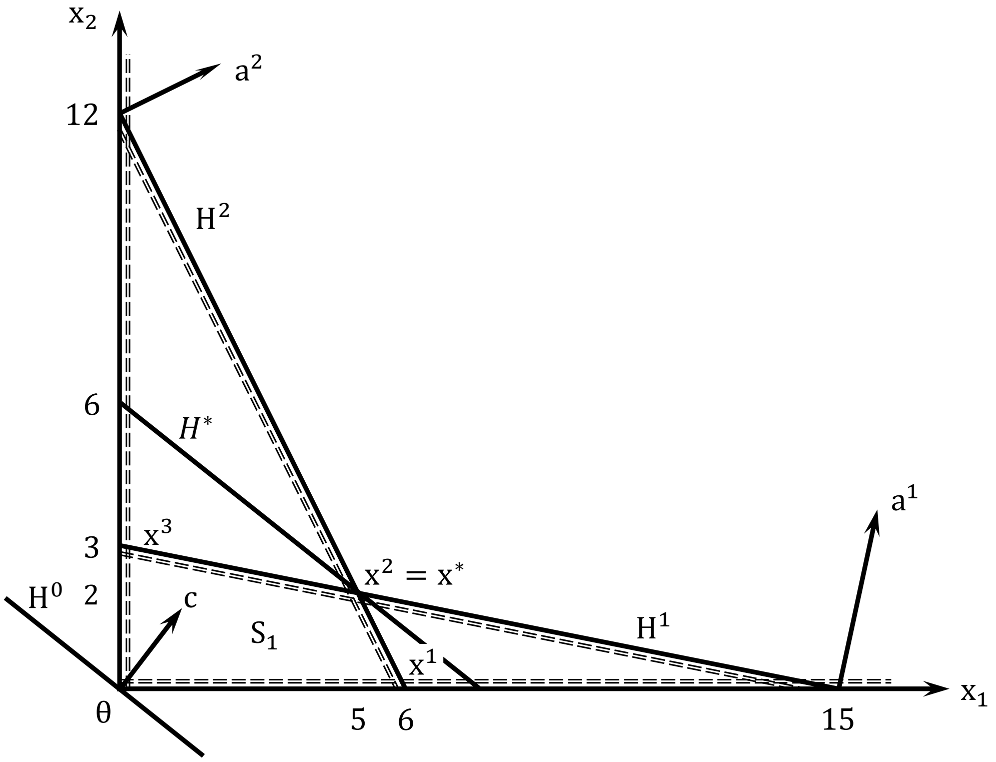


Рисунок 4

На рисунке 4 изображено множество S_1 допустимых планов задачи L_1, представляющее собой выпуклый многогранник (многоугольник), крайними точками которого являются его вершины θ, x^1, x^2, x^3.

Для поиска допустимого плана x^*, на котором функция цели $Z(x)$ достигает наибольшего значения (такой план называется оптимальным) нам потребуется следующая

Теорема.

Если задача линейного программирования L_1 разрешима, то её оптимальный план достигается по крайней мере в одно из крайних точек множества допустимых планов S_1.

Построим линию нулевого уровня H^0 функции цели $Z(x)$

$$H^0\colon \ \frac{6}{5}x_1 + \frac{3}{2}x_2 = 0.$$

Прямая H^0 проходит через начало координат $\theta(0, 0)$ и перпендикулярна вектору нормали $c = (6/5,\ 3/2)$ (рисунок 4).

Известно, что нормаль **c** к линии нулевого уровня H^0 указывает направление наибольшего роста функции цели $Z(x)$.

Перемещая линию нулевого уровня H^0 целевой функции $Z(x)$ параллельно самой себе в направлении вектора нормали **c** в наиболее удалённую крайнюю точку x^2 множества допустимых планов S_1, получим оптимальный план $x^* = x^2$ задачи L_1.

На рисунке 4 изображена линия H^* наибольшего уровня целевой функции, проходящая через точку $x^* = x^2$, параллельная линии нулевого уровня H^0.

Найдём координаты оптимального плана x^*, как пересечение гиперплоскостей (прямых) H_1 и H_2.

$$x: \begin{cases} x_1 + 5x_2 = 15 \\ 2x_1 + x_2 = 12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + 5x_2 = 15 \\ 9x_2 = 18 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x_1 + 5x_2 = 15 \\ x_2 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 5 \\ x_2 = 2. \end{cases}$$

Следовательно, $x^* = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}$ — оптимальный план задачи L_1.

Подставляя координаты оптимального плана x^* в целевую функцию, найдём её наибольшее значение $Z(x^*)$ на множестве S_1.

$$Z(x^*) = \frac{6}{5} \cdot 5 + \frac{3}{2} \cdot 2 = 9.$$

Ответ. Для того чтобы обеспечить максимальную прибыль от реализации всей продукции, равную $Z(x^*) = 9$ денежным единицам, предприятию необходимо выпустить $x_1^* = 5$ единиц продукции $П_1$ и $x_2^* = 2$ единиц продукции $П_2$.

4. Решение задачи L_1 симплекс-методом.

В левую часть каждого из ограничений (H_1^-) и (H_2^-) задачи L_1:

$$Z(x) = \frac{6}{5}x_1 + \frac{3}{2}x_2 \longrightarrow \max$$

$$(S_1) \begin{cases} 1x_1 + 5x_2 \le 15 & (H_1^-) \\ 2x_1 + 1x_2 \le 12 & (H_2^-) \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0 \end{cases}$$

введём соответственно такие неотрицательные дополнительные переменные x_3 и x_4, чтобы указанные неравенства превратились в уравнения:

$$(S_1^К) \begin{cases} 1x_1 + 5x_2 + x_3 = 15 \\ 2x_1 + 1x_2 + x_4 = 12 \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0,\ x_3 \ge 0,\ x_4 \ge 0. \end{cases}$$

При любых допустимых объёмах x_1 и x_2 выпускаемой продукции $П_1$ и $П_2$ дополнительные переменные x_3 и x_4 можно интерпретировать как остатки ресурсов P_1 и P_2 соответственно.

