# Методические указания по выполнению и варианты контрольных заданий для студентов заочной формы обучения

**Составитель: доцент кафедры математики Л.М. Эльканова**

В процессе изучения курса математики студент должен выполнить ряд контрольных работ, главная цель которых — оказать студенту помощь в его работе. Рецензии на эти работы позволяют студенту судить о степени усвоения им соответствующего раздела курса; указывают на имеющиеся у него пробелы, на желательное направление дальнейшей работы; помогают сформулировать вопросы для постановки их перед преподавателем.

При выполнении контрольных работ необходимо строго придерживаться указанных ниже правил. Работы, выполненные без соблюдения этих правил не зачитываются и возвращаются студенту для переработки.

1. Каждая контрольная работа должна быть выполнена в отдельной тетради в клетку, чернилами любого цвета, кроме красного. Всего по программе курса три контрольные, номера разделов входящих в каждую контрольную приведены в таблицах

2. В заголовке работы на обложке тетради должны быть ясно написаны фамилия студента, его инициалы, учебный номер (шифр), название дисциплины, номер контрольной работы; здесь же следует указать название учебного заведения. В конце работы следует поставить дату ее выполнения и подпись студента.

3. В работу должны быть включены все задачи, указанные в задании, строго по положенному варианту. Вариант контрольной работы выбирается по последней цифре номера зачетной книжки. Контрольные работы, содержащие не все задания, а также задачи не своего варианта, не зачитываются.

4. Решения задач надо располагать в порядке возрастания их номеров, указанных в заданиях, сохраняя номера задач.

5. Перед решением задачи надо полностью выписать ее условие. В том случае, если несколько задач, из которых студент выбирает задачи своего варианта, имеет общую формулировку, следует, переписывая условие задачи, заменить общие данные конкретными, взятыми из соответствующего номера.

6. Решения задач следует излагать подробно и аккуратно, объясняя и мотивируя все действия по ходу решения и делая необходимые чертежи.

7. Контрольные работы по семестрам распределяются следующим образом:

1 семестр – Контрольная работа №1;

2 семестр – Контрольная работа №2;

3 семестр – Контрольная работа №3;

КОНТРОЛЬНЫЕ ЗАДАНИЯ

Контрольная работа №1

| Вариант | Номера задач контрольных заданий | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 11 | 21 | 31 | 41 | 51 | 61 | 71 | 81 | 91 | 101 | 111 | 121 | 131 |
| 2 | 2 | 12 | 22 | 32 | 42 | 52 | 62 | 72 | 82 | 92 | 102 | 112 | 122 | 132 |
| 3 | 3 | 13 | 23 | 33 | 43 | 53 | 63 | 73 | 83 | 93 | 103 | 113 | 123 | 133 |
| 4 | 4 | 14 | 24 | 34 | 44 | 54 | 64 | 74 | 84 | 94 | 104 | 114 | 124 | 134 |
| 5 | 5 | 15 | 25 | 35 | 45 | 55 | 65 | 75 | 85 | 95 | 105 | 115 | 125 | 135 |
| 6 | 6 | 16 | 26 | 36 | 46 | 56 | 66 | 76 | 86 | 96 | 106 | 116 | 126 | 136 |
| 7 | 7 | 17 | 27 | 37 | 47 | 57 | 67 | 77 | 87 | 97 | 107 | 117 | 127 | 137 |
| 8 | 8 | 18 | 28 | 38 | 48 | 58 | 68 | 78 | 88 | 98 | 108 | 118 | 128 | 138 |
| 9 | 9 | 19 | 29 | 39 | 49 | 59 | 69 | 79 | 89 | 99 | 109 | 119 | 129 | 139 |
| 0 | 10 | 20 | 30 | 40 | 50 | 60 | 70 | 80 | 90 | 100 | 110 | 120 | 130 | 140 |

| Вариант | Номера задач контрольных заданий | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 141 | 151 | 161 | 171 | 181 | 191 | 201 | 211 | 221 |
| 2 | 142 | 152 | 162 | 172 | 182 | 192 | 202 | 212 | 222 |
| 3 | 143 | 153 | 163 | 173 | 183 | 193 | 203 | 213 | 223 |
| 4 | 144 | 154 | 164 | 174 | 184 | 194 | 204 | 214 | 224 |
| 5 | 145 | 155 | 165 | 175 | 185 | 195 | 205 | 215 | 225 |
| 6 | 146 | 156 | 166 | 176 | 186 | 196 | 206 | 216 | 226 |
| 7 | 147 | 157 | 167 | 177 | 187 | 197 | 207 | 217 | 227 |
| 8 | 148 | 158 | 168 | 178 | 188 | 198 | 208 | 218 | 228 |
| 9 | 149 | 159 | 169 | 179 | 189 | 199 | 209 | 219 | 229 |
| 0 | 150 | 160 | 170 | 180 | 190 | 200 | 210 | 220 | 230 |

Контрольная работа №2

| Вариант | Номера задач контрольных заданий | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 6 | | | | | 7 | | | |
| 1 | 231 | 241 | 251 | 261 | 271 | 281 | 291 | 301 | 311 |
| 2 | 232 | 242 | 252 | 262 | 272 | 282 | 292 | 302 | 312 |
| 3 | 233 | 243 | 253 | 263 | 273 | 283 | 293 | 303 | 313 |
| 4 | 234 | 244 | 254 | 264 | 274 | 284 | 294 | 304 | 314 |
| 5 | 235 | 245 | 255 | 265 | 275 | 285 | 295 | 305 | 315 |
| 6 | 236 | 246 | 256 | 266 | 276 | 286 | 296 | 306 | 316 |
| 7 | 237 | 247 | 257 | 267 | 277 | 287 | 297 | 307 | 317 |
| 8 | 238 | 248 | 258 | 268 | 278 | 288 | 298 | 308 | 318 |
| 9 | 239 | 249 | 259 | 269 | 279 | 289 | 299 | 309 | 319 |
| 0 | 240 | 250 | 260 | 270 | 280 | 290 | 300 | 310 | 320 |

| Вариант | Номера задач контрольных заданий | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 8 | | | | | 9 | | | | |
| 1 | 321 | 331 | 341 | 351 | 361 | 371 | 381 | 391 | 401 | 411 |
| 2 | 322 | 332 | 342 | 352 | 362 | 372 | 382 | 392 | 402 | 412 |
| 3 | 323 | 333 | 343 | 353 | 363 | 373 | 383 | 393 | 403 | 413 |
| 4 | 324 | 334 | 344 | 354 | 364 | 374 | 384 | 394 | 404 | 414 |
| 5 | 325 | 335 | 345 | 355 | 365 | 375 | 385 | 395 | 405 | 415 |
| 6 | 326 | 336 | 346 | 356 | 366 | 376 | 386 | 396 | 406 | 416 |
| 7 | 327 | 337 | 347 | 357 | 367 | 377 | 387 | 397 | 407 | 417 |
| 8 | 328 | 338 | 348 | 358 | 368 | 378 | 388 | 398 | 408 | 418 |
| 9 | 329 | 339 | 349 | 359 | 369 | 379 | 389 | 399 | 409 | 419 |
| 0 | 330 | 340 | 350 | 360 | 370 | 380 | 390 | 400 | 410 | 420 |

Контрольная работа №3

| Вариант | Номера задач контрольных заданий | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 10 | | | | | 11 | | | | |
| 1 | 421 | 431 | 441 | 451 | 461 | 471 | 481 | 491 | 501 | 511 |
| 2 | 422 | 432 | 442 | 452 | 462 | 472 | 482 | 492 | 502 | 512 |
| 3 | 423 | 433 | 443 | 453 | 463 | 473 | 483 | 493 | 503 | 513 |
| 4 | 424 | 434 | 444 | 454 | 464 | 474 | 484 | 494 | 504 | 514 |
| 5 | 425 | 435 | 445 | 455 | 465 | 475 | 485 | 495 | 505 | 515 |
| 6 | 426 | 436 | 446 | 456 | 466 | 476 | 486 | 496 | 506 | 516 |
| 7 | 427 | 437 | 447 | 457 | 467 | 477 | 487 | 497 | 507 | 517 |
| 8 | 428 | 438 | 448 | 458 | 468 | 478 | 488 | 498 | 508 | 518 |
| 9 | 429 | 439 | 449 | 459 | 469 | 479 | 489 | 499 | 509 | 519 |
| 0 | 430 | 440 | 450 | 460 | 470 | 480 | 490 | 500 | 510 | 520 |

| Вариант | Номера задач контрольных заданий | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | 12 | | | | | |
| 1 | 521 | 531 | 541 | 551 | 561 | 571 |
| 2 | 522 | 532 | 542 | 552 | 562 | 572 |
| 3 | 523 | 533 | 543 | 553 | 563 | 573 |
| 4 | 524 | 534 | 544 | 554 | 564 | 574 |
| 5 | 525 | 535 | 545 | 555 | 565 | 575 |
| 6 | 526 | 536 | 546 | 556 | 566 | 576 |
| 7 | 527 | 537 | 547 | 557 | 567 | 577 |
| 8 | 528 | 538 | 548 | 558 | 568 | 578 |
| 9 | 529 | 539 | 549 | 559 | 569 | 579 |
| 0 | 530 | 540 | 550 | 560 | 570 | 580 |

ЗАДАЧИ ДЛЯ КОНТРОЛЬНЫХ ЗАДАНИЙ

## 1. Элементы векторной алгебры и аналитической геометрии

1 — 10. Даны векторы a(a1; a2; a3), b(b1; b2; b3), c(c1; c2; c3) и d(d1; d2; d3) в некотором базисе. Показать, что векторы a, Ь, c образуют базис и найти координаты вектора d в этом базисе.

**1.** a( 1; 2; 3), b (—1; 3; 2), c (7; —3; 5), d ( 6; 10; 17).

**2.** a( 4; 7; 8), b ( 9; 1; 3), c (2; —4; 1), d ( 1; —13; —13).

**3.** a( 8; 2; 3), b ( 4; 6; 10), c (3; —2; 1), d ( 7; 4; 11).

**4.** a(10; 3; 1), b ( 1; 4; 2), c (3; 9; 2), d (19; 30; 7).

**5.** a( 2; 4; 1), b ( 1; 3; 6), c (5; 3; 1), d (24; 20; 6).

**6** a( 1; 7; 3), b ( 3; 4; 2), c (4; 8; 5), d ( 7; 32; 14).

**7.** a( 1; —2; 3), b ( 4; 7; 2), c (6; 4; 2), d (14; 18; 6).

**8.** a( 1; 4; 3), b ( 6; 8; 5), c (3; 1; 4), d (21; 18; 33).

**9.** a( 2; 7; 3), b ( 3; 1; 8), c (2; —7; 4), d (16; 14; 27).

**10.** a( 7; 2; 1), b ( 4; 3; 5), c (3; 4;—2), d ( 2; —5; —13).

11—20. Даны координаты вершин пирамиды $A_1A_2A_3A_4$. Найти 1) длину ребра $A_1A_2$; 2) угол между ребрами $A_1A_2$ и $A_1A_4$; 3) угол между ребром $A_1A_4$ и гранью $A_1A_2A_3$; 4) площадь грани $A_1A_2A_3$ 5) объем пирамиды; 6) уравнения прямой $A_1A_2$ 7) уравнение плоскости $A_1A_2A_3$; 8) уравнения высоты, опущенной из вершины $A_4$ на грань $A_1A_2A_3$. Сделать чертеж

**11.** $A_1$ ( 4; 2; 5), $A_2$ ( 0; 7; 2), $A_3$(0; 2; 7), $A_4$( 1; 5; 0).

**12.** $A_1$ ( 4; 4; 10), $A_2$ ( 4; 10; 2), $A_3$(2; 8; 4), $A_4$ (9; 6; 4).

**13.** $A_1$ ( 4; 6; 5), $A_2$ ( 6; 9; 4), $A_3$(2; 10; 10), $A_4$ (7; 5; 9).

**14.** $A_1$ ( 3; 5; 4), $A_2$ ( 8; 7; 4), $A_3$(5; 10; 4), $A_4$ (4; 7; 8).

**15.** $A_1$ (10; 6; 6), $A_2$ (—2; 8; 2), $A_3$(6; 8; 9), $A_4$ (7; 10; 3).

**16.** $A_1$ ( 1; 8; 2), $A_2$ ( 5; 2; 6), $A_3$(5; 7; 4), $A_4$ (4; 10; 9).

**17.** $A_1$ ( 6; 6; 5), $A_2$ ( 4; 9; 5), $A_3$(4; 6; 11), $A_4$ (6; 9; 3).

**18.** $A_1$ ( 7; 2; 2), $A_2$ ( 5; 7; 7), $A_3$(5; 3; 1), $A_4$ (2; 3; 7).

**19.** $A_1$ ( 8; 6; 4), $A_2$ ( 10; 5; 5), $A_3$(5; 6; 8), $A_4$ (8; 10; 7).

**20.** $A_1$ ( 7; 7; 3), $A_2$ ( 6; 5; 8), $A_3$(3; 5; 8), $A_4$ (8; 4; 1).

21. Уравнение одной из сторон квадрата x+3y—5=0. Составить уравнения трех остальных сторон квадрата, если P(—1; 0)—точка пересечения его диагоналей. Сделать чертеж.

