

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

СЕВЕРО-КАВКАЗСКАЯ ГОСУДАРСТВЕННАЯ АКАДЕМИЯ

М.А. Тохаева

ТЕХНИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

Практикум для студентов специальности
08.02.01 Строительство и эксплуатация зданий и сооружений

Черкесск
2024

УДК 531/534
ББК 30.12
Т 63

Рассмотрено на заседании ЦК «Технические дисциплины»
Протокол № 1 от «1» сентября 2023 г.
Рекомендовано к изданию редакционно-издательским советом СКГА
Протокол № 26 от «29» сентября 2023 г.

Рецензенты: Леднева И.С. – председатель цикловой комиссии
«Технические дисциплины» СПК СКГА

Т 63 **Тохаева, М.А.** Техническая механика: практикум: для студентов II курса, обучающихся по специальности 08.02.01 Строительство и эксплуатация зданий и сооружений / М.А. Тохаева. – Черкесск: БИЦ СКГА, 2024. – 68 с.

В практикуме приведены описание практических работ, охватывающих основные разделы технической механики: теоретическая механика, сопротивление материалов, статика сооружений. Описание каждой работы включает в себя: указание цели работы, порядка ее выполнения, краткие теоретические сведения, примеры решений типовых заданий.

УДК 531/534
ББК 30.12

© Тохаева М.А., 2024
© ФГБОУ ВО СКГА, 2024

СОДЕРЖАНИЕ

1.	Введение	5
2.	Методические рекомендации по решению задач	6
3.	Раздел I. Теоретическая механика. Практические работы № 1, 2. Тема: Плоская система сходящихся сил (решение задач на определение равнодействующей).	7
4.	Практические работы № 3, 4. Тема: Плоская система сходящихся сил (решение задач на определение усилий в стержнях).	9
5.	Практические работы № 5, 6, 7, 8. Тема: Плоская система произвольно расположенных сил (решение задач на определение опорных реакций в консольных и однопролетных балках)	10
6.	Практические работы № 9, 10. Тема: Центр тяжести (решение задач на определение положения центра тяжести в сложных фигурах)	15
7.	Раздел II. Соппротивление материалов. Практические работы № 11, 12. Тема: Растяжение и сжатие (решение задач на определение продольной силы и нормального напряжения и построения эпюр)	17
8.	Практические работы № 13, 14. Тема: Геометрические характеристики плоских сечений (решение задач на определение главных центральных моментов инерции сложных сечений)	22
9.	Практические работы № 15, 16. Тема: Кручение (решение задач по расчету валов на прочность и жесткость)	23
10	Практические работы № 17, 18. Тема: Изгиб (решение задач на . построение эпюр поперечных сил и изгибающих моментов)	25
11	Практические работы № 19, 20. Тема: Изгиб (решение задач по . расчету балок на прочность)	29
12	Раздел III. Статика сооружений. Практические работы № 21,22, . 23.. Тема: Основные сведения о многопролетных статически определимых (шарнирных) балках (решение задач на построение эпюр внутренних усилий в шарнирных балках)	31
13	Практические работы № 24, 25. Тема: Статически определимые . плоские рамы (решение задач на построение эпюр внутренних усилий в рамах)	33
14	Практические работы № 26,27. Тема: Трехшарнирная арка . (решение задач на определение внутренних усилий в арках)	35
15	Практические работы № 28, 29, 30. Тема: Статически определимые плоские фермы (решение задач на определение усилий в стержнях ферм аналитическими методами)	39
16	Практические работы № 31, 32. Тема: Статически определимые плоские фермы (решение задач на определение усилий в стержнях ферм графическим методом)	41
17	Практические работы № 33, 34. Тема: Линии влияния в балках (решение задач на определение усилий по линиям влияния)	44
18	Практические работы № 35, 36. Тема: Неразрезные балки (расчет	48

неразрезных балок)	
19 Практические работы № 37, 38. Тема: Определение перемещений в статически определимых плоских системах (решение задач на определение перемещений)	56
20 Практические работы № 39, 40. Тема: Подпорные стены (расчет подпорных стен).....	59
21 Список использованных источников и литературы.....	66