Разрешая систему $(S_1^К)$ относительно дополнительных переменных x_3 и x_4 и записывая ограничения и функцию цели в специальном виде, запишем задачу L_1 в канонической форме $L_1^К$:

$$\text{Ƶ}(x) = -\frac{6}{5}(-x_1) - \frac{3}{2}(-x_2) + 0 \;\longrightarrow\; \max$$

$$\left(S_1^K\right) \quad \begin{cases} x_3 = 1(-x_1) + 5(-x_2) + 15 & \left(H_1^K\right) \\ x_4 = 2(-x_1) + 1(-x_2) + 12 & \left(H_1^K\right) \\ x_1 \geq 0,\; x_2 \geq 0,\; x_3 \geq 0,\; x_4 \geq 0. \end{cases}$$

Переменные x_3 и x_4, относительно которых разрешена система ограничений $\left(S_1^K\right)$, называются базисными переменными, а остальные — свободными. Решение системы уравнений, в котором все свободные переменные принимают нулевые значения, называется базисным решением. Базисное решение называется опорным планом (решением), если все его компоненты неотрицательны.

Можно доказать, что в случае разрешимости канонической задачи L_1^K, её оптимальный план достигается по крайней мере на одном из опорных планов системы ограничений $\left(S_1^K\right)$.

Идея симплекс-метода.

В случае разрешимости канонической задачи L_1^K строится конечная последовательность опорных планов системы ограничений $\left(S_1^K\right)$ такая, что на каждом последующем опорном плане значение целевой функции не меньше, чем на предыдущем. Тогда через конечное число шагов (исключая так называемый случай вырождения) найдётся оптимальный опорный план задачи L_1^K.

Предлагаемый ниже алгоритм симплекс-метода реализуется с помощью процедуры модифицированных жордановых исключений (МЖИ).

Решим задачу L_1^K симплекс-методом. Запишем условие задачи в табличной форме.

Симплекс-таблица 1

С / Б	$-x_1$	$\uparrow$ $-x_2$	1
$\leftarrow x_3 =$	1	$\boxed{5}$	15
$x_4 =$	2	1	12
$\text{Ƶ} =$	$-\frac{6}{5}$	$-\frac{3}{2}$	0

Символом С обозначены свободные переменные, а символом Б базисные. В соответствующие строки симплекс-таблицы 1 вносятся коэффициенты и свободные члены ограничений $\left(H_1^K\right)$, $\left(H_2^K\right)$ и целевой функции $\text{Ƶ}(x)$ задачи L_1^K.

Первый шаг симплекс-метода.

Полагая в симплекс-таблице 1 свободные переменные равными нулю ($x_1 = 0,\;\; x_2 = 0$), получим значения базисных переменных, равные соответствующим свободным членам системы ограничений ($x_3 = 15$, $x_4 = 12$) и функции цели ($Ƶ = 0$).

Таким образом, с помощью симплекс-таблицы 1 находим <u>первое базисное решение</u>:

$$\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \\ x_3 = 15 \\ x_4 = 12, \end{cases}$$

<u>являющееся опорным планом</u> системы ограничений $\left(S_1^K\right)$ на котором функция цели принимает значение $Ƶ_1 = 0$.

Поясним экономически смысл первого опорного плана. Если предприятие не выпускает продукцию ($x_1 = 0$, $x_2 = 0$), то остатки ресурсов x_3 и x_4 равны соответственно их запасам 15 и 12 при этом прибыль $Ƶ_1$ составит 0 денежных единиц.

Сформулируем <u>критерий оптимальности опорного плана</u> задачи L_1^K.

Для того чтобы <u>опорный план</u> системы ограничений $\left(S_1^K\right)$ <u>являлся оптимальным планом</u> задачи L_1^K, <u>необходимо и достаточно</u>, <u>чтобы все элементы</u> Ƶ-<u>строки</u> симплекс-таблицы (исключая последний) <u>были неотрицательны</u>.

<u>Первый опорный план</u>, построенный с помощью симплекс таблицы 1, <u>не является оптимальным</u>, т. к. Ƶ-<u>строка содержит отрицательные элементы</u> $(-6/5, -3/2)$.

<u>Второй шаг симплекс-метода.</u>

Построим <u>второй опорный план</u>, на котором <u>значение функции цели</u> окажется <u>больше</u>, <u>чем на первом</u>. Для этого в симплекс-таблице выберем:

1) <u>Разрешающий столбец</u>, соответствующий <u>наименьшему отрицательному элементу Ƶ-строки</u> (исключая последний);

2) <u>Разрешающую строку</u>, соответствующую <u>наименьшему отношению элементов столбца свободных членов</u> системы ограничений к соответствующим <u>положительным элементам разрешающего столбца</u>.

На пересечении разрешающего столбца и разрешающей строки расположен <u>разрешающий элемент</u>.

Найдём разрешающий элемент симплекс-таблицы 1. Среди отрицательных элементов Ƶ-строки $(-6/5;\ -3/2)$ симплекс-таблицы 1 <u>наименьшим является</u> $-3/2$:

$$\min\left(-\frac{6}{5};\ -\frac{3}{2}\right) = -\frac{3}{2}.$$

Следовательно, <u>второй столбец</u> является <u>разрешающим</u>. <u>Наименьшее</u> отношение элементов столбца свободных членов (15, 12) симплекс-таблицы 1 к соответствующим <u>положительным</u> элементам разрешающего столбца (5, 1) является отношение $15/5$:

$$\min\left(\frac{15}{5};\ \frac{12}{1}\right) = \min(3; 12) = 3.$$

Следовательно, первая строка является разрешающей. На пересечении разрешающего столбца и разрешающей строки расположен разрешающий элемент 5, отмеченный в симплекс-таблице 1 квадратиком.