22. Даны уравнения одной из сторон ромба x—3y+10= и одной из его диагоналей x+4y—4=0, диагонали ромба пересекаются в точке P(0; 1). Найти уравнения остальных сторон ромба. Сделать чертеж.

23. Уравнения двух сторон параллелограмма x+2y+2=0 и x+y—4=0, а уравнение одной из его диагоналей x—2=0. Найти координаты вершин параллелограмма. Сделать чертеж.

24. Даны две вершины A(-3; 3) и B(5; —1) и точка C(4; 3) пересечения высот треугольника. Составить уравнения его сторон. Сделать чертеж.

25. Даны вершины A(—3; —2), B(4; —1), C(1; 3) трапеции ABCD (AD||BC). Известно, что диагонали трапеции взаимно перпендикулярны. Найти координаты вершины D этой трапеция. Сделать чертеж.

26. Даны уравнения двух сторон треугольника 5x—4y+5=0 и 4x+y—9=0. Его медианы пересекаются в точке P(0, 2). Составить уравнение третьей стороны треугольника. Сделать чертеж.

27. Даны две вершины A (2; —2) и 5(3; —1) и точка P(1; 0) пересечения медиан треугольника ABC. Составить уравнение высоты треугольника, проведенной через третью вершину C. Сделать чертеж.

28. Даны уравнения двух высот треугольника x+y=4 и y=2x и одна из его вершин A(0; 2). Составить уравнения сторон треугольника. Сделать чертеж.

29. Даны уравнения двух медиан треугольника x—2y+1=0 и y—1=0 и одна из его вершин A(1; 3). Составить уравнения его сторон. Сделать чертеж.

30. Две стороны треугольника заданы уравнениями 5x—2y—8=0 и 3x—2y—8=0, а середина третьей стороны совпадает с началом координат. Составить уравнение этой стороны. Сделать чертеж.

31. Составить уравнение и построить линию, расстояния каждой точки которой от начала координат и от точки A(5; 0) относятся как 2:1.

32. Составить уравнение и построить линию, расстояние каждой точки которой от точки A(—1; 0) вдвое меньше расстояния ее от прямой x=-4.

33. Составить уравнение и построить линию, расстояния каждой точки которой от точки A(2; 0) и от прямой 5x+8=0 относятся, как 5:4.

34. Составить уравнение и построить линию, каждая точка которой находится вдвое дальше от точки A(4; 0), чем от точки B(1; 0),

35. Составить уравнение и построить линию, расстояния каждой точки которой от точки A(2; 0) и от прямой 2x+5=0 относятся, как 4:5.

36. Составить уравнение и построить линию, расстояние каждой точки которой от точки A(3; 0) вдвое меньше расстояния от точки B(26; 0).

37. Составить уравнение и построить линию, каждая точка которой одинаково удалена от точки A(0; 2) и от прямой y—4=0.

38. Составить уравнение и построить линию, каждая точка которой равноотстоит от оси ординат и от окружности x2+y2=Ьк.

Замечание. Напомним, что за расстояние от точки A до фигуры Ф принимается наименьшее из расстояний между точкой A и точками фигуры Ф.

39. Составить уравнение и построить линию, каждая точка которой равноудалена от точки Л (2; 6) и от прямой y+2 = 0.

40. Составить уравнение и построить линию, каждая точка которой отстоит от точки A(—4; 0) втрое дальше, чем от начала координат.

41—50. Линия задана уравнением r=r(φ) в полярной системе координат. Требуется: 1) построить линию по точкам начиная от φ=0 до φ=2π и придавая φ значения через промежуток π/8; 2) найти уравнение данной линии в декартовой прямоугольной системе координат, у которой начало совпадает с полюсом, а положительная полуось абсцисс — с полярной осью; 3) по уравнению в декартовой прямоугольной системе координат определить, какая это линия.

**41.** $r = 1/(1 + \cos\varphi)$. **42.** $r = 1/(2 + \cos\varphi)$.

**43.** $r = 4/(2 - 3\cos\varphi)$. **44.** $r = 8/(3 - \cos\varphi)$.

**45.** $r = 1/(2 + 2\cos\varphi)$. **46.** $r = 5/(3 - 4\cos\varphi)$.

**47.** $r = 10/(2 + \cos\varphi)$. **48.** $r = 3/(1 - 2\cos\varphi)$.

**49.** $r = 1/[3(1 - \cos\varphi)]$. **50.** $r = 5/(6 + 3\cos\varphi)$.

## 2. Элементы линейной алгебры

51—60. Дана система линейных уравнений

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3. \end{cases}$$

Доказать ее совместность и решить двумя способами: 1) методом Гаусса; 2) средствами матричного исчисления.

**51.** $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 5, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 1, \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 11. \end{cases}$ **52.** $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 6, \\ 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 = 20, \\ 3x_1 - 2x_2 - 5x_3 = 6. \end{cases}$

**53.** $\begin{cases} 4x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 9, \\ 2x_1 + 5x_2 - 3x_3 = 4, \\ 5x_1 + 6x_2 - 2x_3 = 18. \end{cases}$ **54.** $\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = -1, \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = -4, \\ 4x_1 + x_2 + 4x_3 = -2. \end{cases}$

**55.** $\begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 = 4, \\ 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 11, \\ 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 11. \end{cases}$ **56.** $\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 8, \\ 2x_1 - x_2 - 3x_3 = -4, \\ x_1 + 5x_2 + x_3 = 0. \end{cases}$

**57.** $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 1, \\ 8x_1 + 3x_2 - 6x_3 = 2, \\ 4x_1 + x_2 - 3x_3 = 3. \end{cases}$ **58.** $\begin{cases} x_1 - 4x_2 - 2x_3 = -3, \\ 3x_1 + x_2 + x_3 = 5, \\ 3x_1 - 5x_2 - 6x_3 = -9. \end{cases}$

**59.** $\begin{cases} 7x_1 - 5x_2 = 31, \\ 4x_1 + 11x_3 = -43, \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = -20. \end{cases}$ **60.** $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 31, \\ 5x_1 + x_2 + 2x_3 = 20, \\ 3x_1 - x_2 + x_3 = 9. \end{cases}$

61—70. Даны два линейных преобразования:

$$\begin{cases} x_1' = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3, & x_1'' = b_{11}x_1' + b_{12}x_2' + b_{13}x_3', \\ x_2' = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3, & x_2'' = b_{21}x_1' + b_2x_2' + b_{23}x_3', \\ x_3' = a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3; & x_3'' = b_{31}x_1' + b_{32}x_2' + b_{33}x_3'. \end{cases}$$

Средствами матричного исчисления найти преобразование, выражающее $x_1''$, $x_2''$, $x_3''$ через $x_1$, $x_2$, $x_3$.

**61.** $\begin{cases} x_1' = 4x_1 + 3x_2 + 5x_3, \\ x_2' = 6x_1 + 7x_2 + x_3, \\ x_3' = 9x_1 + x_2 + 8x_3; \end{cases}$ $\begin{cases} x_1'' = -x_1' + 3x_2' - 2x_3', \\ x_2'' = -4x_1' + x_2' + 2x_3', \\ x_3'' = 3x_1' - 4x_2' + 5x_3'. \end{cases}$

**62.** $\begin{cases} x_1' = x_1 - x_2 - x_3, \\ x_2' = -x_1 + 4x_2 + 7x_3, \\ x_3' = 8x_1 + x_2 - x_3; \end{cases}$ $\begin{cases} x_1'' = 9x_1' + 3x_2' + 5x_3', \\ x_2'' = 2x_1' + 3x_3', \\ x_3'' = x_2' - x_3'. \end{cases}$

**63.** $\begin{cases} x_1' = 7x_1 + 4x_3, \\ x_2' = 4x_2 - 9x_3, \\ x_3' = 3x_1 + x_2; \end{cases}$ $\begin{cases} x_1'' = x_2' - 6x_3', \\ x_2'' = 3x_1' + 7x_3', \\ x_3'' = x_1' + x_2' - x_3'. \end{cases}$

**64.** $\begin{cases} x_1' = 2x_2, \\ x_2' = -2x_1 + 3x_2 + 2x_3, \\ x_3' = 4x_1 - x_2 + 5x_3; \end{cases}$ $\begin{cases} x_1'' = -3x_1' + x_3', \\ x_2'' = 2x_2' + x_3', \\ x_3'' = -x_2' + 3x_3'. \end{cases}$

**65.** $\begin{cases} x_1' = 3x_1 - x_2 + 5x_3, \\ x_2' = x_1 + 2x_2 + 4x_3, \\ x_3' = 3x_1 + 2x_2 - x_3; \end{cases}$ $\begin{cases} x_1'' = 4x_1' + 3x_2' + x_3', \\ x_2'' = 3x_1' + x_2' + 2x_3', \\ x_3'' = x_1' - 2x_2' + x_3'. \end{cases}$

**66.** $\begin{cases} x_1' = 4x_1 + 3x_2 + 2x_3, \\ x_2' = -2x_1 + x_2 - x_3, \\ x_3' = 3x_1 + x_2 + x_3; \end{cases}$ $\begin{cases} x_1'' = x_1' - 2x_2' - x_3', \\ x_2'' = 3x_1' + x_2' + 2x_3', \\ x_3'' = x_1' + 2x_2' + 2x_3'. \end{cases}$

**67.** $\begin{cases} x_1' = 4x_1 + 3x_2 + 8x_3, \\ x_2' = 6x_1 + 9x_2 + x_3, \\ x_3' = 2x_1 + x_2 + 8x_3; \end{cases}$ $\begin{cases} x_1'' = -x_1' + 8x_2' - 2x_3', \\ x_2'' = -4x_1' + 3x_2' + 2x_3', \\ x_3'' = 3x_1' - 8x_2' + 5x_3'. \end{cases}$

**68.** $\begin{cases} x_1' = x_1 - 3x_2 + 4x_3, \\ x_2' = 2x_1 + x_2 - 5x_3, \\ x_3' = -3x_1 + 5x_2 + x_3; \end{cases}$ $\begin{cases} x_1'' = 4x_1' + 5x_2' - 3x_3', \\ x_2'' = x_1' - x_2' - x_3', \\ x_3'' = 7x_1' + 4x_3'. \end{cases}$

**69.** $\begin{cases} x_1' = 3x_1 + 5x_3, \\ x_2' = x_1 + x_2 + x_3, \\ x_3' = 3x_2 - 6x_3; \end{cases}$ $\begin{cases} x_1'' = 2x_1' - x_2' - 5x_3', \\ x_2'' = 7x_1' + x_2' + 4x_3', \\ x_3'' = 6x_1' + 4x_2' - 7x_3'. \end{cases}$

**70.** $\begin{cases} x_1' = x_1 + 2x_2 + 2x_3, \\ x_2' = -3x_2 + x_3, \\ x_3' = 2x_1 + 3x_3; \end{cases}$ $\begin{cases} x_1'' = 3x_1 + x_2', \\ x_2'' = x_1' - 2x_2' - x_3', \\ x_3'' = 3x_2' + 2x_3'. \end{cases}$

71—80. Найти собственные значения и собственные векторы линейного преобразования, заданного в некотором базисе матрицей A,

**71.** $A=\begin{pmatrix}0&1&0\\-3&4&0\\-2&1&2\end{pmatrix}$. **72.** $A=\begin{pmatrix}1&-3&3\\-2&-6&13\\-1&-4&8\end{pmatrix}$.

