МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

СЕВЕРО-КАВКАЗСКАЯ ГОСУДАРСТВЕННАЯ АКАДЕМИЯ

А.А. Эркенова

ДИСКРЕТНАЯ МАТЕМАТИКА

Учебно-методическое пособие для обучающихся
на 1 курсе по направлению подготовки
09.03.03 – «Прикладная информатика»

г. Черкесск 2022г

УДК 51
ББК 22.18
Э 78

Рассмотрено на заседании кафедры «Математика»
Протокол № 1 от «02» 09. 2022 г.
Рекомендовано к изданию редакционно-издательским советом СКГА.
Протокол № 24 от «26» 09. 2022 г.

Рецензенты:
Кочкаров А. М. – д.ф.-м.н., профессор
Коркмазова З. О.– к.ф.-м.н., доцент

Э 78 **Эркенова, А.А**. Дискретная математика: учебно-методическое пособие для обучающихся на 1 курсе по направлению подготовки 09.03.03 Прикладная информатика / А.А. Эркенова.– Черкесск: СКГА, 2022. –28 с.

Учебно-методическое пособие предназначено для обучающихся по направлению подготовки 09.03.03 «Прикладная информатика», содержит краткий теоретический материал по курсу дискретной математики, который сопровождается рассмотрением большого количества образцов решения задач и заданий лабораторной работы.

УДК 51
ББК 22.18

Содержание

1. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ МНОЖЕСТВ

Основные обозначения

$\wedge$ логический знак “и”
$\vee$ логический знак “или”
$\exists$ существует
$\forall$ для любого
Δ определение
$\left.\begin{matrix} A \Rightarrow B \\ B \Leftarrow A \end{matrix}\right\}$ из утверждения A следует утверждение B
$A \Leftrightarrow B$ утверждение A равносильно утверждению B
$\overset{\Delta}{=}$ равенство по определению
N множество натуральных чисел
Z множество целых чисел
R множество действительных чисел
R_+ множество положительных действительных чисел
$\overline{R}_+$ множество неотрицательных действительных чисел
R_- множество отрицательных действительных чисел
$\overline{R}_-$ множество неположительных действительных чисел

Понятия *множества* и *элемента множества* настолько общие, что им нельзя дать какие-либо определения, которые не сводились бы просто к замене синонимами.

Множества будем обозначать прописными буквами $A, B, \ldots$, а их элементы – малыми $a, b, \ldots$.

Утверждение “элемент a принадлежит множеству A ” записывается так: $a \in A$ (или $A \ni a$). Запись $a \notin A$ (или $a \overline{\in} A$) означает, что a не принадлежит A.

Определение 1. Множество называется *конечным,* если оно состоит из конечного числа элементов. В противном случае оно называется бесконечным.

Определение 2. Множества называются *равными*, если они состоят из одних и тех же элементов. Если множества A и B равны, то пишут $A = B$, в противном случае пишут $A \neq B$.

Определение 3. Множество, не содержащее ни одного элемента, называется *пустым* и обозначается символом $\varnothing$.

Пример пустого множества – множество точек пересечения параллельных прямых.

Способы задания множеств

Чаще всего множества задают одним из двух способов:

1. *Перечисление* – дать перечень элементов множества.

Пример 1. Множество, состоящее из элементов 1,2,5:

$$A = \{1;\quad 2;\quad 5\}.$$

Пример 2. Множество всех натуральных чисел:

$$N = \{1;\ 2;\ 3;\ldots\}.$$

Указанный способ задания обычно приемлем для конечных множеств, хотя с его помощью можно иногда задать и некоторые бесконечные множества (например, множество натуральных чисел). Второй способ задания множеств является более общим.

2. *Описание* – дать правило (указать свойство) для определения того, принадлежит или нет данный элемент рассматриваемому множеству:

$X = \{x \mid \text{свойство}\}$ или $X = \{x \mid$ утверждение, верное для любого $x \in X$ и ложное для любого $x \notin X\}$.

Пример 1. Множество четных натуральных чисел можно записать можно записать так:

$$A = \{2n \mid n \in N\}.$$

Пример 2. Множество действительных чисел, принадлежащих отрезку $[a, b]$ можно записать так:

$$X = \{x \in R \mid a \le x \le b\}.$$

Определение 4. Если каждый элемент множества A является элементом множества B , то говорят, что множество A является *подмножеством множества* B и пишут $A \subset B$ или $B \supset A$. Первая из этих записей читается так: “множество A содержится во множестве B ”. Вторая запись читается так: “множество B содержит множество A ”.

Из определения подмножества следует:

1) $A \subset A$, т.е. каждое множество является своим подмножеством;

2) $\varnothing \subset A$, т.е. пустое множество является подмножеством любого множества;

3) если $A \subset B$ и $B \subset C$, то $A \subset C$;

4) $A = B$ тогда и только тогда, когда $A \subset B$ и $B \subset A$

Примеры включений $N \subset R_+$, $N \subset Z \subset R$.

Пример. Указать все подмножества множества $\{a, b, c\}$.

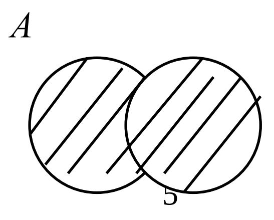
Решение. $\varnothing$, $\{a, b, c\}$, $\{a, b\}$, $\{a, c\}$, $\{b, c\}$, $\{a\}$, $\{b\}$, $\{c\}$.

Операции над множествами

Определение 1. *Объединением* множеств A и B называется множество $A \cup B$, состоящее из тех и только тех элементов, которые принадлежат хотя бы одному из множеств A или B .

Используя логическую символику, объединение двух множеств можно записать так:

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \vee x \in B\}.$$



Примеры.

1) $A = \{1,3,5\}$, $B = \{2,3,5,8\}, A \cup B = \{1,2,3,5,8\}$.

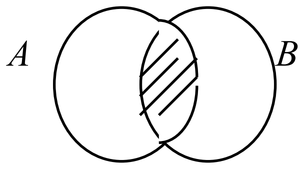
2) $A = \{x \in R | x > 1\}$, $B = \{x \in R | x < 2\}$, $A \cup B = R$.

3) $A =]1,5]$, $B = [2,6]$, $A \cup B =]1,6]$.

Определение 2. *Пересечением* множеств A и B называется множество $A \cap B$, состоящее из элементов, принадлежащих как множеству A, так и множеству B.

Используя логическую символику, можно записать

$$A \cap B = \{x | \ x \in A \wedge x \in B\}.$$



$A \cap B$

Если $A \cap B = \varnothing$, то говорят, что множества A и B не пересекаются.

Примеры.

1) $A = \{1,3,5\}$, $B = \{2,3,5,8\}, A \cap B = \{3,5\}$.

2) $A = \{x \in R | x > 1\}$, $B = \{x \in R | x < 2\}$, $A \cap B = \{x \in R | 1 < x < 2\}$.

3) $A =]1,5]$, $B = [2,6]$, $A \cap B = [2,5]$.

Операции объединения и пересечения обладают следующими свойствами:

1. Коммутативности:

а) $A \cup B = B \cup A$; б) $A \cap B = B \cap A$.

2. Ассоциативности:

а) $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$; б) $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$.

3. Дистрибутивности:

а) $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$;

б) $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$.

4. а) $A \cup A = A$; б) $A \cap A = A$.

5. Если $A \subset B$, то а) $A \cup B = B$; б) $A \cap B = A$.

6. а) $A \cup \varnothing = A$; б) $A \cap \varnothing = \varnothing$.

Доказательство свойства 3а)

Пусть $x \in (A \cup B) \cap C \Rightarrow x \in A \cup B$ и $x \in C \Rightarrow x \in A$ и $x \in C$, либо $x \in B$ и $x \in C \Rightarrow$ либо $x \in A \cap C$, либо $x \in B \cap C \Rightarrow x \in (A \cap C) \cup (B \cap C)$

$$(A \cup B) \cap C \subset (A \cap C) \cup (B \cap C). \qquad (*)$$

Обратно, пусть $x \in (A \cap C) \cup (B \cap C) \Rightarrow$ либо $x \in A \cap C$, либо $x \in B \cap C \Rightarrow$ или $x \in A$ и $x \in C$, или $x \in B$ и $x \in C \Rightarrow$ либо $x \in A$ либо $x \in B$, и $x \in C \Rightarrow x \in A \cup B$ и $x \in C \Rightarrow x \in (A \cup B) \cap C$

$$(A \cap C) \cup (B \cap C) \subset (A \cup B) \cap C. \qquad (**)$$

Из условий (*), (**) следует справедливость равенства 3а), т.е.

$$\left(A \cup B\right) \cap C = \left(A \cap C\right) \cup \left(B \cap C\right).$$

Упражнение. Доказать самостоятельно свойства 3б), 5, 6.