В симплекс-таблице 1 выполним шаг модифицированных жордановых исключений (ЖМИ) с разрешающим элементом, выбранным указанным выше способом, по следующим правилам:

1^0) Разрешающий элемент Р заменяется обратной величиной

$$\text{Р}' = \frac{1}{\text{Р}};$$

2^0) Остальные элементы разрешающей строки делятся на разрешающий элемент

$$\text{Э}' = \frac{\text{Э}}{\text{Р}};$$

3^0) Остальные элементы разрешающего столбца меняют знаки и делятся на разрешающий элемент

$$\text{Э}' = -\frac{\text{Э}}{\text{Р}};$$

4^0) Остальные элементы симплекс-таблицы преобразуются по правилу прямоугольника

$$\text{Э}' = \frac{\text{Э} \cdot \text{Р} - \text{П} \cdot \text{Д}}{\text{Р}},$$

где Э — преобразуемый элемент, Р — разрешающий элемент, образующий главную, а элементы П и Д — побочную диагонали символического прямоугольника, изображённого на рисунке 5.

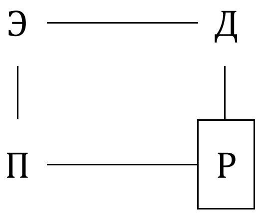


Рисунок 5

В приведённых формулах символом $'$ отмечены преобразованные элементы симплекс-таблицы.

В результате выполненного симплекс-преобразования получим новую симплекс-таблицу, в которой поменяются ролями базисная переменная, соответствующая разрешающей строке, и свободная переменная, соответствующая разрешающему столбцу.

Справедливо следующее утверждение. Если разрешающий элемент исходной симплекс таблицы выбирается по указанным выше правилам, то базисное решение, полученное с помощью новой симплекс-таблицы, является опорным планом, на котором функция цели принимает не меньшее значение, чем на исходном.

Применим к симплекс-таблице 1 симплекс-преобразование с разрешающим элементом 5.

Разрешающий элемент 5 преобразуется по формуле 1^0:

$(5)' = \dfrac{1}{5}.$

<u>Остальные элементы разрешающей строки</u> (1, 15) преобразуются по формуле 2^0:

$(1)' = \dfrac{1}{5}, \quad (15)' = \dfrac{15}{5} = 3.$

<u>Остальные элементы разрешающего столбца</u> $(1, -3/2)$ преобразуются по формуле 3^0:

$(1)' = -\dfrac{1}{5}, \quad \left(-\dfrac{3}{2}\right)' = -\dfrac{-3/2}{5} = \dfrac{3}{10}.$

Остальные элементы симплекс-таблицы $(2, 12, -6/5, 0)$ преобразуются по правилу прямоугольника 4^0:

$$\begin{array}{ccc} 1 & \text{———} & \boxed{5} \\ | & & | \\ 2 & \text{———} & 1 \end{array} \qquad (2)' = \frac{2 \cdot 5 - 1 \cdot 1}{5} = \frac{9}{5},$$

$$\begin{array}{ccc} \boxed{5} & \text{———} & 15 \\ | & & | \\ 1 & \text{———} & 12 \end{array} \qquad (12)' = \frac{12 \cdot 5 - 1 \cdot 15}{5} = 9,$$

$$\begin{array}{ccc} 1 & \text{———} & \boxed{5} \\ | & & | \\ -\frac{6}{5} & \text{———} & -\frac{3}{2} \end{array} \qquad \left(-\frac{6}{5}\right)' = \frac{(-6/5) \cdot 5 - 1 \cdot (-3/2)}{5} = -\frac{9}{10},$$

$$\begin{array}{ccc} \boxed{5} & \text{———} & 15 \\ | & & | \\ -\frac{3}{2} & \text{———} & 0 \end{array} \qquad (0)' = \frac{0 \cdot 5 - 15 \cdot (-3/2)}{5} = \frac{9}{2}.$$

Поменяем ролями <u>базисную переменную</u> x_3 и <u>свободную переменную</u> x_4. В симплекс-таблице 1 эти переменные отмечены соответственно <u>горизонтальной</u> и <u>вертикальной</u> стрелками.

Преобразованные по правилам МЖИ элементы симплекс-таблицы 1 вносим в новую симплекс-таблицу.

Симплекс-таблица 2

С / Б	↑ $-x_1$	$-x_3$	1

$x_2 =$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	3
$\leftarrow x_4 =$	$\boxed{\frac{9}{5}}$	$-\frac{1}{5}$	9
$Ƶ =$	$-\frac{9}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{9}{2}$

Полагая в симплекс-таблице 2 свободные переменные равными нулю ($x_1 = 0,\quad x_3 = 0$) получим значения базисных переменных, равные соответствующим свободным членам системы ограничений ($x_2 = 3$, $x_4 = 9$) и функции цели ($Ƶ = 9/2$).

Таким образом, с помощью симплекс-таблицы 2 находим <u>второе базисное решение</u>:

$$\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 3 \\ x_3 = 0 \\ x_4 = 9, \end{cases}$$

<u>являющееся опорным планом</u> системы ограничений $\left(S_1^K\right)$, на котором функция цели принимает значение $Ƶ_2 = 9/2$.

Поясним экономически смысл второго опорного плана. Если предприятие не выпускает продукцию $П_1$ ($x_1 = 0$), выпускает продукцию $П_2$ в количестве 3 единиц ($x_2 = 3$), то остатки ресурса $Р_2$ составят 9 единиц ($x_4 = 9$), запасы ресурса $Р_1$ будут полностью исчерпаны ($x_3 = 0$), при этом прибыль $Ƶ_2$ окажется равной $9/2$ денежным единицам.

<u>Значение функции цели</u> $Ƶ_2 = 9/2$ <u>на втором опорном плане больше</u>, <u>чем её значение</u> $Ƶ_1 = 0$ <u>на первом</u>. <u>Второй опорный план</u>, построенный с помощью симплекс-таблицы 2, <u>не является оптимальным</u>, т. к. Ƶ-<u>строка содержит отрицательный элемент</u> $(-9/10)$.