**73.** $A=\begin{pmatrix}4&-5&7\\1&-4&9\\-4&0&5\end{pmatrix}$. **74.** $A=\begin{pmatrix}5&6&3\\-1&0&1\\1&2&-1\end{pmatrix}$.

**75.** $A=\begin{pmatrix}4&-5&2\\5&-7&3\\6&-9&4\end{pmatrix}$. **76.** $A=\begin{pmatrix}2&-1&2\\5&-3&3\\-1&0&-2\end{pmatrix}$.

**77.** $A=\begin{pmatrix}7&0&0\\10&-19&10\\12&-24&13\end{pmatrix}$. **78.** $A=\begin{pmatrix}3&1&0\\-4&-1&0\\4&-8&-2\end{pmatrix}$.

**79.** $A=\begin{pmatrix}1&-3&4\\4&-7&8\\6&-7&7\end{pmatrix}$. **80.** $A=\begin{pmatrix}0&7&4\\0&1&0\\1&13&0\end{pmatrix}$.

81—90. Используя теорию квадратичных форм, привести к каноническому виду уравнение линии второго порядка.

**81.** $15x^2-2\sqrt{55}xy+9y^2=20$.

**82.** $5x^2+2\sqrt{3}xy+3y^2=12$.

**83.** $5x^2+4\sqrt{6}xy+7y^2=22$.

**84.** $4xy+3y^2=36$.

**85.** $5x^2+8xy+5y^2=9$.

**86.** $13x^2-48xy+27y^2=45$.

**87.** $4x^2+24xy+11y^2=20$.

**88.** $3x^2-2\sqrt{5}xy-y^2=8$.

**89.** $6x^2-4\sqrt{14}xy+5y^2=26$.

**90.** $x^2-2\sqrt{21}xy+5y^2=24$.

91—100. Дано комплексное число r. Требуется: 1) записать число z в алгебраической и тригонометрической формах; 2) найти все корни уравнения $\omega^3+r=0$.

**91.** $z=2\sqrt{2}/(1+i)$. **92.** $z=4/\left(1+i\sqrt{3}\right)$.

**93.** $z=-2\sqrt{2}/(1-i)$. **94.** $z=-4/\left(1-i\sqrt{3}\right)$.

**95.** $z=-2\sqrt{2}/(1+i)$. **96.** $z=2\sqrt{2}/(1-i)$.

**97.** $z=4/\left(1-i\sqrt{3}\right)$. **98.** $z=-4/\left(\sqrt{3}-i\right)$.

**99.** $z=1/\left(\sqrt{3}+i\right)$. **100.** $z=1/\left(\sqrt{3}-i\right)$.

### 3. Введение в математический анализ

101—105. Построить график функции y=Asin(ax+b) преобразованием графика функции y=sinx.

**101.** $y=\frac{3}{2}\sin(2x+3)$. **102.** $y=\frac{5}{6}\sin\left(\frac{2}{3}x+1\right)$.

**103.** $y=-\frac{6}{5}\sin(x+1)$. **104.** $y=3\sin(4x-2)$.

**105.** $y=-\sin\left(\frac{x}{2}-1\right)$.

106—110. Построить график функции y=Acos(ax+b) преобразованием графика функции y=cosx,

**106.** $y=2\cos\left(\frac{3}{2}x-1\right)$. **107.** $y=\frac{3}{2}\cos\left(\frac{x}{2}+1\right)$.

**108.** $y=-2\cos(3x+1)$. **109.** $y=-2\cos(x+1)$.

**110.** $y=-3\cos(3x+2)$.

111—120. Найти пределы функций, не пользуясь правилом Лопиталя.

**111.** а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1-2x}{3x-2}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{3x}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{5x^2}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+3}{x-2}\right)^x$.

**112.** а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3+1}{2x^3+1}$; б) $\lim\limits_{x\to 7}\dfrac{\sqrt{2+x}-3}{x-7}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin 3x}{5x}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x-1}{2x+1}\right)^x$.

**113.** а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^3+x^2-5}{x^3+x-2}$; б) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-\sqrt{x}}{x^2-x}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1-\cos 2x}}{|x|}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{4x+1}{4x}\right)^{2x}$.

**114.** а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^4+x^2-6}{2x^4-x+2}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\sqrt{1+3x}-1}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{5x}{\operatorname{arctg} x}$; г) $\lim\limits_{x\to 0}(1+2x)^{1/x}$.

**115.** а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2+6x-5}{5x^2-x-1}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\sqrt{1-x^2}}{x^2}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-\cos^3 x}{x^2}$; г) $\lim\limits_{x\to+\infty} x\,[\ln(x+1)-\ln x]$.

**116.** а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3+x+5x^4}{x^4-12x+1}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+3x}-\sqrt{1-2x}}{x+x^2}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2\operatorname{ctg} 2x}{\sin 3x}$; г) $\lim\limits_{x\to+\infty}(2x+1)[\ln(x+3)-\ln x]$.

**117.** а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x-2x^2+5x^4}{2+3x^2+x^4}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+3x^2}-1}{x^2+x^3}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 6x}{1-\cos 2x}$; г) $\lim\limits_{x\to+\infty}(x-5)[\ln(x-3)-\ln x]$.

**118.** а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^2-3x+1}{3x^2+x-5}$; б) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{2x-1}-\sqrt{5}}{x-3}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}^2\dfrac{x}{2}}{x^2}$; г) $\lim\limits_{x\to 1}(7-6x)^{x/(3x-3)}$.

**119.** а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{7x^4-2x^3+2}{x^4+3}$; б) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{\sqrt{1+3x}-\sqrt{2x+6}}{x^2-5x}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 4x}{2x\operatorname{tg} 2x}$; г) $\lim\limits_{x\to 2}(3x-5)^{2x/(x^2-4)}$.

**120.** а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{8x^5-3x^2+9}{2x^5+2x^2+5}$; б) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x-2}{\sqrt{2x}-2}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0} 5x\operatorname{ctg} 3x$; г) $\lim\limits_{x\to 3}(3x-8)^{2/(x-3)}$.

121—130. Задана функция $y=f(x)$ и два значения аргумента $x_1$ и $x_2$. Требуется: 1) установить, является ли данная функция непрерывной или разрывной для каждого из данных значений аргумента; 2) в случае разрыва функции найти ее пределы в точке разрыва слева и справа; 3) сделать схематический чертеж.

**121.** $f(x) = 9^{1/(2-x)}$, $x_1 = 0$, $x_2 = 2$.

**122.** $f(x) = 4^{1/(3-x)}$, $x_1 = 1$, $x_2 = 3$.

**123.** $f(x) = 12^{1/x}$, $x_1 = 0$, $x_2 = 2$.

**124.** $f(x) = 3^{1/(4-x)}$, $x_1 = 2$, $x_2 = 4$.

**125.** $f(x) = 8^{1/(5-x)}$, $x_1 = 3$, $x_2 = 5$.

**126.** $f(x) = 10^{1/(7-x)}$, $x_1 = 5$, $x_2 = 7$.

**127.** $f(x) = 14^{1/(6-x)}$, $x_1 = 4$, $x_2 = 6$.

**128.** $f(x) = 15^{1/(8-x)}$, $x_1 = 6$, $x_2 = 8$.

**129.** $f(x) = 11^{1/(4+x)}$, $x_1 = -4$, $x_2 = -2$.

**130.** $f(x) = 13^{1/(5+x)}$, $x_1 = -5$, $x_2 = -3$.

131—140. Задана функция y=f(x). Найти точки разрыва функции, если они существуют. Сделать чертеж.

**131.** $f(x) = \begin{cases} x+4, & x < -1; \\ x^2+2, & -1 \leqslant x < 1; \\ 2x, & x \geqslant 1. \end{cases}$

**132.** $f(x) = \begin{cases} x+2, & x \leqslant -1; \\ x^2+1, & -1 < x \leqslant 1; \\ -x+3, & x > 1. \end{cases}$

**133.** $f(x) = \begin{cases} -x, & x \leqslant 0; \\ -(x-1)^2, & 0 < x < 2; \\ x-3, & x \geqslant 2. \end{cases}$

**134.** $f(x) = \begin{cases} \cos x, & x \leqslant 0; \\ x^2+1, & 0 < x < 1; \\ x, & x \geqslant 1. \end{cases}$

**135.** $f(x) = \begin{cases} -x, & x \leqslant 0; \\ x^2, & 0 < x \leqslant 2; \\ x+1, & x > 2. \end{cases}$

**136.** $f(x) = \begin{cases} -x, & x \leqslant 0; \\ \sin x, & 0 < x \leqslant \pi; \\ x-2, & x > \pi. \end{cases}$

**137.** $f(x) = \begin{cases} -(x+1), & x \leqslant -1; \\ (x+1)^2, & -1 < x \leqslant 0; \\ x, & x > 0. \end{cases}$

**138.** $f(x) = \begin{cases} -x^2, & x \leqslant 0; \\ \operatorname{tg} x, & 0 < x \leqslant \pi/4; \\ 2, & x > \pi/4. \end{cases}$

**139.** $f(x) = \begin{cases} -2x, & x \leqslant 0; \\ x^2+1, & 0 < x \leqslant 1; \\ 2, & x > 1. \end{cases}$

**140.** $f(x) = \begin{cases} -2x, & x \leqslant 0; \\ \sqrt{x}, & 0 < x < 4; \\ 1, & x \geqslant 4. \end{cases}$

### 4. Производная и её приложения

141-150. Найти производные dy/dx данных функций.

**141.** а) $y = 2\sqrt{4x+3} - \dfrac{3}{\sqrt{x^3+x+1}}$;

б) $y=(e^{\cos x}+3)^2$; в) $y = \ln\sin(2x+5)$;

г) $y = x^{xx}$; д) $\operatorname{tg}(y/x) = 5x$.

**142.** а) $y = x^2\sqrt{1-x^2}$; б) $y = 4(\sin x)/\cos^2 x$;

в) $y = \operatorname{arctg} e^{2x}$; г) $y = x^{\ln y/x}$; д) $x - y + \operatorname{arctg} y = 0$.

**143.** а) $y = x\sqrt{(1+x^2)/(1-x)}$; б) $y = 1/\operatorname{tg}^2 2x$;

в) $y = \arcsin\sqrt{1-3x}$; г) $y = x^{\ln x}$;

д) $y\sin x = \cos(x-y)$.

**144.** а) $y = (3+6x)/\sqrt{3-4x+5x^2}$; б) $y = \sin x - x\cos x$;

в) $y = x^m \ln x$; г) $y = x^{-\operatorname{tg} x}$; д) $(y/x) = \operatorname{arctg}(x/y)$.

**145.** а) $y = x/\sqrt{a^2-x^2}$; б) $y = (\sin^2 x)/(2+3\cos^2 x)$;

в) $y = (x\ln x)/(x-1)$; г) $y = (\operatorname{arctg} x)^{\ln x}$;

д) $(e^x - 1)(e^y - 1) - 1 = 0$.

**146.** а) $y = 1/\sqrt{x^2+1} + 5\sqrt[5]{x^3+1}$; б) $y = 2\operatorname{tg}^3(x^2+1)$;

в) $y = 3^{\operatorname{arctg} x^3}$; г) $y = (\operatorname{arctg} x)^x$; д) $y^2 x = e^{y x}$.

**147.** а) $y = \sqrt[3]{(1+x^2)/(1-x^2)}$; б) $y = (1/2)\operatorname{tg}^2 x + \ln\cos x$;

в) $y = \operatorname{arctg}\dfrac{x}{1+\sqrt{1-x^2}}$; г) $y = (x+x^2)^x$;

д) $x^3 + y^3 - 3axy = 0$.

**148.** а) $y = 3\sqrt[3]{x^5 + 5x^4 - 5/x}$;

б) $y = \ln\sqrt{(1-\sin x)/(1+\sin x)}$; в) $y = \operatorname{arctg}(\operatorname{tg}^2 x)$;

г) $y = (\sin x)^{\ln x}$; д) $x - y + a\sin y = 0$.

**149.** а) $y = 5\sqrt[5]{x^2+x+1/x}$; б) $y = 2^x e^{-x}$;

в) $y = (\arcsin x)/\sqrt{1-x^2}$; г) $y = (\cos x)^{x^2}$;

д) $\ln y = \operatorname{arctg}(x/y)$.