Понятия объединения и пересечения двух множеств обобщаются на случай произвольного числа множеств.

Пусть $S = \{s\}$ – множество индексов и каждому индексу S сопоставлено множество A_s. Множество $\{A_s\}$, элементами которого являются множества A_s, $s \in S$ называют системой или семейством множеств.

Определение 3. *Объединением системы множеств* A_s, $s \in S$ называется множество всех элементов, принадлежащих хотя бы одному из множеств системы и обозначается

$$\bigcup_{s \in S} A_s .$$

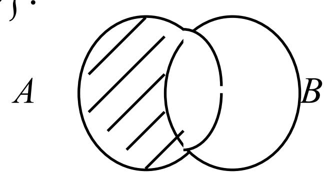
Пример. $\bigcup_{z \in Z} \left]z.\, z+1\right] = R$.

Определение 4. *Пересечением* системы множеств A_s, $s \in S$ называется множество всех элементов, содержащихся в каждом множестве системы и обозначается

$$\bigcap_{s \in S} A_s .$$

Пример. $\bigcap_{n \in N} \left]-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right[= \{0\}$.

Определение 5. *Разностью* множеств A и B называется множество, состоящее из тех элементов A, которые не входят в B: $A \setminus B = \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\}$.



$A \setminus B$

Если $B \subset A$, то разность $A \setminus B$ называется *дополнением* множества B в A.

Часто приходится рассматривать тот или иной запас множеств, являющихся подмножествами некоторого основного множества E (будем называть его универсальным). В этом случае $E \setminus B$ называется просто *дополнением множества* B и обозначается $\subset B$.

Примеры.

1) $A = \{1;2;3;4\}$, $B = \{-2;0;3;5\}$, $A \setminus B = \{1;2;4\}$, $B \setminus A = \{-2;0;5\}$.

2) $A = \{x \in R \mid x > 1\}$, $B = \{x \in R \mid x < 2\}$; $A \setminus B = \{x \in R \mid x \geq 2\}$, $B \setminus A = \{x \in R \mid x \leq 1\}$.

3) $E = R$, $A = R_+$, $\subset A = \overline{R_-}$.

4) Доказать принцип двойственности: для любых двух множеств $A, B \subset E$ справедливы равенства

$$\text{а) } \complement(A \cup B) = \complement A \cap \complement B; \quad \text{б) } \complement(A \cap B) = \complement A \cup \complement B,$$

т.е. дополнение объединения двух множеств равно пересечению их дополнений, дополнение пересечения двух множеств равно объединению их дополнений.

Докажем а). Пусть $x \in \complement(A \cup B) \Rightarrow x \notin A \cup B \Rightarrow x \notin A \wedge x \notin B \Rightarrow$ $\Rightarrow x \in \complement A \wedge x \in \complement B \Rightarrow x \in \complement A \cap \complement B$

$$\complement(A \cup B) \subset \complement A \cap \complement B. \qquad (*)$$

Обратно, пусть $x \in \complement A \cap \complement B \Rightarrow x \in \complement A \wedge x \in \complement B \Rightarrow x \notin A \wedge x \notin B \Rightarrow$ $\Rightarrow x \notin A \cup B \Rightarrow x \in \complement(A \cup B)$

$$\complement A \cap \complement B \subset \complement(A \cup B). \qquad (**)$$

Из условий (*), (**) следует равенство

$$\complement(A \cup B) = \complement A \cap \complement B.$$

Упражнение. Доказать самостоятельно равенство 4б).

Декартово произведение множеств

Определение. *Декартовым произведением* $A \times B$ множеств A и B называется множество упорядоченных пар (a, b), где $a \in A$, $b \in B$:

$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A, b \in B\}.$$

Примеры.

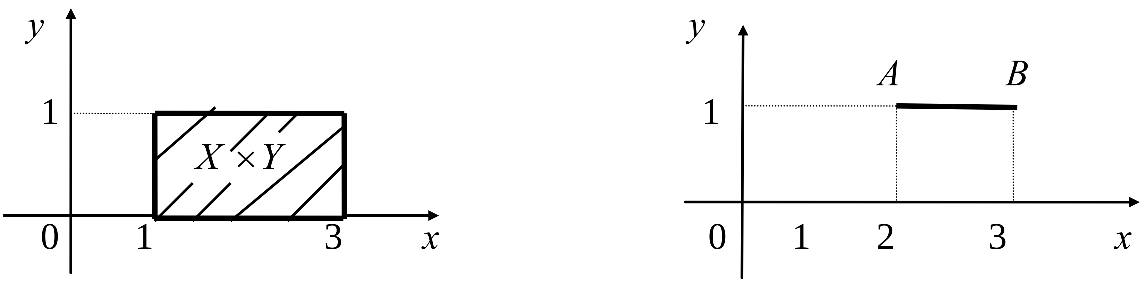
1. Если $A = \{0,1\}$, $B = \{-1,2,3\}$, то

$A \times B = \{(0,-1),(0,2),(0,3),(1,-1),(1,2),(1,3)\}$,

$B \times A = \{(-1,0),(-1,1),(2,0),(2,1),(3,0),(3,1)\}$.

2. $X = [1,3]$, $Y = [0,1]$, то $X \times Y = \{(x, y) \in R^2 \mid 1 \le x \le 3, \quad 0 \le y \le 1\}$.

На координатной плоскости произведение $X \times Y$ изобразится заштрихованным прямоугольником, показанным на рис. 1а.



а) б)

Рис. 1

3. $X=[2,3]$, $Y=\{1\}$, $X\times Y=\{(x,y)\in R^2 \mid \ 2\le x\le 3,\ \ y=1\}$.

В этом случае декартово произведение $X\times Y$ представляет собой множество точек отрезка AB (рис. 1б)).

По аналогии можно определить произведение нескольких множеств.

Определение. *Декартовым произведением n множеств* $A_1, A_2, \ldots, A_n$ называется множество

$$A_1\times A_2\times\ldots\times A_n=\{(x_1,x_2,\ldots,x_n) \mid \ x_1\in A_1,\ldots,x_n\in A_n\}.$$

Произведение $A\times A\times\ldots\times A$ обозначается A^n - декартово произведение n одинаковых сомножителей.

Например, если $A=R$, то

$R^2=R\times R$ представляет собой плоскость;

$R^3=R\times R\times R$ – трехмерное пространство;

$R^n=R\times R\times\ldots\times R$ – n -мерное пространство, элементами которого являются упорядоченные наборы из n действительных чисел.

Сечения упорядоченных множеств

Определение. Множество X называется упорядоченным множеством, если для любых двух его элементов a и b определено одно из трех отношений $a<b$, $a=b$, $a>b$, причем, если $a<b$ и $b<c$, то $a<c$.

Всякое подмножество упорядоченного множества упорядочено.

Примером упорядоченных множеств является множество действительных чисел.

Определение. Два множества $A\subset R$ и $B\subset R$ называются сечением множества действительных чисел R, если:

1. Объединение множеств A и B составляет все множество действительных чисел R, $A\cup B=R$;

2. Каждое из множеств A и B не пусто, $A=\varnothing$, $B=\varnothing$.

3. Каждое число множества B: если $a\in A$, $b\in B$, то $a<b$.

Свойство 1^0 означает, что каждое действительное число принадлежит по крайней мере, одному из множеств A и B.

Из свойства 3^0 следует, что множества A и B не пересекаются: $A\cap B=\varnothing$.

Сечение множества действительных чисел, образованное множествами A и B обозначается через $A|B$.

Множество A называется нижним классом, а множество B – верхним классом данного сечения.

Пусть $X=R$. Простые примеры сечения в множестве действительных чисел можно получить следующим образом. Зафиксируем какое-либо число $\alpha\in R$, то множества

$$A=\{x:\ x\le\alpha\} \text{ и } B=\{y:\ y>\alpha\}, \tag{1}$$

а также

$$A=\{x:\ x<\alpha\} \text{ и } B=\{y:\ y\ge\alpha\} \tag{2}$$

образуют сечения множества R.

В обоих этих случаях говорят, что сечение $A|B$ производится числом α и пишут $\alpha = A|B$.

Отметим свойства сечений, производящихся некоторым числом.

1. *В случае (1) в классе A есть наибольшее число α, а в классе B нет наименьшего числа. В случае (2) в классе A нет наибольшего числа, а в классе B есть наименьшее число, им является число α.*

Доказательство. Рассмотрим, например, случай (1). То, что α является наибольшим числом в классе A, следует из первой формулы (1), задающей множество A.

Покажем, что во множестве B нет наименьшего числа. Допустим противное: пусть в B есть наименьшее число β. Из условия, что $\beta \in B$, следует, что $\alpha < \beta$. Следовательно, $\alpha + \alpha < \alpha + \beta$, т.е. $\alpha < \frac{\alpha + \beta}{2}$. Отсюда, в силу определения множества B, получаем, что $\frac{\alpha + \beta}{2} \in B$. Аналогично из $\alpha < \beta$, следует $\alpha + \beta < \beta + \beta$, т.е. $\frac{\alpha + \beta}{2} < \beta$, а так как β – наименьшее число в классе B, то $\frac{\alpha + \beta}{2} \in A$. Полученное противоречие доказывает утверждение.

