МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

СЕВЕРО-КАВКАЗСКАЯ ГОСУДАРСТВЕННАЯ АКАДЕМИЯ

Л.А. Кунижева
А.А. Эркенова

УРАВНЕНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

Учебно-методическое пособие для обучающихся
по направлению подготовки 01.03.02 «Прикладная математика»

Черкесск 2024

УДК 512.6
ББК 22.143
К 91

Рассмотрено на заседании кафедры «Математика»
Протокол № 1 от «1» сентября 2023 г.
Рекомендовано к изданию редакционно-издательским советом СКГА.
Протокол № 26 от «29» сентября 2023 г.

Рецензенты:
Кочкаров А.М.– д.ф.-м.н., профессор
Коркмазова З.О.– к.ф.-м.н., доцент

К91 **Кунижева, Л.А.** Уравнения математической физики: учебно-методическое пособие для обучающихся направления подготовки 01.03.02 «Прикладная математика» / Л.А. Кунижева, А.А. Эркенова.– Черкесск: БИЦ СКГА, 2024. – 32с.

Учебно-методическое пособие предназначено для обучающихся направления подготовки «Прикладная математика», содержит краткий теоретический материал по курсу уравнений математической физики, который сопровождается рассмотрением большого количества образцов решения задач.

УДК 512.6
ББК 22.143

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Настоящее учебное пособие является справочным пособием по решению примеров по дисциплине «Уравнения математической физики» обучающихся по направлению подготовки «Прикладная математика».

Содержание пособия охватывает следующие разделы: классификация уравнений второго порядка, типы уравнений второго порядка, приведение уравнений к каноническому виду, постановка задач для уравнений гиперболического типа, решение уравнения колебаний струны методом характеристик.

В начале каждого раздела излагается теоретический материал, подробно разъясняется решение подобных задач и методы их решения.

1. ВВЕДЕНИЕ

Весьма широкий класс физических задач с математической точки зрения сводится к линейным (искомая функция и её производные входят в первой степени) дифференциальным уравнениям второго порядка в частных производных, которые являются предметом изучения курса “Уравнения математической физики”.
Уравнение:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right) + f(x,y,z,t)$$

описывает колебательные процессы. Здесь определён Δ – оператор Лапласа (лапласиан):

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \equiv \Delta u.$$

Уравнение:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \Delta u + f(x,y,z,t)$$

описывает процессы теплопроводности и диффузии.
А уравнение:

$$\Delta u = f(x,y,z,u),$$

в котором отсутствует время t, описывает устоявшиеся (стационарные) состояния физической системы.

2. КЛАССИФИКАЦИЯ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Здесь и далее ограничимся рассмотрением u – функций лишь от двух переменных x и y.
Рассмотрим дифференциальное уравнение второго порядка в частных производных:

$$A\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2B\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + f\left(x,y,u,\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y}\right) = 0 \qquad (2.1)$$

Если A, B, C – функции от x, y, а функция

$$f = D\frac{\partial u}{\partial x} + E\frac{\partial u}{\partial y} + Ku + g,$$

где D, E, K – функции от x,y, $g(x,y)$ – возмущение, то уравнение (2.1) – линейное.
Если $g=0$, то (2.1) – линейное однородное, в противном случае- линейное неоднородное.
Функция $u(x,y)$, которая обращает уравнение (2.1) в тождество, называется его *решением*.

3. ТИПЫ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Пусть (2.1) – линейное уравнение. Обозначим $\delta = B^2 - AC$, где *A, B, C* в общем случае зависят от *x, y*.

Тогда $\delta = \delta(x,y)$ называется дискриминантом уравнения (2.1).

Если $\delta(x_0,y_0) > 0$, $\delta(x_0,y_0) = 0$, $\delta(x_0,y_0) < 0$, то уравнение (2.1) называется соответственно уравнением гиперболического, параболического или эллиптического типа в точке (x_0,y_0).

Если $\delta(x,y) > 0$, $\delta(x,y) = 0$, $\delta(x,y) < 0$ для любой точки (x,y) из области $\Omega \in \mathrm{R}^2$, то уравнение (2.1) называется соответственно уравнением гиперболического, параболического или эллиптического типа в области Ω.

В качестве примеров рассмотрим:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f\left(x,t,\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial t} \right) = 0.$$

В данном уравнении $A = 1$, $B = 0$, $C = -a^2$, $\delta = a^2 > 0$, то есть это уравнение гиперболического типа, описывающее колебательные процессы.

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f\left(x,t,\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial t} \right).$$

Видим, что $A = a^2$, $B = C = 0$, $\delta = 0$. Таким образом перед нами уравнение параболического типа, описывающее процессы теплопроводности и диффузии.

3. $$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + f\left(x,y,\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y} \right) = 0.$$

Здесь $A = 1$, $B = 0$, $C = 1$, $\delta < 0$.

Таким образом перед нами уравнение эллиптического типа, описывающее состояния системы, которые не зависят от времени.

В качестве иллюстрации рассмотрим уравнение:

$$x\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + y\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + u = 0.$$

В этом уравнении $A = x$, $B = -1$, $C = y$, $\delta = 1 - xy$.

Дискриминант δ зависит от x, y.

Тогда:

а) если $1 - xy > 0$, то есть $xy < 1$, то имеем уравнение гиперболического типа;

б) если $1 - xy = 0$, то есть $xy = 1$, то имеем уравнение параболического типа;

в) если $1 - xy < 0$, то есть $xy > 1$, то имеем уравнение эллиптического типа.

4. ИНВАРИАНТНОСТЬ ТИПА УРАВНЕНИЯ

Введём новые независимые переменные:

$$\begin{cases} \xi = \varphi(x,y), \\ \eta = \psi(x,y). \end{cases} \tag{4.1}$$

Якобиан преобразования (4.1) будет иметь вид:

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial x} & \frac{\partial \varphi}{\partial y} \\ \frac{\partial \psi}{\partial x} & \frac{\partial \psi}{\partial y} \end{vmatrix},$$

Если $J \neq 0$, то преобразование называется невырожденным.

Докажем, что при невырожденном преобразовании тип уравнения (2.1) не меняется.

<u>*Доказательство*</u>:

Считаем все производные:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial x},$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial y},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)^2 + 2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta}\frac{\partial \xi}{\partial x}\frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}\left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)^2 + \frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}\frac{\partial \xi}{\partial y}\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta}\left(\frac{\partial \eta}{\partial y}\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \xi}{\partial y}\frac{\partial \eta}{\partial x}\right) + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}\frac{\partial \eta}{\partial y}\frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial^2 \xi}{\partial x \partial y} + \frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial^2 \eta}{\partial x \partial y},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}\left(\frac{\partial \xi}{\partial y}\right)^2 + \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta}\frac{\partial \xi}{\partial y}\frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta \partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial y}\frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}\left(\frac{\partial \eta}{\partial y}\right)^2 + \frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} + \frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial^2 \eta}{\partial y^2}.$$