**150.** а) $y = \sqrt{x^2+1} + \sqrt[3]{x^3+1}$; б) $y = (1/3)\operatorname{tg}^3 x - \operatorname{tg} x + x$;

в) $y = \operatorname{arctg}\sqrt{(3-x)/(x-2)}$; г) $y = (\cos x)^{x^2}$;

д) $x - y + e^y \operatorname{arctg} x = 0$.

151-160. Найти $\dfrac{dy}{dx}$ и $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ для заданных функций а) y=f(x); б) x=φ(t) y=ψ(t)

**151.** а) $y = x/(x^2-1)$; б) $x = \cos(t/2)$, $y = t - \sin t$.

**152.** а) $y = \ln \operatorname{ctg} 2x$; б) $x = t^3 + 8t$, $y = t^5 + 2t$.

**153.** а) $y = x^3 \ln x$; б) $x = t - \sin t$, $y = 1 - \cos t$.

**154.** а) $y = x \operatorname{arctg} x$; б) $x = e^{2t}$, $y = \cos t$.

**155.** а) $y = \operatorname{arctg} x$; б) $x = 3\cos^2 t$, $y = 2\sin^3 t$.

**156.** а) $y = e^{\operatorname{ctg} 3x}$; б) $x = 3\cos t$, $y = 4\sin^2 t$.

**157.** а) $y = e^x \cos x$; б) $x = 3t - t^3$, $y = 3t^2$.

**158.** а) $y = e^{-x} \sin x$; б) $x = 2t - t^3$, $y = 2t^2$.

**159.** а) $y = x\sqrt{1+x^2}$; б) $x = t + \ln\cos t$, $y = t - \ln\sin t$.

**160.** а) $y = xe^{-x^2}$; б) $x = \ln t$, $y = (1/2)(t + 1/t)$.

**161—170**. Применяя формулу Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа к функции $f(x) = e^x$, вычислить значение $e^x$ с точностью до 0,001.

**161.** $a = 0{,}49$. **162.** $a = 0{,}33$. **163.** $a = 0{,}75$.
**164.** $a = 0{,}63$. **165.** $a = 0{,}21$. **166.** $a = 0{,}55$.
**167.** $a = 0{,}37$. **168.** $a = 0{,}83$. **169.** $a = 0{,}13$.
**170.** $a = 0{,}59$.

171—180. Найти наибольшее и наименьшее значения функции y=f(x) на отрезке [a; b].

**171.** $f(x) = x^3 - 12x + 7$; $[0;\ 3]$.

**172.** $f(x) = x^5 - (5/3)x^3 + 2$; $[0;\ 2]$.

**173.** $f(x) = (\sqrt{3}/2)x + \cos x$; $[0;\ \pi/2]$.

**174.** $f(x) = 3x^4 - 16x^3 + 2$; $[-3;\ 1]$.

**175.** $f(x) = x^3 - 3x + 1$; $[1/2;\ 2]$.

**176.** $f(x) = x^4 + 4x$; $[-2;\ 2]$.

**177.** $f(x) = (\sqrt{3}/2)x - \sin x$; $[0;\ \pi/2]$.

**178.** $f(x) = 81x - x^4$; $[-1;\ 4]$.

**179.** $f(x) = 3 - 2x^2$; $[-1;\ 3]$.

**180.** $f(x) = x - \sin x$; $[-\pi;\ \pi]$.

181. Требуется изготовить из жести ведро цилиндрической формы без крышки данного объема V. Каковы должны быть высота ведра и радиус его дна, чтобы на его изготовление ушло наименьшее количество жести?

182. Равнобедренный треугольник, вписанный в окружность радиуса R, вращается вокруг прямой, которая проходит через его вершину параллельно основанию. Какова должна быть высота этого треугольника, чтобы тело, полученное в результате его вращения, имело наибольший объем?

183. Прямоугольник вписан в эллипс с осями 2a и 2b. Каковы должны быть стороны прямоугольника, чтобы его площадь была наибольшей?

184. Найти радиус основания и высоту цилиндра наибольшего объема, который можно вписать в шар радиуса R.

185. Найти радиус основания и высоту конуса наименьшего объема, описанного около шара радиуса R.

188. При каких линейных размерах закрытая цилиндрическая банка данной вместимости V будет иметь наименьшую полную поверхность?

187. Окно имеет форму прямоугольника, завершенного полукругом. Периметр окна равен a. При каких размерах сторон прямоугольника окно будет пропускать наибольшее количество света?

188. В точках A и B, расстояние между которыми равно a, находятся источники света соответственно с силами $F_1$ и $F_2$. На отрезке AB найти наименее освещенную точку $M_0$.

Замечание. Освещенность точки источником света силой F обратно пропорциональна квадрату расстояния r ее от источника света $E = kF/r^2$, $k$=const.

189. Из круглого бревна, диаметр которого равен d, требуется вырезать балку прямоугольного поперечного сечения. Каковы должны быть ширина и высота этого сечения, чтобы балка оказывала наибольшее сопротивление на изгиб.

Замечание. Сопротивление балки на изгиб пропорционально произведению ширины x ее поперечного

сечения на квадрат его высоты у $Q=kxy^2$, $k$=const.

190. Требуется изготовить открытый цилиндрический бак данного объема V. Стоимость квадратного метра материала, идущего на изготовление дна бака, равно $p_1$ руб, а стенок — $p_2$ руб. Каковы должны быть радиус дна и высота бака, чтобы затраты на материал для его изготовленья были наименьшими.

### 5. Приложения дифференциального исчисления

191—210. Исследовать методами дифференциального исчисления функцию $y=f(x)$ и, используя результаты исследования, построить ее график.

191. $y = 4x/(4 + x^2)$.
192. $y = (x^2 - 1)/(x^2 + 1)$.
193. $y = (x^2 + 1)/(x^2 - 1)$.
194. $y = x^2/(x - 1)$.
195. $y = x^3/(x^2 + 1)$.
196. $y = (4x^3 + 5)/x$.
197. $y = (x^2 - 5)/(x - 3)$.
198. $y = x^4/(x^3 - 1)$.
199. $y = 4x^3/(x^3 - 1)$.
200. $y = (2 - 4x^2)/(1 - 4x^2)$.
201. $y = (\ln x)/\sqrt{x}$.
202. $y = xe^{-x^2}$.
203. $y = e^{2x-x^2}$.
204. $y = x^2 - 2\ln x$.
205. $y = \ln(x^2 - 4)$.
206. $y = e^{1/(2-x)}$.
207. $y = \ln(x^2 + 1)$.
208. $y = (2 + x^2)\, e^{-x^2}$.
209. $y = \ln(9 - x^2)$.
210. $y = (x - 1)\, e^{3x+1}$.

211—220. Найти уравнения касательной, уравнение нормальной плоскости и вычислить кривизну линии $r=r(t)$ в точке $t_0$.

211. $\mathbf{r}(t) = (t - \sin t)\,\mathbf{i} + (1 - \cos t)\,\mathbf{j} + 2\sin t\,\mathbf{k}; \quad t_0 = \pi/2.$
212. $\mathbf{r}(t) = 2\sin t\,\mathbf{i} + 3\operatorname{tg} t\,\mathbf{j} + 2\cos t\,\mathbf{k}; \quad t_0 = \pi/4.$
213. $\mathbf{r}(t) = 2\sin^2 t\,\mathbf{i} + 2\cos^2 t\,\mathbf{j} + \sin 2t\,\mathbf{k}; \quad t_0 = \pi/4.$
214. $\mathbf{r}(t) = e^{-t}\,\mathbf{i} + e^t\,\mathbf{j} + t\,\mathbf{k}; \quad t_0 = 0.$
215. $\mathbf{r}(t) = (t^3 + 8t)\,\mathbf{i} + t^2\,\mathbf{j} + (t^5 + 3t)\,\mathbf{k}; \quad t_0 = 0.$
216. $\mathbf{r}(t) = 2t\mathbf{i} - 3t\mathbf{j} + \ln\operatorname{tg} t\,\mathbf{k}; \quad t_0 = \pi/4.$
217. $\mathbf{r}(t) = (t^2 - 3)\,\mathbf{i} + (t^3 + 2)\,\mathbf{j} + \ln t\,\mathbf{k}; \quad t_0 = 1.$
218. $\mathbf{r}(t) = (2t^2 - 5)\,\mathbf{i} + (t^2 - 2t)\,\mathbf{j} - \sqrt{5 - t^2}\,\mathbf{k}; \quad t_0 = 2.$
219. $\mathbf{r}(t) = (2 - t)\,\mathbf{i} + \sqrt{25 - t^2}\,\mathbf{j} + t^2\,\mathbf{k}; \quad t_0 = 4.$
220. $\mathbf{r}(t) = \ln(t - 3)\,\mathbf{i} - t\mathbf{j} + (t^2 - 16)\,\mathbf{k}; \quad t_0 = 4.$

221—230. Определить количество действительных корней уравнения $x^3+ax+b=0$, отделить эти корни и, применяя метод хорд и Касательных, найти их приближенное значение с точностью 0,01.

221. $a = 5,\ b = 7.$
222. $a = 4,\ b = -6.$
223. $a = 1,\ b = 3.$
224. $a = 2,\ b = -11.$
225. $a = 1,\ b = 1.$
226. $a = 1,\ b = -1.$
227. $a = 4,\ b = 8.$
228. $a = 6,\ b = -1.$
229. $a = 2,\ b = 4.$
230. $a = 1,\ b = -4.$

## 6. Дифференциальное исчисление функций нескольких переменных

**231-240**. Дана функция $z = f(x; y)$. Показать, что $F\left(x; y; z; \frac{\partial z}{\partial x}; \frac{\partial z}{\partial y}; \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}; \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}; \frac{\partial^2}{\partial x \partial y}\right) \equiv 0.$

**231.** $z = y/(x^2 - y^2); F = \frac{1}{x}\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{1}{y}\frac{\partial z}{\partial y} - \frac{z}{y^2}.$

**232.** $z = y^2/(3x) + \arcsin(xy); F = x^2\frac{\partial z}{\partial x} - xy\frac{\partial z}{\partial y} + y^2.$

**233.** $z = \ln/(x^2 + y^2 + 2x + 1); F = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}.$

**234.** $z = e^{xy}; F = x^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - 2xy\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + y^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + 2xyz.$

**235.** $z = \ln/(x + e^{-y}); F = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} - \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}.$

**236.** $z = x/y; F = x\frac{\partial^2 z}{\partial z \partial y} - \frac{\partial z}{\partial y}.$

**237.** $z = x^y; \quad F = y\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} - (1 + y\ln x)\frac{\partial z}{\partial x}.$

**238.** $z = xe^{y/x}; \quad F = x^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2xy\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + y^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}.$

**239.** $z = \sin(x + ay); \quad F = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - a^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}.$

**240.** $z = \cos y + (y - x)\sin y; \quad F = (x - y)\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} - \frac{\partial z}{\partial y}.$

241—250. Дана функция $z = f(x; y)$ и две точки $A(x_0; y_0)$ и $B(x_1; y_1)$. Требуется: 1) вычислить значение $z_1$ в точке $B$; 2) вычислить приближённое значение $\overline{z_1}$ функции в точке $B$, исходя из значения $z_0$ функции в точке $A$ и заменив приращение функции при переходе от точки $A$ к $B$ точке дифференциалом; 3) оценить в процентах относительную погрешность, получающуюся при замене приращения функции её дифференциалом; 4) составить уравнение касательной плоскости $z = f(x; y)$ в точке $C(x_0; y_0; z_0)$.

**241.** $z = x^2 + xy + y^2; \quad A(1; 2), \quad B(1{,}02; 1{,}96).$

**242.** $z = 3x^2 - xy + x + y; \quad A(1; 3), \quad B(1{,}06; 2{,}92).$

**243.** $z = x^2 + 3xy - 6y; \quad A(4; 1), \quad B(3{,}96; 1{,}03).$

**244.** $z = x^2 - y^2 + 6x + 3y; \quad A(2; 3), \quad B(2{,}02; 2{,}97).$

**245.** $z = x^2 + 2xy + 3y^2; \quad A(2; 1), \quad B(1{,}96; 1{,}04).$

**246.** $z = x^2 + y^2 + 2x + y - 1; \quad A(2; 4), \quad B(1{,}98; 3{,}91).$

**247.** $z = 3x^2 + 2y^2 - xy; \quad A(-1; 3), \quad B(-0{,}98; 2{,}97).$

**248.** $z = x^2 - y^2 + 5x + 4y; \quad A(3; 2), \quad B(3{,}05; 1{,}98).$

**249.** $z = 2xy + 3y^2 - 5x; \quad A(3; 4), \quad B(3{,}04; 3{,}95).$

**250.** $z = xy + 2y^2 - 2x; \quad A(1; 2), \quad B(0{,}97; 2{,}03).$

**251-260**. Найти наименьшее и наибольшее значения функции $z = f(x; y)$ в замкнутой области $D$, заданной

системой неравенств. Сделать чертёж.

