МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ
УЧРЕЖДЕНИЕВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«СЕВЕРО-КАВКАЗСКАЯ ГОСУДАРСТВЕННАЯ АКАДЕМИЯ»

СРЕДНЕПРОФЕССИОНАЛЬНЫЙ КОЛЛЕДЖ

Е.В. Моисеенко

МАТЕМАТИКА

Практикум для студентов 2-х курсов
специальности 13.02.07 Электроснабжение
(по отраслям)

Черкесск
2024

УДК 51
ББК 22.1
М 74

Рассмотрено на заседании ЦК «Информационные и естественнонаучные дисциплины».

Протокол №1 от «01» сентября 2023 г.

Рекомендовано к изданию редакционно-издательским советом СКГА.

Протокол № 26 от «29»сентября 2023 г.

Рецензенты: Узденова К.М. – преподаватель ЦК «Информационные и естественнонаучные дисциплины»

М74 **Моисеенко, Е.В.** Математика: практикум для студентов 2-х курсов специальности 13.02.07 Электроснабжение (по отраслям) / Е.В. Моисеенко. – Черкесск: БИЦ СКГА, 2024. –36 с.

Практикум по математике для обучающихся 2-х курсов специальности 13.02.07 Электроснабжение (по отраслям) предназначен для студентов 2-х курсов среднего профессионального образования, осуществляющих обучение на базе основного общего образования. Методические указания составлены на основе базисного уровня общеобразовательной подготовки по математике. В методических указаниях даётся теоретический материал, на основе которого выполняются задания.

УДК 51
ББК 22.1

СОДЕРЖАНИЕ

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА №1 «Линейные операции над матрицами»

Цели работы:

- сформировать умение выполнять линейные операции над матрицами.

Справочный материал:

Определение. **Матрицей размером n×m** называется прямоугольная таблица, составленная из nm чисел и имеющая n строк и m столбцов. Числа α_{ij}, составляющие матрицу, называются элементами матрицы

$$A=(\alpha_{ij})=\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \dots & \alpha_{mn} \end{pmatrix}.$$

Определение. Матрицу A^t называют ***транспонированной*** по отношению к матрице *A,* если она получена из матрицы *A* заменой строк этой матрицы её столбцами, и, наоборот, столбцов строками.

$$A^T=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}=\left(a_{ij}\right)_{n\times m}.$$

Пример, $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & -3 & 4 \end{pmatrix}$, $A^T=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$.

Определение. Квадратная матрица называется треугольной, если все ее элементы, размещенные над главной диагональю (под ней), равны нулю, т.е.

$$A_1=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix}$$ - *верхняя треугольная матрица,*

$$A_2=\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$ – *нижняя треугольная матрица.*

Определение. Матрица, все элементы которой равны нулю, называется *нуль-матрицей.*

Матрица-строка $A=\left(a_{11},a_{12},\dots,a_{1n}\right)$, матрица-столбец $B=\begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ \cdots \\ b_{m1} \end{pmatrix}$.

Операции над матрицами.

1) Пусть матрицы $A_{m\times n}$ и $B_{m\times n}$ одинаковой размерности. Суммой матриц A *и* B *называется матрица* $C_{m\times n}$ той же размерности, каждый элемент которой равен сумме соответствующих элементов матрицы A *и* B.

$$c_{ij}=a_{ij}+b_{ij} \text{ для всех } i \text{ и } j.$$

2) *Разностью матриц* $A_{m\times n}$ *и* $B_{m\times n}$ одинаковой размерности *называется матрица* $C_{m\times n}$ той же размерности, каждый элемент которой рамен разности соответствующих элементов матрицы A *и* B.

$c_{ij} = a_{ij} - b_{ij}$ для всех i и j.

3) *Произведением матриц* A *на число* λ *называется матрица* C, каждый элемент которой равен $c_{ij} = \lambda a_{ij}$.

4) Матрицу A можно умножить на матрицу B ($A\cdot B = C$) лишь в то случае, когда число столбцов первой матрицы $A_{m\times \underline{n}}$ равно число строк второй матрицы $B_{\underline{n}\times l}$, т.е. $A_{m\times n}\cdot B_{n\times l} = C_{m\times l}$. При этом каждый элемент матрицы-произведения C определяется так:

$$c_{ij} = (a_{i1}\ a_{i2}\ \dots\ a_{in})\cdot\begin{pmatrix} b_{1j} \\ b_{2j} \\ \dots \\ b_{nj}\end{pmatrix} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots + a_{in}b_{nj},\ \text{для всех } i \text{ и } j.$$

Т.е., элемент c_{ij} равен сумме произведений элементов i-й строки матрицы A на соответствующие элементы j-го столбца матрицы B.

Найти произведение матрицы-строки и матрицы-столбца:

Пример 1.

1) $(5\ \ -3)\cdot\begin{pmatrix} 2 \\ 4\end{pmatrix} = 5\cdot 2 + (-3)\cdot 4 = 10 - 12 = -2$,

2) $(1\ \ -1\ \ 3)\cdot\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -2\end{pmatrix} = 1\cdot 4 + (-1)\cdot 3 + 3\cdot(-2) = 4 - 3 - 6 = -5$,

3) $(-4\ \ 1\ \ -8)\cdot\begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 0\end{pmatrix} = (-4)\cdot 2 + 1\cdot(-5) + (-8)\cdot 0 = -8 - 5 = -13$,

4) $(-2\ \ 0\ \ 5\ \ 1)\cdot\begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 0 \\ 5\end{pmatrix} = (-2)\cdot 3 + 0\cdot(-4) + 5\cdot 0 + 1\cdot 5 = -6 + 5 = -1$,

5) $(7\ \ -1\ \ 0\ \ 2\ \ -3)\cdot\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 8 \\ -4 \\ -2\end{pmatrix} = 7\cdot 0 + (-1)\cdot 2 + 0\cdot 8 + 2\cdot(-4) + (-3)\cdot(-2) = -2 - 8 + 6 = -4$.

Пример 2

Для заданных матриц A, B, C найти матрицы $3A + 2B$, C^T, AB, BA, $C^T B$, $AB + E$, $BA - 4C$.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -4 \\ -1 & -1 & 3 \\ 1 & -2 & 5\end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 3 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 0\end{pmatrix},\ \tilde{N} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 3 & -1 & 2 \\ -2 & 0 & -3\end{pmatrix}.$$

Решение

1.1) $3A+2B=3\cdot\begin{pmatrix}2&3&-4\\-1&-1&3\\1&-2&5\end{pmatrix}+2\cdot\begin{pmatrix}1&0&3\\3&-1&1\\1&2&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6&9&-12\\-3&-3&9\\3&-6&15\end{pmatrix}+$

$$+\begin{pmatrix}2&0&6\\6&-2&2\\2&4&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6+2&9+0&-12+6\\-3+6&-3-2&9+2\\3+2&-6+4&15+0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8&9&-6\\3&-5&11\\5&-2&15\end{pmatrix};$$

1.2) $C^T=\begin{pmatrix}1&-1&0\\3&-1&2\\-2&0&-3\end{pmatrix}^T=\begin{pmatrix}1&3&-2\\-1&-1&0\\0&2&-3\end{pmatrix};$

1.3) $A^2=A\cdot A=\begin{pmatrix}2&3&-4\\-1&-1&3\\1&-2&5\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2&3&-4\\-1&-1&3\\1&-2&5\end{pmatrix}=$

$$=\begin{pmatrix}2\cdot2+3\cdot(-1)+(-4)\cdot1&2\cdot3+3\cdot(-1)+(-4)\cdot(-2)&2\cdot(-4)+3\cdot3+(-4)\cdot5\\(-1)\cdot2+(-1)\cdot(-1)+3\cdot1&(-1)\cdot3+(-1)\cdot(-1)+3\cdot(-2)&(-1)\cdot(-4)+(-1)\cdot3+3\cdot5\\1\cdot2+(-2)\cdot(-1)+5\cdot1&1\cdot3+(-2)\cdot(-1)+5\cdot(-2)&1\cdot(-4)+(-2)\cdot3+5\cdot5\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}4-3-4&6-3+8&-8+9-20\\-2+1+3&-3+1-6&4-3+15\\2+2+5&3+2-10&-4-6+25\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3&11&-19\\2&-8&16\\9&-5&15\end{pmatrix};$$

1.4) $A\cdot B=\begin{pmatrix}2&3&-4\\-1&-1&3\\1&-2&5\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&0&3\\3&-1&1\\1&2&0\end{pmatrix}=$

$$=\begin{pmatrix}2\cdot1+3\cdot3+(-4)\cdot1&2\cdot0+3\cdot(-1)+(-4)\cdot2&2\cdot3+3\cdot1+(-4)\cdot0\\(-1)\cdot1+(-1)\cdot3+3\cdot1&(-1)\cdot0+(-1)\cdot(-1)+3\cdot2&(-1)\cdot3+(-1)\cdot1+3\cdot0\\1\cdot1+(-2)\cdot3+5\cdot1&1\cdot0+(-2)\cdot(-1)+5\cdot2&1\cdot3+(-2)\cdot1+5\cdot0\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}2+9-4&-3-8&6+3\\-1-3+3&1+6&-3-1\\1-6+5&2+10&3-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7&-11&9\\-1&7&-4\\0&12&1\end{pmatrix};$$

1.5) $B\cdot A=\begin{pmatrix}1&0&3\\3&-1&1\\1&2&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2&3&-4\\-1&-1&3\\1&-2&5\end{pmatrix}=$

$$=\begin{pmatrix}1\cdot2+0\cdot(-1)+3\cdot1&1\cdot3+0\cdot(-1)+3\cdot(-2)&1\cdot(-4)+0\cdot3+3\cdot5\\3\cdot2+(-1)\cdot(-1)+1\cdot1&3\cdot3+(-1)\cdot(-1)+1\cdot(-2)&3\cdot(-4)+(-1)\cdot3+1\cdot5\\1\cdot2+2\cdot(-1)+0\cdot1&1\cdot3+2\cdot(-1)+0\cdot(-2)&1\cdot(-4)+2\cdot3+0\cdot5\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}2+3&3-6&-4+15\\6+1+1&9+1-2&-12-3+5\\2-2&3-2&-4+6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5&-3&11\\8&8&-10\\0&1&2\end{pmatrix}.$$

Подчеркнем еще раз, что $AB\neq BA$.