Подставим найденные производные в уравнение (2.1):

$$\overline{A}\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + 2\overline{B}\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \overline{C}\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + f\left(\xi, \eta, u, \frac{\partial u}{\partial \xi}, \frac{\partial u}{\partial \eta}\right) = 0, \tag{4.2}$$

$$\overline{A} = A\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)^2 + 2B\frac{\partial \xi}{\partial y}\frac{\partial \xi}{\partial x} + C\left(\frac{\partial \xi}{\partial y}\right)^2,$$

$$\overline{B} = A\frac{\partial \eta}{\partial x}\frac{\partial \xi}{\partial x} + B\left(\frac{\partial \eta}{\partial y}\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \xi}{\partial y}\frac{\partial \eta}{\partial x}\right) + C\frac{\partial \eta}{\partial y}\frac{\partial \xi}{\partial y},$$

$$\overline{C} = A\left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)^2 + 2B\frac{\partial \eta}{\partial y}\frac{\partial \eta}{\partial x} + C\left(\frac{\partial \eta}{\partial y}\right)^2.$$

Тогда для дискриминанта уравнения (4.2) получаем:

$$\overline{\delta} = \overline{B}^2 - \overline{A}\,\overline{C} = J^2 \delta.$$

Видим, что знак $\overline{\delta}$ уравнения (4.2) и знак δ уравнения (2.1) одинаковый. Поэтому тип уравнения не изменился:

1) $\overline{A}=0$, $\overline{C}=0$ гиперболический $\Rightarrow \overline{\delta}>0$;
2) $\overline{A}=0$, $\overline{B}=0$ параболический $\Rightarrow \overline{\delta}=0$;
3) $\overline{B}=0,$ $\overline{A}=\overline{C}$ эллиптический $\Rightarrow \overline{\delta}<0$.
Утверждение доказано.

5. УРАВНЕНИЯ ХАРАКТЕРИСТИК

Рассмотрим уравнение вида:

$$A\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+2B\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial z}{\partial x}+C\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2=0. \tag{5.1}$$

Данное уравнение является уравнением в частных производных первого порядка.
Вместе с уравнением (5.1) рассмотрим обыкновенное дифференциальное уравнение:

$$A(dy)^2-2Bdxdy+C(dx)^2=0. \tag{5.2}$$

Его формальное решение для дифференциала dy имеет вид:

$$A\neq 0,\quad dy=\frac{B\pm\sqrt{B^2-AC}}{A}dx,$$

$$dy=\frac{B+\sqrt{\delta}}{A}dx, \tag{5.2 а}$$

$$dy=\frac{B-\sqrt{\delta}}{A}dx. \tag{5.2 б}$$

В свою очередь решение уравнений (5.2 *а*) и (5.2 *б*) находим в виде общих интегралов:

$$\tilde{\varphi}(x,y)=c.$$

6. ПРИВЕДЕНИЕ К КАНОНИЧЕСКОМУ ВИДУ УРАВНЕНИЙ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ТИПА

Поскольку для уравнений гиперболического типа $\delta>0$, то уравнения (5.2 *а*) и (5.2 *б*) различны.
Тогда (см. выражения после уравнения (4.2)):
$\overline{\delta}=\overline{B}^2-\overline{A}\overline{C}>0$, $\overline{A}\overline{C}=0$, $\overline{B}\neq 0$.

Делим (4.2) на $2\overline{B}$, получаем ***канонический вид*** уравнения гиперболического типа:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta}=f_1\left(\xi,\eta,u,\frac{\partial u}{\partial\xi},\frac{\partial u}{\partial\eta}\right).$$

Проверим, что наша замена невырожденная, то есть $J \neq 0$.
Рассмотрим $\tilde{\varphi}(x, y)$ – общий интеграл уравнения (5.2 *а*).
Дифференцируем его:

$$\frac{\partial\tilde{\varphi}}{\partial x}dx + \frac{\partial\tilde{\varphi}}{\partial y}dy = 0,$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\partial\tilde{\varphi}}{\partial x}\bigg/\frac{\partial\tilde{\varphi}}{\partial y} \overset{(5.2a)}{\equiv} \frac{B+\sqrt{\delta}}{A}.$$

Рассмотрим $\tilde{\psi}(x, y)$ – общий интеграл уравнения (5.2 *б*).
Дифференцируем его:

$$\frac{\partial\tilde{\psi}}{\partial x}dx + \frac{\partial\tilde{\psi}}{\partial y}dy = 0,$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\partial\tilde{\psi}}{\partial x}\bigg/\frac{\partial\tilde{\psi}}{\partial y} \overset{(5.2б)}{\equiv} \frac{B-\sqrt{\delta}}{A}.$$

В результате имеем:

$$\frac{\partial\tilde{\varphi}}{\partial x}\bigg/\frac{\partial\tilde{\varphi}}{\partial y} \neq \frac{\partial\tilde{\psi}}{\partial x}\bigg/\frac{\partial\tilde{\psi}}{\partial y};\quad \frac{\partial\tilde{\varphi}}{\partial x}\frac{\partial\tilde{\psi}}{\partial y} - \frac{\partial\tilde{\psi}}{\partial x}\frac{\partial\tilde{\varphi}}{\partial y} \neq 0 \quad \Rightarrow\ J \neq 0.$$

Стало быть, замена невырожденная.

7. ПРИВЕДЕНИЕ К КАНОНИЧЕСКОМУ ВИДУ УРАВНЕНИЙ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО ТИПА

Поскольку для уравнений параболического типа $\delta = 0$, то уравнения (5.2 *а*) и (5.2 *б*) одинаковые и имеют вид:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{B}{A}.$$

Можно доказать, что в качестве функции $\psi(x, y)$ допустимо брать либо *x*, либо *y*.
Тогда (см. выражения после уравнения (4.2)):

$$\bar{\delta} = \bar{B}^2 - \bar{A}\bar{C} = 0,\quad \bar{A}\bar{C} = 0,\quad \bar{B} = 0.$$

Докажем от противного, что $\bar{C} \neq 0$. Учтём, что $B^2 - AC = 0$, а значит и

$$\left(\frac{B}{A}\right)^2 - \frac{C}{A} = 0.$$

При этом конечно $A \neq 0$.
Пусть (с учётом определения $\bar{C}$)

$$\bar{C} = 0 = A\left(\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)^2 + \frac{2B}{A}\frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial\psi}{\partial y} + \frac{C}{A}\left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)^2\right) =$$

$$=A\left(\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)^2+\frac{2B}{A}\frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial\psi}{\partial y}+\left(\frac{B}{A}\right)^2\left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)^2\right)=A\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}+\frac{B}{A}\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)^2.$$

Откуда:

$$\frac{\partial\psi}{\partial x}+\frac{B}{A}\frac{\partial\psi}{\partial y}=0,$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial x}\bigg/\frac{\partial\psi}{\partial y}=-\frac{B}{A}. \quad (*)$$

Учтём теперь, что $\varphi(x,y)=c$ – общий интеграл уравнения (5.2 *а*), которое теперь имеет вид:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{B}{A},$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}dx+\frac{\partial\varphi}{\partial y}dy=0.$$

Тогда:

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{\partial\varphi}{\partial x}\bigg/\frac{\partial\varphi}{\partial y}\equiv\frac{B}{A}. \quad (**)$$

Сравнивая (*) и (**), находим:

$$\frac{\partial\psi}{\partial x}\bigg/\frac{\partial\psi}{\partial y}=\frac{\partial\varphi}{\partial x}\bigg/\frac{\partial\varphi}{\partial y},$$

то есть получили противоречие $J=0$. Следовательно $\overline{C}\neq 0$.