ВВЕДЕНИЕ

Дальнейшее ускорение роста научно-технического потенциала нашей страны требует от инженерно-технических работников всех отраслей народного хозяйства постоянно решать сложные задачи, связанные с введением в строй новых и реконструкцией действующих промышленных предприятий, принимать участие в разработке, изготовлении и эксплуатации различного автоматизированного оборудования, отвечающего требованиям мировых стандартов. С ростом автоматизации возрастают требования не только к опыту и практическим навыкам, но и к общетеоретическим и специальным знаниям современного работника производства, к его способности усваивать новые знания и информацию. Чтобы овладеть своей специальностью и не отставать от технического прогресса, технику, занятому в любой отрасли народного хозяйства, необходимо иметь хорошую физико-математическую и общетехническую подготовку.

«Техническая механика» – важный общетехнический предмет, назначение которого – дать будущим техникам основные сведения о законах равновесия и движения материальных тел, о методах расчета сооружений на прочность, жесткость и устойчивость, а также сформировать представления о работе инженерных конструкций, научить их решать различные прикладные задачи. Изучение технической механики способствует развитию у учащихся диалектико-материалистического мировоззрения, знания и навыки, полученные при изучении этого предмета, являются основой для освоения сложных специальных дисциплин. Приобретенные знания способствуют формированию у студентов основ инженерного мышления.

Методические рекомендации по решению задач

1. Главная цель решения задач – развить способности к самостоятельному мышлению и анализу, к самостоятельной творческой работе, развить понимание физических явлений и техническое мышление.

2. Развить умения и навыки применения теоретических знаний к решению практических вопросов.

3. Закрепить и углубить знания по изучаемому предмету.

4. Развить вычислительную технику.

5. Развить навыки работы со справочной и технической литературой.

6. Приобрести навыки оформления технических расчетов.

Основные положения методики решения задач

1. Записать условия задачи, составить расчетную схему (если это необходимо) и проанализировать физическую сущность задачи.

2. После того, как задача в общих чертах решена, перейти к её последовательному математическому решению:

– вести решение по пунктам, указывая, что именно в данном пункте определяется;

– каждый пункт должен содержать расчетную формулу, записанную в общем виде;

– после вывода окончательной формулы необходимо перейти к численному решению;

– перед подстановкой числовых данных необходимо все исходные величины привести к единым согласованным единицам измерения.

3. Анализ результата решения заключается в следующем:

– попытке оценить правильность решения по правдоподобию числового результата;

– в разборе возможных методов контроля решения;

– в анализе решения с точки зрения подтверждения определенных теоретических положений и технических приложений и практических выводов;

– в необходимости приведения результата к ГОСТам.

Задания, сдаваемые на проверку, должны быть выполнены и оформлены в соответствии со следующими требованиями: задачи решаются в специальной тетради и ход решения каждой задачи должен сопровождаться краткими пояснениями. Задание надо выполнять аккуратно почерком, ручкой одного цвета. Чертежи схем должны быть выполнены в соответствии с требованиями черчения и только карандашом. Порядок подстановки числовых значений должен соответствовать порядку расположения в формуле буквенных обозначений этих величин. При решении задач применять Международную систему единиц (СИ), а также кратные и дольные от них. Для обозначения основных общетехнических величин использовать только стандартные символы. Тщательно проверить правильность всех вычислений, обратить особое внимание на соблюдение правильности размерностей, подставленных в формулу значений.

РАЗДЕЛ I. ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

ПРАКТИЧЕСКИЕ РАБОТЫ № 1, 2

Плоская система сходящихся сил

Цель занятия: Научить студентов определять равнодействующую системы сил различными способами.