**251.** $z = x^2 + y^2 - 9xy + 27; \quad 0 \le x \le 3,\ 0 \le y \le 3.$

**252.** $z = x^2 + 2y^2 + 1; \quad x \ge 0, y \ge 0, x + y \le 3.$

**253.** $z = 3 - 2x^2 - xy - y^2; \quad x \le 1, y \ge 0, y \le x.$

**254.** $z = x^2 + 3y^2 + x - y; \quad x \ge 1, y \ge -1, x + y \le 1.$

**255.** $z = x^2 2xy + 2y^2; \quad -1 \le x \le 1, 0 \le y \le 2.$

**256.** $z = 5x^2 - 3xy + y^2 + 4; \quad x \ge -1, y \ge -1, x + y \le 1.$

**257.** $z = 10 + 2xy - x^2; \quad 0 \le y \le 4 - x^2.$

**258.** $z = x^2 + 2xy - y^2 + 4x; \quad x \le 0; y \le 0, x + y + 2y \ge 0.$

**259.** $z = x^2 + xy - 2; \quad 4x^2 - 4 \le y \le 0.$

**260.** $z = x^2 + xy; \quad -1 \le x \le 1, 0 \le y \le 3.$

**261-270**. Даны функция $z = f(x; y)$, точка $A(x_0; y_0)$ и вектор $a(a_1; a_2)$. Найти: 1) grad *z* в точке $A$; 2) производную в точке $A$ по направлению вектора a.

**261.** $z = x^2 + xy + y^2; \quad A(1;1),\ \mathrm{a}(2;-1).$

**262.** $z = 2x^2 + 3xy + y^2; \quad A(2;1),\ \mathrm{a}(3;-4).$

**263.** $z = \ln(5x^2 + 3y^2); \quad A(1;1),\ \mathrm{a}(3;-2).$

**264.** $z = \ln(5x^2 + 4y^2); \quad A(1;1),\ \mathrm{a}(2;-1).$

**265.** $z = 5x^2 + 6xy; \quad A(2;1),\ \mathrm{a}(1;2).$

**266.** $z = arctg(xy^2); \quad A(2;3),\ \mathrm{a}(4;-3).$

**267.** $z = \arcsin(x^2 / y^2); \quad A(1;2),\ \mathrm{a}(5;-12).$

**268.** $z = \ln(3x^2 + 4y^2); \quad A(1;3),\ \mathrm{a}(2;-1).$

**269.** $z = 3x^4 + 2x^2y^3; \quad A(-1;2),\ \mathrm{a}(4;-3).$

**270.** $z = 3x^2y^2 + 5xy^2; \quad A(1;1),\ \mathrm{a}(2;1).$

**271-280**. Экспериментально получены пять значений функции $y = f(x)$ при пяти значениях аргумента, которые записаны в таблице:

| *x* | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| *y* | $y_1$ | $y_2$ | $y_3$ | $y_4$ | $y_5$ |

Методом наименьших квадратов найти функцию вида $Y = aX + b$, выражающую приближенно (аппроксимирующую) функцию $y = f(x)$. Сделать чертёж, на котором в декартовой прямоугольной системе координат построить экспериментальные точки и график аппроксимирующей функции $Y = aX + b$.

**271.** $y \parallel 4,\ 3 \mid 5,\ 3 \mid 3,\ 8 \mid 1,\ 8 \mid 2,\ 3$

**272.** $y \parallel 4,\ 5 \mid 5,5 \mid 4,\ 0 \mid 2,\ 0 \mid 2,\ 5$

**273.** $y \parallel 4,\ 7 \mid 5,\ 7 \mid 4,\ 2 \mid 2,\ 2 \mid 2,\ 7$

**274.** $y \parallel 4,\ 9 \mid 5,\ 9 \mid 4,\ 4 \mid 2,\ 4 \mid 2,\ 9$

**275.** $y \parallel 5,\ 1 \mid 6,\ 1 \mid 4,\ 6 \mid 2,\ 6 \mid 3,\ 1$

**276.** $y \parallel 3,\ 9 \mid 4,\ 9 \mid 3,\ 4 \mid 1,\ 4 \mid 1,\ 9$

**277.** $y \parallel 5,\ 2 \mid 6,\ 2 \mid 4,\ 7 \mid 2,\ 7 \mid 3,\ 2$

**278.** $y \parallel 5,\ 5 \mid 6,\ 5 \mid 5,\ 0 \mid 3,\ 0 \mid 3,\ 5$

**279.** $y \parallel 5,\ 7 \mid 6,\ 7 \mid 5,\ 2 \mid 3,\ 2 \mid 3,\ 7$

**280.** $y \parallel 5,\ 9 \mid 6,\ 9 \mid 5,\ 4 \mid 3,\ 4 \mid 3,\ 9$

## 7. Неопределенный и определенный интегралы

281—290. Найти неопределенные интегралы. В п. а) и б) результаты проверить дифференцированием.

**281.** а) $\int e^{\sin^2 x} \sin 2x\,dx$; б) $\int \operatorname{arctg}\sqrt{x}\,dx$;

в) $\int \frac{dx}{x^3+8}$; г) $\int \frac{dx}{1+\sqrt[3]{x+1}}$.

**282.** а) $\int \frac{x\,dx}{(x^2+4)^6}$; б) $\int e^x \ln(1+3e^x)\,dx$;

в) $\int \frac{2x^2-3x+1}{x^3+1}\,dx$; г) $\int \frac{dx}{\sin x+\operatorname{tg} x}$.

**283.** а) $\int \frac{x^3\,dx}{\sqrt{1-x^8}}$; б) $\int x3^x\,dx$;

в) $\int \frac{(3x-7)\,dx}{x^3+4x^2+4x+16}$; г) $\int \frac{dx}{\sqrt{x+3}+\sqrt[3]{(x+3)^2}}$

**284.** а) $\int \frac{dx}{\cos^2 x\,(3\operatorname{tg} x+1)}$; б) $\int \frac{x\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$;

в) $\int \frac{dx}{x^3+x^2+2x+2}$; г) $\int \frac{x^2+\sqrt{1+x}}{\sqrt[3]{1+x}}\,dx$.

**285.** а) $\int \frac{\cos 3x\,dx}{4+\sin 3x}$; б) $\int x^2 e^{3x}\,dx$;

в) $\int \frac{x^2\,dx}{x^3+5x^2+8x+4}$; г) $\int \frac{\cos x\,dx}{1+\cos x}$.

**286.** а) $\int \frac{\sin x dx}{\sqrt[3]{\cos^2 x}}$; б) $\int x\arcsin\frac{1}{x}\,dx$;

в) $\int \frac{(x+3)\,dx}{x^3+x^2-2x}$; г) $\int \frac{\left(\sqrt[4]{x}+1\right)dx}{\left(\sqrt{x}+4\right)\sqrt[4]{x^3}}$.

**287.** а) $\int \frac{(x+\operatorname{arctg} x)\,dx}{1+x^2}$; б) $\int x\ln(x^2+1)\,dx$;

в) $\int \frac{(x^2-3)\,dx}{x^4+5x^2+6}$; г) $\int \frac{\sqrt{x+5}\,dx}{1+\sqrt[3]{x+5}}$.

**288.** а) $\int \frac{\operatorname{arctg}\sqrt{x}}{\sqrt{x}\,(1+x)}\,dx$; б) $\int x\sin x\cos x dx$;

в) $\int \frac{x^2\,dx}{x^4-81}$; г) $\int \frac{dx}{3\cos x+4\sin x}$.

**289.** а) $\int \frac{\sin x dx}{\sqrt[3]{3+2\cos x}}$; б) $\int x^2\sin 4x dx$;

в) $\int \frac{(x^2-x+1)\,dx}{x^4+2x^2-3}$; г) $\int \frac{\left(\sqrt{x}-1\right)\left(\sqrt[6]{x}+1\right)}{\sqrt[3]{x^2}}\,dx$.

**290.** а) $\int \frac{\sqrt[3]{4+\ln x}}{x}\,dx$; б) $\int x\ln^2 x dx$;

в) $\int \frac{(x^3-6)\,dx}{x^4+6x^2+8}$; г) $\int \frac{dx}{2\sin x+\cos x+2}$.

291—300. Вычислить приближенное значение определенного интеграла $\int_a^b f(x)dx$ с помощью формулы Симпсона, разбив отрезок интегрирования на 10 частей. Все вычисления производить с округлением до третьего десятичного знака.

291. $\int_{-2}^{8} \sqrt{x^3+16}\,dx$, 292. $\int_{2}^{12} \sqrt{x^3+9}\,dx$.

293. $\int_{-3}^{7} \sqrt{x^3+32}\,dx$. 294. $\int_{0}^{10} \sqrt{x^3+5}\,dx$.

295. $\int_{-1}^{9} \sqrt{x^3+2}\,dx$. 296. $\int_{2}^{12} \sqrt{x^3+4}\,dx$.

297. $\int_{1}^{11} \sqrt{x^3+3}\,dx$. 298. $\int_{-3}^{7} \sqrt{x^3+36}\,dx$.

299. $\int_{-2}^{8} \sqrt{x^3+8}\,dx$. 300. $\int_{-2}^{8} \sqrt{x^3+11}\,dx$.

301—310. Вычислить несобственный интеграл или доказать его расходимость.

301. $\int_0^{+\infty} xe^{-x^2}\,dx$. 302. $\int_{-\infty}^{-3} \frac{x\,dx}{(x^2+1)^{\frac{3}{2}}}$

303. $\int_{-1}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+x+1}$. 304. $\int_0^1 \frac{x^2\,dx}{\sqrt{1-x^3}}$.

305. $\int_1^2 \frac{dx}{(x-1)^{\frac{2}{3}}}$. 306. $\int_{-3}^{2} \frac{dx}{(x+3)^{\frac{2}{3}}}$.

307. $\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x\ln x}$. 308. $\int_0^3 \frac{dx}{(x-2)^{\frac{2}{3}}}$.

309. $\int_0^4 \frac{dx}{\sqrt[3]{(x-3)^2}}$. 310. $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+4x+5}$.

311. Вычислить площадь фигуры, ограниченной параболой $y=3x^2+1$ и прямой $y=3x+7$.

312. Вычислить площадь фигуры, ограниченной одной аркой циклоиды x=a(t—sin t), y—a(l—cos t) ($0\le t\le 2\pi$) и осью *Ox*.

313. Вычислить площадь фигуры, ограниченной кардиоидой $r=3(1+\cos\varphi)$.

314. Вычислить площадь фигуры, ограниченной четырехлепестковой розой $r=4\sin 2\varphi$.

315. Вычислить объем тела, образованного вращением вокруг оси *Ox* фигуры, ограниченной параболами $y=x^2$ и $y=\sqrt{x}$.

316. Вычислить объем тела, образованного вращением вокруг оси *Ox* фигуры, ограниченной полуэллипсом $y=3\sqrt{1-x^2}$, параболой $x=\sqrt{1-y}$ и осью *Oy*.

317. Вычислить объем тела, образованного вращением вокруг оси *Oy* фигуры, ограниченной кривыми $y=2/(1+x^2)$ и $y=x^2$.

318. Вычислить длину дуги полукубической $y=\sqrt{(x-2)^3}$ параболы от точки A (2; 0) до точки B (6; 8).

319. Вычислить длину кардиоиды $r=3(1—\cos\varphi)$.

320. Вычислить длину одной арки циклоиды x=3(t—sint), y=3(1—cost) ($0\le t\le 2\pi$).

## 8. Дифференциальные уравнения

321—340. Найти общее решение дифференциального уравнения.