Делим (4.2) на $\overline{C}\neq 0$, получаем *канонический вид* уравнения параболического типа:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial\eta^2}=f_1\left(\xi,\eta,u,\frac{\partial u}{\partial\xi},\frac{\partial u}{\partial\eta}\right).$$

8. ПРИВЕДЕНИЕ К КАНОНИЧЕСКОМУ ВИДУ УРАВНЕНИЙ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО ТИПА

Поскольку для уравнений эллиптического типа $\delta<0$, то (5.2 *а*) и (5.2 *б*) соответственно имеют вид:

$$dy=\frac{B+i\sqrt{-\delta}}{A}dx, \qquad dy=\frac{B-i\sqrt{-\delta}}{A}dx.$$

Запишем $\varphi(x,y)$ – и $\psi(x,y)$ – общие интегралы уравнений (5.2 *а*) и (5.2 *б*):

$$\varphi(x,y)\equiv\alpha(x,y)+i\beta(x,y)=c,$$

$$\psi(x,y)\equiv\alpha(x,y)-i\beta(x,y)=\overline{c},$$

и сделаем в (2.1) замену переменных:

$$\begin{cases} \xi_1 = \varphi(x,y), & \overline{A} = 0, \\ \eta_1 = \psi(x,y), & \overline{C} = 0. \end{cases}$$

Так как $\overline{\delta} = \overline{B}^2 - \overline{A}\,\overline{C} < 0$, то $\overline{B} \neq 0$, $\overline{A}\,\overline{C} = 0$.

Делим (4.2) на $\overline{B}$. Получаем канонический вид уравнения эллиптического типа в комплексной области $\forall(\xi_1,\eta_1) \in C^2$:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi_1 \partial \eta_1} = f_1\left(\xi_1, \eta_1, u, \frac{\partial u}{\partial \xi_1}, \frac{\partial u}{\partial \eta_1}\right),$$

$$\xi = \alpha = \frac{\xi_1 + \eta_1}{2},$$

$$\eta = в = \frac{\xi_1 - \eta_1}{2i}.$$

Пересчитаем смешанную производную в действительных переменных ξ и η

$$\frac{\partial u}{\partial \xi_1} = \frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial \xi_1}; \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial \xi_1 \partial \eta_1} = \frac{1}{4}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}\right).$$

В итоге получаем *канонический вид* уравнения эллиптического типа в действительной области $\forall(\xi,\eta) \in R^2$:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} = f_2\left(\xi, \eta, u, \frac{\partial u}{\partial \xi}, \frac{\partial u}{\partial \eta}\right).$$

<u>*Пример 1*</u>. Привести уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - 3\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 2\frac{\partial u}{\partial x} + 6\frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

к каноническому виду.

<u>*Решение*</u>:

В данном случае

$A = 1,\ B = 1,\ C = -3.$

$\delta = 1 + 3 = 4$, $\delta > 0$ - гиперболический тип.

Составим уравнения характеристик:

$(dy)^2 - 2dxdy - 3(dx)^2 = 0$,

$(y')^2 - 2y' - 3 = 0$,

$y_1' = -1$, $y_2' = 3 \Rightarrow$

$y = -x + c_1$, $y = 3x + c_2$,

$x + y = \xi$, $3x - y = \eta$,

$\frac{\partial \xi}{\partial x} = 1$, $\frac{\partial \eta}{\partial x} = 3$, $\frac{\partial \xi}{\partial y} = 1$, $\frac{\partial \eta}{\partial y} = -1$;

$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial x} \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial \xi} + 3\frac{\partial u}{\partial \eta}$;

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial y} \Rightarrow \quad \frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial \xi}-\frac{\partial u}{\partial \eta};$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)^2+2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial \eta}\frac{\partial \xi}{\partial x}\frac{\partial \eta}{\partial x}+\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}\left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)^2+\frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}+\frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}+6\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial \eta}+9\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2};$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}\frac{\partial \xi}{\partial y}\frac{\partial \xi}{\partial x}+\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial \eta}\left(\frac{\partial \eta}{\partial y}\frac{\partial \xi}{\partial x}+\frac{\partial \xi}{\partial y}\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)+\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}\frac{\partial \eta}{\partial y}\frac{\partial \eta}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial^2 \xi}{\partial x\partial y}+\frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial^2 \eta}{\partial x\partial y} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}+2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial \eta}-3\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2};$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}\left(\frac{\partial \xi}{\partial y}\right)^2+2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial \eta}\frac{\partial \xi}{\partial y}\frac{\partial \eta}{\partial y}+\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}\left(\frac{\partial \eta}{\partial y}\right)^2+\frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2}+\frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial^2 \eta}{\partial y^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}-2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial \eta}+\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}.$$

Подставив найденные выражения в исходное дифференциальное уравнение, получаем:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}+6\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial \eta}+9\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}+2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}+4\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial \eta}-6\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}-3\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}+6\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial \eta}-3\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}+$$

$$+2\frac{\partial u}{\partial \xi}+6\frac{\partial u}{\partial \eta}+6\frac{\partial u}{\partial \xi}-6\frac{\partial u}{\partial \eta}=0,$$

$$16\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial \eta}+8\frac{\partial u}{\partial \xi}=0,$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial \eta}=-\frac{1}{2}\frac{\partial u}{\partial \xi}\equiv f_1.$$

<u>*Пример 2*</u>. Привести уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-2\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\alpha\frac{\partial u}{\partial x}+\beta\frac{\partial u}{\partial y}+\gamma u=0$$

к каноническому виду.

<u>*Решение*</u>:

В данном случае

$A=1$, $B=-1$, $C=1$.

$\delta=0$ – параболический тип.

Составим уравнения характеристик:

$(dy)^2+2dxdy+(dx)^2=0$,

$(y')^2+2y'+1=0$,

$y'_{1,2}=-1 \Rightarrow$

$y=-x+c$, $c=x+y$.

Сделаем замену переменных: $\xi = x + y$, $\eta = y$ (произвольная функция).

$\dfrac{\partial \xi}{\partial x} = 1$, $\dfrac{\partial \eta}{\partial x} = 0$, $\dfrac{\partial \xi}{\partial y} = 1$, $\dfrac{\partial \eta}{\partial y} = 1$;

$\dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial u}{\partial \xi}$; $\dfrac{\partial u}{\partial y} = \dfrac{\partial u}{\partial \xi} + \dfrac{\partial u}{\partial \eta}$;

$\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}$; $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta}$; $\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + 2\dfrac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}$.

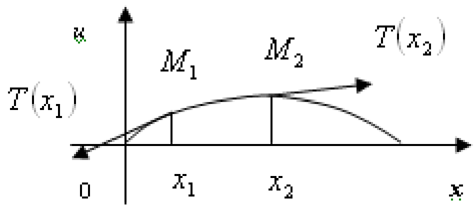
Подставив найденные выражения в исходное дифференциальное уравнение, получаем:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} - 2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} - 2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + 2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + \alpha\frac{\partial u}{\partial \xi} + \beta\frac{\partial u}{\partial \xi} + \beta\frac{\partial u}{\partial \eta} + \gamma u = 0,$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} = -\left\{(\alpha + \beta)\frac{\partial u}{\partial \xi} + \beta\frac{\partial u}{\partial \eta} + \gamma u\right\} \equiv f_1.$$

9. ПРИМЕР ФИЗИЧЕСКОЙ ЗАДАЧИ, ПРИВОДЯЩЕЙ К УРАВНЕНИЮ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ТИПА

Рассмотрим натянутую струну, закреплённую на концах.