2. *Число, производящее сечение, единственно*.

Доказательство. Допустим противное, что существует сечение, которое определяется двумя разными числами: $\alpha = A|B$ и $\beta = A|B$. Пусть, для определенности $\alpha < \beta$. Тогда как было показано при доказательстве предыдущего свойства $\alpha < \frac{\alpha + \beta}{2} < \beta$. Из неравенства $\alpha < \frac{\alpha + \beta}{2}$ следует, что в случае (1) $\frac{\alpha + \beta}{2} \in B$. Аналогично из неравенства $\frac{\alpha + \beta}{2} < \beta$ следует, что $\frac{\alpha + \beta}{2} \in A$. Это противоречит тому, что $A \cap B = \varnothing$.

3. *Для каждого сечения $A|B$ множества действительных чисел существует число α, производящее это сечение: $\alpha = A|B$.*

Это число, согласно доказанному выше, является либо наибольшим в нижнем классе, тогда в верхнем классе нет наименьшего, либо наименьшим в верхнем классе, тогда в нижнем классе нет наибольшего.

Это свойство непрерывности действительных чисел часто называют принципом непрерывности действительных чисел по Дедекинду.

<u>Упражнения для самостоятельной работы</u>

1. Опишите множества R_+, $\overline{R}_+$, R_-, $\overline{R}_-$, $[-2,4]$, $(1,2]$, $[0,4)$.

2. Опишите перечислением всех элементов следующие множества:
$A = \{a \in R| \ a^3 - 3a^2 + 2a = 0\}$, $B = \{x \in R| x + 1/x \le 2 \ \text{ и } \ x > 0\}$,

$C=\left\{x\in N \mid\ 3x^2-2x-5\le 0\right\}$, $D=\left\{x\in R \mid\ \sin 3x=0,\quad -\dfrac{\pi}{2}\le x\le\dfrac{\pi}{2}\right\}$.

3. Опишите множества $A\cup B$, $A\cap B$, $A\setminus B$, $B\setminus A$, где $A=\{-2,-1,0,1,2,3\}$, $B=\{2,3,4\}$.

4. Найдите множества $A\cup B$, $A\cap B$, $A\setminus B$, $B\setminus A$, если $A=(-1,2]$, $B=[1,4)$. Изобразите найденные множества на числовой оси.

5. Определите следующие множества $\overline{R}_+\cup R_-$, $\overline{R}_+\cap\overline{R}_-$, $R\setminus R_-$, $R\setminus\overline{R}_+$, $R_+\cup\{0\}$, $\overline{R}_+\cup\{0\}$.

6. Даны множества $A=\{x\in R \mid\ x\le 4\}$, $B=\{x\in R \mid\ 1<x\le 2\}$, $C=\{x\in R \mid\ 0\le x\le 3\}$. Найдите $\subset A$, $\subset B$, $\subset C$, положив $E=R$.

7. Докажите, что $\subset(\subset A)=A$.

8. Докажите, что равенства $A\cup B=B$, $A\cap B=A$, верны тогда и только тогда, когда $A\subset B$.

9. Найдите множества: 1) $B\cup C$; 2) $A\cup B\cup C$; 3) $A\cap B\cap C$; 4) $(A\cap B)\cup(B\cap C)$, если $A=\{x\in N \mid\ 2<x\le 6\}$, $B=\{x\in N \mid\ 1<x<4\}$, $C=\{x\in N \mid\ x^2-4=0\}$.

10. Докажите тождество:

а) $A\setminus(B\cup C)=(A\setminus B)\cap(A\setminus C)$;

б) $A\setminus(B\cap C)=(A\setminus B)\cup(A\setminus C)$;

в) $(A\setminus B)\setminus C=A\setminus(B\cup C)$

11. Опишите множества $A\times B$, $B\times A$, если $A=\{1,2,3\}$, $B=\{-2,5\}$.

12. Найдите и изобразите на координатной плоскости следующие множества $A\times B$, $B\times C$, $C\times A$, где $A=(-1,2]$, $B=[3,4]$, $C=\{2\}$.

13. Опишите и изобразите на координатной плоскости следующие множества $\overline{R}_+\times\overline{R}_+$, $\overline{R}_+\times\overline{R}_-$, $R_+\times\overline{R}_-$, $\overline{R}_-\times\overline{R}_+$, $\overline{R}_-\times R_+$, $\overline{R}_-\times\overline{R}_-$.

2. ТЕОРИЯ ГРАФОВ

Рассмотрим конечное множество V, $|V|=n$ и множество $V^2=V\times V$ всех его 2-х элементных множеств. Для произвольных подмножеств $E\subseteq V^2$ называем термином граф всякую пару $G=(V,E)$.

Элементы множества V, $|V|=n$ называются вершинами, элементы множества E ребрами.

Вершины и ребра графа называются его *элементами*. Число $|V|=n$ вершин графа G называется его *порядком* и обозначается через $|G|$. Если $|G|=n$, $|E|=m$, то G называют *(n, m)*-графом.

Говорят, что две вершины u и v графа *смежны,* если множество $\{u, v\}$ является ребром, и *не смежны* в противном случае. Если $e = \{u, v\}$ — ребро, то вершины u и v называют его *концами.* В этой ситуации говорят также, что ребро e *соединяет* вершины u и v. Такое ребро обозначается символом uv.

Два ребра называются *смежными,* если они имеют общий конец.

Вершина u и ребро e называются *инцидентными,* если v является концом ребра e (т. е. $e = uv$), и *не инцидентными* в противном случае.

Заметим, что смежность есть отношение между однородными элементами графа, тогда как инцидентность является отношением между разнородными элементами.

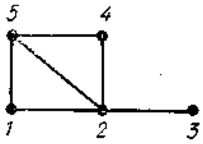


Рис. 1.1

Рис. 1.2

Графы удобно изображать в виде рисунков, состоящих из точек и линий, соединяющих некоторые из этих точек. При этом точки соответствуют вершинам графа, а соединяющие пары точек линии — ребрам. В качестве иллюстрации рассмотрим граф G, изображенный на рис. 1.1. Это (5, 6)-граф, $VG = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $EG = \{\{1, 2\}, \{1, 5\}, \{2, 3\}, \{2, 4\}, \{2, 5\}, \{4, 5\}\}$.

Вершины 1 и 2 смежны, а 1 и 3 не смежны. Вершина 1 и ребро $\{1, 2\}$ инцидентны.

Приведем примеры некоторых графов специального вида.

Граф G называется *полным,* если любые две его вершины смежны, т. е. $EG=(VG)^{(2)}$. Полный граф порядка n обозначается символом K_n, число ребер в нем равно $\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$. На рис. 1.2 изображены графы K_n, $n <= 5$.

Граф называется *пустым,* если в нем нет ребер. Пустой граф порядка n обозначается через O_n.

Матрицы, ассоциированные с графом

Далее элемент матрицы M, занимающий позицию (i, j), обозначается символом M_{ij}. Матрица, каждый элемент которой равен 0 или 1, называется *бинарной.*

Пусть G — помеченный граф порядка n, $VG =\{1, 2, ..., n\}$. Определим бинарную $n*n$-матрицу $A=A(G)$, положив

$$A_{ij} = \begin{cases} 1, \text{если вершины } i \text{ и } j \text{ смежны,} \\ 0 \text{ в противном случае.} \end{cases}$$

$A(G)$ называется *матрицей смежности* графа G. Это симметрическая матрица с нулями на диагонали. Число единиц в строке равно степени соответствующей вершины.

Аналогично определяются *матрицы смежности* A мульти- и псевдографов: A_{ij} равно числу ребер, соединяющих вершины i и j (при этом петля означает два ребра).

Так же определяется *матрица смежности* $A(G)$ ориентированного графа G:

$$(A(G))_{ij} = \begin{cases} 1, \text{если вершины } (i, j) \in AG, \\ 0 \text{ в противном случае.} \end{cases}$$

Здесь AG — множество дуг орграфа G.

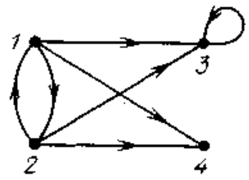


Рис. 6.1

Очевидно, что любая квадратная бинарная матрица является матрицей смежности некоторого ориентированного графа. На рис. 6.1 изображен ориентированный граф с матрицей смежности.

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Абстрактный граф приводит к различным матрицам смежности в зависимости от нумерации вершин.