**321.** $(x^2 - y^2)\,y' = 2xy$. **322.** $(1 + x^2)\,y' - 2xy = (1 + x^2)^2$

**323.** $xy' = y \ln (y/x)$. **324.** $xy' + y = 3$.

**325.** $xy' + xe^{y/x} - y = 0$. **326.** $y' \cos x = (y + 1) \sin x$.

**327.** $xy' - y = \sqrt{x^2 + y^2}$. **328.** $x^2 y' - 2xy = 3$.

**329.** $x^2 y' + y^2 - 2xy = 0$. **330.** $xy' + y = x + 1$.

**331.** $(1 - x^2)\,y'' = xy'$. **332.** $2yy'' + (y')^2 + (y')^4 = 0$.

**333.** $y'' + y' \operatorname{tg} x = \sin 2x$. **334.** $y'' + (1/x)\,y' = x^2$.

**335** $1 + (y')^2 + yy'' = 0$. **336.** $(1 + y)\,y'' - 5\,(y')^2 = 0$.

**337.** $xy'' + 2y' = x^3$. **338.** $y'' \operatorname{tg} y = 2\,(y')^2$.

**339.** $y'' - 2y' \operatorname{tg} x = \sin x$. **340.** $3yy'' + (y')^2 = 0$.

341—350. Найти частное решение дифференциального уравнения $y''+py'+qy=f(x)$, удовлетворяющее начальным условиям $y(0)=y^0$, $y'(0)=y'_0$.

**341.** $y'' + 4y' - 12y = 8 \sin 2x$; $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$.

**342.** $y'' - 6y' + 9y = x^2 - x + 3$; $y(0) = 4/3$, $y'(0) = 1/27$.

**343.** $y'' + 4y = e^{-2x}$; $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$.

**344.** $y'' - 2y' + 5y = xe^{2x}$; $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$.

**345.** $y'' + 5y' + 6y = 12 \cos 2x$; $y(0) = 1$, $y'(0) = 3$.

**346.** $y'' - 5y' + 6y = (12x - 7)\,e^{-x}$; $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$.

**347.** $y'' - 4y' + 13y = 26x + 5$; $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$.

**348.** $y'' - 4y' = 6x^2 + 1$; $y(0) = 2$, $y'(0) = 3$.

**349.** $y'' - 2y' + y = 16e^x$; $y(0) = 1$, $y'(0) = 2$.

**350.** $y'' + 6y' + 9y = 10e^{-3x}$; $y(0) = 3$, $y'(0) = 2$.

351—360. Дана система линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = a_{11}\,x + a_{12}\,y, \\ \dfrac{dy}{dt} = a_{21}\,x + a_{22}\,y. \end{cases}$$

Требуется: 1) найти общее решение системы с помощью характеристического уравнения; 2) записать данную систему и ее решение в матричной форме.

**351.** $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 4x + 6y, \\ \dfrac{dy}{dt} = 4x + 2y. \end{cases}$ **352.** $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -5x - 4y, \\ \dfrac{dy}{dt} = -2x - 3y. \end{cases}$

**353.** $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 3x + y, \\ \dfrac{dy}{dt} = 8x + y. \end{cases}$ **354.** $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 6x + 3y, \\ \dfrac{dy}{dt} = -8x - 5y. \end{cases}$

**355.** $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -x + 5y, \\ \dfrac{dy}{dt} = x + 3y. \end{cases}$ **356.** $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 3x - 2y, \\ \dfrac{dy}{dt} = 2x + 8y. \end{cases}$

**357.** $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -4x - 6y, \\ \dfrac{dy}{dt} = -4x - 2y. \end{cases}$ **358.** $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -5x - 8y, \\ \dfrac{dy}{dt} = -3x - 3y. \end{cases}$

**359.** $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -x - 5y, \\ \dfrac{dy}{dt} = -7x - 3y. \end{cases}$ **360.** $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -7x + 5y, \\ \dfrac{dy}{dt} = 4x - 8y. \end{cases}$

361. Материальная точка массой m=2 г погружается в жидкость, сила сопротивления которой пропорциональна скорости погружения с коэффициентом пропорциональности k=0,002 кг/с. Найти скорость точки через 1 с после начала погружения, если в начальный момент она была равна нулю.

362. Моторная лодка двигалась в спокойной воде со скоростью $v_0$=12 км/ч. На полном ходу ее мотор был выключен и через 10 с скорость лодки уменьшилась до $v_1$=6 км/ч. Сила сопротивление воды пропорциональна скорости движения лодки. Найти скорость лодки через 1 мин после остановки мотора.

363. Пуля, двигаясь со скоростью $v_0$=400 м/с, ударяется о достаточно толстую стену и начинает углубляться в нее, испытывая силу сопротивления стены; эта сила сообщает пуле отрицательное ускорение, пропорциональное квадрату ее скорости с коэффициентом пропорциональности k=7 $м^{-1}$. Найти скорость пули через 0,001 с после вхождения пули в стену.

364. Материальная точка массой m=1 г движется прямолинейно. На нее действует сила в направлении движения, пропорциональная времени с коэффициентом пропорциональности $k_1=2\cdot10^{-5}$ кг·м/$с^3$, и сила сопротивления среды, пропорциональная скорости с коэффициентом пропорциональности $k_2$=0,003 кг/с. Найти скорость точки через 3 с после начала движения, если начальная скорость точки была равна нулю.

365. В сосуде 100 л водного раствора соли В сосуд втекает чистая вода со скоростью q=5 л/мин, а смесь вытекает с той же скоростью, причем перемешивание обеспечивает равномерную концентрацию раствора. В начальный момент в растворе содержалось $m_0$=10 кг соли. Сколько соли будет содержаться в сосуде через 20 мин после начала процесса?

366. Кривая проходит через точку А (2; —1) и обладает тем свойством, что угловой коэффициент касательной в любой ее точке пропорционален квадрату ординаты точки касания с коэффициентом пропорциональности $k$=3. Найти уравнение кривой.

367. Кривая проходит через точку А(1; 2) и обладает тем свойством, что произведение углового коэффициента касательной в любой ее точке на сумму координат точки касания равно удвоенной ординате этой точки. Найти уравнение кривой.

368. Кривая проходит через течку А(1; 2) и обладает тем свойством, что отношение ординаты любой ее точки к абсциссе пропорционально угловому коэффициенту касательной к этой кривой, проведенной в той же точке, с коэффициентом пропорциональности $k$=3 Найти уравнение кривой.

369. Кривая проходит через точку А(1; 5) и обладает тем свойством, что отрезок, отсекаемый на оси ординат любой касательной, равен утроенной абсциссе точки касания. Найти уравнение кривой.

370. Кривая проходит через точку А (2; 4) и обладает тем свойством, что отрезок, отсекаемый на оси абсцисс касательной, проведенной в любой точке кривой, равен кубу абсциссы точки касания. Найти уравнение кривой.

## 9. Кратные, криволинейные и поверхностные интегралы. Векторный анализ.

**371-380.** Вычислить с помощью двойного интеграла в полярных координатах площадь фигуры, ограниченной кривой, заданной уравнением в декартовых координатах (a>0).

**371.** $(x^2+y^2)^3 = a^2x^2y^2$

**372.** $(x^2+y^2)^2 = a^2(4x^2+y^2)$.

**373.** $(x^2+y^2)^3 = a^2x^2(4x^2+3y^2)$.

**374.** $(x^2+y^2)^2 = a^2(3x^2+2y^2)$.

**375.** $x^4 = a^2(3x^2-y^2)$.

**376.** $x^6 = a^2(x^4-y^4)$.

**377.** $x^4 = a^2(x^2-3y^2)$.

**378.** $y^6 = a^2(y^4-x^4)$.

**379.** $(x^2 + y^2)^2 = a^2(2x^2 + 3y^2)$.

**380.** $y^6 = a^2(x^2 + y^2)(3y^2 - x^2)$.

**381-390.** Вычислить с помощью тройного интеграла объём тела, ограниченной указанными поверхностями. Сделать чертежи данного тела и его проекции на плоскость *xOy*.

**381.** $z = 0, z = x, y = 0, y = 4, x = \sqrt{25 - y^2}$.

**382.** $z = 0, z = 9 - y^2, x^2 + y^2 = 9$.

**383.** $z = 0, z = 4 - x + y, x^2 + y^2 = 4$.

**384.** $z = 0, z = y^2, x^2 + y^2 = 9$.

**385.** $z = 0, y + z = 2, x^2 + y^2 = 4$.

**386.** $z = 0, 4z = y^2, 2x - y = 0, x + y = 9$.

**387.** $z = 0, x^2 + y^2 = z, x^2 + y^2 = 4$.

**388.** $z = 0, z = 1 - y^2, x = y^2, x = 2y^3 + 1$.

**389.** $z = 0, z = 1 - x^2, y = 0, y = 3 - x$.

**390.** $z = 0, z = 4\sqrt{y}, x = 0, x + y = 4$.

**391**. Вычислить криволинейный интеграл.

$$\int_L (x^2 - y)\mathrm{d}x - (x - y^2)\mathrm{d}y$$

вдоль дуги *L* окружности $x=5\cos t$, $y=5\sin t$, обходя её против хода часовой стрелки от точки *A*(5; 0) до точки *B*(0; 5). Сделать чертёж.

**392**. Вычислить криволинейный интеграл.

$$\int_L (x - y)\mathrm{d}x - (x - y)\mathrm{d}y$$

вдоль ломаной *L=OAB*, где *O*(0; 0), *A*(2; 0), *B*(4; 5). Сделать чертёж.

**393**. Вычислить криволинейный интеграл.

$$\oint_L \frac{y\mathrm{d}x - x\mathrm{d}y}{x^2 + y^2}$$

вдоль границы *L* треугольника *ABC*, обходя её против хода часовой стрелки, если *A*(1; 0), *B*(1; 1), *C*(0; 1). Сделать чертёж.

**394**. Вычислить криволинейный интеграл.

$$\int_L (x^2 - 2xy)\mathrm{d}x + (y^2 x + 2y)\mathrm{d}y$$

вдоль дуги *L* параболы $y=x^2$ от точки *A*(-1; 1), до точки *B*(1; 1). Сделать чертёж.

**395**. Вычислить криволинейный интеграл.

$$\int_L (x^2 y - 3x)\mathrm{d}x + (y^2 x + 2y)\mathrm{d}y$$

вдоль верхней половины *L* эллипса $x=3\cos t$, $y=2\cos t$ ($0 \le t \le \pi$). Сделать чертёж.

**396**. Вычислить криволинейный интеграл.

$$\int_L (x^2 - y)\mathrm{d}x + (y^2 + x)\mathrm{d}y$$

вдоль ломаной *L=ABC*, где *A* (1; 2),*B* (1; 5),*C* (3; 5). Сделать чертёж.

**397**. Вычислить криволинейный интеграл.

$$\int_L y\mathrm{d}x + \frac{x}{y}\mathrm{d}y$$

вдоль дуги $L$ кривой $y=e^{-x}$ от точки $A$ (0; 1) до точки $B$ (-1; e). Сделать чертёж.

**398**. Вычислить криволинейный интеграл.

$$\int_L \frac{y^2+1}{y}\mathrm{d}x + \frac{x}{y^2}\mathrm{d}y$$

вдоль дуги $L=AB$ прямой от точки $A$ (1; 2) до точки $B$ (2; 4). Сделать чертёж.

**399**. Вычислить криволинейный интеграл.

$$\int_L (xy - x^2)\mathrm{d}x + x\mathrm{d}y$$

вдоль дуги $L$ параболы $y=2x^2$ от точки $O$ (0; 0) до точки $A$ (1; 2). Сделать чертёж.

**400**. Вычислить криволинейный интеграл.

$$\int_L \frac{y}{x}\mathrm{d}x + x\mathrm{d}y$$

вдоль дуги $L$ кривой $y=\ln x$ от точки $A(1; 0)$ до точки $B$ (e; 1). Сделать чертёж.