<u>Третий шаг симплекс-метода.</u>

Построим <u>третий опорный план</u>, на котором <u>значение функции цели</u> окажется <u>больше</u>, <u>чем на втором</u>. Для этого в симплекс-таблице 2 выберем:

1) <u>Разрешающий столбец</u>, соответствующий <u>наименьшему отрицательному элементу</u> Ƶ-<u>строки</u> (исключая последний)
$$\min\left(-\frac{9}{10}\right) = -\frac{9}{10},$$
(<u>первый столбец</u> является разрешающим);
2) <u>Разрешающую строку</u>, соответствующую <u>наименьшему отношению элементов столбца свободных членов</u> системы ограничений к соответствующим <u>положительным элементам разрешающего столбца</u>
$$\min\left(\frac{3}{1/5}; \frac{9}{9/5}\right) = \min(15; 5) = 5,$$
(<u>вторая строка</u> является разрешающей).

На пересечении разрешающего столбца и разрешающей строки расположен <u>разрешающий элемент</u> $9/5$, отмеченный в симплекс-таблице 2 квадратиком.

Применим к симплекс-таблице 2 <u>симплекс-преобразование</u> с разрешающим элементом $9/5$.

<u>Разрешающий элемент</u> $9/5$ преобразуется по формуле 1^0:

$$\left(\frac{9}{5}\right)' = \frac{1}{9/5} = \frac{5}{9}.$$

<u>Остальные элементы разрешающей строки</u> $(-1/5,\ 9)$ преобразуются по формуле 2^0:

$$\left(-\frac{1}{5}\right)' = \frac{-1/5}{9/5} = -\frac{1}{9}, \quad (9)' = \frac{9}{9/5} = 5.$$

<u>Остальные элементы разрешающего столбца</u> $(1/5, -9/10)$ преобразуются по формуле 3^0:

$$\left(\frac{1}{5}\right)' = \frac{-1/5}{9/5} = -\frac{1}{9}, \quad \left(-\frac{9}{10}\right)' = -\frac{-9/10}{9/5} = \frac{1}{2}.$$

<u>Остальные элементы симплекс-таблицы</u> $(1/5,\ 3,\ 3/10,\ 9/2)$ преобразуются по <u>правилу прямоугольника</u> 4^0:

$$\begin{array}{ccc} \frac{1}{5} & \text{———} & \frac{1}{5} \\ | & & | \\ \boxed{\frac{9}{5}} & \text{———} & -\frac{1}{5} \end{array} \qquad \left(\frac{1}{5}\right)' = \frac{(1/5)\cdot(9/5) - (-1/5)\cdot(1/5)}{9/5} = \frac{2}{9},$$

$$\begin{array}{ccc} \frac{1}{5} & \text{———} & 3 \\ | & & | \\ \boxed{\frac{9}{5}} & \text{———} & 9 \end{array} \qquad (3)' = \frac{3\cdot(9/5) - 9\cdot(1/5)}{9/5} = 2,$$

$$\begin{array}{ccc} \boxed{\frac{9}{5}} & \text{———} & -\frac{1}{5} \\ | & & | \\ -\frac{9}{10} & \text{———} & \frac{3}{10} \end{array}$$

$$\left(\frac{3}{10}\right)' = \frac{(3/10)\cdot(9/5) - (-9/10)\cdot(-1/5)}{9/5} = \frac{1}{5},$$

$$\begin{array}{ccc} \boxed{\dfrac{9}{5}} & \text{———} & 9 \\ | & & | \\ -\dfrac{9}{10} & \text{———} & \dfrac{3}{10} \end{array}$$

$$\left(\frac{9}{2}\right)' = \frac{(9/2)\cdot(9/5) - 9\cdot(-9/10)}{9/5} = 9.$$

Поменяем ролями базисную переменную x_4 и свободную переменную x_1. В симплекс-таблице 2 эти переменные отмечены соответственно горизонтальной и вертикальной стрелками.

Преобразованные по правилам МЖИ элементы симплекс-таблицы 2 вносим в новую симплекс-таблицу.

Симплекс-таблица 3

Б \ С	$-x_4$	$-x_3$	1
$x_2 =$	$-\frac{1}{9}$	$\frac{2}{9}$	2
$x_1 =$	$\frac{5}{9}$	$-\frac{1}{9}$	5
$Z =$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{5}$	9

Полагая в симплекс-таблице 3 свободные переменные равными нулю ($x_3 = 0,\ \ x_4 = 0$), получим значения базисных переменных, равные соответствующим свободным членам системы ограничений ($x_1 = 5$, $x_2 = 2$) и функции цели ($Z = 9$).

Таким образом, с помощью симплекс-таблицы 3 находим третье базисное решение:

$$\begin{cases} x_1 = 5 \\ x_2 = 2 \\ x_3 = 0 \\ x_4 = 0, \end{cases}$$

являющееся опорным планом системы ограничений (S_1^K), на котором функция цели принимает значение $Z = 9$.

Поясним экономически смысл третьего опорного плана. Если предприятие выпускает 5 единиц продукции $П_1$ ($x_1 = 5$) и 2 единицы продукции $П_2$ ($x_2 = 2$), то запасы ресурсов P_1 и P_2 будут полностью исчерпаны ($x_3 = 0$, $x_4 = 0$), при этом прибыль Z_3 окажется равной 9 денежным единицам.

Значение функции цели $Z_3 = 9$ на третьем опорном плане больше, чем её значение $Z_2 = 9/2$ на втором. Третий опорный план, построенный с помощью симплекс-таблицы 3, является оптимальным планом задачи L_1^K, т. к. Z-строка не содержит отрицательных элементов.

Справедливо следующее утверждение. Если в оптимальном плане $x_1^* = 5$, $x_2^* = 2$, $x_3^* = 0$, $x_4^* = 0$ канонической задачи L_1^K опустить компоненты дополнительных переменных $x_3^* = 0$, $x_4^* = 0$, то полученный допустимый план $x_1^* = 5$, $x_2^* = 2$ задачи L_1 (об оптимальном планировании производства) является её оптимальным планом.

Таким образом, симплекс-метод позволяет не только решить каноническую задачу $L_1^К$, но и получить оптимальный план задачи L_1 (об оптимальном планировании производства). Кроме того, каждый опорный план системы ограничений задачи $L_1^К$ содержит дополнительную экономическую информацию об остатках ресурсов при реализации соответствующего ему допустимого плана задачи L_1.