Определим матрицу инцидентности графа. Пусть G-(n, m)-граф, $VG = \{1, 2, \dots, n\}$, $EG = \{e_1, e_2, \dots, e_m\}$. Определим бинарную $n\times m$-матрицу $I = I(G)$ условиями:

$$I_{kl} = \begin{cases} 1, \text{если вершина } k \text{ и ребро } e_l \text{ инцидентны}, \\ 0 \text{ в противном случае.} \end{cases}$$

Матрица I называется *матрицей инцидентности* графа G. В каждом ее столбце ровно две единицы, равных столбцов нет. Как и выше, соответствие $G\to I(G)$ является биекцией множества помеченных (n, m)-графов с занумерованными ребрами на множество $n\times m$-матриц, удовлетворяющих описанным условиям.

Для ориентированных графов определение матрицы инцидентности I видоизменяется:

$$B_{ij} = \begin{cases} 1, \text{если вершина } k \text{ начало дуги } a_l, \\ -1, \text{если вершина } k \text{ конец дуги } a_l, \\ 0, \text{если вершина } k \text{ и дуга } a_l \text{ не инцидентны},. \end{cases}$$

Метрические характеристики графа

Пусть G — связный граф, а u и v — две его несовпадающие вершины. Длина кратчайшего (u, v) -маршрута (он, естественно, является простой цепью) называется *расстоянием между вершинами* u и v и обозначается через $d(u, v)$. Положим еще $d(u, u)=0$. Очевидно, что введенное таким образом расстояние удовлетворяет следующим *аксиомам метрики:*

1) $d(u, v) >= 0$,
2) $d(u, v) = 0$ тогда и только тогда, когда $u = v$,
3) $d(u, v) = d(v, u)$,
4) $d(u, v)+d(v, w) >= d(u, w)$ (*неравенство треугольника*).

Для фиксированной вершины *u* величина

$$e(u) = \max_{v \in VG} d(u, v)$$

называется *эксцентриситетом* вершины *u.* Максимальный среди всех эксцентриситетов вершин называется *диаметром графа G* и обозначается через $d(G)$. Тем самым

$$d(G) = \max_{u \in VG} e(u).$$

Вершина v называется *периферийной,* если $e(v)=d(G)$. Простая цепь длины $d(G)$, расстояние между концами которой равно $d(G)$, называется *диаметральной цепью.*

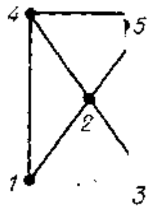


Рис. 8.1

Для иллюстрации обратимся к графу на рис. 8.1. Здесь $d(1, 2)=1$, $d(1, 3)=2$; $e(1)=2$; $d(G)=2$. Все вершины, кроме вершины 2, являются периферийными, (1, 2, 3) — диаметральная цепь.

Минимальный из эксцентриситетов вершин связного графа называется его *радиусом* и обозначается через $r(G)$:

$$r(G) = \min_{u \in VG} e(u) = \min_{u \in VG} \max_{v \in VG} d(u, v).$$

Очевидно, что радиус графа не больше его диаметра.

Вершина v называется *центральной,* если $e(v)= r(G)$. Множество всех центральных вершин графа называется его *центром.* Граф может иметь единственную центральную вершину или несколько центральных вершин. Наконец, центр графа может совпадать с множеством всех вершин.

Задача нахождения центральных вершин графа постоянно возникает в практической деятельности людей. Пусть, например, граф представляет сеть дорог, т. е. вершины его соответствуют отдельным населенным пунктам, а ребра – дорогам между ними. Требуется оптимально разместить больницы, магазины, пункты обслуживания. В подобных ситуациях критерий оптимальности часто заключается в оптимизации «наихудшего» случая, т. е. в минимизации расстояния от места обслуживания до наиболее удаленного пункта. Следовательно, местами размещения должны быть центральные вершины графа.

Инварианты графа

Условимся использовать обозначения

$G \sim G'$ - изоморфизм графов *G и G'*;

M – множество, элементами которого могут быть числа, векторы, многочлены, матрицы, системы чисел;

F – функция, которая каждому графу G ставит в соответствие некоторый элемент f(G) из множества M.

Функцию f называют инвариантом, если на изоморфных графах ее значения совпадают, т.е. для любых графов *G и G'* выполняется соотношение $G \sim G' \leftrightarrow$

f(G) = f(G').

Кликой называют всякий наибольший полный подграф данного графа, размер клики – число вершин в ней.

Определим наиболее важные инварианты графа.

1. Вектор степеней графа $G=(V,E)$ – это упорядоченный (по возрастанию или убыванию) перечень $S(G)=(S_1,S_2,...,S_n)$ степеней $S_i = \deg v_i$ вершин $v_1,v_2,...,v_n \in V,\ \ n=|V|$.

2. Число внешней устойчивости или плотности $\varphi(G)$ - это число вершин максимальной клики в графе G. Другими словами, $\varphi(G)$ - это наибольшее количество попарно смежных вершин в G.

Иногда плотность $\varphi(G)$ называют кликовым числом.

Наименьшее число клик графа G, покрывающих множество V, называется числом кликового покрытия и обозначается через c(G).

3. Число внутренней устойчивости или не плотность $\alpha(G)$ графа $G=(V,E)$ – это наибольшее количество его попарно несмежных вершин. Приведем другое определение. Подмножество $V' \subset V$ называется независимым (или внутренне устойчивым), если в нем любая пара вершин $v',v'' \in V'$ не смежна. Т.е. если V' независимо в G , то порожденный подграф $G(V')$ состоит только из изолированных вершин.

Независимое множество называется максимальным, если оно не является собственным подмножеством другого независимого множества.

Наибольшее по мощности независимое множество в графе G называется наибольшим, а его мощность равна $\alpha(G)$.

<u>Примечание.</u> Для всякого полного графа $G=(V,E)$ значение $\alpha(G)=1$, а число внешней устойчивости $\varphi(G)=|V|$.

Задачи определения точного значения $\alpha(G)$ очень трудны.

4. Хроматическое число.

Рассмотрим правильные k-раскраски графа G. Минимальное число k, при котором граф G является k-раскрашиваемым, называется хроматическим числом этого графа и обозначается $\gamma(G)$. Правильная k-раскраска графа G при $k=\gamma(G)$ называется минимальной.

Если для графа G $\gamma(G)=2$, то G называется бихроматическим.

5. Число компонент связности K(G).

6. Числом Хадвигера $\eta(G)$ связного графа G называется количество вершин наибольшей клики, на которую можно стянуть данный граф.

Деревья

Деревом называется связный граф, не содержащий циклов. Любой граф без циклов называется ациклическим (или лесом). Таким образом, компонентами леса являются деревья. На рис. 13.1 изображены все деревья шестого порядка.

Существует несколько вариантов определения дерева; некоторые из них отражены в следующей теореме.

Теорема. Для (n, m)-графа G следующие утверждения эквивалентны .

1) G – дерево;

2) G – связный граф и m = n — 1;

3) G – ациклический граф и m = n — 1;

4) любые две несовпадающие вершины графа G соединяет единственная простая цепь;

5) G – ациклический граф, обладающий тем свойством, что если какую-либо пару его несмежных вершин соединить ребром, то полученный граф будет содержать ровно один цикл.

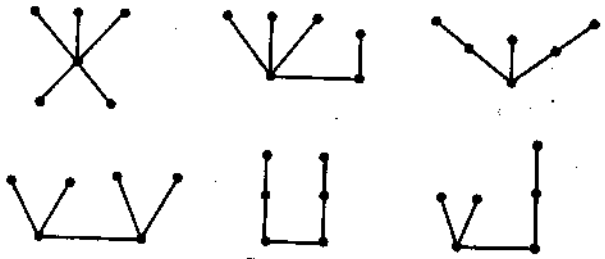


Рис. 13.1

Задача об остове минимального веса (о кратчайшем остове): связном взвешенном графе (G, w) порядка n найти остов минимального веса.

Алгоритм Краскала, решающий эту задачу, заключается в следующем.

1. Строим граф т1 = O_n + e1, присоединяя к пустому графу на множестве вершин VG ребро e1 принадлежит EG минимального веса.

2. Если граф Ti уже построен и i<n— 1, то строим граф Ti+1 — Ti + e_{i+1}, где $e_{i+`1}$ — ребро графа G, имеющее минимальный вес среди ребер, не входящих в Ti и не составляющих циклов с ребрами из T_i.

Алгоритм Прима отличается от алгоритма Краскала только тем, что на каждом этапе строится не просто ациклический граф, но дерево. Именно:

1. Выбираем ребро e1 = ab минимального веса и строим дерево T_1 полагая VT1 = {a, 6}, ET1 = {e1}.

2. Если дерево Ti порядка i +1 уже построено и i<n— 1, то среди ребер, соединяющих вершины этого дерева с вершинами графа G, не входящими в Ti, выбираем ребро e_{i+1} минимального веса. Строим дерево Ti+1, присоединяя к Ti ребро e_{i+1} вместе с его не входящим в T_i концом.