1.6) $C^T\cdot B=\begin{pmatrix}1&3&-2\\-1&-1&0\\0&2&-3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&0&3\\3&-1&1\\1&2&0\end{pmatrix}=$

$$=\begin{pmatrix} 1\cdot1+3\cdot3+(-2)\cdot1 & 1\cdot0+3\cdot(-1)+(-2)\cdot2 & 1\cdot3+3\cdot1+(-2)\cdot0 \\ (-1)\cdot1+(-1)\cdot3+0\cdot1 & (-1)\cdot0+(-1)\cdot(-1)+0\cdot2 & (-1)\cdot3+(-1)\cdot1+0\cdot0 \\ 0\cdot1+2\cdot3-3\cdot1 & 0\cdot0+2\cdot(-1)-3\cdot2 & 0\cdot3+2\cdot1-3\cdot0 \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} 1+9-2 & -3-4 & 3+3 \\ -1-3 & 1 & -3-1 \\ 6-3 & -2-6 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 8 & -7 & 6 \\ -4 & 1 & -4 \\ 3 & -8 & 2 \end{pmatrix}$$

Ход работы:

---ё—ё—ёё+-

Задание 1.Заданы матрицы А, В и С, выполните действия

1.$\grave{A}=\begin{pmatrix} 3 & 7 & 2 \\ 4 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $\hat{A}=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\tilde{N}=\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$, $\grave{A}\cdot\hat{A}+\tilde{N}$	2.$\grave{A}=\begin{pmatrix} 1 & 6 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 4 & 4 & 1 \end{pmatrix}$, $\hat{A}=\begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\tilde{N}=\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\grave{A}\cdot\hat{A}-\tilde{N}$
3.$\grave{A}=\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \\ 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}$, $\hat{A}=\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\tilde{N}=\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\grave{A}\cdot\tilde{N}+\hat{A}$	4.$\grave{A}=\begin{pmatrix} 3 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $\hat{A}=\begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\tilde{N}=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\grave{A}\cdot\tilde{N}-\hat{A}$
5.$\grave{A}=\begin{pmatrix} 3 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $\hat{A}=\begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\tilde{N}=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$, $\hat{A}\cdot\tilde{N}+\grave{A}$	6.$\grave{A}=\begin{pmatrix} 5 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $\hat{A}=\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}$, $\tilde{N}=\begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}$, $\hat{A}\cdot\tilde{N}-\grave{A}$
7.$\grave{A}=\begin{pmatrix} 5 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$, $\hat{A}=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\tilde{N}=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$, $\hat{A}\cdot\tilde{N}+\grave{A}$	8.$\grave{A}=\begin{pmatrix} 6 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 6 \end{pmatrix}$, $\hat{A}=\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix}$, $\tilde{N}=\begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}$, $\hat{A}\cdot\tilde{N}-\grave{A}$
9.$\grave{A}=\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 3 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $\hat{A}=\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\tilde{N}=\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\grave{A}\cdot\tilde{N}+\hat{A}$	10.$\grave{A}=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 4 & -2 & 1 \end{pmatrix}$, $\hat{A}=\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\tilde{N}=\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\grave{A}\cdot\tilde{N}-\hat{A}$

Задание 2. Найти матрицу А$^{-1}$, если

$$1.\grave{A}=\begin{pmatrix}1 & -2 & 0\\ 1 & 3 & 1\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}\ 2.\grave{A}=\begin{pmatrix}2 & -2 & 0\\ 1 & 2 & 1\\ 1 & 1 & 2\end{pmatrix}\ 3.\grave{A}=\begin{pmatrix}1 & -2 & 4\\ 4 & 3 & 1\\ 1 & 4 & 1\end{pmatrix}\ 4.\grave{A}=\begin{pmatrix}5 & -2 & 0\\ 1 & 2 & 7\\ 1 & -1 & 1\end{pmatrix}\ 5.\grave{A}=\begin{pmatrix}1 & -2 & 0\\ 1 & 5 & 1\\ 0 & 2 & 1\end{pmatrix}$$

$$6.\grave{A}=\begin{pmatrix}5 & -2 & 0\\ 2 & 0 & 1\\ -6 & 1 & 1\end{pmatrix}\ 7.\grave{A}=\begin{pmatrix}2 & 2 & 0\\ 1 & -5 & 1\\ 1 & 2 & 0\end{pmatrix}\ 8.\grave{A}=\begin{pmatrix}1 & -2 & -2\\ 1 & 4 & 1\\ 3 & 2 & 1\end{pmatrix}\ 9.\grave{A}=\begin{pmatrix}1 & -2 & 0\\ 2 & 2 & 2\\ 1 & 0 & -3\end{pmatrix}$$

$$10.\grave{A}=\begin{pmatrix}2 & -2 & 0\\ 1 & 2 & 1\\ 1 & -1 & 2\end{pmatrix}$$

Задание 3. Для матриц A, B, C вычислить:

1) $5A-2B+3C$, **2)** $2A^T-3C^T+B^T$,
3) $AB-BA$, **4)** A^2-B^2, если

$$A=\begin{pmatrix}2 & 3 & 4\\ -2 & 0 & -1\\ 1 & 0 & 5\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}1 & -4 & 3\\ -1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & -2\end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix}0 & -2 & 2\\ 1 & -5 & 5\\ 3 & 1 & -1\end{pmatrix}.$$

Критерии оценки

Если практическая работа выполнена в полном объеме и правильно оформлена, то ставится оценка «5». Если практическая работа выполнена более чем на 80-89%, ставится оценка «4». Если практическая работа выполнена более чем на 70-79 %, ставится оценка «3». В противном случае работа не засчитывается.

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА №2 «Вычисление определителей второго и третьего порядка»

Цели работы:

– научить студентов вычислять определители второго и третьего порядков.

Справочный материал:

Чтобы вычислить определитель матрицы A второго порядка, надо от произведения элементов главной диагонали отнять произведение элементов побочной диагонали:

$$\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}=a_{11}\cdot a_{22}-a_{12}\cdot a_{21}$$

Пример Вычислить определитель второго порядка $\begin{vmatrix} 11 & -2 \\ 7 & 5 \end{vmatrix}$

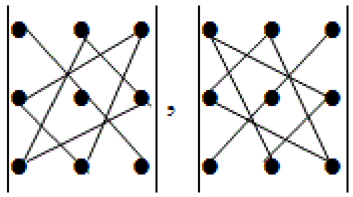
Решение. $\begin{vmatrix} 11 & -2 \\ 7 & 5 \end{vmatrix} = 11 \cdot 5 - (-2) \cdot 7 = 55 + 14 = 69$

Ответ. $\begin{vmatrix} 11 & -2 \\ 7 & 5 \end{vmatrix} = 69$

Для вычисления определителей третьего порядка существует такие правила.

Правило треугольника

Схематически это правило можно изобразить следующим образом:



«+» «–»

Произведение элементов в первом определителе, которые соединены прямыми, берется со знаком "плюс"; аналогично, для второго определителя - соответствующие произведения берутся со знаком "минус", т.е.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} -$$
$$-a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}$$

Пример

Вычислить определитель $\begin{vmatrix} 3 & 3 & -1 \\ 4 & 1 & 3 \\ 1 & -2 & -2 \end{vmatrix}$ методом треугольников.

Решение. $\begin{vmatrix} 3 & 3 & -1 \\ 4 & 1 & 3 \\ 1 & -2 & -2 \end{vmatrix} = 3 \cdot 1 \cdot (-2) + 4 \cdot (-2) \cdot (-1) +$

$+3 \cdot 3 \cdot 1 - (-1) \cdot 1 \cdot 1 - 3 \cdot (-2) \cdot 3 - 4 \cdot 3 \cdot (-2) = 54$

Ответ. $\begin{vmatrix} 3 & 3 & -1 \\ 4 & 1 & 3 \\ 1 & -2 & -2 \end{vmatrix} = 54$

Ход работы:

Вычислить определить

1) второго порядка

1. $\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 3 & -4 \end{vmatrix}$. 2. $\begin{vmatrix} 6 & 1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}$ 3. $\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 4 & 3 \end{vmatrix}$ 4. $\begin{vmatrix} -6 & 0 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}$ 5. $\begin{vmatrix} 8 & 9 \\ 1 & -4 \end{vmatrix}$

6. $\begin{vmatrix} -1 & 4 \\ -5 & 2 \end{vmatrix}$ 7. $\begin{vmatrix} 2 & 9 \\ -3 & 4 \end{vmatrix}$ 8 $\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 10 & 5 \end{vmatrix}$ 9. $\begin{vmatrix} 1 & 10 \\ -1 & -5 \end{vmatrix}$ 3. $\begin{vmatrix} 10 & 20 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}$

.