Ответ. Для того чтобы обеспечить максимальную прибыль от реализации всей продукции, равную $Ƶ(x^*) = 9$ денежным единицам, предприятию необходимо выпустить $x_1^* = 5$ единиц продукции $П_1$ и $x_2^* = 2$ единиц продукции $П_2$, при этом все запасы ресурсов $Р_1$ и $Р_2$ будут полностью исчерпаны ($x_3^* = 0, x_4^* = 0$).

5. Формулировка задачи L_1^+ (об оценивании ресурсов).

Предположим, что данное предприятие, не желая выпускать продукцию, продаёт все ресурсы другому предприятию. Располагая информацией, приведённой в таблице 1, определить цены на ресурсы таким образом, чтобы удовлетворить интересы как «предприятия-продавца», так и «предприятия-покупателя».

6. Математическая модель задачи L_1^+.

Введём переменные p_1 и p_2, которые будем интерпретировать как цены ресурсов $Р_1$ и $Р_2$. Стоимость ресурса $Р_1$, затрачиваемого на единицу продукции $П_1$, получается умножением цены p_1 на удельные затраты ресурса $Р_1$ при производстве единицы продукции $П_1$. Аналогично, стоимость ресурса $Р_2$, затрачиваемого на единицу продукции $П_1$, равна произведению цены p_2 на удельные затраты ресурса $Р_2$ при производстве единицы продукции $П_1$.

Умножая цены p_1 и p_2 на соответствующие удельные затраты 1 и 2 ресурсов $Р_1$ и $Р_2$, получим:

$p_1 \cdot 1$ — стоимость ресурса $Р_1$, затрачиваемого на единицу продукции $П_1$;

$p_2 \cdot 2$ — стоимость ресурса $Р_2$, затрачиваемого на единицу продукции $П_1$.

Стоимость производства единицы продукции $П_1$ складывается из стоимости ресурсов $Р_1$ и $Р_2$, затрачиваемых на единицу продукции $П_1$. Поэтому

$_1 + 2 \cdot p_2$ — стоимость всех ресурсов, затрачиваемых на единицу продукции $П_1$.

С точки зрения «предприятия-продавца» ресурсы выгодно продавать только в том случае, если стоимость ресурсов, затрачиваемых на единицу продукции $П_1$, равная $1 \cdot p_1 + 2 \cdot p_2$, не меньше прибыли, полученной от реализации единицы этой продукции, равной $6/5$. Следовательно,

$$1 \cdot p_1 + 2 \cdot p_2 \geq \frac{6}{5}.$$

Рассуждая аналогично, получим второе ограничение задачи

$$5 \cdot p_1 + 1 \cdot p_2 \geq \frac{3}{2}.$$

Цены p_1 и p_2 на ресурсы P_1 и P_2 следует подчинить естественным ограничениям: $p_1 \geq 0, p_2 \geq 0$.

С точки зрения «предприятия-покупателя» ресурсы выгодно приобрести только в том случае, если стоимость $T(p)$ всех ресурсов, равная $p_1 \cdot 15 + p_2 \cdot 12$, окажется наименьшей. Через L_1^+ обозначим задачу об оценивании ресурсов.

Математическая модель задачи L_1^+ имеет вид:

$$T(p) = 15 \cdot p_1 + 12 \cdot p_2 \quad \longrightarrow \quad \min$$

$$(S_1^+) \quad \begin{cases} 1p_1 + 2p_2 \geq \dfrac{6}{5} \quad (H_1^{*+}) \\ 5p_1 + 1p_2 \geq \dfrac{3}{2} \quad (H_2^{*+}) \\ \quad p_1 \geq 0, \quad p_2 \geq 0. \end{cases}$$

Математическая формулировка задачи L_1^+:

Найти такие значения переменных p_1 и p_2, удовлетворяющие системе ограничений (S_1^+), при котором функция цели $T(p)$ принимает наименьшее значение.

Задача L_1^+ называется двойственной к задаче L_1.

7. Решение задачи L_1^+ с помощью двойственных симплекс-таблиц.

Справедлива следующая

Теорема (достаточный признак разрешимости двойственной задачи). Если вектор $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ — допустимый план задачи L_1, а вектор $p = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix}$ — допустимый план задачи L_1^+, на которых целевые функции $Ƶ(x)$ и $T(p)$ принимают равные значения $Ƶ(x) = T(p)$, то $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ — оптимальный план задачи L_1, а $p = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix}$ — оптимальный план задачи L_1^+.

В левые части каждого из ограничений (H_1^{*+}) и (H_2^{*+}) задачи L_1^+ введём соответственно такие неотрицательные дополнительные переменные p_3 и p_4, чтобы указанные неравенства превратились в уравнения:

$$\left(S_1^{+K}\right) \quad \begin{cases} 1 \cdot p_1 + 2 \cdot p_2 - p_3 \qquad = \dfrac{6}{5} \quad \left(H_1^{*K}\right) \\ 5 \cdot p_1 + 1 \cdot p_2 \qquad - p_4 = \dfrac{3}{2} \quad \left(H_2^{*K}\right) \\ \quad p_1 \geq 0, \;\; p_2 \geq 0, \;\; p_3 \geq 0, \;\; p_4 \geq 0. \end{cases}$$

Разрешая систему $\left(S_1^{+K}\right)$ относительно дополнительных переменных, приведём задачу L_1^+ к каноническому виду L_1^{+K}:

$$T(p) = 15 \cdot p_1 + 12 \cdot p_2 + 0 \quad \longrightarrow \quad \min$$

$$\left(S_1^{+K}\right) \quad \begin{cases} \quad p_3 = 1p_1 + 2p_2 - \dfrac{6}{5} \quad \left(H_1^{*K}\right) \\ \quad p_4 = 5p_1 + 1p_2 - \dfrac{3}{2} \quad \left(H_1^{*K}\right) \\ p_1 \geq 0, \;\; p_2 \geq 0, \;\; p_3 \geq 0, \;\; p_4 \geq 0. \end{cases}$$

Запишем условия задачи $L_1^К$ и $L_1^{+К}$ в <u>двойственную симплекс-таблицу</u>, дополнив симплекс-таблицу 1 для задачи $L_1^К$ строкой $Б^+$ (базисные переменные двойственной задачи $L_1^{+К}$) и столбцом $С^+$ (свободные переменные двойственной задачи $L_1^{+К}$).