Расчетные формулы

Равнодействующая системы сил

$$F_{\Sigma} = \sqrt{F_{\Sigma x}^2 + F_{\Sigma y}^2}; \quad F_{\Sigma x} = \sum_0^n F_{kx}; \quad F_{\Sigma y} = \sum_0^n F_{ky},$$

где $F_{\Sigma x}$, $F_{\Sigma y}$ - проекции равнодействующей на оси координат;

F_{kx} , F_{ky} - проекции векторов-сил системы на оси координат.

$$\cos \alpha_{\Sigma x} = \frac{F_{\Sigma x}}{F_{\Sigma}},$$

где $\alpha_{\Sigma x}$ - угол равнодействующей с осью Ox .

Условие равновесия

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_0^n F_{kx} = 0; \\ \sum_0^n F_{ky} = 0. \end{array} \right.$$

Если плоская система сходящихся сил находится в равновесии, многоугольник сил должен быть замкнут.

Пример 1. Определить равнодействующую плоской системы сходящихся сил аналитическим и геометрическим способами (рис.1).

Дано: $F_1 = 10$ кН; $F_2 = 15$ кН; $F_3 = 12$ кН; $F_4 = 8$ кН; $F_5 = 8$ кН;

$\alpha_1 = 30^\circ$; $\alpha_2 = 60^\circ$; $\alpha_3 = 120^\circ$; $\alpha_4 = 180^\circ$; $\alpha_5 = 300^\circ$.

Решение

1. Определить равнодействующую аналитическим способом (рис. 1, а).

$$\left\{ \begin{array}{l} F_{1x} = 10 \cdot \cos 30^\circ = 8,66 \text{ кН}; \\ F_{2x} = 15 \cdot \cos 60^\circ = 7,5 \text{ кН}; \\ F_{3x} = -12 \cdot \cos 60^\circ = -6 \text{ кН}; \\ F_{4x} = -8 \text{ кН}; \\ F_{5x} = 8 \cdot \cos 60^\circ = 4 \text{ кН}; \end{array} \right\} \begin{array}{l} F_{\Sigma x} = \sum F_{kx}; \\ F_{\Sigma x} = 6,16 \text{ кН}. \end{array}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} F_{1y} = 10 \cdot \cos 60^\circ = 5 \text{ кН}; \\ F_{2y} = 15 \cdot \cos 30^\circ = 12,99 \text{ кН}; \\ F_{3y} = 12 \cdot \cos 30^\circ = 10,4 \text{ кН}; \\ F_{4y} = 0; \\ F_{5y} = -8 \cdot \cos 30^\circ = -6,9 \text{ кН}; \end{array} \right\} \begin{array}{l} F_{\Sigma y} = \sum F_{ky}; \\ F_{\Sigma y} = 21,49 \text{ кН}. \end{array}$$

$$F_{\Sigma} = \sqrt{F_{\Sigma x}^2 + F_{\Sigma y}^2}; \quad F_{\Sigma} = \sqrt{6,16^2 + 21,49^2} = 22,36 \text{ кН};$$

$$\cos \alpha_{\Sigma x} = \frac{F_{\Sigma x}}{F_{\Sigma}}; \quad \cos \alpha_{\Sigma x} = \frac{6,16}{22,36} = 0,2755; \quad \alpha_{\Sigma x} = 74^\circ.$$

2. Определить равнодействующую графическим способом.