2) третьего порядка

1. $\begin{vmatrix} 1 & 8 & -3 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & -6 & -1 \end{vmatrix}$ 2. $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 9 & -1 \end{vmatrix}$ 3. $\begin{vmatrix} 1 & 8 & 5 \\ 1 & -2 & 5 \\ 1 & -6 & 1 \end{vmatrix}$ 4. $\begin{vmatrix} 2 & 8 & -3 \\ 0 & -8 & 1 \\ 5 & -6 & -1 \end{vmatrix}$ 5. $\begin{vmatrix} 1 & 8 & -3 \\ 6 & 0 & -3 \\ 3 & 1 & -1 \end{vmatrix}$

6. $\begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & -2 \end{vmatrix}$ 7. $\begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 2 & 5 & 3 \\ 2 & 0 & 9 \end{vmatrix}$ 8. $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -2 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & 4 \end{vmatrix}$ 9. $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 6 \\ 1 & 1 & 4 \\ 0 & 8 & -2 \end{vmatrix}$ 10. $\begin{vmatrix} 4 & -2 & 1 \\ -2 & 0 & 3 \\ 2 & 4 & 2 \end{vmatrix}$

Критерии оценки

Если практическая работа выполнена в полном объеме и правильно оформлена, то ставится оценка «5». Если практическая работа выполнена более чем на 80-89%, ставится оценка «4». Если практическая работа выполнена более чем на 70-79 %, ставится оценка «3». В противном случае работа не засчитывается.

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА №3 «Решение систем линейных уравнений по формулам Крамера и методом Гаусса»

Цели работы:

– сформировать умение использовать различные методы для решения систем линейных алгебраических уравнений.

Справочный материал:

1. Системы линейных уравнений (общие сведения)

Пусть задана система n линейных уравнений с n неизвестными

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ ------------------ \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \qquad (1)$$

Решением системы (1) называется совокупность чисел (k_1, k_2, …, k_n), которая при подстановке в систему (1) вместо неизвестных обращает каждое уравнение системы в тождество. Система может иметь решение, тогда она называется *совместной*, причем, если решение единственное, *система определенная*, если решений множество – *система неопределенная*. Если система не имеет решений, она называется *несовместной*. Рассмотрим два способа решения системы: метод Крамера и метод Гаусса.

2. Метод Крамера

При решении методом Крамера используем определители n-го порядка. Пусть задана система (1). Составим главный определитель системы из коэффициентов при неизвестных:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ -- & -- & -- & -- \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

ТЕОРЕМА. Если определитель системы $\Delta \neq 0$, то систему (3) можно решить по формуле Крамера, причем это решение единственное:

$$x_1 = \frac{\Delta_{x_1}}{\Delta}; \qquad x_2 = \frac{\Delta_{x_2}}{\Delta}; \qquad \dots; \qquad x_n = \frac{\Delta_{x_n}}{\Delta},$$

где определитель Δx_i может быть получен из главного определителя путем замены i-го столбца на столбец из свободных членов.

Пример 1. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 4 \\ 3x_1 - 5x_2 + 3x_3 = 1 \\ 2x_1 + 7x_2 - x_3 = 8 \end{cases}$

Составляем главный определитель, элементами которого являются коэффициенты при неизвестных:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & -5 & 3 \\ 2 & 7 & -1 \end{vmatrix}$$

и три вспомогательных определителя:

$$\Delta x_1 = \begin{vmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 1 & -5 & 3 \\ 8 & 7 & -1 \end{vmatrix}; \quad \Delta x_2 = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 3 & 1 & 3 \\ 2 & 8 & -1 \end{vmatrix}; \quad \Delta x_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & -5 & 1 \\ 2 & 7 & 8 \end{vmatrix}.$$

Определитель Δx_1 составлен из определителя Δ путем замены элементов первого столбца свободными членами системы уравнений. В определителях Δx_2 и Δx_3 соответственно второй и третий столбцы заменены свободными членами. Вычислим все четыре определителя.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & -5 & 3 \\ 2 & 7 & -1 \end{vmatrix} = 5 + 12 + 21 + 10 - 21 + 6 = 33;$$

$$\Delta x_1 = \begin{vmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 1 & -5 & 3 \\ 8 & 7 & -1 \end{vmatrix} = 20 + 48 + 7 + 40 - 84 + 2 = 33;$$

$$\Delta x_2 = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 3 & 1 & 3 \\ 2 & 8 & -1 \end{vmatrix} = -1 + 24 + 24 - 2 - 24 + 12 = 33;$$

$$\Delta x_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & -5 & 1 \\ 2 & 7 & 8 \end{vmatrix} = -40+4+84+40-7-48=33 \cdot$$

Неизвестные x_1, x_2, x_3 находим по формулам

$$x_1 = \frac{\Delta_{x_1}}{\Delta}; \qquad x_1 = \frac{\Delta_{x_2}}{\Delta}; \qquad x_3 = \frac{\Delta_{x_3}}{\Delta};$$

$$x_1 = \frac{33}{33} = 1; \qquad x_2 = \frac{33}{33} = 1; \qquad x_3 = \frac{33}{33} = 1.$$

Ответ: $x_1 = 1$; $x_2 = 1$; $x_3 = 1$.

Условия неопределенности и несовместности системы двух линейных уравнений с двумя переменными.

Если определитель системы $\Delta = 0$, то система является либо несовместной (когда $\Delta_{x_1} \neq 0$ и $\Delta_{x_2} \neq 0$), либо неопределенной (когда $\Delta_{x_1} = 0$ и $\Delta_{x_2} = 0$). В последнем случае система сводится к одному уравнению, а другое является следствием этого уравнения.

Условия несовместности системы двух линейных уравнений с двумя переменными можно записать в виде:

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{в_1}{в_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$$

Условия неопределенности системы двух линейных уравнений с двумя переменными можно записать в виде:

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{в_1}{в_2} = \frac{c_1}{c_2}$$

Если один из вспомогательных определителей отличен от нуля, то система уравнений (1) не имеет решения (если $\Delta = 0$).

Если главный и все вспомогательные определители равны нулю, то система (1) имеет бесконечно много решений.

Если главный определитель отличен от нуля, то система уравнений (1) имеет единственное решение.

3. Метод Гаусса

Эффективным методом решения и исследования систем линейных уравнений является метод последовательного исключения неизвестных, или метод Гаусса.

Идея метода Гаусса состоит в том, что данная система линейных уравнений преобразуется в равносильную ей систему специального вида, которая легко исследуется и решается.

Пример 2.

$$\begin{cases} 5x + 3y - z = 7 \\ 2x - 3y + 2z = 9 \\ x + 2y + 3z = 1 \end{cases}.$$

В результате элементарных преобразований добиваются того, чтобы в последнем уравнении системы осталось одно неизвестное (z), во втором – 2 неизвестных (y и z) а в первом – 3 неизвестных (x, y, z). За ведущее уравнение берется то, в котором коэффициент при x равен 1. Если такого уравнения нет, то его легко получить, разделив любое из уравнений системы на коэффициент при x.

Ведущим уравнением данной системы будет последнее. Перепишем систему так:

$$\begin{cases} x+2y+3z=1 \\ 2x-3y+2z=9 \\ 5x+3y-z=7 \end{cases} \quad (2)$$

Умножаем первое уравнение на (-2) и складываем со вторым, чтобы избавиться от x во втором уравнении. Результат сложения записываем на месте второго уравнения. Далее первое уравнение умножаем на (-5) и складываем с третьим, чтобы избавиться от x в третьем уравнении. Результат записываем на месте третьего уравнения. Первое уравнение при этом переписываем без изменений. Получим:

$$\begin{cases} x+2y+3z=1 \\ \quad -7y-16z=2 \\ \quad -7y-4z=7 \end{cases} \quad (3)$$

Системы уравнений (2) и (3) эквиваленты, т. е. они обе несовместны, или же обе совместны и имеют одни и те же решения.

Умножаем второе уравнение системы (5) на (-1) и складываем с третьим, чтобы избавиться от y в третьем уравнении. Первое уравнение при этом не трогаем. Результат записываем на месте третьего уравнения. Тогда

$$\begin{cases} x+2y+3z=1 \\ \quad -7y-16z=2 \\ \qquad\quad 12z=5 \end{cases}.$$

Из последнего уравнения $z=\dfrac{5}{12}$. Подставляем это значение z во втрое уравнение системы и находим y:

$$-7y-16\cdot\frac{5}{12}=2$$

$$y=-\frac{26}{11}.$$

В первое уравнение подставляем значения z и y, получаем

$$x+2\cdot\left(-\frac{26}{11}\right)+3\cdot\frac{5}{12}=1$$

$$x=\frac{187}{84}.$$

Ответ: $\qquad x=\dfrac{187}{84}; \quad y=-\dfrac{26}{11}; \quad z=\dfrac{5}{12}.$

Рекомендуется сделать проверку.