Двойственная симплекс-таблица 1

	$Б^+$	$p_3 =$	$\uparrow$ $p_4 =$	$T =$
$С^+$	Б \ С	$-x_1$	$-x_2$	1
$\leftarrow p_1$	$x_3 =$	1	$\boxed{5}$	15
p_2	$x_4 =$	2	1	12
1	$Ƶ =$	$-\frac{6}{5}$	$-\frac{3}{2}$	0

Для того чтобы с помощью этой таблицы получить ограничения $\left(H_1^{*К}\right)$ и $\left(H_2^{*К}\right)$ и функцию цели $T(p)$ двойственной задачи $L_1^К$, необходимо базисные переменные p_3, p_4 и переменную T приравнять соответственно скалярному произведению вектор-столбца $\begin{pmatrix} P_1 \\ P_2 \\ 1 \end{pmatrix}$ на вектор-столбцы $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -6/5 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ -3/2 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} 15 \\ 12 \\ 0 \end{pmatrix}$.

<u>Первый шаг</u>.

Полагая в двойственной симплекс-таблице 1 свободные переменные равными нулю ($x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $p_1 = 0$, $p_2 = 0$), получим значения базисных переменных равные соответствующим свободным членам систем ограничений $\left(S_1^К\right)$ и $\left(S_1^{+К}\right)$ ($x_3 = 15$, $x_4 = 12$ и $p_3 = -6/5$, $p_4 = -3/2$). Значения целевых функций задач $L_1^К$ и $L_1^{+К}$ при этом равны нулю ($Ƶ = 0$ и $T = 0$).

Таким образом, с помощью двойственной симплекс-таблицы 1 находим первые базисные решения систем ограничений

$\left(S_1^К\right)$ и $\left(S_1^{+К}\right)$

$$\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \\ x_3 = 15 \\ x_4 = 12 \end{cases} \qquad \begin{cases} p_1 = 0 \\ p_2 = 0 \\ p_3 = -6/5 \\ p_4 = -3/2 \end{cases}$$

на которых целевые функции $Ƶ(x)$ и $T(p)$ принимают равные значения $Ƶ_1 = T_1 = 0$.

Базисное решение

$$x^1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 15 \\ 12 \end{pmatrix}$$ является опорным планом системы ограничений $(S_1^К)$ задачи $L_1^К$, а базисное решение

$$p^1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -6/5 \\ -3/2 \end{pmatrix}$$ не является опорным планом системы ограничений $(S_1^{+К})$ задачи $L_1^{+К}$ (оно имеет отрицательные компоненты).

<u>Первый опорный план</u> системы $(S_1^К)$ <u>не является оптимальным</u>, т. к. Ƶ-строка содержит отрицательные элементы $(-6/5, -3/2)$.

<u>Второй шаг</u>.

В двойственной симплекс-таблице 1 выберем:

1) разрешающий столбец, соответствующий наименьшему отрицательному элементу Ƶ-строки (исключая последний)
$$\min\left(-\frac{6}{5};\ -\frac{3}{2}\right) = -\frac{3}{2}$$
(второй столбец является разрешающим);
2) разрешающую строку, соответствующую наименьшему отношению элементов столбца свободных членов системы ограничений к соответствующим положительным элементам разрешающего столбца
$$\min\left(\frac{15}{5};\ \frac{12}{1}\right) = 3$$
(первая строка является разрешающей).

На пересечении разрешающего столбца и разрешающей строки расположен разрешающий элемент 5, отмеченный в двойственной симплекс-таблице 1 квадратиком.

Выполним к задаче $L_1^К$ шаг модифицированных жордановых исключений (МЖИ) с разрешающим элементом 5. Тогда в задаче $L_1^{+К}$ будет автоматически выполнен шаг обыкновенных жордановых исключений (ОЖИ) с тем же разрешающим элементом 5. При этом поменяются ролями следующие пары базисных и свободных переменных: $x_3 \leftrightarrow x_2$, $p_4 \leftrightarrow p_1$, отмеченные в двойственной симплекс-таблице 1 горизонтальной и вертикальной стрелками. В результате получим новую двойственную симплекс-таблицу.

Двойственная симплекс-таблица 2

	$Б^+$	$\uparrow$ $p_3 =$	$p_1 =$	$T =$
C^+	С / Б	$-x_1$	$-x_3$	1
p_4	$x_2 =$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	3

$\leftarrow p_2$	$x_4 =$	$\boxed{\frac{9}{5}}$	$-\frac{1}{5}$	9
1	$Ƶ =$	$-\frac{9}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{9}{2}$

Полагая в двойственной симплекс-таблице 2 свободные переменные равными нулю ($x_1 = 0$, $x_3 = 0$ и $p_2 = 0$, $p_4 = 0$), получим значения базисных переменных равными соответствующим свободным членам систем ограничений $(S_1^К)$ и $(S_1^{+К})$ ($x_2 = 3$, $x_4 = 9$ и $p_1 = 3/10$, $p_3 = -9/10$). Значения целевых функций задач $L_1^К$ и $L_1^{+К}$ при этом равны $9/2$ ($Ƶ = 9/2$ и $T = 9/2$).

Таким образом, с помощью двойственной симплекс-таблицы 2 находим вторые базисные решения систем ограничений

$(S_1^К)$ и $(S_1^{+К})$

$$\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 3 \\ x_3 = 0 \\ x_4 = 9 \end{cases} \qquad \begin{cases} p_1 = 3/10 \\ p_2 = 0 \\ p_3 = -9/10 \\ p_4 = 0, \end{cases}$$

на которых целевые функции $Ƶ(x)$ и $T(p)$ принимают равные значения $Ƶ_2 = T_2 = 9/2$.