Для дальнейшего изложения нам понадобятся три вспомогательных утверждения.

1. Докажем, что при выполнении вышеизложенных условий вектор силы натяжения струны не зависит от *t*, то есть $T(x,t) = T(x)$. Длину отрезка $[x_1, x_2]$ в момент времени *t* обозначим $l_{M_1M_2}$. Тогда

$$l_{M_1M_2} = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2}\, dx \approx \int_{x_1}^{x_2} dx = x_2 - x_1.$$

Разность $x_2 - x_1$ есть длина отрезка $[x_1, x_2]$ в состоянии покоя. Длина со временем не изменилась, поэтому и натяжение струны по времени не изменилось.

2. Покажем также, что

$$\cos\alpha(x) = 1,$$

где $\alpha(x)$ – угол между касательной в точке с абсциссой *x* к струне в момент времени *t* и положительным направлением оси *x*. Имеем:

$$\cos\alpha(x)=\frac{1}{\sqrt{1+tg^2\alpha(x)}}=\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2}}\approx 1.$$

3. Аналогично получаем:

$$\sin\alpha(x)=\cos\alpha(x)\cdot tg\alpha(x)=1\cdot\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial x}.$$

Для вывода уравнения колебания струны воспользуемся принципом Даламбера, согласно которому: результирующая всех сил, действующих на дугу M_1M_2 (включая силу инерции), равна нулю.

Составим условие равенства нулю суммы проекций на ось *Ou* всех сил, действующих на дугу M_1M_2: сил натяжения, внешней силы, силы сопротивления среды и силы инерции.

Пусть $T(x_1)$ – сила натяжения в точке x_1. Её проекция на ось *Ox*:

$T(x_1)\cos(T(x_1),Ox)=-T(x_1)\cos\alpha(x_1)=-T(x_1)$; проекция на ось *Ou*:

$$T(x_1)\cos(T(x_1),Ou)=-T(x_1)\sin\alpha(x_1)=-T(x_1)\frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x_1}.$$

Пусть $T(x_2)$ – сила натяжения в точке x_2. Её проекция на ось *Ox*:

$T(x_2)\cos\alpha(x_2)=T(x_2)$; проекция на ось *Ou*:

$$T(x_2)\sin\alpha(x_2)=T(x_2)\frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x_2}.$$

Определим силу сопротивления, рассчитанную на единицу длины:

$$-k\frac{\partial u}{\partial t}.$$

Пусть на струну действует внешняя вынуждающая сила перпендикулярно оси абсцисс: $p(x,t)$. Проекция этой силы на ось *Ox* равна нулю; её проекция на ось *Ou*:

$$\int_{x_1}^{x_2}p(x,t)dx.$$

Определим силу инерции:

$$-\rho(x)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}.$$

Здесь $\rho(x)$ – линейная плотность массы струны. Проекция этой силы на ось *Ox* равна нулю. Её проекция на ось *Ou*:

$$\int_{x_1}^{x_2}\left(-\rho(x)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right)dx.$$

Тогда по принципу Даламбера имеем:

$$-T(x_1)+T(x_2)=0, \qquad (9.1)$$

$$-T(x_1)\frac{\partial u}{\partial x}|_{x_1} + T(x_2)\frac{\partial u}{\partial x}|_{x_2} + \int_{x_1}^{x_2}\left(-k\frac{\partial u}{\partial t} + p(x,t) - \rho(x)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right)dx = 0 \tag{9.2}$$

Из (9.1) следует, что $T(x_1) = T(x_2)$; x_1 и x_2 – произвольные точки. Таким образом, вектор натяжения $T(x) = T_0$ не зависит от x.

Подставим T_0 в (9.2):

$$T_0\left(\frac{\partial u}{\partial x}|_{x_2} - \frac{\partial u}{\partial x}|_{x_1}\right) + \int_{x_1}^{x_2}\left(-k\frac{\partial u}{\partial t} + p(x,t) - \rho(x)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right)dx = 0,$$

$$T_0\int_{x_1}^{x_2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}dx + \int_{x_1}^{x_2}\left(-k\frac{\partial u}{\partial t} + p(x,t) - \rho(x)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right)dx = 0.$$

Используя свойство аддитивности по интегрируемым функциям определённого интеграла, запишем:

$$\int_{x_1}^{x_2}\left(T_0\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - k\frac{\partial u}{\partial t} + p(x,t) - \rho(x)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right)dx = 0 \tag{9.3}$$

$$T_0\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - k\frac{\partial u}{\partial t} + p(x,t) - \rho(x)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0 \tag{9.4}$$

Уравнение (9.4) и есть искомое уравнение колебаний струны.

Запишем некоторые частные случаи. Считаем $\rho(x) = \rho$ и k константами. Получаем:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \alpha\frac{\partial u}{\partial t} = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x,t) \tag{9.5}$$

$$\alpha = \frac{k}{\rho},\quad a^2 = \frac{T_0}{\rho},\quad f(x,t) = \frac{1}{\rho}p(x,t).$$

10. НАЧАЛЬНЫЕ И ГРАНИЧНЫЕ УСЛОВИЯ

Уравнение (9.5) имеет бесчисленное множество частных решений. Поэтому одного уравнения (9.5) для полного определения движения струны недостаточно. Искомая функция $u(x,t)$, удовлетворяющая уравнению (9.5), должна удовлетворять также *начальным условиям*, описывающим положение и скорость всех точек струны в начальный момент времени $(t = 0)$ и *граничным* (*краевым*) *условиям*, указывающим, что происходит на концах струны ($x = 0$ и $x = l$) при любом t.

Пусть, например, концы струны при $x = 0$ и $x = l$ неподвижны. Тогда при любом t должны выполняться равенства:

$$\begin{cases} u(0,t) = 0, \\ u(l,t) = 0. \end{cases}$$

Эти равенства называются граничными условиями.
В начальный момент времени $t=0$ струна имеет определённую форму, которую ей придали. Пусть эта форма определяется функцией $f(x)$. Таким образом:

$$u(x,0)=u|_{t=0}=f(x).$$

Далее, в начальный момент времени должна быть задана скорость в каждой точке струны, которая определяется функцией $F(x)$. Тогда

$$\frac{\partial u}{\partial t}|_{t=0}=F(x).$$

Последние два равенства называются начальными условиями.
Итак, физическая задача о колебании струны свелась к математической задаче: найти такое частное решение уравнения (9.5), которое удовлетворяет начальным и граничным условиям.

11. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ТИПА

1. Задача Коши.
Найти функцию $u(x,t)$, удовлетворяющую уравнению:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

и начальным условиям:

$$u(x,0)=f(x),$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}|_{t=0}=\frac{\partial u}{\partial t}(x,0)=F(x),$$

$$x\in(-\infty,+\infty),\quad t\geq 0.$$

2. Смешанная задача.
Найти функцию $u(x,t)$, непрерывную в области $x\in[0,l]$, $t\geq 0$ и удовлетворяющую уравнению:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

начальным условиям:

$$\begin{cases} u(x,0)=f(x), \\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0)=F(x), \end{cases}$$

и граничным условиям:
либо 1)

$$\begin{cases} u(0,t)=0, \\ u(l,t)=0, \end{cases}$$

Либо 2)

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t}(0,t)=0, \\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(l,t)=0, \end{cases}$$

либо 3)

$$\begin{cases} u(0,t)-\dfrac{T_0}{k_1}\dfrac{\partial u}{\partial x}(0,t)=0, \\ u(l,t)+\dfrac{T_0}{k_2}\dfrac{\partial u}{\partial x}(l,t)=0, \end{cases}$$

либо комбинации 1), 2), 3).
Здесь 1), 2) и 3) соответственно первая, вторая и третья краевые задачи.

12. РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЯ КОЛЕБАНИЙ СТРУНЫ МЕТОДОМ ХАРАКТЕРИСТИК

Рассмотрим уравнение свободных колебаний струны:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{12.1}$$

и найдём его общее решение.
Приведём уравнение (12.1) к каноническому виду, для чего составим уравнение его характеристик:

$$(dt)^2-a^2(dx)^2=0.$$

Нетрудно видеть, что его решения таковы: $x-at=c_1$, $x+at=c_2$ – характеристики уравнения (12.1).
Сделаем замену переменных $(x,t)\to(\xi,\eta)$ вида:

$$\xi=x-at,\ \eta=x+at \tag{12.2}$$

Вторые производные, входящие в уравнение (12.1), выражаются через производные по переменным ξ и η с помощью равенств:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}+2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial \eta}+\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}-2a^2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial \eta}+a^2\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}$$

Подставляя эти выражения в уравнение (12.1), получим:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial \eta}=0 \tag{12.3}$$

Перепишем (12.3) в виде:

$$\frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{\partial u}{\partial \eta}\right)=0$$

что возможно при

$$\frac{\partial u}{\partial \eta}=\Theta(\eta)$$

где $\Theta(\eta)$ – произвольная функция η. Интегрируя полученное уравнение по η найдём

$$u=\int \Theta(\eta) d\eta+\varphi(\xi)$$

где $\varphi(\xi)$ – произвольная функция ξ. Обозначая неопределённый интеграл через

$$\int \Theta(\eta) d\eta=\psi(\eta)$$

получим

$$u=\varphi(\xi)+\psi(\eta)$$

Возвращаясь к старым переменным x и t, окончательно находим общее решение уравнения (12.1):

$$u(x,t)=\varphi(x-at)+\psi(x+at) \tag{12.4}$$

где φ – и ψ – произвольные, дважды непрерывно дифференцируемые функции. Общее решение (12.4) уравнения (12.1) называется решением Даламбера уравнения свободных колебаний струны.

Рассмотрим задачу Коши для уравнения (12.1), то есть задачу отыскания частного решения уравнения (12.1), удовлетворяющего начальным условиям:

$$u\big|_{t=0}=f(x),\quad \frac{\partial u}{\partial t}\big|_{t=0}=F(x) \tag{12.5}$$

где $f(x)$ – и $F(x)$ – заданные функции.

Определим в общем решении (12.4) функции φ и ψ таким образом, чтобы удовлетворить начальным условиям (12.5):

$$\varphi(x)+\psi(x)=f(x),$$

$$-\varphi'(x)+\psi'(x)=\frac{1}{a}F(x) \tag{12.6}$$

Интегрируя второе равенство, получим

$$\frac{1}{a}\int_0^x F(x)dx=-\varphi(x)+\psi(x)+c \tag{12.7}$$

где c – произвольная постоянная.

Из равенств (12.6) и (12.7) определяем функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$:

$$\varphi(x)=\frac{1}{2}f(x)-\frac{1}{2a}\int_0^x F(z)dz+\frac{c}{2},$$

$$\psi(x)=\frac{1}{2}f(x)+\frac{1}{2a}\int_0^x F(z)dz-\frac{c}{2}.$$

Подставив полученные выражения в формулу (12.4), находим решение задачи Коши:

$$u(x,t)=\frac{f(x-at)+f(x+at)}{2}+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}F(z)dz \qquad (12.8)$$

Пример 3. Найти решение уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=25\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \text{ если } u|_{t=0}=0, \ \frac{\partial u}{\partial t}|_{t=0}=4x.$$

Решение:

Здесь $a=5$, $f(x)=0$, $F(x)=4x$. Тогда согласно (12.8) получаем:

$$u(x,t)=\frac{1}{10}\int_{x-5t}^{x+5t}4zdz=\frac{4}{20}z^2|_{x-5t}^{x+5t}=\frac{1}{5}\left[(x+5t)^2-(x-5t)^2\right]=4xt.$$

Пример 4. Найти решение уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=16\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \text{ если } u|_{t=0}=x, \ \frac{\partial u}{\partial t}|_{t=0}=0.$$

Решение:

Здесь $a=4$, $f(x)=x$, $F(x)=0$. Тогда согласно (12.8) получаем:

$$u(x,t)=\frac{1}{2}[(x-4t)+(x+4t)]=x.$$

Пример 5. Найти форму струны, определяемой уравнением

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

в момент времени $t=\frac{\pi}{a}$, если $u|_{t=0}=x$, $\frac{\partial u}{\partial t}|_{t=0}=sin\, x$.

Решение:

Согласно (12.8) получаем:

$$u(x,t)=\frac{x-at+x+at}{2}+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\sin zdz=x-\frac{1}{2a}[\cos(x+at)-\cos(x-at)].$$

В момент времени $t=\frac{\pi}{a}$ имеем:

$$u\left(x,\frac{\pi}{a}\right)=x-\frac{1}{2a}[\cos(x+\pi)-\cos(x-\pi)]=x-\frac{1}{2a}(-\cos x+\cos x)=x,$$

то есть струна совпадает с биссектрисой I и III квадрантов.

13. УРАВНЕНИЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ТИПА НА ОТРЕЗКЕ [0, *l*]

Рассмотрим первую краевую задачу для уравнения гиперболического типа (уравнение однородное, граничные условия однородные).

В этом случае для свободных колебаний струны имеем:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad x \in [0,l], \quad t \ge 0; \tag{13.1}$$

$$\begin{cases} u(0,t) = 0, \\ u(l,t) = 0; \end{cases} \tag{13.2}$$

$$\begin{cases} u(x,0) = f(x), \\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0) = F(x). \end{cases} \tag{13.3}$$

Условия (13.2) означают, что оба конца жёстко закреплены. Например, гитарная струна. Первая строка (13.3) задаёт вид струны в начальный момент времени, вторая строка (13.3) задаёт скорость точек струны в начальный момент времени.

Частное решение (13.1) ищем в виде произведения множителей, каждый из которых зависит только от одной переменной:

$$u(x,t) = X(x)T(t) \tag{13.4}$$

Поиск решения уравнения (13.1) в виде (13.4) называют методом Фурье.
Подставим (13.4) в (13.1):

$$X(x)T''(t) = a^2 X''(x)T(t),$$

или

$$\frac{T''(t)}{a^2 T(t)} \equiv \frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda = const.$$

Здесь заметим, что согласно нижеследующим построениям неопределённость дроби $X''(x)/X(x)$ вида $\{0/0\}$ при $x \to 0$ снимается и равна $-\lambda$.