Ход работы:

Вариант 1	Вариант 2
Задание 1.Решить систему уравнений по формулам Крамера:	
а) $\begin{cases}3x-4y=18\\2x+5y=19\end{cases}$ **б)** $\begin{cases}3x-2y=1\\6x-4y=2\end{cases}$. *в)* $\begin{cases}2x_1+3x_2+x_3=1\\3x_1-x_2+2x_3=1\\x_1+4x_2-x_3=2\end{cases}$	**а)** $\begin{cases}5x-2y=7\\3x+4y=25\end{cases}$ **б)** $\begin{cases}2x-3y=2\\4x-6y=3\end{cases}$ *в)* $\begin{cases}x_1+x_2+x_3=2\\2x_1-x_2-6x_3=-1\\3x_1-2x_2=8\end{cases}$
Задание 2. Решить систему уравнений методом Гаусса	
$\begin{cases}7x_1-3x_2+5x_3=32\\5x_1+2x_2+x_3=11\\2x_1-x_2+3x_3=14\end{cases}$	$\begin{cases}5x_1-3x_2+4x_3=6\\2x_1-x_2-x_3=0\\x_1-2x_2+x_3=0\end{cases}$

Критерии оценки

Если практическая работа выполнена в полном объеме и правильно оформлена, то ставится оценка «5». Если практическая работа выполнена более чем на 80-89%, ставится оценка «4». Если практическая работа выполнена более чем на 70-79 %, ставится оценка «3». В противном случае работа не засчитывается.

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА№4 «Изображение комплексных чисел на плоскости. Действия над комплексными числами в алгебраической форме»

Цели работы:

– научиться выполнять действия над комплексными числами в алгебраической форме, решать квадратные уравнения с отрицательным дискриминантом.

Справочный материал:

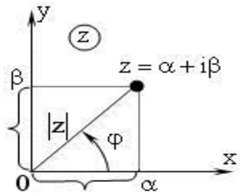
Комплексные числа - числа вида $\boldsymbol{Z = a + ib}$, где a,b – вещественные числа, а $i = \sqrt{-1}$ - *мнимая единица* ($i^2 = -1$). Множество комплексных чисел обозначается С.

Действительные числа a и b комплексного числа $\boldsymbol{Z = a + ib}$, называются *действительной и мнимой частью* числа z и обозначаются, соответственно, $Rez=x$ и $Imz=y$.

Два комплексных числа $z_1=a + ib$ и $z_2=c + id$ называются *равными* в том и только том случае, если $a = c$, $b = d$.

Запись $Z=a + ib$ называют *алгебраической формой* комплексного числа z.

Числа $Z=a + ib$ и $\bar{Z}=a - ib$ называют *комплексно сопряженными*.



Геометрическое представление комплексного числа

Если рассмотреть плоскость с прямоугольной системой координат, то любому комплексному числу $z = a + ib$ можно сопоставить точку на этой плоскости с соответствующими координатами (a;b), и радиус-вектор R комплексного числа, т.е. вектор, соединяющий начало координат с точкой на плоскости, соответствующей числу (рис. 1). Данная плоскость называется комплексной. Действительные числа располагаются на горизонтальной (вещественной) оси, мнимые части – на вертикальной (мнимой) оси.

$R = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ - *модуль комплексного числа* - расстояние от начала координат до соответствующей точки комплексной плоскости. Попросту говоря, *модуль – это длина* радиус-вектора.

$tg\varphi = \frac{b}{a}$, где φ- *аргумент комплексного числа.*

Действия над комплексными числами в алгебраической форме.

Сложение: $Z_1 + Z_2 = (a+ib)+(c+id) = (a+c) + (b+d)i.$

Вычитание: $Z_1 - Z_2 = (a+ib)-(c+id) = (a-c) + (b-d)i.$

Умножение: $Z_1 \cdot Z_2 = (a+ib)(c+id)=(ac - bd)+(ad + cb)i.$

Деление: $\frac{Z_1}{Z_2} = \frac{a+ib}{c+id} = \frac{(a+ib)(c-id)}{(c+id)(c-id)} = \frac{(a+ib)(c-id)}{c^2+d^2}.$

Умножение на сопряженное: $Z \cdot \bar{Z}=(a + bi)(a -bi)= a^2 -b^2i^2= a^2 - b^2\cdot(-1) = a^2 + b^2$ – квадрат суммы

Примеры решения задач:

Пример 1. Выполнить действия над комплексными числами, представив результат в алгебраической форме:

$Z_1 = 4+ 5i$, $Z_2 = 6-9i$.

Решение: 1) $Z_1 + Z_2 = (4+ 5i) + (6-9i)= 4+6+5i -9i.= 10 - 4i$

2) $Z_1 - Z_2 = (4+ 5i) - (6-9i)= 4-6+5i +9i.= -2 + 14i$

3) $Z_1 \cdot Z_2 = (4+5i)(6- 9i)= 24 -36i + 30i- 45i^2= 24 -6i - 45\cdot(-1) = 69 -6i.$

4) $\frac{z_1}{z_2} = \frac{4+5i}{6-9i} = \frac{(4+5i)(6+9i)}{(6-9i)(6+9i)} = \frac{24+36i+30i+9i^2}{6^2+9^2} = \frac{15+66i}{36+81} = \frac{15+66i}{117} = \frac{5+22i}{39} = \frac{5}{39} + \frac{22i}{39}$

Ответ: $Z_1 + Z_2 = 10 - 4i$, $Z_1 - Z_2 = -2 + 14i$, $Z_1 \cdot Z_2 = 69 -6i$, $\frac{z_1}{z_2} = \frac{5}{39} + \frac{22i}{39}$

Пример 2. Раскрыть скобки, используя формулы сокращенного умножения:

1) $(2+ 3i)^2 = 2^2 + 2\cdot2\cdot3i + (3i)^2 = 4 +12i + 9\cdot(-1) = -5+12i,$

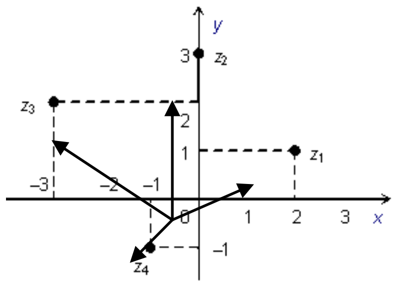
2) $(5 + 4i)(5 - 4i)= 5^2 -4^2i^2= 25 - 16\cdot(-1) = 25 + 16 =4,$

3) $(3-5i)^2 = 3^2 - 2\cdot3\cdot5i + (-5i)^2 = 9 - 30i + 25(-1) = -16- 30i.$

Пример 3. Изобразим на комплексной плоскости числа

$Z_1 = 2 + i$; $Z_2 = 3i$;

$Z_3 = -3 + 2i$; $Z_4 = -1 - i$.



Ход работы:

Вариант 1	***Вариант 2***	***Вариант 3***	***Вариант 4***
1. Изобразите на плоскости заданные комплексные числа:			
$Z_1 = 4i$ $Z_2 = 3 + i$ $Z_3 = - 4 +3i$ $Z_4 = - 2 -5i$	$Z_1 = -5i$ $Z_2 = 4 + i$ $Z_3 = -7 + 2i$ $Z_4 = -3 - 6i$	$Z_1 = -5i$ $Z_2 = 4 + i$ $Z_3 = -7 + 2i$ $Z_4 = -3 - 6i$	$Z_1 = -5i$ $Z_2 = 4 + i$ $Z_3 = -7 + 2i$ $Z_4 = -3 - 6i$
2 . Вычислите модуль комплексного числа			
$Z = 3 + 4i$	$Z = 8 + 6i$	$Z = -1 + \sqrt{3}i$	$Z = -3 - 6i$
3. Произведите сложение и вычитание комплексных чисел:			
$Z_1 = (3 + 5i)$, $Z_2 = (7 - 2i)$	$Z_1 = (3 - 2i)$, $Z_2 = (5 + 3i)$	$Z_1 = (4 + 2i)$, $Z_2 = (- 3 + 2i)$.	$Z_1 = (- 2 + 3i)$, $Z_2 = (7 - 2i)$
4. Выполните действие над комплексными числами:			

а) $(2 + 3i)(5 – 7i)$, б) $(3 + 2i)(3 – 2i)$, в) $(3 + 5i)^2$, г) $\frac{2+3i}{5-7i}$.	а) $(3 + 2i)(1 + 3i)$, б) $(7 – 6i)(7 + 6i)$, в) $(2 – 7i)^2$, г) $\frac{3+5i}{2+6i}$.	а) $(– 2 + 3i)(3 + 5i)$, б) $(4 + 3i)(4 – 3i)$, в) $(4 + 2i)^2$, г) $\frac{2-3i}{5+2i}$.	а) $(6 + 4i)(5 + 2i)$, б) $(2 – 5i)(2 + 5i)$, в) $(3 – 2i)^2$, г) $\frac{6+2i}{3-7i}$.
5. Решите уравнения:			
$x^2 – 4x + 13 = 0$.	$2{,}5x^2 + x + 1 = 0$	$x^2 + 3x + 4=0$	$4x^2 – 20x + 26 = 0$

Критерии оценки

Если практическая работа выполнена в полном объеме и правильно оформлена, то ставится оценка «5». Если самостоятельная работа выполнена более чем на 80-89%, ставится оценка «4». Если самостоятельная работа выполнена более чем на 70-79 %, ставится оценка «3». В противном случае работа не засчитывается.