**401-410**. Даны векторное поле $\mathbf{F}=X\mathbf{i}+Y\mathbf{j}+Z\mathbf{k}$ и плоскость $Ax+By+Cz+D=0(p)$, которая совместно с координатными плоскостями образует пирамиду $V$. Пусть σ - основание пирамиды, принадлежащее плоскости ($p$); λ - контур, ограничивающий σ; **n** - нормаль к σ, направленная вне пирамиды $V$. Требуется вычислить,

1) поток векторного поля **F** через поверхность σ в направлении нормали **n**;

2) циркуляцию векторного поля **F** по замкнутому контуру λ непосредственно и применив теорему Скота к контуру λ и ограниченной им поверхности σ с нормалью **n**;

3) поток векторного **F** через полную поверхность пирамиды $V$ в направлении внешней нормали к её поверхности непосредственно и применив теорему Остроградского. Сделать чертёж.

**401.** $\mathbf{F} = (x+z)\mathbf{i};\ x+y+z-2=0.$

**402.** $\mathbf{F} = (y-x+z)\mathbf{j};2x-y+2z-2=0.$

**403.** $\mathbf{F} = (x+7z)\mathbf{k};2x+y+z-4=0.$

**404.** $\mathbf{F} = (x+2y-z)\mathbf{i};-x+2y+2z-4=0.$

**405.** $\mathbf{F} = (2x+3y-3z)\mathbf{j};2x-3y+2z-6=0.$

**406.** $\mathbf{F} = (2x+4y+3z)\mathbf{k};3x+2y+3z-6=0.$

**407.** $\mathbf{F} = (x-y+z)\mathbf{i};-x+2y+z-4=0.$

**408.** $\mathbf{F} = (3x+4y+2z)\mathbf{j};\ x+y+2z-4=0.$

**409.** $\mathbf{F} = (5x+2y+3z)\mathbf{k};\ x+y+3z-3=0.$

**410.** $\mathbf{F} = (x-3y+6z)\mathbf{i};-x+y+2z-4=0.$

**411-420.** Проверить, является ли векторное поле $\mathbf{F}= X\mathbf{i}+Y\mathbf{j}+Z\mathbf{k}$ потенциальным и соленоидальным. В случае потенциальности поля **F** найти его потенциал.

**411.** $\mathbf{F} = (6x+7yz)\mathbf{i} + (6y+7xz)\mathbf{j} + (6z+7xy)\mathbf{k}.$

**412.** $\mathbf{F} = (8x-5yz)\mathbf{i} + (8y-5xz)\mathbf{j} + (8z-5xy)\mathbf{k}.$

**413.** $\mathbf{F} = (10x-3yz)\mathbf{i} + (10y-3xz)\mathbf{j} + (10z-3xy)\mathbf{k}.$

**414.** $\mathbf{F} = (12x+yz)\mathbf{i} + (12y+xz)\mathbf{j} + (12z+xy)\mathbf{k}.$

**415.** $\mathbf{F} = (4x-7yz)\mathbf{i} + (4y-7xz)\mathbf{j} + (4z-7xy)\mathbf{k}.$

**416.** $\mathbf{F} = (x+2yz)\mathbf{i} + (y+2xz)\mathbf{j} + (z+2xy)\mathbf{k}.$

**417.** $\mathbf{F} = (5x+4yz)\mathbf{i} + (5y+4xz)\mathbf{j} + (5z+4xy)\mathbf{k}.$

**418.** $\mathbf{F} = (7x-2yz)\mathbf{i} + (7y-2xz)\mathbf{j} + (7z-2xy)\mathbf{k}.$

**419.** $\mathbf{F} = (3x - yz)\mathbf{i} + (3y - xz)\mathbf{j} + (3z - xy)\mathbf{k}$.

**420.** $\mathbf{F} = (9x + 5yz)\mathbf{i} + (9y + 5xz)\mathbf{j} + (9z + 5xy)\mathbf{k}$.

## 10. Ряды

**421-430.** Исследовать сходимость числового ряда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$.

**421.** $u_n = \dfrac{m+3}{m^3-2}$.

**422.** $u_n = \dfrac{e^{-\sqrt{n}}}{\sqrt{n}}$.

**423.** $u_n = \dfrac{1}{(2n+1)^3-1}$.

**424.** $u_n = \dfrac{3^n}{(2\pi)t}$.

**425.** $u_n = \dfrac{n^3}{e^n}$.

**426.** $u_n = \dfrac{1}{(n+1)[\ln(n+1)]^2}$.

**427.** $u_n = \dfrac{2n+1}{\sqrt{n2^n}}$.

**428.** $u_n = \dfrac{n^2}{(3n)!}$.

**429.** $u_n = \dfrac{1}{(n+1)\ln(n+1)}$.

**430.** $u_n = \dfrac{n^{n+1}}{(n+1)!}$.

**431-440.** Найти интервал сходимости степенного ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$.

**431.** $a_n = \dfrac{\sqrt[3]{(n+1)^n}}{n!}$.

**432.** $a_n = \dfrac{2^n}{n(n+1)}$.

**433.** $a_n = \dfrac{(2n)!}{n^n}$.

**434.** $a_n = \dfrac{3^n n!}{(n+1)^n}$.

**435.** $a_n = \dfrac{n}{3^n(n+1)}$.

**436.** $a_n = \dfrac{5^n}{\sqrt[n]{n}}$.

**437.** $a_n = \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$.

**438.** $a_n = \dfrac{n+1}{3^n(n+2)}$.

**439.** $a_n = \dfrac{3^n}{\sqrt{2^n(3n-1)}}$.

**440.** $a_n = \dfrac{n+2}{n(n+1)}$.

**441-450.** Вычислить определённый интеграл $\int_0^b f(x)\mathrm{d}x$ с точностью до 0,001, разложив подынтегральную функцию в степенной ряд и затем проинтегрировать её почленно.

**441.** $f(x) = e^{-x^2/3}, b = 1.$

**442.** $f(x) = \cos\sqrt{x}, b = 1.$

**443.** $f(x) = x\operatorname{arctg}x, b = 0{,}5.$

**444.** $f(x) = \dfrac{\ln(1+x^2)}{x}, b = 0{,}5.$

**445.** $f(x) = x\ln(1-x^2), b = 0{,}5.$

**446.** $f(x) = xe^{-x}, b = 0{,}5.$

**447.** $f(x) = \operatorname{arctg}x^2, b = 0{,}5.$

**448.** $f(x) = \sin x^2, b = 1.$

**449.** $f(x) = \dfrac{\sin x^2}{x^2}, b = 0{,}5.$

**450.** $f(x) = \sqrt{1+x^2}, b = 0{,}5.$

**451-460.** Найти три первых, отличных от нуля члена разложения в степенной ряд решения $y=y(x)$ дифференциального уравнения $y'=(x; y)$, удовлетворяющего начальному условию $y(0)=y_0$,

**451.** $y' = \cos x + y^2; y(0) = 1.$

**452.** $y' = e^x + y^2; y(0) = 0.$

**453.** $y' = y + y^2; y(0) = 3.$

**454.** $y' = 2e^y - xy; y(0) = 0.$

**455.** $y' = \sin x + y^2; y(0) = 1.$

**456.** $y' = e^x + y; y(0) = 4.$

**457.** $y' = x^2 + y^2; y(0) = 2.$

**458.** $y' = \sin x + 0{,}5y^2; y(0) = 1.$

**459.** $y' = 2e^y + xy; y(0) = 0.$

**460.** $y' = x + x^2 + y^2; y(0) = 5.$

**461-470.** Разложить данную функцию $f(x)$ в ряд Фурье в интервале $(a; b)$.

**461.** $f(x) = x + 1$ в интервале $(-\pi; \pi)$.

**462.** $f(x) = x^2 + 1$ в интервале $(-2; 2)$.

**463.** $f(x) = \dfrac{\pi - x}{2}$ в интервале $(-\pi; \pi)$.

**464.** $f(x) = 1 + |x|$ в интервале $(-1; 1)$.

**465.** $f(x) = \begin{cases} 0, -\pi < x < 0, \\ x, 0 \le x \le \pi \end{cases}$ в интервале $(-\pi; \pi)$.

**466.** $f(x) = |1 - x|$ в интервале $(-2; 2)$.

**467.** $f(x) = |x|$ в интервале $(-\pi; \pi)$.

**468.** $f(x) = x - 1$ в интервале $(-1; 1)$.

**469.** $f(x) = x^2$ в интервале $(-0; 2\pi)$.

**470.** $f(x) = \begin{cases} 2, -\pi < x < 0, \\ 1, 0 \le x \le \pi \end{cases}$ в интервале $(-\pi; \pi)$.

## 11. Уравнения математической физики. Функции комплексного переменного. Операционное исчисление.

**471-480.** Методом Даламбера найти уравнение $u=u(x;\ t)$ формы однородной бесконечной струны, определяемой волновым уравнением $\dfrac{\partial u}{\partial t^2}=a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, если в начальный момент $t_0=0$ форма струны и скорость точки струны с абсциссой $x$ определяются соответственно заданными функциями $u\big|_{t_0=0}=f(x)$ и $\dfrac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t_0=0}=F(x)$.

**471.** $f(x)=x(2-x), F(x)=\mathrm{e}^{-x}.$

**472.** $f(x)=x^2, F(x)=\sin x.$

**473.** $f(x)=\mathrm{e}^{x}, F(x)=\omega x.$

**474.** $f(x)=\cos x, F(x)=\omega x.$

**475.** $f(x)=\sin x, F(x)=\upsilon_0.$

**476.** $f(x)=x, F(x)=\cos x.$

**477.** $f(x)=\sin x, F(x)=\cos x.$

**478.** $f(x)=x(2-x), F(x)=\mathrm{e}^{x}.$

**479.** $f(x)=\cos x, F(x)=\sin x.$

**480.** $f(x)=\mathrm{e}^{-x}, F(x)=\upsilon_0.$

**481-490.** Представить заданную функцию $w=f(x)$, где $z=x+iy$, в виде $w=u(x;\ y)+i\upsilon(x;\ y)$; проверить, является ли она аналитической. Если да, то найти значение её производной в заданной точке $z_0$.

**481.** $w=(iz)^3, z_0=-1+i.$

**482.** $w=\mathrm{e}^{-z^2}, z_0=i.$

**483.** $w=i(1-z^2)-2z, z_0=1.$

**484.** $w=\mathrm{e}^{1-2z}, z_0=\pi i/3.$

**485.** $w=z^3+3z-i, z_0=-i.$

**486.** $w=\mathrm{e}^{1-2iz}, z_0=\pi/6.$

**487.** $w=2z^2-iz, z_0=1-i.$

**488.** $w=\mathrm{e}^{iz^2}, z_0=\sqrt{\pi}i/2.$

**489.** $w=z^3+z^2+i, z_0=2i/3.$

**490.** $w=z\mathrm{e}^{z}, z_0=-1+i\pi.$

**491-500.** Разложить функцию f(z) в ряд Лорана в окрестности точки z0 и определить область сходимости этого ряда.

**491.** $f(z)=\dfrac{1}{3z-5}, z_0=5/3.$

**492.** $f(z)=\sin\dfrac{z}{1-z}, z_0=1.$

**493.** $f(z)=\mathrm{e}^{1/z}, z_0=0.$

**494.** $f(z)=\dfrac{1}{(z^2+1)^2}, z_0=i.$

**495.** $f(z)=\ln\dfrac{z-1}{z-2}, z_0=1.$

**496.** $f(z)=\cos\dfrac{z}{z-1}, z_0=1.$

**497.** $f(z)=\dfrac{1}{z(z-1)}, z_0=0.$

**498.** $f(z)=\mathrm{e}^{1/(1-z)}, z_0=1.$

**499.** $f(z)=\dfrac{z}{1+z^2}, z_0=i.$

**500.** $f(z)=\dfrac{1}{(z-5)^2}, z_0=3.$

**501-510.** Методом операционного исчисления найти частное решение дифференциального уравнения, удовлетворяющее заданным начальным условиям.

**501.** $x'''+x''=\sin t; x(0)=1, x'(0)=1, x''(0)=0.$

**502.** $x''-x'=t\mathrm{e}^{t}; x(0)=0, x'(0)=1.$

**503.** $x'''-2x''+x'=4; x(0)=1, x'(0)=2, x''(0)=-2.$

**504.** $x'' - 9x = \mathrm{e}^{-2t};\ x(0) = 1,\ x'(0) = 1.$

**505.** $x'' + x' = t^2 + 2t;\ x(0) = 4,\ x'(0) = -2.$

**506.** $x'' + 9x = \cos 3t;\ x(0) = 1,\ x'(0) = 0.$

**507.** $x''' + x = 1;\ x(0) = 0,\ x'(0) = 0,\ x''(0) = 0.$

**508.** $x'' - 4x = t - 1;\ x(0) = 0,\ x'(0) = 0.$

**509.** $x'' + 2x' + x = \cos t;\ x(0) = 0,\ x'(0) = 0.$

**510.** $x'' + 3x' + 2x = 1 + t + t^2;\ x(0) = 0,\ x'(0) = 1.$

**511-520.** Методом операционного исчисления найти частное решение системы дифференциальных уравнений, удовлетворяющее заданным начальным условиям.