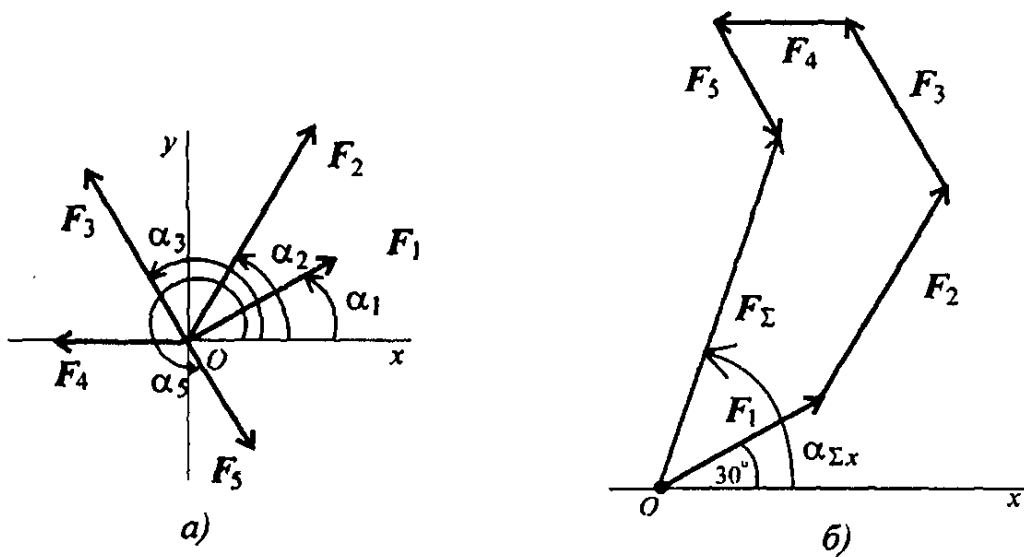


Рисунок 1

С помощью транспортира в масштабе 2 мм = 1 кН строим многоугольник сил (рис. 1, б). Измерением определяем модуль равнодействующей силы и угол наклона ее к оси Oх.

$$F_{\Sigma \text{гр}} \cong 22 \text{ кН}; \quad \alpha_{\Sigma x} = 73^\circ.$$

Результаты расчетов не должны отличаться более чем на 5%.

$$\frac{F_{\Sigma \text{ан}} - F_{\Sigma \text{гр}}}{F_{\Sigma \text{ан}}} \cdot 100\% \leq 5\%.$$

ПРАКТИЧЕСКИЕ РАБОТЫ № 3, 4

Плоская система сходящихся сил

Цель занятия: Научить студентов решать задачи на равновесие геометрическим способом

Решение задач на равновесие геометрическим способом

Геометрическим способом удобно пользоваться, если в системе три силы. При решении задач на равновесие тело считать абсолютно твердым (отвердевшим).

Порядок решения задач:

1. Определить возможное направление реакций связей.
2. Вычертить многоугольник сил системы, начиная с известных сил, в некотором масштабе. (Многоугольник должен быть замкнут, все векторы-слагаемые направлены в одну сторону по обходу контура).
3. Измерить полученные векторы сил и определить их величину, учитывая выбранный масштаб.
4. Для уточнения решения рекомендуется определить величины векторов (сторон многоугольника) с помощью геометрических зависимостей.

Пример 1. Груз подвешен на стержнях и находится в равновесии. Определить усилия в стержнях (рис. 2).

Решение

1. Усилия, возникающие в стержнях крепления, по величине равны силам, с которыми стержни поддерживают груз (5-я аксиома статики) (рис.2).

Определяем возможные направления реакций связей «жесткие стержни».

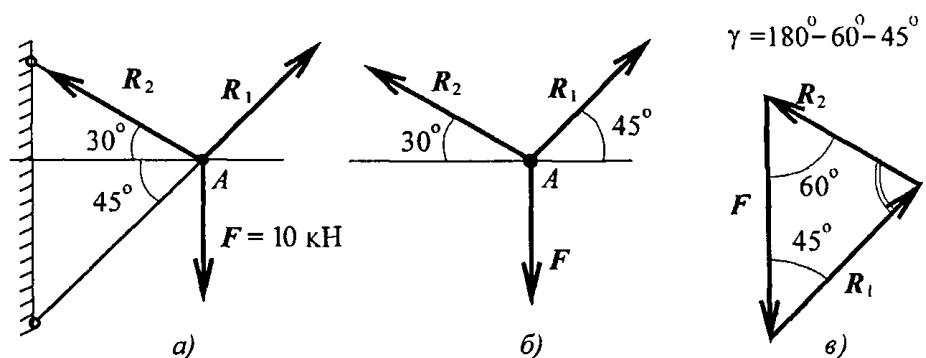


Рисунок 2

Усилия направлены вдоль стержней.