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА №5 «Перевод комплексных чисел из одной формы записи в другую. Действия над комплексными числами в различных формах записи»

Цели работы:

– научиться переводить комплексные числа из алгебраической формы в тригонометрическую и выполнять действия над комплексными числами в тригонометрической форме.

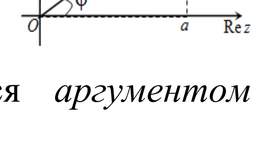
Справочный материал:

Для всякого комплексного числа $z = a + ib$ справедливо равенство:

$z=R(\cos\varphi+ i\sin\varphi)$ называют *тригонометрической формой комплексного числа*,

$z = Re^{i\varphi}$ – называют *показательной формой комплексного числа*

Здесь $R = |z| = \sqrt{a^2+b^2}$ - *модуль комплексного числа* - расстояние от начала координат до соответствующей точки комплексной плоскости. Попросту говоря, *модуль – это длина* радиус-вектора.



Угол φ между положительной полуосью действительной оси и радиус-вектором, проведенным из начала координат к соответствующей точке, называется *аргументом комплексного числа* - $\varphi = arctg\frac{b}{a}$.

Действия над комплексными числами в тригонометрической форме.

	В тригонометрической форме $z_1 = R_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$, $z_2 = R_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$	**В показательной форме** $Z_1 = R_1e^{i\varphi_1}$, $Z_2 = R_2e^{i\varphi_2}$
Умножение	$Z_1 \cdot Z_2 = R_1 \cdot R_2(\cos(\varphi_1+\varphi_2) + i\sin(\varphi_1+\varphi_2))$.	$Z_1 \cdot Z_2 = R_1R_2e^{i(\varphi_1+\varphi_2)}$
Деление	$\frac{z_1}{z_2} = \frac{R_1}{R_2}(\cos(\varphi_1-\varphi_2) + i\sin(\varphi_1-\varphi_2))$.	$\frac{Z_1}{Z_2} = \frac{R_1}{R_2}e^{i(\varphi_1-\varphi_2)}$,
Возведение в степень	$z^n = R^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi)$ - *формула Муавра*	$Z_1^n = R_1e^{in\varphi_1}$.
Извлечение корня	$z_k = \sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{R}\left(\cos\frac{\varphi+2\pi k}{n} + i\sin\frac{\varphi+2\pi k}{n}\right)$, *k = 0,1,2.....n-1*	$z_k = \sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{R}\,e^{i\left(\frac{\varphi+2\pi k}{n}\right)}$, *k = 0,1,2.....n-1*

Примеры решения задач:

Пример. А) Представить числа $z_1 = 1 - \sqrt{3}i$, $z_2 = 3 + \sqrt{3}i$ в тригонометрической и показательной форме,

Б) вычислить в тригонометрической форме: 1) $z_1 \cdot z_2$; 2) $\frac{z_1}{z_2}$; 3) z_2^5; 4) $\sqrt{z_1}$

Решение: А). Получим тригонометрическую и показательную форму $z_1 = 1 - \sqrt{3}i$

1) Найдем модуль числа - $R_1 = \sqrt{1^2 + \left(\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{4} = 2$, 2) Найдем аргумент числа - $\varphi_1 = arctg\left(\frac{-\sqrt{3}}{1}\right) = -arctg\sqrt{3} = -\frac{\pi}{3}$,

3) запишем к.ч. в тригонометрической и показательной форме:

$z_1 = 1 - \sqrt{3}i = 2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right) = 2e^{i\left(-\frac{\pi}{3}\right)}$.

$z_2 = 2 + 2i$,

1) $R_2 = \sqrt{3^2 + \left(\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$ - модуль числа,

2) $\varphi_2 = arctg\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = \frac{\pi}{6}$ - аргумент числа

3) запишем к.ч. в тригонометрической и показательной форме:

$z_2 = 3 + \sqrt{3}i = 2\sqrt{3}\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right) = 2e^{i\frac{\pi}{6}}$.

Б) Произведение:

$z_1 \cdot z_2 = 2 \cdot 2\sqrt{3}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{6}\right)\right) = 4\sqrt{3}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right) =$

$= 4\sqrt{3}\left(cos\frac{\pi}{6} - isin\frac{\pi}{6}\right) = 4\sqrt{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - i\frac{1}{2}\right) = 6 - 2\sqrt{3}i.$

Частное:

$\frac{z_1}{z_2} = \frac{2}{2\sqrt{3}}\left(cos\left(-\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6}\right) + isin\left(-\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6}\right)\right) = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + isin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right) =$

$= \frac{\sqrt{3}}{3}\left(cos\frac{\pi}{2} - isin\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\sqrt{3}}{3}(0 - 1i) = \frac{\sqrt{3}}{3}i$.

Возведение в степень:

$$z_2^5 = \left(2\sqrt{3}\left(cos\frac{\pi}{6} + isin\frac{\pi}{6}\right)\right)^5 = \left(2\sqrt{3}\right)^5 \cdot \left(cos\frac{5\pi}{6} + isin\frac{5\pi}{6}\right)$$
$$= 288\sqrt{3}\left(cos\frac{5\pi}{6} + isin\frac{5\pi}{6}\right) =$$

$= 288\sqrt{3}\left(\frac{-\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) = 432 = 144i.$

Извлечение из под знака корня:

$\sqrt{z_1} = \sqrt{2}\left(cos\frac{-\frac{\pi}{3}+2\pi k}{2} + isin\frac{-\frac{\pi}{3}+2\pi k}{2}\right).$

Пр k=0: $z_0 = \sqrt{2}\left(cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + isin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right) = \sqrt{2}\left(cos\frac{\pi}{6} - isin\frac{\pi}{6}\right) = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right) = \frac{\sqrt{6}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i;$

Пр k=1: $z_1 = \sqrt{2}\left(cos\left(\frac{-\frac{\pi}{3}+2\pi}{2}\right) + isin\left(\frac{-\frac{\pi}{3}+2\pi}{2}\right)\right) = \sqrt{2}\left(cos\frac{5\pi}{6} + isin\frac{5\pi}{6}\right) = \sqrt{2}\left(\frac{-\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) = -\frac{\sqrt{6}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i = -z_0.$

Ход работы:

1. Изобразить комплексные числа на комплексной плоскости.
2. Определить длину и аргумент каждого комплексного числа.
3. Представить данные комплексные числа в тригонометрической форме.
4. Вычислить в тригонометрической форме:

1) $z_1 \cdot z_2$*;* *2)* $\frac{z_1}{z_2}$ *;* *3)* z_2^3 *;*

Вариант 1	***Вариант 2***
$Z_1 = 2 - 2i;$ $Z_2 = -\sqrt{3} + i$ $Z_3 = 1 - i;$ $Z_4 = -2 - 2i$	$Z_1 = 2\sqrt{3} + 2i;$ $Z_2 = 3 + 3\sqrt{3}i$ $Z_3 = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i;$ $Z_4 = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$

Критерии оценки

Если практическая работа выполнена в полном объеме и правильно оформлена, то ставится оценка «5». Если самостоятельная работа выполнена более чем на 80-89%, ставится оценка «4». Если самостоятельная работа выполнена более чем на 70-79 %, ставится оценка «3». В противном случае работа не засчитывается.

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА №6 «Вычисление пределов функции в точке и на бесконечности»

Цели работы:

– углубить знания по вычислению пределов и раскрытию неопределенностей, используя принцип замены эквивалентными, I и II замечательные пределы.

Справочный материал:

1. Предел бесконечности

Определение: Постоянная величина а называется пределом переменной х, если модуль разности $|x-a|$ при изменении х становится и остается меньше любого как угодно малого положительного числа ε

$lim x = a$ или $x \to a$

Замечание: Предел постоянной величины равен самой постоянной величине: $lim a = a$

Определение: Последовательность называется бесконечно малой, если ее предел равен нулю.

Последовательность называется бесконечно большой, если ее предел равен бесконечности.

Если последовательность a_n – бесконечно большая, то последовательность $\frac{1}{a_n}$ бесконечно малая, и наоборот.

Свойства пределов:

1. $lim(x+y+\cdots+t) = lim x + lim y + \cdots + lim t$
2. $lim(x \cdot y \cdot \ldots \cdot t) = lim x \cdot lim y \cdot \ldots \cdot lim t$
3. $lim(c \cdot x) = c \cdot lim x$
4. $lim \frac{x}{y} = \frac{lim x}{lim y}, \quad если\ \ lim y \neq 0$
5. $lim x^n = (lim x)^n$

2. Предел функции в точке

Пусть даны две переменные величины х и у, такие, что y=f(x)

Определение: Число b называется пределом функции f(x)в точке а, если для всех значений х, достаточно близких к а, значение функции f(x) сколь угодно мало отличается от числа b.

$$\lim_{x \to a} f(x) = b$$

Примеры. Вычислить пределы функций в точке:

1. $\lim_{x \to 2}(3x^2-2x) = 3 \cdot 2^2 - 2 \cdot 2 = 8$

2. $\lim_{x \to 4} \frac{x^2-2x}{x-3} = \frac{4^2-2 \cdot 4}{4-3} = \frac{8}{1} = 8$

3. $\lim_{x \to 0} \frac{3x^2-2x}{2x^2-5x} = \frac{0}{0} = \lim_{x \to 0} \frac{x \cdot (3x-2)}{x \cdot (2x-5)} = \lim_{x \to 0} \frac{3x-2}{2x-5} = \frac{3 \cdot 0 - 2}{2 \cdot 0 - 5} = \frac{-2}{-5} = \frac{2}{5} =$ 0,4

4. $\lim_{x\to 3}\frac{x^2-5x+6}{3x^2-9x}=\frac{0}{0}=\lim_{x\to 3}\frac{(x-3)\cdot(x-2)}{3x\cdot(x-3)}=\lim_{x\to 3}\frac{x-2}{3x}=\frac{3-2}{3\cdot 3}=\frac{1}{3}$

Чтобы разложить числитель на множители, найдем корни квадратного уравнения:
$x^2-5x+6=0$
$D=b^2-4ac=(-5)^2-4\cdot 1\cdot 6=25-24=1$

$$x_1=\frac{-b+\sqrt{D}}{2a}=\frac{5+\sqrt{1}}{2\cdot 1}=3$$

$$x_2=\frac{-b-\sqrt{D}}{2a}=\frac{5-\sqrt{1}}{2\cdot 1}=2$$

$x^2-5x+6=a\cdot(x-x_1)\cdot(x-x_2)=(x-3)\cdot(x-2)$

3. Предел функции на бесконечности.