**511.** $\begin{cases} x' = x - y; \\ y' = x + y; \end{cases} x(0) = 1;\ y(0) = 0.$

**512.** $\begin{cases} x' = -2x - 2y - 4z, \\ y' = x + y, \\ z' = 5x + 2y + 7z; \end{cases} x(0) = 1,\ y(0) = 1,\ z(0) = 1.$

**513.** $\begin{cases} x' + 4x - y = 0, \\ y' + 2x + y = 0; \end{cases} x(0) = 2;\ y(0) = 3.$

**514.** $\begin{cases} x' + y - z = 0, \\ y' - z = 0, \\ x + z - z' = 0; \end{cases} x(0) = 2,\ y(0) = 1/2,\ z(0) = 5/2.$

**515.** $\begin{cases} x' + 7x - y = 0, \\ y' + 2x + 5y = 0; \end{cases} x(0) = 1;\ y(0) = 1.$

**516.** $\begin{cases} x' = -x + y + z, \\ y' = x + y - z, \\ z' = x + y - z; \end{cases} x(0) = 2,\ y(0) = 2,\ z(0) = -1.$

**517.** $\begin{cases} x' - x + 2y = 3, \\ 3x' + y' - 4x + 2y = 0; \end{cases} x(0) = 0,\ y(0) = 0.$

**518.** $\begin{cases} x' = y - z, \\ y' = x + y, \\ z' = x + z; \end{cases} x(0) = 1,\ y(0) = 2,\ z(0) = 3.$

**519.** $\begin{cases} x' + y' = 0; \\ x' - 2y' + x = 0; \end{cases} x(0) = 1;\ y(0) = -1.$

**520.** $\begin{cases} x' + y = 0, \\ y' - 2x - 2y = 0; \end{cases} x(0) = 1;\ y(0) = 1.$

## 12. Теория вероятности и математическая статистика.

**521.** Студент знает 45 из 60 вопросов программы. Каждый экзаменационный билет содержит три вопроса. Найти вероятность того, что студент знает: а) все три вопроса; б) только два вопроса; в) только один вопрос экзаменационного билета.

**522.** В каждой из двух урн находится 5 белых и 10 черных шаров. Из первой урны переложили во вторую наудачу один шар, а затем из второй урны вынули наугад один шар. Найти вероятность того, что вынутый шар окажется чёрным.

**523.** Три стрелка в одинаковых и независимых условиях произвели по одному выстрелы по одной и той же цели. Вероятность поражения цели первым стрелком равна 0,9, вторым – 0,8, третьим – 0,7. Найти вероятность того, что а) только один из стрелков попал в цель; б) только два стрелка попали в цель; в) все три стрелка попали в цель.

**524.** Вероятность наступления события в каждом из одинаковых и независимых испытаний равна 0,8. Найти вероятность того, что в 1600 испытаниях событие наступит 1200 раз.

**525.** Для сигнализации об аварии установлены три независимо работающих устройства. Вероятность того, что при аварии сработает первое устройство, равна 0,9, второе – 0,95, третье – 0,85. Найти вероятность того, что при аварии сработает: а) только одно устройство; б) только два устройства; в) все три устройства.

**526.** Вероятность наступления события в каждом из одинаковых и независимых испытаний равна 0,02. Найти вероятность того, что в 150 испытаниях событие наступит 5 раз.

**527.** В партии из 1000 изделий имеются 10 дефектных. Найти вероятность того, что среди 50 изделий, взятых наудачу из этой партии, ровно три окажутся дефектными.

**528.** Вероятность наступления события в каждом из одинаковых и независимых испытаний равна 0,8. Найти вероятность того, что в 125 испытаниях событие наступит не менее 75 и не более 90 раз.

**529.** На трёх станках при одинаковых и независимых условиях изготавливаются детали одного наименования. На первом станке изготовляют 10%, на втором – 30%, на третьем – 60% всех детали. Вероятность каждой детали быть дефектной равна 0,7, если она изготовлена на первом станке, 0,8 – если на втором станке, и 0,9 – если на третьем станке. Найти вероятность того, что наугад взятая деталь окажется бездефектной.

**530.** Два брата входят в состав двух спортивных команд, состоящих из 12 человек каждая. В двух урнах имеются по 12 билетов с номерами от 1 до 12. Члены каждой команды вынимают наудачу по одному билеты из определённой урны (без возвращения). Найти вероятность того, что оба брата вытащат билет номер 6.

**531-540.** Дискретная случайная величина $X$ может принимать только два значения: $x_1$ и $x_2$ причём $x_1<x_2$. Известны вероятность $p_1$ возможного значения $x_1$, математическое ожидание $M(X)$ и дисперсия $D(X)$. Найти закон распределения этой специальной величины.

**531.** $p_1 = 0{,}1; \quad M(X) = 3{,}9; \quad D(X) = 0{,}09.$

**532.** $p_1 = 0{,}3; \quad M(X) = 3{,}7; \quad D(X) = 0{,}21.$

**533.** $p_1 = 0{,}5; \quad M(X) = 3{,}5; \quad D(X) = 0{,}25.$

**534.** $p_1 = 0{,}7; \quad M(X) = 3{,}3; \quad D(X) = 0{,}21.$

**535.** $p_1 = 0{,}9; \quad M(X) = 3{,}1; \quad D(X) = 0{,}09.$

**536.** $p_1 = 0{,}9; \quad M(X) = 2{,}2; \quad D(X) = 0{,}36.$

**537.** $p_1 = 0{,}8; \quad M(X) = 3{,}2; \quad D(X) = 0{,}16.$

**538.** $p_1 = 0{,}6; \quad M(X) = 3{,}4; \quad D(X) = 0{,}24.$

**539.** $p_1 = 0{,}4; \quad M(X) = 3{,}6; \quad D(X) = 0{,}24.$

**540.** $p_1 = 0{,}2; \quad M(X) = 3{,}8; \quad D(X) = 0{,}16.$

**541-550.** Случайная величина $X$ задана функцией распределения $F(x)$. Найти плотность распределения вероятностей, математическое ожидание и дисперсию случайной величины.

**541.**
$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0; \\ x^2, & 0 < x \le 1; \\ 1, & x \le 1. \end{cases}$$

**542.**
$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \le 1; \\ (x^2 - x)/2, & 1 < x \le 2; \\ 1, & x > 1. \end{cases}$$

**543.** $$F(x)=\begin{cases}0, & x\le 0;\\ x^3, & 0<x\le 1;\\ 1, & x>1.\end{cases}$$

**544.** $$F(x)=\begin{cases}0, & x\le 0;\\ 3x^2+2x, & 0<x\le 1/3;\\ 1, & x>1/3.\end{cases}$$

**545.** $$F(x)=\begin{cases}0, & x\le 2;\\ x/2-1, & 2<x\le 4;\\ 1, & x>4.\end{cases}$$

**546.** $$F(x)=\begin{cases}0, & x\le 0;\\ x^2/9, & 0<x\le 3;\\ 1, & x>3.\end{cases}$$

**547.** $$F(x)=\begin{cases}0, & x\le 0;\\ x^2/4, & 0<x\le 2;\\ 1, & x>2.\end{cases}$$

**548.** $$F(x)=\begin{cases}0, & x\le -\pi/2;\\ \cos x, & \pi/2<x\le 0;\\ 1, & x>0.\end{cases}$$

**549.** $$F(x)=\begin{cases}0, & x\le 0;\\ 2\sin x, & 0<x\le \pi/6;\\ 1, & x>\pi/6.\end{cases}$$

**550.** $$F(x)=\begin{cases}0, & x\le 3\pi/4;\\ \cos 2x, & 3\pi/4<x\le \pi;\\ 1, & x>\pi.\end{cases}$$

**551-560.** Известны математическое ожидание $a$ и среднее квадратическое отклонение σ нормально распределённой случайной величины $X$. Найти вероятность попадания этой величины в заданный интервал (α; β).

**551.** $a=10,\quad \sigma=4,\quad \alpha=2,\quad \beta=13.$

**552.** $a=9,\quad \sigma=5,\quad \alpha=5,\quad \beta=14.$

**553.** $a=8,\quad \sigma=1,\quad \alpha=4,\quad \beta=9.$

**554.** $a=7,\quad \sigma=2,\quad \alpha=3,\quad \beta=10.$

**555.** $a=6,\quad \sigma=3,\quad \alpha=2,\quad \beta=11.$

**556.** $a=5,\quad \sigma=1,\quad \alpha=1,\quad \beta=12.$

**557.** $a=4,\quad \sigma=5,\quad \alpha=2,\quad \beta=11.$

**558.** $a=3,\quad \sigma=2,\quad \alpha=3,\quad \beta=10.$

**559.** $a=2,\quad \sigma=5,\quad \alpha=4,\quad \beta=9.$

**560.** $a=2,\quad \sigma=4,\quad \alpha=6,\quad \beta=10.$

**561-570.** Задана матрица $P_1$ вероятностей перехода цепи Маркова из состояния i(i=1, 2) в состояние j(j=1, 2) за один шаг. Найти матрицу $P_2$ перехода из состояния i в состояние j за два шага.

**561.** $$P_1=\begin{pmatrix}0{,}1 & 0{,}9\\ 0{,}2 & 0{,}8\end{pmatrix}$$

**562.** $$P_1=\begin{pmatrix}0{,}2 & 0{,}8\\ 0{,}3 & 0{,}7\end{pmatrix}$$

**563.** $$P_1=\begin{pmatrix}0{,}3 & 0{,}7\\ 0{,}4 & 0{,}6\end{pmatrix}$$

**564.** $$P_1=\begin{pmatrix}0{,}4 & 0{,}6\\ 0{,}5 & 0{,}5\end{pmatrix}$$

**565.** $$P_1=\begin{pmatrix}0{,}6 & 0{,}4\\ 0{,}7 & 0{,}3\end{pmatrix}$$

**566.** $$P_1=\begin{pmatrix}0{,}6 & 0{,}4\\ 0{,}8 & 0{,}2\end{pmatrix}$$

**567.** $$P_1=\begin{pmatrix}0{,}8 & 0{,}2\\ 0{,}9 & 0{,}1\end{pmatrix}$$

**568.** $$P_1=\begin{pmatrix}0{,}9 & 0{,}1\\ 0{,}2 & 0{,}8\end{pmatrix}$$

**569.** $$P_1=\begin{pmatrix}0{,}8 & 0{,}2\\ 0{,}2 & 0{,}8\end{pmatrix}$$

**570.** $$P_1=\begin{pmatrix}0{,}4 & 0{,}6\\ 0{,}1 & 0{,}9\end{pmatrix}$$

**571-580.** Найти доверительный интервал для оценки математического ожидания $a$ нормального распределения с надёжностью 0,95, зная выборочную среднюю $\overline{x}$, объём выборки $n$ и среднее квадратическое отклонение σ.

**571.** $\bar{x} = 75{,}17, \quad n = 36, \quad \sigma = 6.$

**572.** $\bar{x} = 75{,}16, \quad n = 49, \quad \sigma = 7.$

**573.** $\bar{x} = 75{,}15, \quad n = 64, \quad \sigma = 8.$

**574.** $\bar{x} = 75{,}14, \quad n = 81, \quad \sigma = 9.$

**575.** $\bar{x} = 75{,}13, \quad n = 100, \quad \sigma = 10.$

**576.** $\bar{x} = 75{,}12, \quad n = 121, \quad \sigma = 11.$

**577.** $\bar{x} = 75{,}11, \quad n = 144, \quad \sigma = 12.$

**578.** $\bar{x} = 75{,}10, \quad n = 169, \quad \sigma = 13.$

**579.** $\bar{x} = 75{,}09, \quad n = 196, \quad \sigma = 14.$

**580.** $\bar{x} = 75{,}08, \quad n = 225, \quad \sigma = 15.$