Цикл в графе называется *эйлеровым,* если он содержит все ребра графа. Связный граф, в котором есть эйлеров цикл, называется *эйлеровым* графом. Такой граф можно нарисовать, не отрывая карандаша от бумаги и не повторяя линий.

Помимо задачи о кёнигсбергских мостах известен ряд других старинных занимательных задач (головоломок), решение которых сводится к выяснению вопроса «является ли граф эйлеровым?». В одной из них требуется обрисовать фигуру, именуемую *саблями (знаком) Магомета*, не отрывая карандаша от бумаги и не повторяя линий.

Теорема. (Л. Эйлер, 1736 г.). *Связный граф является эйлеровым тогда и только тогда, когда степени всех его вершин четны.*

Гамильтонов граф — в теории графов это граф, содержащий гамильтонову цепь или гамильтонов цикл.

Гамильтонов путь (или гамильтонова цепь) — путь (цепь), содержащий каждую вершину графа ровно один раз. Гамильтонов путь, начальная и конечная вершины которого совпадают, называется гамильтоновым циклом. Гамильтонов цикл является простым остовным циклом. Задача определения содержит ли данный граф гамильтонов цикл является NP-полной.

3. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЛОГИКА.

Логические операции над двумя высказываниями

Очевидно различных логических операций над двумя высказываниями имеется столько, сколько существует различных третьих столбцов в соответствующих таблицах истинности, а именно 2^4=16. Условимся обозначать эти операции символом f_k и представим их следующей "сводной" таблицей истинности:

x	Y	f_0	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7	f_8	f_9	f_{10}	f_{11}	f_{12}	f_{13}	f_{14}	f_{15}
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
1	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1

Совокупность из 16 операций $\boldsymbol{f_k}$ можно разбить на 3 группы:

I. $f_0 \equiv 0$, $f_{15} \equiv 1$.

II. $f_3 = x$, $f_5 = y$, $f_{10} = \overline{y}$, $f_{12} = \overline{x}$.

III. $f_1 = x \& y$, $f_7 = x \vee y$,

$f_{14} = \overline{x \& y} = x|y$, $f_8 = \overline{x \vee y} = x \downarrow y$,

$f_{13} = x \to y$, $f_2 = \overline{x \to y}$,

$f_{11} = y \to x$, $f_4 = \overline{y \to x}$,

$f_9 = x \sim y$, $f_6 = \overline{x \sim y} = x \oplus y$.

Формулы в АВ строятся по следующим правилам:

1. Переменная есть формула.

2.Если F и Ф - формулы, то и $\overline{F}$, (F&Ф), (F∨Ф), (F⇒Ф), (F~Ф) - тоже формулы.

3. Любая формула имеет вид, 1^0 или 2^0.

Например, выражение $((\grave{A} \& B) \Rightarrow (\overline{C \vee D}))$ является формулой.

Эквивалентные формулы.

1. Для конъюнкции и дизъюнкции:

$xx = x$, $\quad x \vee x = x$ (1)

$x\bar{x} = 0$ (закон противоречия), $\quad x \vee \bar{x} = 1$ (закон исключенного третьего) (2)

$x0 = 0$, $\quad x \vee 0 = x$ (3)

$x1 = x$, $\quad x \vee 1 = 1$ (4)

2. Для отрицания, конъюнкции и дизъюнкции:

$\bar{\bar{x}} = x$ (5)

$\overline{x_1 x_2} = \bar{x}_1 \vee \bar{x}_2$ (6)

$\overline{x_1 \vee x_2} = \bar{x}_1 \bar{x}_2$ (7)

Здесь (6) и (7) иногда называют законами де Моргана.

3. Законы дистрибутивности

$(x_1 \vee x_2) x_3 = (x_1 x_3) \vee (x_2 x_3)$ (8)

$(x_1 x_2) \vee x_3 = (x_1 \vee x_3)(x_2 \vee x_3)$ (9)

Обозначив через $x_1 \circ x_2$ любую из функций $x_1\ x_2$, $x_1 \vee x_2$. Тогда функция $x_1 \circ x_2$ обладает свойством ассоциативности

$(x_1 \circ x_2) \circ x_3 = x_1 \circ (x_2 \circ x_3)$. (10)

4. Эквивалентные формулы

$x \to y = \bar{x} \vee y$ (11)

$x \leftrightarrow y = x \wedge y \vee \bar{x} \wedge \bar{y}$ (12)

$x \leftrightarrow y = (x \vee \bar{y})(\bar{x} \vee y)$ (13)

Совершенные формы.

$$f\left(x_1, \ldots, x_n\right) = \bigvee_{(\sigma_1, \ldots, \sigma_n)} x_1^{\sigma_1} \ldots x_n^{\sigma_n} \qquad (1)$$

Разложение вида (1) называется *совершенной дизъюнктивной нормальной формой* (с.д.н.ф.) и позволяет использовать следующий алгоритм построения с.д.н.ф. для всякой булевой функции $f = f(x_1, \ldots, x_n)$, если $f \neq 0$.

Этап 1. В таблице, задающей $f(x_1, \ldots, x_n)$, отмечаем все строки $(\sigma_1, \ldots, \sigma_n)$, в которых $f\left(\sigma_1, \ldots, \sigma_n\right) = 1$.

Этап 2. Для каждой отмеченной строки образуем конъюнкцию

$$x_1^{\sigma_1} x_2^{\sigma_2} \ldots x_n^{\sigma_n} \qquad (2)$$

Этап 3. Все полученные конъюнкции (1) соединим знаком дизъюнкции $\vee$.

Преобразовать булеву формулу к с.д.н.ф. можно с помощью эквивалентных формул. Для этого избавляемся от импликации и эквиваленции и приводим формулу к д.н.ф. Далее дополняем недостающие переменные с помощью закона исключенного третьего.

$$f\left(x_1,\dots,x_n\right)=\mathop{\&}_{\substack{(\sigma_1,\dots,\sigma_n)\\ f^*(\sigma_1,\dots,\sigma_n)=0}} x_1^{\overline{\sigma_1}}\vee x_2^{\overline{\sigma_2}}\vee\dots\vee x_n^{\overline{\sigma_n}} \qquad (3)$$

Каждую булеву функцию $f(x_1,\dots, x_n)\neq 1$ можно представить в виде (3), где выражение (3) называется совершенной конъюнктивной нормальной формой (с.к.н.ф.)

Если булева функция задана таблицей истинности, то для построения с.к.н.ф. надо выбрать строки (σ_1, ..., σ_n), в которых $f\left(\sigma_1,\dots,\sigma_n\right)$=0.

Для каждой отмеченной строки образуем дизъюнкцию $x_1^{\overline{\sigma}_1}\vee x_2^{\overline{\sigma}_2}\vee\dots\vee x_n^{\overline{\sigma}_n}$. Все полученные дизъюнкции соединим знаком конъюнкции.

Формулу F можно привести к с.к.н.ф. с помощью эквивалентных преобразований в два этапа.

*Этап 1***.** Приведение F к виду к.н.ф. (F) с помощью законов (9.1)-(9.13).

Этап 2. Приведение к.н.ф. (F) к с.к.н.ф. [F]

Преобразование к.н.ф. (F) в с.к.н.ф. [F] осуществляется на базе закона дистрибутивности следующим образом:

Пусть к.н.ф. $\langle F\rangle$ содержит элементарную дизъюнкцию $D=\left(x_{i_1}\vee\dots\vee x_{i_k}\right)$ и пусть D не включает в себя переменную $x_{i_0}\in\left\{x_1,\dots,x_n\right\}$. Тогда осуществляем следующее тождественное преобразование: $D=D\vee 0=D\vee x_{i_0}\overline{x_{i_0}}=\left(D\vee x_{i_0}\right)\left(D\vee\overline{x_{i_0}}\right)$.

Упражнение 1. Привести к с.к.н.ф. формулу

F=F(x_1, x_2, x_3, x_4) =$(\overline{x_1}\ \overline{x_3}\rightarrow x_2\ \overline{x_3})(x_1\vee x_2\vee x_4)$

Этап 1. Приведем к к.н.ф.

$$\left(\overline{\overline{x_1}\,\overline{x_3}}\vee x_2\overline{x_3}\right)\left(x_1\vee x_2\vee\overline{x_4}\right)=\left(x_1\vee x_3\vee\overline{x_2 x_3}\right)\left(x_1\vee x_2\vee x_4\right)=$$
$$\left(x_1\vee x_3\vee x_2\right)\left(x_1\vee x_2\vee\overline{x_4}\right)=\left(x_1\vee x_3\vee x_2\right)\left(x_1\vee x_2\vee\overline{x_4}\right) \qquad (2)$$

Этап 2. Преобразование к.н.ф. в с.к.н.ф. с помощью законов дистрибутивности.