Определение: число А называется пределом функции y=f(x)на бесконечности, если для всех достаточно больших по модулю значений аргумента x соответствующие значения функции f(x)сколь угодно мало отличаются от числа А.

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=A$$

Примеры. Вычислить пределы функций на бесконечности:

1. $\lim_{x\to\infty}(x^3-6x^2+5x-1)=\lim_{x\to\infty}x^3\cdot\left(1-\frac{6}{x}+\frac{5}{x^2}-\frac{1}{x^3}\right)=$ $\lim_{x\to\infty}x^3=\infty$

(Так как $\lim_{x\to\infty}\frac{c}{x^n}=0$)

2. $\lim_{x\to\infty}\frac{2x+3}{5x+1}=\frac{\infty}{\infty}=\lim_{x\to\infty}\frac{x\cdot\left(2+\frac{3}{x}\right)}{x\cdot\left(5+\frac{1}{x}\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(2+\frac{3}{x}\right)}{\left(5+\frac{1}{x}\right)}=\frac{2}{5}$

3. $\lim_{x\to\infty}\frac{x^4-2x^2+3}{3x^3-5}=\frac{\infty}{\infty}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3\cdot\left(x-\frac{2}{x}+\frac{3}{x^3}\right)}{x^3\cdot\left(3-\frac{5}{x^3}\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(x-\frac{2}{x}+\frac{3}{x^3}\right)}{\left(3-\frac{5}{x^3}\right)}=$ $\lim_{x\to\infty}\frac{x}{3}=\frac{\infty}{3}=\infty$

4. Замечательные пределы

$\lim_{x\to 0}\frac{sinx}{x}$=1 **- 1-й замечательный предел**

$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$ **- 2-й замечательный предел**

Примеры. Вычислить пределы:

1. $\lim_{x\to 0}\frac{sin3x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{3\cdot sin3x}{3x}=3\cdot\lim_{x\to 0}\frac{sin3x}{3x}=3\cdot\lim_{k\to 0}\frac{sink}{k}=3\cdot 1=3$

2. $\lim_{x\to 0}\frac{2sin3x}{sin5x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{2sin3x}{x}}{\frac{sin5x}{x}}=\frac{\lim_{x\to 0}\frac{2\cdot 3\cdot sin3x}{3x}}{\lim_{x\to 0}\frac{5\cdot sin5x}{5x}}=\frac{6\cdot\lim_{x\to 0}\frac{sin3x}{3x}}{5\cdot\lim_{x\to 0}\frac{sin5x}{5x}}=\frac{6\cdot\lim_{k_1\to 0}\frac{sink_1}{k_1}}{5\cdot\lim_{k_2\to 0}\frac{sink_2}{k_2}}=\frac{6\cdot 1}{5\cdot 1}=\frac{6}{5}$

3. $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{3}{x}\right)^x=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{x}{3}}\right)^{\frac{x}{3}\cdot 3}=\lim_{k\to\infty}\left(1+\frac{1}{k}\right)^{k\cdot 3}=e^3$

4. $\lim_{x\to 0}(1+2x)^{\frac{5}{x}}=\lim_{x\to 0}(1+2x)^{\frac{1}{2x}\cdot 2\cdot 5}=\lim_{k\to 0}(1+k)^{\frac{1}{k}\cdot 10}=e^{10}$

Ход работы:

Вариант 1	Вариант 2
Найдите предел функции:	Найдите предел функции:
1) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2-x-2}{3x^2+x-2}$;	1) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x^2-4x-2}{x^2+6x-5}$;
2) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2-8x}{3x^2-2x^3+3}$;	2) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^2-5x}{3x^3-5x+1}$;
3) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x^2+5x-14}$;	3) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x^2+6x-7}$;
4) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{\sqrt{x-1}-\sqrt{x+1}}$;	4) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sqrt[3]{x^3-1}}{\sqrt{x^2-4}}$;
5) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{x}+4\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[3]{x}}$;	5) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{x}-\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[6]{x}}$;
6) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2+x-2}{x^2+6x-7}$	6) $\lim\limits_{x\to 4}\frac{x^2-3x-4}{x^2-5x+4}$
7) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{x}-\sqrt[12]{x^5}}{\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[4]{x}}$	7) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x\sqrt[4]{x^4-1}}{\sqrt{9x^3-4}}$
8) $\lim\limits_{x\to 4}\frac{x^2-16}{x^2-5x+4}$	8) $\lim\limits_{x\to -1}\frac{x^2-1}{x^2-4x-5}$
9) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2-x-2}{4x^2+x-5}$	9) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^4-4x^2-1}{x^4+2x^2-3}$
10) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sqrt[4]{x^3+x}}{\sqrt{x^2-4}}$	10) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sqrt[3]{x^3-1}}{\sqrt{x^2-4}}$
11) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{x}-\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[6]{x}}$	11) $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{x+2}-\sqrt{x})$

12) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{x^2+6x-7}$	12) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^4+5x-8}{3x^2-5x+1}$
13) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2-5x-1}{3x^3-5x^2+1}$	13) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-4x\ \ -2}{x+7x^2-1}$
14) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt[3]{x^3-1}}{\sqrt{x^2-4}}$	14) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2-5x}{3x^3-5x+1}$
15) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{x^2-25}{x^2-4x-5}$	15) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x\sqrt[4]{x^4-1}}{\sqrt{9x^3-4}}$
16) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{2}{x}\right)^{-\frac{1}{3}x}$	16) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+5}{x+1}\right)^{x+2}$
17) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+3}{x-2}\right)^{x+2}$	17) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{2}{x}\right)^{\frac{1}{4}x}$
18) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-3}{x+2}\right)^{x}$	18) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{2}{x}\right)^{-\frac{1}{3}x}$
19) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x-1}{x+2}\right)^{x}$	19) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)^{x}$
20) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{2}{x}\right)^{x}$	20) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x+5}{2x+1}\right)^{x-1}$

Критерии оценки

Если практическая работа выполнена в полном объеме и правильно оформлена, то ставится оценка «5». Если практическая работа выполнена более чем на 80-89%, ставится оценка «4». Если практическая работа выполнена более чем на 70-79 %, ставится оценка «3». В противном случае работа не засчитывается.

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА №7 «Дифференцирование функций»

Цели **работы:**

- обобщить и систематизировать знания по теме «Производная»;
- закрепить умения использовать полученные знания для нахождения производной функции.

Справочный материал:

Производной функцией $y=f(x)$ в точке x называется предел отношения приращения функции Δy к приращению аргумента Δx, когда приращение аргумента стремится к нулю: $y'(x)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$.

Основные правила и формулы дифференцирования элементарных функций:

$(x^n)' = n \cdot x^{n-1}$	$(\sin x)' = \cos x$	$(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$(a^x)' = a^x \cdot \ln a$	$(\cos x)' = -\sin x$	$(arctgx)' = \dfrac{1}{1+x^2}$
$(e^x)' = e^x$	$(tgx)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$	$(arcctgx)' = -\dfrac{1}{1+x^2}$
$(\log_a x)' = \dfrac{1}{x \cdot \ln a}$	$(ctgx)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$	$c' = 0$, $x' = 1$
$(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$	$(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$(u \pm v)' = u' \pm v'$
$(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$	$(\dfrac{u}{v})' = \dfrac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$	

Пусть функция $y = y(u)$, $u = u(x)$ – дифференцируемые функции. Тогда сложная функция $y = y(u(x))$ также дифференцируемая функция, причем: $y'_x = y_{u'} \cdot u'_x$ или $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy}{du} \cdot \dfrac{du}{dx}$. Это правило распространяется для любого конечного числа дифференцируемых функций: производная сложной функции равна произведению производных функций, ее составляющих.

Ход работы:

Вариант 1

1. Найдите производную функции

1) y = $12x^2 - \sqrt{x}$
2) y = $3\sin x + 4x^3$
3) y = $\dfrac{3}{x} - 4\cos x$
4) y = $3x^5 - 8x^{10}$
5) y = $x^3 + 4x^2 - \dfrac{5}{x^2}$
6) y = $x(x^3 + 4x^2 - 1)$
7) y = $\dfrac{x^5 + 4x^4 - 1}{x^2}$
8) y = $x \sin x$
9) y = $(x^2 + 4x - 1)^6$
10) y = $\cos(2x + \dfrac{\pi}{3})$

2. Решите уравнение $f'(x) = 0$, если $f(x) = x - \cos x$

Вариант 2.