Базисное решение

$x^2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \\ 9 \end{pmatrix}$ является опорным планом системы ограничений $(S_1^К)$ задачи $L_1^К$, а базисное решение

$p^2 = \begin{pmatrix} 3/10 \\ 0 \\ -9/10 \\ 0 \end{pmatrix}$ не является опорным планом системы ограничений $(S_1^{+К})$ задачи $L_1^{+К}$ (оно имеет отрицательную компоненту).

<u>Второй опорный план</u> системы $(S_1^К)$ <u>не является оптимальным</u>, т. к. $Ƶ$-строка содержит отрицательный элемент $(-9/10)$.

<u>Третий шаг</u>.

В двойственной симплекс-таблице 2 выберем:

1) разрешающий столбец, соответствующий наименьшему отрицательному элементу $Ƶ$-строки (исключая последний)

   $$\min\left(-\frac{9}{10}\right) = -\frac{9}{10}$$

   (первый столбец является разрешающим);
2) разрешающую строку, соответствующую наименьшему отношению элементов столбца свободных членов системы ограничений к соответствующим положительным элементам разрешающего столбца

$$\min\left(\frac{3}{1/5}; \frac{9}{9/5}\right) = \min(15; 5) = 5$$

(вторая строка является разрешающей).

На пересечении разрешающего столбца и разрешающей строки расположен разрешающий элемент $9/5$, отмеченный в двойственной симплекс-таблице 2 квадратиком.

Выполним в задаче $L_1^К$ шаг модифицированных жордановых исключений (МЖИ) с разрешающим элементом $9/5$. Тогда в задаче $L_1^{+К}$ будет автоматически выполнен шаг обыкновенных жордановых исключений (ОЖИ) с тем же разрешающим элементом $9/5$. При этом поменяются ролями следующие пары базисных и свободных переменных: $x_4 \leftrightarrow x_1$, $p_3 \leftrightarrow p_2$, отмеченные в двойственной симплекс-таблице 2 горизонтальной и вертикальной стрелками. В результате получим новую двойственную симплекс-таблицу.

Двойственная симплекс-таблица 3

	$Б^+$	$p_2 =$	$p_1 =$	$T =$
C^+	С / Б	$-x_4$	$-x_3$	1
p_4	$x_2 =$	$-\frac{1}{9}$	$\frac{2}{9}$	2
p_3	$x_1 =$	$\frac{5}{9}$	$-\frac{1}{9}$	5
1	$Z =$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{5}$	9

Пологая в двойственной симплекс-таблице 3 свободные переменные равными нулю ($x_3 = 0$, $x_4 = 0$ и $p_3 = 0$, $p_4 = 0$), получим значения базисных переменных равными соответствующим свободным членам систем ограничений $(S_1^К)$ и $(S_1^{+К})$ ($x_1 = 5$, $x_2 = 2$ и $p_1 = 1/5$, $p_2 = 1/2$). Значения целевых функций задачи $L_1^К$ и $L_1^{+К}$ при этом равны 9 ($Z = 9$ и $T = 9$).

Таким образом, с помощью двойственной симплекс-таблицы 3 находим третьи базисные решения систем ограничений

$(S_1^К)$ и $(S_1^{+К})$

$$\begin{cases} x_1 = 5 \\ x_2 = 2 \\ x_3 = 0 \\ x_4 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} p_1 = 1/5 \\ p_2 = 1/2 \\ p_3 = 0 \\ p_4 = 0, \end{cases}$$

на которых целевые функции $Z(x)$ и $T(p)$ принимают равные значения $Z_3 = T_3 = 9$.

Базисные решения

$$x^3 = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ и } p^3 = \begin{pmatrix} 1/5 \\ 1/2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

являются соответственно опорными планами систем ограничений $(S_1^К)$ и $(S_1^{+К})$ задач $L_1^К$ и $L_1^{+К}$.

Третий опорный план системы $(S_1^К)$ является оптимальным планом задачи $L_1^К$, т. к. Ƶ-строка не содержит отрицательных элементов.

Если в опорных планах x^3 и p^3 систем ограничений $(S_1^К)$ и $(S_1^{+К})$ опустить соответствующие компоненты дополнительных переменных ($x_3 = 0$, $x_4 = 0$ и $p_3 = 0$, $p_4 = 0$), то полученные двумерные векторы $x^* = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}$ и $p^* = \begin{pmatrix} 1/5 \\ 1/2 \end{pmatrix}$ являются допустимыми планами систем ограничений (S_1) и (S_1^+) задач L_1 и L_1^+, на которых целевые функции $Ƶ(x)$ и $T(p)$ принимают равные значения $Ƶ(x^*) = T(p^*) = 9$.

Тогда в силу достаточного признака разрешимости двойственной задачи L_1^+, допустимый план $p^* = \begin{pmatrix} 1/5 \\ 1/2 \end{pmatrix}$ является её оптимальным планом.

Ответ. Для того чтобы получить доход, равный $T(p^*) = 9$ денежным единицам от реализации всех ресурсов, предприятию необходимо установить следующие цены: $p_1^* = 1/5$ денежных единиц за ресурс P_1, $p_2^* = 1/2$ денежных единиц за ресурс P_2.

8. Решение задачи L_1^+ с помощью теорем двойственности.

Сформулируем теоремы двойственности.

Теорема 1 (основная теорема двойственности).

1) Если задача L_1 (L_1^+) разрешима, то разрешима и задача L_1^+ (L_1), причём для любых оптимальных планов $x^* \in S_1$ задачи L_1 и $p^* \in S_1^+$ задачи L_1^+ имеет место равенство
$Ƶ(x^*) = T(p^*)$.
2) Если функция цели $Ƶ(x)\big(T(p)\big)$ задачи L_1 (L_1^+) неограничена сверху (снизу), то множество допустимых планов S_1^+ (S_1) задачи L^+ (L) является пустым.

Теорема 2.