Две функции разных переменных тождественно равны друг другу тогда и только тогда, когда они обе константы. Тогда получаем:

$$T''(t) + \lambda a^2 T(t) = 0 \tag{13.5}$$

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0 \tag{13.6}$$

Подставим (13.4) в (13.2):

$$X(0)T(t) = 0$$
$$X(l)T(t) = 0.$$

Чтобы получить нетривиальные, т. е. не равные тождественно нулю, решения вида (13.4), удовлетворяющие граничным условиям (13.2), необходимо найти нетривиальные решения уравнения (13.6), удовлетворяющие граничным условиям

$$X(0) = 0, \quad X(l) = 0 \tag{13.7}$$

Таким образом, приходим к следующей задаче: найти такие значения параметра λ (*собственные значения*), при которых существуют

нетривиальные решения (*собственные функции*) уравнения (13.6), удовлетворяющие граничным условиям (13.7).
Эту задачу называют задачей Штурма-Лиувилля.
Составим характеристическое уравнение

$$k^2+\lambda=0\Rightarrow k_{1,2}=\pm\sqrt{-\lambda}.$$

1) Пусть $\lambda=0$, тогда $k_{1,2}=0$.
$X(x)=c_1x+c_2$ – общее решение уравнения (13.6). Подставляя в (13.7), имеем $X(0)=c_2=0$, $X(l)=c_1l\Rightarrow c_1=0$(длина струны l отлична от нуля).
Значит $X(x)\equiv 0$ – тривиальное решение, которое нас не интересует.
2) Пусть $\lambda<0$, $\lambda=-\mu^2$, тогда $k_{1,2}=\pm\mu$.
В результате
$X(x)=c_1ch\mu x+c_2sh\mu x$ – общее решение уравнения (13.6). Решение содержит гиперболические функции, которые определяются следующим образом:
$sh\,z=\dfrac{e^z-e^{-z}}{2}$, $ch\,z=\dfrac{e^z+e^{-z}}{2}$.
Подставляя в (13.7), находим:
$X(0)=c_1=0$,
$X(l)=c_2sh\mu l=0$ (т. к. $c_1=0$).
Значит $X(x)\equiv 0$, т. е. опять тривиальное решение, которое нас не интересует.
3) Пусть $\lambda>0$, $\lambda=\mu^2$, тогда $k_{1,2}=\sqrt{-\mu^2}=\pm i\mu$.
Как известно, в этом случае (при $Re\,k_{1,2}=0$): $X(x)=c_1\cos\mu x+c_2\sin\mu x$- общее решение уравнения (13.6). Подставляя в (13.7), получаем:
$X(0)=c_1=0$,
$X(l)=c_2\sin\mu l=0$ (т. к. $c_1=0$), берём $c_2\neq 0\Rightarrow\sin\mu l=0\Rightarrow\mu l=\pi n$, n=1,2,….
Остюда найдём: $\mu_n=\dfrac{\pi n}{l}$, $\lambda_n=\left(\dfrac{\pi n}{l}\right)^2$, $X_n(x)=\sin\dfrac{\pi n}{l}x$ ($c_2=1$, т. к. c_2 – любое).
Теперь найдём функцию $T(t)$.
Решим уравнение (13.5):

$$T_n''(t)+\left(\frac{n\pi a}{l}\right)^2T_n(t)=0.$$

$$\alpha^2+\left(\frac{n\pi a}{l}\right)^2=0,\quad \alpha_{1,2}=\pm i\frac{\pi na}{l}.$$

Общее решение имеет вид:

$$T_n(t)=a_n\cos\frac{\pi na}{l}t+b_n\sin\frac{\pi na}{l}t,$$

где a_n – и b_n – произвольные постоянные.
Подставим найденные $X_n(x)$ и $T_n(t)$ в (13.4):

$$u_n(x,t) = X_n(x)T_n(t) = \sin\frac{\pi nx}{l}\left(a_n\cos\frac{\pi na}{l}t + b_n\sin\frac{\pi na}{l}t\right),\quad n = 1,2,\ldots.$$

В силу линейности и однородности уравнения (13.1) всякая конечная сумма решений также будет решением. То же справедливо и для функционального ряда:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n = \sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{\pi nx}{l}\left(a_n\cos\frac{\pi na}{l}t + b_n\sin\frac{\pi na}{l}t\right) \qquad (13.8)$$

Если ряд (13.8) равномерно сходится (см. признак Вейерштрасса в курсе математического анализа), то его можно почленно дважды дифференцировать по x и t. В этом случае он, также как и его составляющие u_n, удовлетворяет уравнению (13.1) и условиям (13.2), (13.3).

Подставляя (13.8) в (13.3), находим

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n\sin\frac{\pi nx}{l},$$

$$F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n\frac{\pi na}{l}\sin\frac{\pi nx}{l}.$$

Предположим, что функции f и F представимы в виде рядов по (в данном случае) синусам, тогда в силу теоремы единственности разложения в ряд найденные ряды и есть ряды этих функций по синусам (неполные тригонометрические *ряды Фурье*).

Коэффициенты разложения (коэффициенты ряда Фурье) находим следующим образом:

$$\begin{cases} a_n = \dfrac{2}{l}\displaystyle\int_0^l f(x)\sin\frac{\pi nx}{l}\,dx, \\ b_n = \dfrac{2}{\pi na}\displaystyle\int_0^l F(x)\sin\frac{\pi nx}{l}\,dx. \end{cases}$$

Пример 6.

Найти решение уравнения $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ с граничными $u(0,t) = 0$, $\frac{\partial u}{\partial x}(l,t) = 0$ и начальными $u(x,0) = \frac{hx}{l}$, $\frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 0$ условиями.

Решение:

Решение ищем в виде: $u(x,t) = X(x)T(t)$. Тогда:

$$X(x)T''(t) = a^2X''(x)T(t).$$

Разделив обе части на $a^2X(x)T(t)$, получим:

$$\frac{T''(t)}{a^2T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda^2 = const,$$

$$T''(t) + \lambda^2a^2T(t) = 0,$$

$$X''(x) + \lambda^2X(x) = 0.$$

Учитывая граничные условия, запишем:

$$u(0,t)=X(0)T(t)=0\Rightarrow X(0)=0,$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x,t)=X'(x)T(t),$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(l,t)=X'(l)T(t)=0\Rightarrow X'(l)=0$$

Задача Штурма-Лиувилля принимает вид:

$$\begin{cases} X''(x)+\lambda^2 X(x)=0, \\ X(0)=0, \\ X'(l)=0. \end{cases}$$

Запишем общее решение первого уравнения системы:

$X(x)=c_1\cos\lambda x+c_2\sin\lambda x$,

$X(0)=c_1=0$,

$X'(x)=-\lambda c_1\sin\lambda x+\lambda c_2\cos\lambda x$,

$X'(l)=-\lambda c_1\sin\lambda l+\lambda c_2\cos\lambda l=0\ \Rightarrow$

$\cos\lambda l=0$ (т. к. $c_1=0$, $c_2\neq 0$) $\Rightarrow \lambda l=\dfrac{\pi}{2}+\pi n=\dfrac{\pi(1+2n)}{2}$, $n\in\mathrm{N}$,

$$\lambda_n=\frac{\pi(1+2n)}{2l},\quad X_n(x)=\sin\frac{\pi(1+2n)}{2l}x \text{ (взяли } c_2=1\text{)}.$$