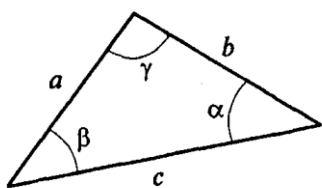
2. Освобождаем точку А от связей, заменив действие связей их реакциями (рис.2, б).

3. Система находится в равновесии. Построим треугольник сил. Построение начнем с известной силы, вычертив вектор F в некотором масштабе.

Из концов вектора F проводим линии, параллельные реакциям R_1 и R_2 .

Пересекаясь, линии создадут треугольник (рис. 2, в). Зная масштаб построений, и измерив длину сторон треугольника, можно определить величину реакций в стержнях.

4. Для более точных расчетов можно воспользоваться геометрическими соотношениями, в частности теоремой синусов: отношение стороны треугольника к синусу противоположного угла – величина постоянная



$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma}.$$

Для данного случая:

$$\frac{F}{\sin 75^\circ} = \frac{R_1}{\sin 60^\circ} = \frac{R_2}{\sin 45^\circ};$$

$$\frac{R_1}{\sin 60^\circ} = \frac{F}{\sin 75^\circ}; \quad R_1 = \frac{F \sin 60^\circ}{\sin 75^\circ};$$

$$R_1 = \frac{10 \cdot 0,866}{0,966} = 9 \text{ кН};$$

$$\frac{R_2}{\sin 45^\circ} = \frac{F}{\sin 75^\circ}; \quad R_2 = \frac{F \sin 45^\circ}{\sin 75^\circ}; \quad R_2 = \frac{10 \cdot 0,707}{0,966} = 7,3 \text{ кН}.$$

Замечание. Если направление вектора (реакции связи) на заданной схеме и в треугольнике сил не совпало, значит, реакция на схеме должна быть направлена в противоположную сторону.

ПРАКТИЧЕСКИЕ РАБОТЫ № 5, 6, 7, 8

Плоская система произвольно расположенных сил

Цель занятия: Научить студентов составлять уравнения равновесия и уметь ими пользоваться при определении реакций в опорах балочных систем.

Основные формулы и предпосылки расчета

Виды опор балок и их реакции (рис. 3).

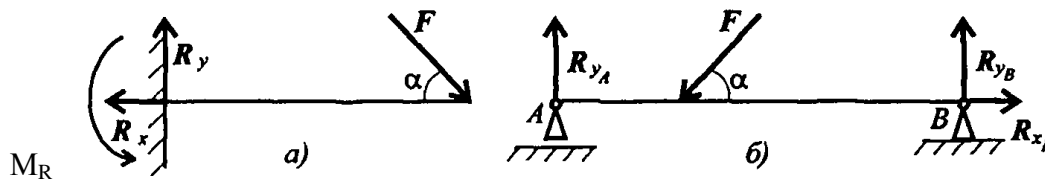


Рисунок 3

Моменты пары сил и силы относительно точки (рис. 4).

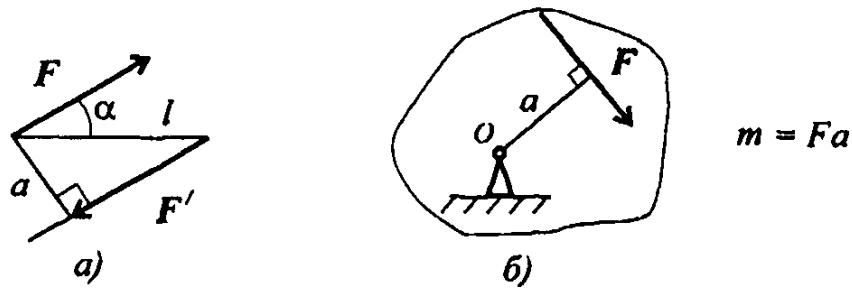


Рисунок 4

Главный вектор

$$F_{\text{гл}} = \sqrt{\left(\sum_0^n F_{kx}\right)^2 + \left(\sum_0^n F_{ky}\right)^2}.$$