1) Если оптимальный план x^* задачи L_1 обращает $i-\infty$ ограничение системы (S_1) в строгое неравенство, то соответствующая ему компонента p_i^* в оптимальном плане двойственной задачи L_1^+ обращается в нуль.
2) Если в оптимальном плане x^* задачи L_1 компонента x_i положительна, то соответствующие ей $i-\infty$ ограничение двойственной задачи L_1^+ на её оптимальном плане p^* обращается в верное равенство.

Напомним математические модели задач L_1 и L_1^+.

L_1: L_1^+:

$Ƶ(x) = \frac{6}{5} \cdot x_1 + \frac{3}{2} \cdot x_2 \longrightarrow \max$ $T(p) = 15 \cdot p_1 + 12 \cdot p_2 \longrightarrow \min$

$(S_1)\quad \begin{cases} 1\cdot x_1 + 5\cdot x_2 \le 15 \\ 2\cdot x_1 + 1\cdot x_2 \le 12 \\ \quad x_1 \ge 0,\ \ x_2 \ge 0 \end{cases}$ $\qquad (S_1^+)\quad \begin{cases} 1\cdot p_1 + 2\cdot p_2 \ge \dfrac{6}{5} \\ 5\cdot p_1 + 1\cdot p_2 \ge \dfrac{3}{2} \\ \ p_1 \ge 0,\ \ p_2 \ge 0. \end{cases}$

Предположим, что задача L_1 решена, например, симплекс-методом и получен её оптимальный план $x^* = \begin{pmatrix}5\\2\end{pmatrix}$, на котором целевая функция принимает наибольшее значение Ƶ$(x^*) = 9$. Тогда по теореме 1 (п. 1) и двойственная задача L_1^+ также разрешима (имеет оптимальный план $p^* = \begin{pmatrix}p_1^*\\p_2^*\end{pmatrix}$) причём $T(p^*) =$ Ƶ$(x^*) = 9$.

Первая компонента $x_1^* = 5$ оптимального плана x^* задачи L_1 положительна. Тогда по теореме 2 (п. 2) первое ограничение системы (S_1^+) двойственной задачи L_1^+ на её оптимальном плане p^* обращается в верное равенство:

$p_1^* + 2\cdot p_2^* = \dfrac{6}{5}$.

Аналогично для положительной второй компоненты $x_2^* = 2$ оптимального плана x^* задачи L_1 получаем второе верное равенство:

$5\cdot p_1^* + p_2^* = \dfrac{3}{2}$.

Решая совместно систему уравнений

$$\begin{cases} p_1^* + 2\cdot p_2^* = \dfrac{5}{2} \\ 5\cdot p_1^* + p_2^* = \dfrac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p_1^* + 2\cdot p_2^* = \dfrac{6}{5} \\ \quad 9\cdot p_2^* = \dfrac{9}{2} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} p_1^* + 2\cdot p_2^* = \dfrac{6}{5} \\ \quad p_2^* = \dfrac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p_1^* = \dfrac{1}{5} \\ p_2^* = \dfrac{1}{2}, \end{cases}$$

находим оптимальный план $p^* = \begin{pmatrix}1/5\\1/2\end{pmatrix}$ двойственной задачи L_1^+, на котором целевая функция $T(p^*)$ принимает наименьшее значение $T(p^*) = 9$.

Список рекомендуемой литературы

Алпатов А.В. Информатика и математика: учебное пособие / Алпатов А.В.. — Волгоград : Волгоградский институт бизнеса, 2008. — 73 с. — ISBN 978-5-9061-7288-4. — Текст: электронный // IPR SMART: [сайт]. — URL: https://www.iprbookshop.ru/11319.html . — Режим доступа: для авторизир. Пользователей

Балдин К.В. Математическое программирование: учебник / Балдин К.В., Брызгалов Н.А., Рукосуев А.В.. — Москва: Дашков и К, 2018. — 218 с. — ISBN 978-5-394-01457-4. — Текст: электронный // IPR SMART : [сайт]. — URL: https://www.iprbookshop.ru/85136.html — Режим доступа: для авторизир. пользователей

Толстых О.С. Математика и информатика: учебное пособие / Толстых О.С.. — Краснодар : Южный институт менеджмента, 2009. — 92 с. — Текст : электронный // IPR SMART: [сайт]. — URL: https://www.iprbookshop.ru/9593.html — Режим доступа: для авторизир. пользователей

Балашова С.А. Математика и информатика: учебное пособие / Балашова С.А., Лазанюк И.В.. — Москва: Российский университет дружбы народов, 2009. — 192 с. — ISBN 978-5-209-03050-8. — Текст : электронный // IPR SMART : [сайт]. — URL: https://www.iprbookshop.ru/11401.html — Режим доступа: для авторизир. пользователей

Уткин В.Б. Математика и информатика : учебное пособие / Уткин В.Б., Балдин К.В., Рукосуев А.В.. — Москва : Дашков и К, 2018. — 468 с. — ISBN 978-5-394-01925-8. — Текст : электронный // IPR SMART : [сайт]. — URL: https://www.iprbookshop.ru/85278.html — Режим доступа: для авторизир. пользователей

Попов А.М. Информатика и математика: учебное пособие для студентов вузов, обучающихся по специальности «Юриспруденция» (030501) / Попов А.М., Сотников В.Н., Нагаева Е.И.. — Москва: ЮНИТИ-ДАНА, 2017. — 302 с. — ISBN 978-5-238-01396-1. — Текст: электронный // IPR SMART: [сайт]. — URL: https://www.iprbookshop.ru/71195.html — Режим доступа: для авторизир. Пользователей

КОРКМАЗОВА Зарема Османовна
СЕЛИМСУЛТАНОВА Рита Ильясовна

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ

Лабораторный практикум для обучающихся на 3 курса
направление подготовки 01.03.04 Прикладная математика
очной формы обучения

Корректор Чагова О.Х.
Редактор Чагова О.Х.

Сдано в набор 12.09.2024 г.
Формат 60х84/16
Бумага офсетная.
Печать офсетная.
Усл. печ. л.1,86
Заказ № 4980
Тираж 100 экз.

Оригинал-макет подготовлен
в Библиотечно-издательском центре СКГА
369000, г. Черкесск, ул. Ставропольская, 36