1. Найдите производную функции

1) y = $2x^3 - 4\sqrt{x}$
2) y = $2\sin x + 3x^3$

3) y = $\frac{5}{x}$ - 7cos x

4) y = $3x^{11} - 5x^4$

5) y = x^4 - 6x + $\frac{3}{x^2}$

6) y = x (x^2 – 5x + 1)

7) y = $\frac{x^3 - 5x^2 + 1}{x^2}$

8) y = x cos x

9) y = $(x^3 - 5x + 1)^5$

10) y = sin (4x - $\frac{\pi}{4}$)

2. Решите уравнение f′(x) = 0, если $f(x) = 3x^4 - 4x^3 - 12x^2$

Критерии оценки

Если практическая работа выполнена в полном объеме и правильно оформлена, то ставится оценка «5». Если практическая работа выполнена более чем на 80-89%, ставится оценка «4». Если практическая работа выполнена более чем на 70-79 %, ставится оценка «3». В противном случае работа не засчитывается.

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА №8 «Решение прикладных задач с помощью производной»

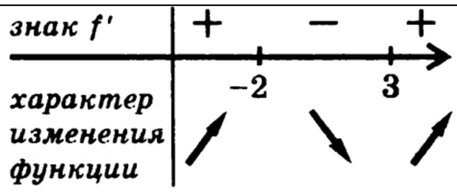
Цели работы:

- закрепить и обобщить умения и навыки исследования функций и построения графиков с помощью производной.

Справочный материал:

Схема применения производной для нахождения интервалов монотонности и экстремумов

Этапы	**Пример** для функции $y = 2x^3 - 3x^2 - 36x + 5$
Найти область определения функции и интервалы, на которых функция непрерывна.	Обл. определения: R Функция непрерывна во всей обл. определения
Найти производную $f'(x)$.	$f'(x)=6x^2-6x-36$
Найти критические точки, т.е. точки, в которых производная функции равна нулю или не существует.	$f'(x)=0$, $6x^2-6x-36=0$, $x_1=-2$, $x_2=3$

В каждом из интервалов, на которые область определения разбивается критическими точками, определить знак производной и характер изменения функции (с помощью достаточных условий монотонности).	
Относительно каждой критической точки определить, является ли она точкой максимума, минимума или не является точкой экстремума.	*x=-2 -точка максимума* ($x_{max}=-2$) *x=3-точка минимума* ($x_{min}=3$)
Записать результат исследования функции: промежутки монотонности и экстремумы.	$f(x)$ возрастает при $x \in (-\infty; -2)$ и при $x \in (3;\infty)$; $f(x)$ убывает при $x \in (-2; 3)$; $x_{max}=-2, y_{max} = f(-2) = 49$; $x_{min}=3, y_{min} = f(3) = -76$

Наибольшее и наименьшее значения функции, непрерывной на отрезке

Функция, непрерывная на отрезке, достигает своего наибольшего и наименьшего значений на этом отрезке либо в критических точках, принадлежащих отрезку, либо на его концах.

Схема нахождения наибольшего и наименьшего значений функции, непрерывной на отрезке

Этапы	Пример для функции $y = 2x^3 - 3x^2 - 36x + 5$ на отрезке [0; 4]
Найти производную $f'(x)$.	$f'(x)=6x^2-6x-36$
Найти на данном отрезке критические точки, т.е. точки, в которых $f'(x) = 0$ или не существует.	$f'(x) = 0$ при $x = -2$ и при $x = 3$. Отрезку [0; 4] принадлежит только одна критическая точка: $x = 3$.
Вычислить значения функции в критических точках и на концах отрезка.	$f(0)=5$ $f(3)=-76$ $f(4)=-59$
Из вычисленных значений выбрать наименьшее и наибольшее.	$\max_{[0;4]} f(x) = f(0) = 5$ $\min_{[0;4]} f(x) = f(3) = -76$

Ход работы:

Вариант 1.

1. Найти интервалы монотонности и экстремумы функции $f(x)=x^3-3x^2-9x-4$.

2. Найти наименьшее и наибольшее значение функции на указанном промежутке

$f(x)=2x^3-9x^2-3$ на отрезке [–1; 4].

3. Исследовать функцию $y = -x^3+4x^2-4x$ и построить ее график.

Вариант 2.

1. Найти интервалы монотонности и экстремумы функции $f(x)=x^3+7x^2-5x+2$.

2. Найти наименьшее и наибольшее значение функции на указанном промежутке

$f(x)=2x^3+3x^2+2$ на отрезке [–2; 1].

3. Исследовать функцию $y= x^3+6x^2+9x$ и построить ее график

Критерии оценки

Если практическая работа выполнена в полном объеме и правильно оформлена, то ставится оценка «5». Если практическая работа выполнена более чем на 80-89%, ставится оценка «4». Если практическая работа выполнена более чем на 70-79 %, ставится оценка «3». В противном случае работа не засчитывается.

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА №9 «Методы вычисления определенного интеграла»

Цели работы:

- обобщить и систематизировать знания, полученные при изучении темы «Первообразная. Определённый интеграл».
- расширить представления о практическом значении данной темы.

Справочный материал:

<table>
<tr><td colspan="3">Неопределенным интегралом функции $y=f(x)$ называется совокупность первообразных для данной функции: $\int f(x)dx=F(x)+C$, где $(F(x)+C)'=f(x)$, $d(F(x)+C)=f(x)\cdot dx$.</td></tr>
<tr><td colspan="3">Рассмотрим таблицу интегрирования элементарных функций. Она поможет Вам проинтегрировать любую функцию.</td></tr>
<tr><td>1. $\int x^n dx=\frac{x^{n+1}}{n+1}+C$</td><td>2. $\int \frac{dx}{x}=\ln\lvert x\rvert+C$</td><td>3. $\int e^x dx=e^x+C$</td></tr>
</table>

4. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$	5. $\int \sin x dx = -\cos x + C$	6. $\int \cos x dx = \sin x + C$
7. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = tgx + C$	8. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -ctgx + C$	9. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$
	10. $\int \frac{dx}{1+x^2} = arctgx + C$	

Рассмотрим основные свойства неопределенных интегралов:	
1.	Постоянный множитель можно выносить за знак интеграла $\int m \cdot f(x) dx = m \cdot \int f(x) dx$, где $m = const$.
2.	Неопределенный интеграл от алгебраической суммы функций равен алгебраической сумме интегралов от этих функций $\int (f(x) + g(x)) dx = \int f(x) dx + \int g(x) dx$

Определение: Если F(x) – первообразная функции *f(x)*, то разность F(*b*) – F(*a*) называется определённым интегралом от функции *f(x)* на отрезке [a ;b] и обозначают $\int\limits_a^b f(x)\,dx$

a – нижний предел интегрирования

b – верхний предел интегрирования

f(x)- подынтегральная функция

Правило вычисления определённого интеграла:

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

Формула Ньютона – Лейбница

Ход работы:

Вариант 1.

1. Докажите, что ***F(x)*** – первообразная для функции ***f(x)*** на указанном промежутке, если:

а) $F(x)=\frac{x^2}{2}$, $f(x)=x$, $x \in (-\infty; +\infty)$;

б) $F(x)=x^{-2} - \frac{1}{3}$, $f(x)=-2x^{-8}$, $x \in (0; +\infty)$;

в) $F(x)=3\sqrt[4]{x^3} + \sqrt{2}$, $f(x)=\frac{9}{4\sqrt[4]{x}}$, $x \in (0; +\infty)$;

2. Для функции $f(x)=x^2$ найдите первообразную,график которой проходит через точку М (-1;2)

3. Вычислите интеграл:

а) $\int\limits_{0,25}^{0,5} \frac{dx}{x^2}$ б) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} 4\cos x dx$ в) $\int\limits_{-1}^{2} 2x^3 dx$

Вариант 2.

1. Докажите, что ***F(x)*** – первообразная для ***f(x)*** на указанном промежутке, если:

а) $F(x)=\frac{x^7}{7}$, $f(x)=x^6$, $x \in (-\infty; +\infty)$;

б) $F(x)=2x^{-1}+\sqrt{5}$, $f(x)=-2x^{-2}$, $x \in (0; +\infty)$;

в) $F(x)=3\sqrt[4]{x}-\frac{1}{5}$, $f(x)=\frac{3}{4\sqrt[4]{x^3}}$, $x \in (0; +\infty)$;

2. Для функции ***$f(x)=x^3$*** найдите первообразную,график которой проходит проходит через точку М (1;-1).

3. Вычислите интеграл

а) $\int_{0,5}^{1} \frac{dx}{x^3}$ б) $\int_{\frac{\pi}{8}}^{\frac{\pi}{4}} \sin 4x dx$ в) $\int_{-2}^{\frac{1}{2}} 3x^2 dx$

Критерии оценки

Если практическая работа выполнена в полном объеме и правильно оформлена, то ставится оценка «5». Если практическая работа выполнена более чем на 80-89%, ставится оценка «4». Если практическая работа выполнена более чем на 70-79 %, ставится оценка «3». В противном случае работа не засчитывается.