Тогда:

$$T''(t)+\left(\frac{\pi(1+2n)}{2l}\right)^2 a^2T(t)=0,$$

$$T_n(t)=a_n\cos\frac{\pi(1+2n)a}{2l}t+b_n\sin\frac{\pi(1+2n)a}{2l}t.$$

Возвращаясь к функции $u(x,t)$, получаем:

$$u_n(x,t)=X_n(x)T_n(t),$$

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{\pi(1+2n)}{2l}x\left(a_n\cos\frac{\pi(1+2n)a}{2l}t+b_n\sin\frac{\pi(1+2n)a}{2l}t\right),$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t)=$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{\pi(1+2n)}{2l}x\left(-a_n\frac{\pi(1+2n)a}{2l}\sin\frac{\pi(1+2n)a}{2l}t+b_n\frac{\pi(1+2n)a}{2l}\cos\frac{\pi(1+2n)a}{2l}t\right).$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,0)=\sum_{n=1}^{\infty}b_n\frac{\pi(1+2n)}{2l}a\sin\frac{\pi(1+2n)}{2l}x=0\Rightarrow b_n=0,$$

$$u(x,0)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n\sin\frac{\pi(1+2n)}{2l}x=\frac{hx}{l},$$

$$a_n=\frac{2}{l}\int_0^l\frac{hx}{l}\sin\frac{\pi(1+2n)}{2l}x\,dx=\frac{2}{l}\frac{h}{l}\int_0^l x\sin\frac{\pi(1+2n)}{2l}x\,dx.$$

Интегрируя по частям, получаем:

$$a_n = \frac{2h}{l^2}\frac{4l^2}{\pi^2(1+2n)^2}\sin\frac{\pi(1+2n)}{2} = \frac{8h}{\pi^2(1+2n)^2}(-1)^n.$$

Тогда окончательно:

$$u(x,t) = \frac{8h}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(1+2n)^2}\cos\frac{\pi(1+2n)a}{2l}t\cdot\sin\frac{\pi(1+2n)}{2l}x$$

Пример 7.

В области $0 < x < l$, $t > 0$ найти решение уравнения $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ с граничными $u(0,t) = 0$, $u(l,t) = 0$ и начальными $u(x,0) = 5\sin\frac{3\pi x}{l} - \frac{1}{2}\sin\frac{8\pi x}{l}$, $\frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 0$ условиями.

Решение:

Решение ищем в виде: $u(x,t) = X(x)T(t)$.

Тогда:

$$X(x)T''(t) = a^2 X''(x)T(t).$$

Разделив обе части на $a^2 X(x)T(t)$, получим:

$$\frac{T''(t)}{a^2T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda^2 = const,$$

$$T''(t) + \lambda^2 a^2 T(t) = 0,$$

$$X''(x) + \lambda^2 X(x) = 0.$$

Учитывая граничные условия, запишем:

$$u(0,t) = X(0)T(t) = 0 \Rightarrow X(0) = 0,$$

$$u(l,t) = X(l)T(t) = 0 \Rightarrow X(l) = 0.$$

Задача Штурма-Лиувилля принимает вид:

$$\begin{cases} X''(x) + \lambda^2 X(x) = 0, \\ X(0) = 0, \\ X'(l) = 0. \end{cases}$$

Запишем общее решение первого уравнения этой системы:

$$X(x) = c_1\cos\lambda x + c_2\sin\lambda x,$$

$$X(0) = c_1 = 0,$$

$$X(l) = c_1\cos\lambda l + c_2\sin\lambda l = 0,$$

$\sin\lambda l = 0$ (т. к. $c_1 = 0$, $c_2 \neq 0$), $\lambda l = \pi n,$ $\lambda_n = \frac{\pi n}{l},$ $n \in \mathbf{N},$ $X_n(x) = \sin\frac{\pi n x}{l}$ (взяли $c_2 = 1$).

Тогда для функции $T(t)$ имеем:

$$T''(t) + \left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 a^2 T(t) = 0,$$

$$T_n(t) = a_n\cos\frac{\pi n a}{l}t + b_n\sin\frac{\pi n a}{l}t.$$

Возвращаясь к функции $u(x,t)$, получаем:

$$u_n(x,t) = X_n(x)T_n(t),$$

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\frac{\pi n a}{l}t + b_n \sin\frac{\pi n a}{l}t\right)\sin\frac{\pi n x}{l},$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,l) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(-a_n \frac{\pi n a}{l}\sin\frac{\pi n a}{l}t + b_n\frac{\pi n a}{l}\cos\frac{\pi n a}{l}t\right)\sin\frac{\pi n x}{l},$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \frac{\pi n a}{l}\sin\frac{\pi n x}{l} = 0 \Rightarrow b_n = 0,$$

$$u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin\frac{\pi n x}{l} = 5\sin\frac{3\pi x}{l} - \frac{1}{2}\sin\frac{8\pi x}{l},$$

$$a_n = \frac{2}{l}\int_0^l \left(5\sin\frac{3\pi x}{l} - \frac{1}{2}\sin\frac{8\pi x}{l}\right)\sin\frac{\pi n x}{l}\,dx.$$

Интегрируя последнее выражение с использованием формул приведения, получаем:

$$a_n = \frac{5}{\pi}\left(\frac{\sin\pi(3-n)}{3-n} - \frac{\sin\pi(3+n)}{3+n}\right) - \frac{1}{2\pi}\left(\frac{\sin\pi(8-n)}{8-n} - \frac{\sin\pi(8+n)}{8+n}\right).$$

Заметим, что при $n=3$, 8 выражение для a_n определено в силу первого замечательного предела: $a_3 = 5$, $a_8 = -1/2$.

Тогда окончательно:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{5}{\pi}\left(\frac{\sin\pi(3-n)}{3-n} - \frac{\sin\pi(3+n)}{3+n}\right) - \frac{1}{2\pi}\left(\frac{\sin\pi(8-n)}{8-n} - \frac{\sin\pi(8+n)}{8+n}\right)\right]\times$$

$$\times\cos\frac{\pi n a}{l}t\sin\frac{\pi n x}{l}.$$

14. ПРИМЕРЫ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

I. Привести уравнения к каноническому виду

1. $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 4\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + 5\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} + \dfrac{\partial z}{\partial x} + 2\dfrac{\partial z}{\partial y} = 0.$

Ответ: $\dfrac{\partial^2 z}{\partial \xi^2} + \dfrac{\partial^2 z}{\partial \eta^2} + \dfrac{\partial z}{\partial \eta} = 0$, $\xi = 2x - y$, $\eta = x$.

2. $y^2\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}+2xy\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+2x^2\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}+y\dfrac{\partial z}{\partial y}=0$.

Ответ: $\dfrac{\partial^2 z}{\partial \xi^2}+\dfrac{\partial^2 z}{\partial \eta^2}+\dfrac{1}{\xi-\eta}\cdot\dfrac{\partial z}{\partial \xi}+\dfrac{1}{2\eta}\cdot\dfrac{\partial z}{\partial \eta}=0$, $\xi=x^2-y^2$, $\eta=x^2$.