A= $(x_1\vee x_3\vee x_2\vee x_4\overline{x_4}) = (x_1\vee x_3\vee x_2\vee x_4)\ \underline{(x_1\vee x_3\vee x_2\vee\overline{x_4})}$

B= $x_1\vee x_2\vee\overline{x_4}\vee x_3\overline{x_3}=\underline{(x_1\vee x_2\vee\overline{x_4}\vee x_3)}\ (x_1\vee x_2\vee\overline{x_4}\vee\overline{x_3})$

A и B содержат одинаковый сомножитель (подчеркнуты). Поэтому осуществляет операцию приведения подобных членов: в A или B заменяем его на 1 или, что то же самое, вычеркиваем его из A или из B.

Окончательно имеем с.к.н.ф.

F = AB= $(x_1\vee x_3\vee x_2\vee x_4)\ (x_1\vee x_3\vee x_2\vee\overline{x_4})\ (x_1\vee x_2\vee\overline{x_4}\vee\overline{x_3})$.

4. РАСПОЗНАЮЩИЕ КОНЕЧНЫЕ АВТОМАТЫ

Распознающими конечными автоматами являются конечные автоматы, результатом работы которых является обнаружение некоторого свойства в заданном тексте. Обработку произвольного слова α во входном алфавите A автомат начинает из специально выделенного начального состояния. В каждый такт дискретного времени на вход автомата поступает очередная буква обрабатываемого слова, под ее воздействием автомат меняет свое состояние; состояние в которое автомат перейдет, определяется предыдущим его состоянием и прочитанной буквой входного слова. Над словом длины l автомат работает l тактов. Результат работы автомата определяется состоянием, в котором он оказывается по ее завершении.

Формально конечный автомат K определяется как совокупность

$$K = \{Q, A, q_0, g, F\},$$

где $Q = \{q_0, q_1, q_2, ..., q_m\}$ – множество состояний автомата; $A = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$ – входной алфавит; q_0 – специально выделенное состояние автомата, именуемое начальным состоянием; g – функция переходов конечного автомата, представляющая собой отображение типа $Q \times A \to Q$ (если $g(q_i, a_j) = q_k$, то автомат из состояния q_i под воздействием буквы a_j должен перейти в состояние q_k); F – специально выделенное подмножество состояний автомата, которые условно называются «хорошими», $F \subseteq Q$. (соответственно «плохими» называются состояния из множества $Q \setminus F$).

Пусть $\alpha = a_{l_1}, a_{l_2}, ..., a_{l_p}$ – входное слово, $l(\alpha) = p$. Через $q_\alpha(t)$ обозначим состояние, в котором оказывается автомат K через t тактов работы над этим словом (здесь $t = 0,1,2,..., p$): $q_\alpha(0) = q_0$, $q_\alpha(1) = g(q_\alpha(0), a_{l_1})$, $q_\alpha(2) = g(q_\alpha(1), a_{l_2})$, …, $q_\alpha(p) = g(q_\alpha(p-1), a_{l_p})$.

Слово α *принимается* автоматов K , если $q_\alpha(p) \in F$. Введем в рассмотрение язык $L(K)$: слово α принадлежит языку $L(K)$, если данное слово принимается автоматом K . Язык $L(K)$ называется языком, распознаваемым данным конечным автоматом.

Определение 1. Язык L называется *регулярным*, если для него можно построить распознающий конечный автомат.

Конечный автомат удобно задавать диаграммой его переходов. Диаграмма представляет собой ориентированный граф, вершины которого одноименны состояниям автомата; дуга из вершины q_i в вершину q_k с надписанной над ней буквой a_j проводится тогда и только тогда, когда $g(q_i, a_j) = q_k$. В случае, когда переход из q_i в q_k осуществляется под воздействием любой из букв некоторого подмножества S , $S \subseteq A$, все буквы этого подмножества подписываются над соответствующей дугой (вместо перечня всех букв допускается сокращенная запись « $x \in S$ » или « S »). Если произвольное состояние q_i входит в F , то данный факт на диаграмме отмечается жирным кружком, выделяющим вершину q_i.

На рис.1 примера 1 показана диаграмма автомата K_1, работающего над словами алфавита $A = \{a, b, c\}$. Автомат имеет два состояния: q_0 и q_1, причем «хорошим» является только состояние q_1 . Начав работу в состоянии q_0 , автомат под воздействием букв a,b из этого состояния не выходит; под воздействием буквы c реализуется переход в состояние q_1; любая далее поступающая буква оставляет автомат в том же состоянии. Таким образом, автомат K_1 распознает язык L_1, состоящий из слов, имеющих в своем составе букву c.

Пример 1.

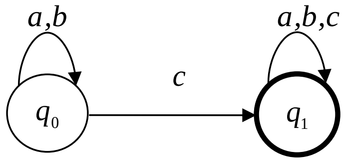


Рисунок 1.

Класс регулярных языков замкнут относительно основных теоретико-множественных операций – объединения, пересечения, разности.

Пусть L_1 и L_2 - регулярные языки, распознаваемые конечными автоматами $K^1 = \{Q^1, A, q^1{}_0, g^1, F^1\}$ и $K^2 = \{Q^2, A, q^2{}_0, g^2, F^2\}$ соответственно. Считаем, что $Q^1 = \{q^1{}_0, q^1{}_1, q^1{}_2, ..., q^1{}_f\}$ и $Q^2 = \{q^2{}_0, q^2{}_1, q^2{}_2, ..., q^2{}_h\}$. Автомат $K^{\cup} = \{Q, A, q_0, g, F^{\cup}\}$, распознающий язык $L_1 \cup L_2$ строим следующим образом. Полагаем $Q = Q^1 \times Q^2$; каждое состояние конструируемого автомата содержит две компоненты, левую и правую. Начальным состоянием нового автомата считаем (q_0^1, q_0^2), а функцию переходов g определяем следующим образом:

$$g((q_i^1, q_j^2), a_k) = (g^1(q_i^1, a_k), g^2(q_j^2, a_k)).$$

Очевидно, по первой компоненте автомат $K^{\cup}$ моделирует действия автомата K^1, а по второй компоненте – действия автомата K^2. Входное слово α

Принадлежит объединению языков $L_1 \cup L_2$ тогда и только тогда, когда после его обработки автомат $K^{\cup}$ окажется в состоянии, у которого либо первая компонента принадлежит совокупности F^1, либо вторая компонента принадлежит совокупности F^2. Таким образом, следует положить:

$$F^{\cup} = (F^1 \times Q^2) \cup (Q^1 \times F^2).$$

Все компоненты автомата $K^{\cup}$ определены, его построение закончено.

Автомат $K^{\cap} = \{Q, A, q_0, g, F^{\cap}\}$, распознающий язык $L_1 \cap L_2$, отличается от $K^{\cup}$ только последней своей компонентой. Следует положить

$$F^{\cap} = F^1 \times F^2.$$

Автомат $K^{\setminus} = \{Q, A, q_0, g, F^{\setminus}\}$, распознающий язык $L_1 \setminus L_2$, отличается от $K^{\cup}$ только последней своей компонентой. Следует положить

$$F^{\setminus} = F^1 \times Q^2.$$

5. Задания для лабораторных работ

Лабораторная работа №1.

Тема: Элементы теории множеств

Цель: лабораторной работы состоит в освоении основных операций над множествами и умении отображать эти операции на диаграммах Эйлера – Венна. Также необходимо научиться оптимально использовать законы

теории множеств при упрощении выражений и доказательстве справедливости отношений.

I. Докажите тождество

1. $(A\cap((\overline{A\cup\overline{\overline{B}}})\cup(\overline{\overline{\overline{A}}\cup B})))\cup(\overline{\overline{\overline{A}}\cup\overline{\overline{B}}}) = A$.
2. $(A\cap C)\cup(B\cap\overline{C})\cup(\overline{A}\cap C)\cup(\overline{B\cup C}) = U$.
3. $(A\setminus B)\cup(A\cap B)\cup(\overline{A\cap(B\setminus C)}$ $=U$.
4. $(A\cap C)\cup(A\setminus C)\cup\overline{\overline{\overline{B\cap C}}\cap(\overline{B}\cup C)}=A\cup B$.
5. $(A\cap B)\cup(\overline{\overline{\overline{A}}\cup B})\cup(\overline{A}\cup(\overline{A}\cap\overline{B}))=U$.
6. $((A\setminus B)\cup(A\cap B))\cap(\overline{A\cup(B\setminus C)}$ $=\varnothing$.
7. $(A\cap B\cap C)\cup(C\setminus A)\cup(\overline{B}\cap C) = C$.
8. $\overline{(A\cup\overline{C})\cap\overline{A\cap C}}\cap((B\setminus A)\cup(A\cap B))=B\cap C$.
9. $(A\cap B\cap C)\cup(\overline{A}\cap B\cap C)\cup\overline{B}\cup\overline{C} = U$.
0. $((A\setminus C)\cup\overline{A\cup C})\cap(A\cup(A\cap\overline{B\setminus C}))= A\setminus C$.