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА №10 «Решение прикладных задач с помощью интеграла»

Цели работы:

– закрепить усвоение теоретического материала по данной теме через решение упражнений;

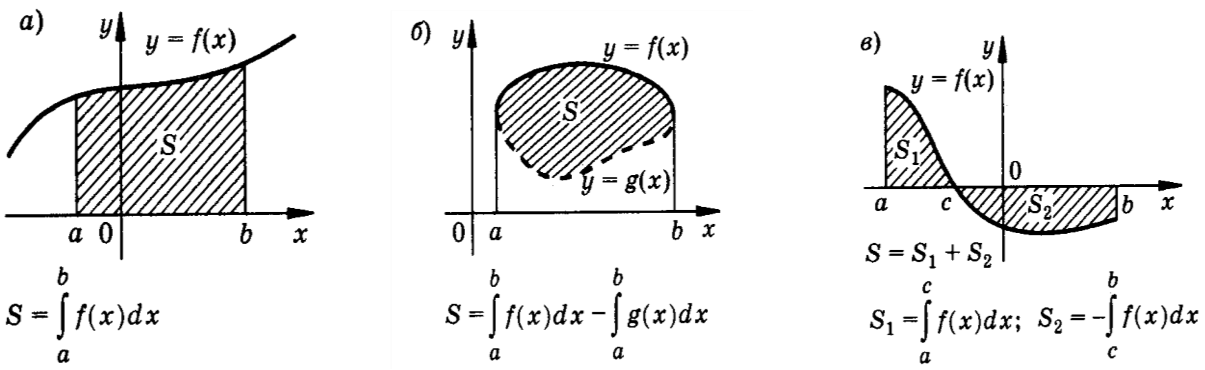
– выработать умения применять определенные интегралы для нахождения площадей плоских фигур, длин кривых и объемов тел вращения.

Справочный материал:

Пусть функция f(x) непрерывна и неотрицательна на отрезке [a;b]. Тогда площадь соответствующей КРИВОЛИНЕЙНОЙ ТРАПЕЦИИ находится по формуле Ньютона-Лейбница:

$$S = \int_a^b f(x)dx = F(a)\Big|_a^b = F(b) - F(b)$$

Вычисление площади плоской фигуры



<u>Пример:</u> Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями: $y = x^2$ и $y = 2 - x^2$.

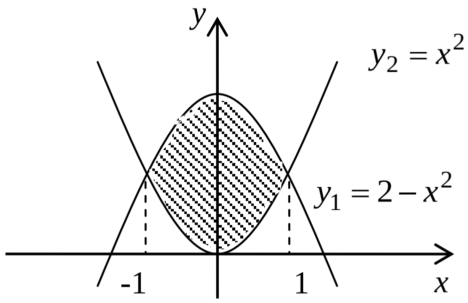
<u>Решение</u>: Найдем координаты точек пересечения линий:

$$\begin{cases} y = x^2, \\ y = 2 - x^2 \end{cases} \Rightarrow\ x^2 = 2 - x^2 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 = 1 \quad \Leftrightarrow$$

$x_1 = -1; \quad x_2 = 1 \Rightarrow a = -1; \quad b = 1.$

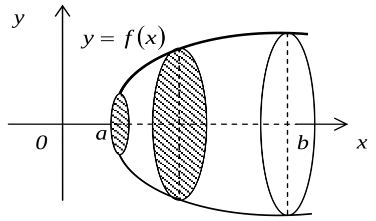
$$S = \int_{-1}^{1} \left(\left(2 - x^2\right) - x^2\right)dx = \int_{-1}^{1}\left(2 - 2x^2\right)dx = 2\int_{-1}^{1}\left(1 - x^2\right)dx =$$

$$= 2\left(x - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_{-1}^{1} = 2\left(1 - \frac{1}{3} - \left(-1 - \frac{(-1)^3}{3}\right)\right) = \frac{8}{3};$$

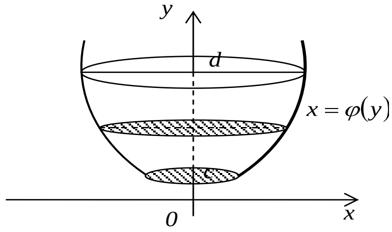


Нахождение объема тел вращения

Пусть функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $x \in [a; b]$ Тогда объём тела, полученного вращением вокруг оси Ox криволинейной трапеции, ограниченной сверху графиком функции $y = f(x)$, снизу Ox, определяется формулой: $V_x = \pi \int_a^b f^2(x)dx$.



Если криволинейная трапеция ограниченна графиком непрерывной функции $x = \varphi(y)$ и прямыми $x = 0$, $y = c$, $y = d$ $(c < d)$, то объём тела, образованного вращением этой трапеции вокруг оси Oy, по аналогии с формулой (20), равен: $V_y = \pi\int\limits_c^d \varphi^2(y)dy$.



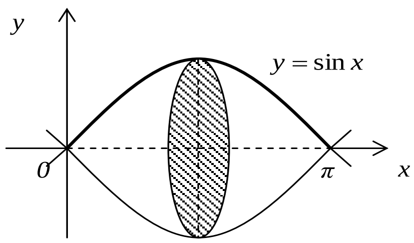
<u>Пример:</u> Вычислить объем тела, полученного вращением фигуры $y = \sin x;\ \ y = 0;\ \ 0 \le x \le \pi$, вокруг оси Ox.

Решение:

В условиях нашей задачи $y = \sin x$, $a = 0$, $b = \pi$.

$$V_x = -\pi\int\limits_0^{\pi} \sin^2 x dx = \left\{\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}\right\} = \pi\int\limits_0^{\pi} \frac{1-\cos 2x}{2} dx = \frac{\pi}{2}\left(\int\limits_0^{\pi} dx - \int\limits_0^{1} \cos 2x\, dx\right) =$$

$$= \frac{\pi}{2}\left(x - \frac{1}{2}\sin 2x\right)\Bigg|_0^{\pi} = \frac{\pi}{2}\left(\left(\pi - \frac{1}{2}\sin 2\pi\right) - \left(0 - \frac{1}{2}\sin 0\right)\right) = \frac{\pi}{2}\cdot\pi = \frac{\pi^2}{2}.$$



Вариант 1

1.Вычислите площади фигур, ограниченных указанными линиями:

а.$y=x^2$, $y=2x+3$;

б.$y=1/2x^2-x+1$, $y=-1/2x^2+3x+6$;

в.$y=-x^2/2$, $y=x-3/2$.

2.Вычислить:

а. длину дуги кривой $y = \ln x$ от точки с абсциссой $x_1 = \frac{3}{4}$ до точки $x_2 = 2{,}4$.

б. длину дуги кривой $y = x^2$ -1, отсеченной осью Ox.

3.Вычислить объем тела, полученного при вращении вокруг оси OX фигуры, ограниченной заданными линиями:

а. $y=4-x^2$, $y=0$;

б. $y=4x-x^2$, $y=0$.

Вариант 2

1. Вычислите площади фигур, ограниченных указанными линиями:
а. $y=2x^2$, $y=x/2$;
б. $y=1/2x^2+x+2$, $y=-1/2x^2-3x+7$;
в .$y=4x^2$, $y=-x$.
2. Вычислить:
а. длину дуги кривой $y=\frac{1}{3}x\sqrt{x}$ от $x_1=0$ до $x_2=12$.

б. длину дуги полукубической параболы $y=\sqrt{(x-2)^3}$ от точки $A(2;\,0)$ до точки $B(6;\,8)$.

3. Вычислить объем тела, полученного при вращении вокруг оси OX фигуры, ограниченной заданными линиями:
а. $y=4x-x^2$, $y=3$;
b. $y=4-x^2$, $y=-2x+4$.

Критерии оценки

Если практическая работа выполнена в полном объеме и правильно оформлена, то ставится оценка «5». Если практическая работа выполнена более чем на 80-89%, ставится оценка «4». Если практическая работа выполнена более чем на 70-79 %, ставится оценка «3». В противном случае работа не засчитывается.

Список рекомендуемой литературы

1. Алгебра и начала математического анализа, 10–11 класс, Алимов Ш.А., Москва, Просвещение, 2020

2. Алгебра и начала математического анализа, 10–11 класс, Колмагоров А.Н., Москва, Просвещение, 2019

3. Алгебра и начала математического анализа, 10–11 класс, Мордкович А.Г., Мнемозина, 2019

4. Сборник задач по математике, Богомолов Н.В. – М.: Дрофа, 2005

5. Руденко В.Г., Янукян Э.Г. Пособие по математике, Пятигорск 2002

6. Григорьев С.Г. Математика: учебник для СПО. – М.: Изд. центр «Академия», 2019

7. Гусев В.А. Математика для профессий и специальностей соц.-экон. профиля: учебник для образовательных учреж. нач. и сред. проф. образ. – М.: Изд. центр «Академия», 2013

МАТЕМАТИКА

Практикум для студентов 2-х курсов
специальности 13.02.07 Электроснабжение
(по отраслям)

Корректор Чагова О.Х.
Редактор Чагова О.Х.

Сдано в набор 09.02.2024 г.
Формат 60х84/16
Бумага офсетная.
Печать офсетная.
Усл. печ. л.2,09.
Заказ № 4857
Тираж 100 экз.

Оригинал-макет подготовлен
в Библиотечно-издательском центре «СевКавГА»
369000, г. Черкесск, ул. Ставропольская, 36