3. $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}-2\cos x\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}-(3+\sin^2 x)\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}-y\dfrac{\partial z}{\partial y}=0$.

Ответ: $\dfrac{\partial^2 z}{\partial \xi\partial \eta}+\dfrac{\eta-\xi}{32}\left(\dfrac{\partial z}{\partial \xi}-\dfrac{\partial z}{\partial \eta}\right)=0$, $\xi=2x+\sin x+y$, $\eta=2x-\sin x-y$.

4. $x^2\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}+2xy\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+y^2\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$.

Ответ: $\dfrac{\partial^2 z}{\partial \eta^2}=0$, $\xi=\dfrac{y}{x}$, $\eta=y$.

5. $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}-4\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}-3\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}-2\dfrac{\partial z}{\partial x}+6\dfrac{\partial z}{\partial y}=0$.

Ответ: $\dfrac{\partial^2 z}{\partial \xi\partial \eta}-\dfrac{\partial z}{\partial \xi}=0$, $\xi=x+y$, $\eta=3x+y$.

6. $\dfrac{1}{x^2}\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\dfrac{1}{y^2}\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$.

Ответ: $\dfrac{\partial^2 x}{\partial \xi^2}+\dfrac{\partial^2 x}{\partial \eta^2}+\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{\xi}\dfrac{\partial z}{\partial \xi}+\dfrac{1}{\eta}\dfrac{\partial z}{\partial \eta}\right)=0$, $\xi=y^2$, $\eta=x^2$.

7. $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}-2\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+2\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$.

Ответ: $\dfrac{\partial^2 x}{\partial \xi^2}+\dfrac{\partial^2 x}{\partial \eta^2}=0$, $\xi=y+x$, $\eta=x$.

8. $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}\sin^2 x-2y\sin x\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+y^2\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$.

Ответ: $\frac{\partial^2 z}{\partial \eta^2} = \frac{2\xi}{\xi^2 + \eta^2}\frac{\partial z}{\partial \xi}$, $\xi = y \cdot tg\frac{x}{2}$, $\eta = y$.

9. $x^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2xy\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} - 3y^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - 2x\frac{\partial z}{\partial x} + 4y\frac{\partial z}{\partial y} + 16x^4 z = 0$.

Ответ: $\frac{\partial^2 z}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{1}{4\eta}\cdot\frac{\partial z}{\partial \xi} - \frac{1}{\xi}\cdot\frac{\partial z}{\partial \eta} + z = 0$, $\xi = xy$, $\eta = \frac{x^3}{y}$.

II. Решить уравнения

10. $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, если $u|_{t=0} = x^2$, $\frac{\partial u}{\partial t}|_{t=0} = 0$.

Ответ: $u = x^2 + t^2$.

11. $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 4\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, если $u|_{t=0} = 0$, $\frac{\partial u}{\partial t}|_{t=0} = x$.

Ответ: $u = xt$.

12. $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, если $u|_{t=0} = x$, $\frac{\partial u}{\partial t}|_{t=0} = -x$.

Ответ: $u = x(1-t)$.

13. $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, если $u|_{t=0} = 0$, $\frac{\partial u}{\partial t}|_{t=0} = \cos x$.

Ответ: $u = (\cos x \sin at)/a$.

14. Найти форму струны, определяемой уравнением

$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ в момент времени $t = \frac{\pi}{2a}$, если $u|_{t=0} = \sin x$, $\frac{\partial u}{\partial t}|_{t=0} = 1$.

Ответ: $u = \pi/(2a)$, т. е. струна параллельна оси абсцисс.

15. Найти форму струны, определяемой уравнением

$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ в момент времени $t = \pi$, если $u|_{t=0} = \sin x$, $\frac{\partial u}{\partial t}|_{t=0} = \cos x$.

Ответ: $u = -\sin x$.

16. Однородная струна, закреплённая на концах $x = 0$ и $x = l$, имеющая в начальный момент времени форму

$$u(x,0) = \frac{16}{5}h\left[\left(\frac{x}{l}\right)^4 - 2\left(\frac{x}{l}\right)^3 + \left(\frac{x}{l}\right)\right],$$

где $h > 0$ – достаточно малое $(h^2 << 1)$ число, начала колебаться без начальной скорости. Найти форму струны при её свободных колебаниях.

Ответ: $$u(x,t) = \frac{1536}{5\pi^5}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cos\frac{(2n+1)\pi at}{l}\sin\frac{(2n+1)\pi x}{l}}{(2n+1)^5}.$$

17. Однородная струна, закреплённая на концах $x = 0$ и $x = l$, имеет в начальный момент времени форму параболы, симметричной относительно перпендикуляра, проведённого через точку $x = l/2$. Определить смещение точек струны от прямолинейного положения равновесия, предполагая, что начальные скорости отсутствуют.

Указание. Применить метод Фурье к решению уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

при краевых условиях

$$u(0,t) = 0,\ u(l,t) = 0,$$

$$u(x,0) = \frac{4hx(l-x)}{l^2},\ \frac{\partial u(x,0)}{\partial t} = 0\ \ (0 \le x \le l).$$

Ответ: $$u(x,t) = \frac{32h}{\pi^3}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cos\frac{(2n+1)\pi at}{l}\sin\frac{(2n+1)\pi x}{l}}{(2n+1)^3}.$$

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Бицадзе А.В. Уравнения математической физики: учебник / А.В. Бицадзе –М.: Наука, 1982. – 336 с.
2. Голоскоков Д.П. Уравнения математической физики. Решение задач в системе Maple: учебник для вузов / Д. П. Голоскоков. – СПб.: Питер, 2004. – 539 с.
3. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисления (том II) / Н.С. Пискунов – М.: Интеграл-пресс, 2002. – 410с.
4. Сабитов К.Б. Уравнения математической физики / К.Б. Сабитов – М.: Высшая школа, 2003. – 255с.
5. Степанов В.В. Курс дифференциальных уравнений: учебник /В.В. Степанов. 11-е изд., исправленное. – М.: Издательство ЛКИ, 2016. – 512 с.
6. Тихонов А.А. Уравнения математической физики: учебное пособие /А.А. Самарский, А.Н. Тихонов. Изд. 7-е. – М.: Изд-во МГУ, 2004. – 798 с.
7. Филиппов А.Ф. Сборник задач по дифференциальным уравнениям: учеб. пособие для вузов / А. Ф. Филиппов. 8-е изд. дополненное. – М.: Интеграл-пресс, 1998. – 208 с.
8. Хватцев А.А. Дифференциальные уравнения: учебное пособие / А. А. Хватцев. – Псков: Издательство ППИ, 2010. – 68 с.

КУНИЖЕВА Лариса Адамовна
ЭРКЕНОВА Алина Аскербийевна

УРАВНЕНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

Учебно-методическое пособие для обучающихся
по направлению подготовки 01.03.02 «Прикладная математика»

Корректор Чагова О. Х.
Редактор Чагова О. Х.

Сдано в набор 28.08.2024 г.
Формат 60х84/16
Бумага офсетная
Печать офсетная
Усл. печ. л.1,86
Заказ № 4959
Тираж 100 экз.

Оригинал-макет подготовлен
в Библиотечно-издательском центре СКГА
369000, г. Черкесск, ул. Ставропольская, 36