I I. Используя определение равенства множеств и операции над множествами, проверить указанное равенство и проиллюстрировать решение с помощью диаграммы Эйлера-Венна

1. $A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$.
2. $A\cap(B\cup(A\cap C))=(A\cap B)\cup(A\cap C)$.
3. $A\setminus(B\cup C)=(A\setminus B)\cap(A\setminus C)$.
4. $(A\setminus B)\setminus C=(A\setminus C)\setminus B$.
5. $A\setminus(B\cap C)=(A\setminus B)\cup(A\setminus C)$.
6. $A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C$.
7. $A\setminus B=(A\setminus(A\cap B))$.
8. $A\setminus(A\setminus B)=A\cap B$.
9. $B\cup(A\setminus B)=A\cup B$.
0. $A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C$.

Лабораторная работа №2.

Тема: Теория графов

Цель: состоит в овладении основными понятиями теории графов, умении представить граф не только с помощью диаграммы, но и с помощью матрицы инцидентности и матрицы смежности вершин, а также в изучении основных алгоритмов на графах.

В произвольном связном графе $G=(V,E)$, $|V|=10$, $|E|=20$ у которого ребра $e=(u,v)$ взвешены числами $w(e)=\dfrac{\deg u+\deg v}{НОД(\deg u,\deg v)}$, найти:

а) минимальное остовное дерево с помощью алгоритма Краскала;

б) минимальное остовное дерево с помощью алгоритма Прима;

в) составить матрицу смежности и матрицу инцидентности;

г) вычислить радиус и диаметр графа, указать центральные и периферийные вершины;

д) построить дополнение для данного графа;

е) найти все инварианты графа (вектор степеней графа, число внешней устойчивости, число внутренней устойчивости, хроматическое число, число компонент связности, число Хадвигера);

ж) найти не менее трех паросочетаний;

з) проверить, является ли данный граф эйлеровым, если да, то тайти эйлеров цикл;

и) является ли данный граф гамильтоновым, проверить одно из достаточных условий гамильтоновости графа.

Лабораторная работа №3.

Тема: Логические формулы. Построение их таблиц истинности. Упрощение формул логики с помощью равносильных преобразований

Цель: освоить методику построения таблиц истинности формул логики; закрепить навык упрощения формул логики, а также доказательства законов логики с применением основных тождеств алгебры логики.

1.Составить таблицы истинности формул.

1. $(x \vee y) \leftrightarrow (y \downarrow \overline{x})$, $\quad (x | \overline{y}) \to (z \oplus \overline{xy})$.

2. $(x \leftrightarrow y) \vee (y \downarrow x)$, $\quad ((x \to \overline{y}) | \overline{z}) \oplus \overline{xy}$.

3. $(x \vee \overline{y}) \leftrightarrow (y \downarrow x)$, $\quad ((x | \overline{y}) \to \overline{z}) \oplus \overline{xy}$.

4. $(x \leftrightarrow \overline{y}) \vee (y \downarrow x)$, $\quad ((x \to \overline{y}) | \overline{z}) \oplus \overline{xy}$.

5. $(x \vee \overline{y}) \to (y \oplus x)$, $\quad ((x \leftrightarrow \overline{y}) | \overline{z}) \downarrow \overline{xy}$.

6. $(x \oplus \overline{y}) \leftrightarrow (y | x)$, $\quad ((x \downarrow y) \leftrightarrow \overline{z}) \vee \overline{xy}$.

7. $(x \vee \overline{y}) \downarrow (y \to x)$, $\quad ((x | \overline{y}) \leftrightarrow \overline{z}) \oplus \overline{xy}$.

8. $(x \oplus \overline{y}) \to (y \downarrow x)$, $\quad ((x | \overline{y}) \vee \overline{z}) \leftrightarrow \overline{xy}$.

9. $\overline{x} \leftrightarrow (y \to (\overline{y} \downarrow x))$, $\quad ((\overline{x} | y) \vee \overline{z}) \oplus \overline{xy}$.

0. $x \downarrow (\overline{y} \to (y | x))$, $\quad x \oplus (\overline{y} \vee \overline{z} \leftrightarrow \overline{xy})$.

2.Проверить, будут ли эквивалентны следующие формулы с помощью эквивалентных преобразований.

1. $x \to (y \oplus z)$ и $(x \to y) \oplus (x \to z)$.

2. $x | (y \to z)$ и $(x | y) \to (x | z)$.

3. $x \wedge (y \oplus z)$ и $(x \wedge y) \oplus (x \wedge z)$.

4. $x \wedge (y \oplus z)$ и $(x \wedge y) \oplus (x \wedge z)$.

5. $x \wedge (y \to z)$ и $(x \wedge y) \to (x \wedge z)$.

6. $x \wedge (y \leftrightarrow z)$ и $(x \wedge y) \leftrightarrow (x \wedge z)$.

7. $x \wedge (y | z)$ и $(x \wedge y) | (x \wedge z)$.

8. $x \vee (y \rightarrow z)$ и $(x \vee y) \rightarrow (x \vee z)$

9. $x \vee (y | z)$ и $(x \vee y) | (x \vee z)$.

0. $x \vee (y \leftrightarrow z)$ и $(x \vee y) \leftrightarrow (x \vee z)$.

Лабораторная работа №4.

Тема: Булевы функции и их представление в совершенной дизъюнктивной и конъюнктивной нормальных формах»

Цель: закрепить навыки представления произвольной булевой функции в виде СДНФ и СКНФ по имеющейся таблице истинности и с помощью равносильных преобразований.

С помощью эквивалентных преобразований приведите формулу к ДНФ, КНФ, СДНФ, СКНФ. Проверьте правильность полученного результата, используя табличный способ построения этих форм.

В1. $(x \vee \overline{y}) \rightarrow (\overline{z} \oplus \overline{x})$.

В2. $\overline{(x \vee \overline{y}) \rightarrow (z \oplus \overline{x})}$.

В3. $(\overline{x} \vee \overline{y}) \rightarrow \overline{(z \oplus x)}$.

В4. $(x \vee \overline{y}) \rightarrow \overline{(z \leftrightarrow \overline{x})}$.

В5. $\overline{(x \vee \overline{y}) \rightarrow (z \leftrightarrow \overline{x})}$.

В6. $\overline{(x | \overline{y}) \oplus (z \rightarrow \overline{x})}$.

В7. $\overline{(z \rightarrow x) \leftrightarrow (y | x)}$.

В8. $(x | \overline{y}) \oplus (\overline{z} \rightarrow x)$.

В9. $(\overline{z} \rightarrow x) \leftrightarrow (\overline{x} | y)$.

В0. $(z \rightarrow x) \oplus (x | \overline{y})$.

Лабораторная работа №5.

Тема: Теория автоматов

Цель: освоить методику построения детерминированных конечных автоматов; методику построения автоматов, распознающих объединение, пересечение, разность языков, заданных автоматами K_1 и K_2

1.Построить детерминированный конечный автомат, распознающий язык L

1. L_1 – множество слов, имеющих подслово $ddcba$ в алфавите $A = \{a, b, c, d\}$

2. L_2 – множество слов, начинающихся буквой a и заканчивающихся буквой c в алфавите $A = \{a, b, c, d\}$

3. L_3 – множество слов, в которых буква d встречается ровно 3 раза в алфавите $A = \{a, b, c, d\}$

4. L_4 – множество слов, содержащих четное количество букв b в алфавите $A = \{a, b, c, d\}$

5. L_5 – множество слов, в которых буква a встречается 2 раза, а буква c – 1 раз в алфавите $A = \{a, b, c, d\}$

6. L_6 – множество слов, в которых каждая цифра кратна 3 в алфавите $B = \{0, 1, 2, \ldots, 9\}$

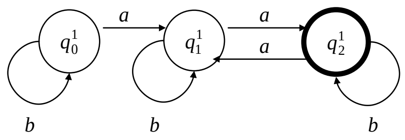
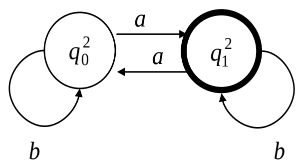
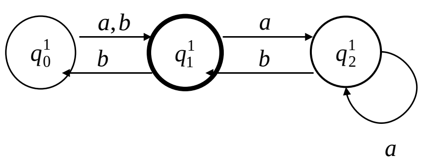
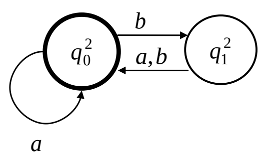
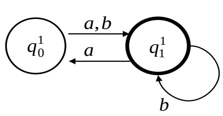
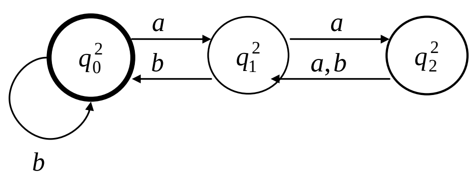
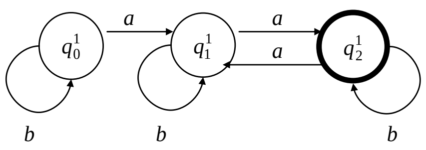
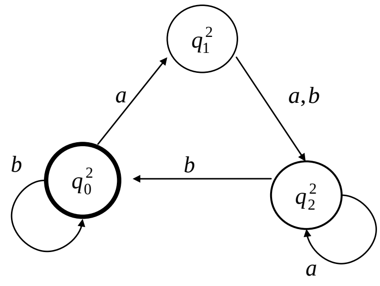
7. L_7 – множество слов, в которых расстояние между буквой c и ближайшей буквой d не больше 3 в алфавите $A = \{a, b, c, d\}$

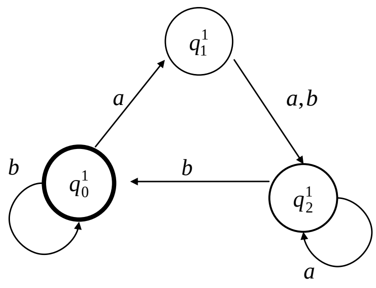
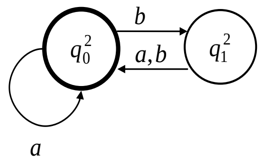
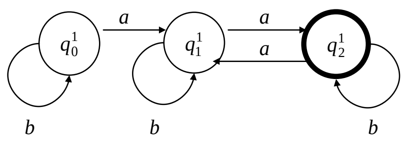
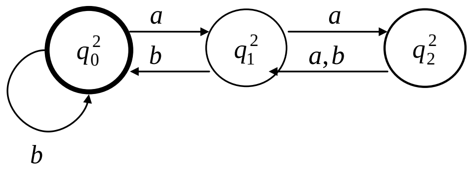
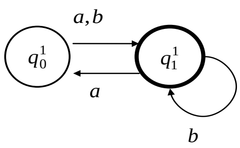
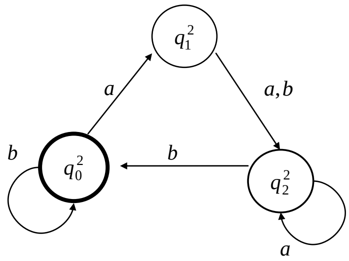
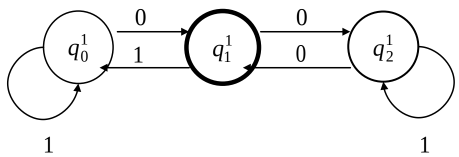
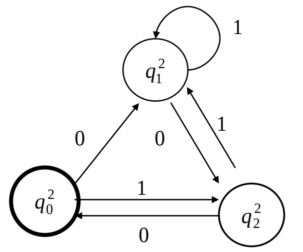
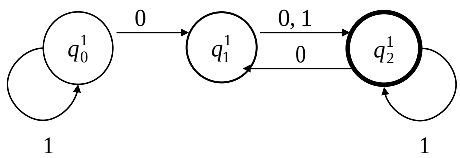
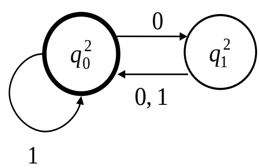
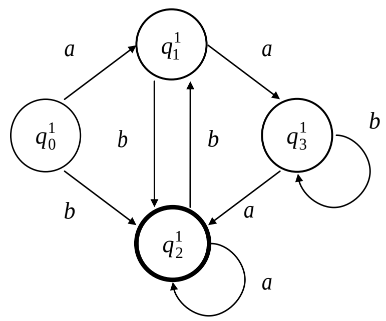
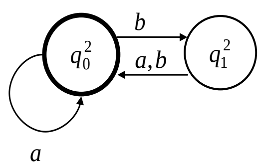
8. L_8 – множество слов, у которых вторая и предпоследняя буква – d в алфавите $A = \{a, b, c, d\}$

9. L_9 – множество слов, у которых вторая и предпоследняя буква – d в алфавите $A = \{a, b, c, d\}$

0. L_{10} – множество симметричных слов длины 6 в алфавите $A = \{a, b, c, d\}$

2. Построить конечные автоматы, распознающие объединение, пересечение, разность языков, заданных автоматами K_1 и K_2

Номер варианта	K_1	K_2
1.		
2.		
3.		
4.		

<table>
<tr><td>5.</td><td>
</td><td>
</td></tr>
<tr><td>6.</td><td>
</td><td>
</td></tr>
<tr><td>7.</td><td>
</td><td>
</td></tr>
<tr><td>8.</td><td>
</td><td>
</td></tr>
<tr><td>9.</td><td>
</td><td>
</td></tr>
<tr><td>0.</td><td>
</td><td>
</td></tr>
</table>

Список литературы.

1. Бережной, В.В. Дискретная математика [Электронный ресурс]: учебное пособие/ В.В. Бережной, А.В. Шапошников. — Электрон. текстовые данные. — Ставрополь: Северо-Кавказский федеральный университет, 2016. — 199 с. — 2227-8397. — Режим доступа: http://www.iprbookshop.ru/69380.html
2. Дискретная математика. Часть 1 [Электронный ресурс]: учебное пособие/ И.П. Болодурина [и др.]. — Электрон. текстовые данные. — Оренбург: Оренбургский государственный университет, ЭБС АСВ, 2016. — 108 с. — 978-5-7410-1579-7. — Режим доступа: http://www.iprbookshop.ru/69898.html
3. Математика. Дискретная математика [Электронный ресурс]: учебник/ В.Ф. Золотухин [и др.]. — Электрон. текстовые данные. — Ростов-на-Дону: Институт водного транспорта имени Г.Я. Седова – филиал «Государственный морской университет имени адмирала Ф.Ф. Ушакова», 2016. — 129 с. — 2227-8397. — Режим доступа: http://www.iprbookshop.ru/57348.html
4. Седова, Н.А. Дискретная математика [Электронный ресурс]: учебное пособие/ Н.А. Седова. — Электрон. текстовые данные. — Саратов: Ай Пи Эр Медиа, 2018. — 67 с. — 978-5-4486-0069-2. — Режим доступа: http://www.iprbookshop.ru/69316.html
5. Гаврилов, Г.П. Задачи и упраженения по дискретной математике [Текст]: учеб. пособие/ Г.П. Гаврилов, А.А. Сапоженко.- 3-е изд., перераб. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2006.- 416 с.
6. Иванов, Б.Н. Дискретная математика. Алгоритмы и программы. Полный курс [Текст]: учеб. пособие для студ. вузов/ Б.Н. Иванов.- М.: ФИЗМАТЛИТ, 2007.- 408 с.
7. Новиков, Ф.А. Дискретная математика для программистов [Текст]: учеб. пособие для студ. вузов/ Ф.А. Новиков.- СПб.: Питер, 2001.- 304 с.
8. Седова, Н.А. Дискретная математика. Задачи повышенной сложности [Электронный ресурс]: практикум для подготовки к интернет-экзамену/ Н.А. Седова, В.А. Седов. — Электрон. текстовые данные. — Саратов: Ай Пи Эр Медиа, 2018. — 97 с. — 978-5-4486-0133-0. — Режим доступа: http://www.iprbookshop.ru/71561.html
9. Усов, С.В. Дискретная математика [Электронный ресурс]: учебно-методическое пособие (для студентов направления 552800 «Информатика и вычислительная техника»)/ С.В. Усов. — Электрон. текстовые данные. — Омск: Омский государственный университет им. Ф.М. Достоевского, 2011. — 60 с. — 978-5-7779-1339-5. — Режим доступа: http://www.iprbookshop.ru/24884.html
10. Яблонский, С.В. Введение в дискретную математику [Текст]: учеб. пособие для студ. вузов/ С.В. Яблонский; под ред. В.А. Садовничего.- М.: Высш.шк., 2001.- 384с.

ЭРКЕНОВА Алина Аскербиевна

ДИСКРЕТНАЯ МАТЕМАТИКА

Учебно-методическое пособие для обучающихся
на 1 курсе по направлению подготовки
09.03.03 – «Прикладная информатика»

Корректор Чагова О.Х.
Редактор Чагова О.Х.

Сдано в набор 02.09.2023 г.
Формат 60х84/16
Бумага офсетная
Печать офсетная
Усл. печ. л.1,62
Заказ № 4780
Тираж 100 экз.

Оригинал-макет подготовлен
в Библиотечно-издательском центре СКГА
369000, г. Черкесск, ул. Ставропольская, 36