Главный момент

$$M_{\text{гл}O} = \sum_0^n m_{kO}.$$

Условия равновесия

$$1. \quad \sum_0^n F_{kx} = 0; \quad \sum_0^n F_{ky} = 0; \quad \sum_0^n m_{kA} = 0.$$

$$\text{Проверка: } \sum_0^n m_{kB} = 0.$$

$$2. \quad \sum_0^n F_{kx} = 0; \quad \sum_0^n m_{kA} = 0; \quad \sum_0^n m_{kB} = 0.$$

$$\text{Проверка: } \sum_0^n F_{ky} = 0.$$

Упражнения при подготовке к практической работе

1. Перенести силу F в точку A , используя теорему Пуансо (рис. 5).
 $F = 20$ кН; $AB = 6$ м; $BC = 2$ м.



Рисунок 5

2. Привести систему сил к точке B , определить главный вектор и главный момент системы сил (рис. 6). $AB = 2$ м; $BC = 1,5$ м; $CD = 1$ м; $F_1 = 18$ кН;

$$F_2 = 10 \text{ кН}; \quad F_3 = 30 \text{ кН}; \quad m = 36 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

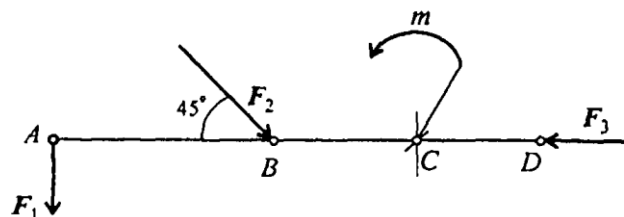


Рисунок 6

3. Система сил находится в равновесии. Определить величину момента пары m (рис. 7). $F_1 = F_1' = 10$ кН; $F_2 = F_2' = 20$ кН.

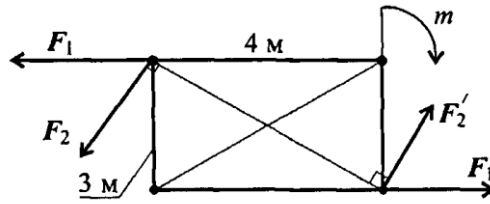


Рисунок 7

4. Нанести реакции в опорах балок 1 и 2 (рис. 8).

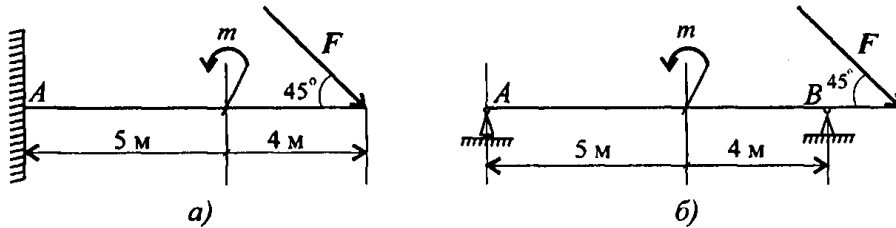


Рисунок 8

5. Определить величину реакции в опоре A. Приложена распределенная нагрузка интенсивностью $q = 5$ кН/м (рис. 9).

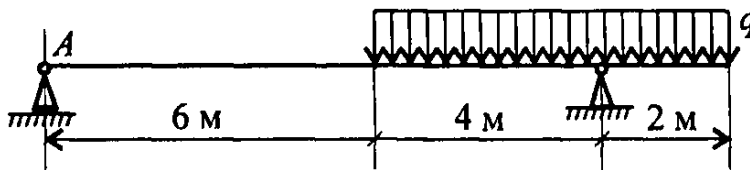


Рисунок 9

6. Записать систему уравнений равновесия для определения реакций в опоре заземленной балки.

7. Записать систему уравнений равновесия для определения реакций в опорах двухопорной балки, закрепленной на двух шарнирах.

Примеры решения задач

Пример 1. Одноопорная (заземленная) балка нагружена сосредоточенными силами и парой сил (рис. 10). Определить реакции заделки.

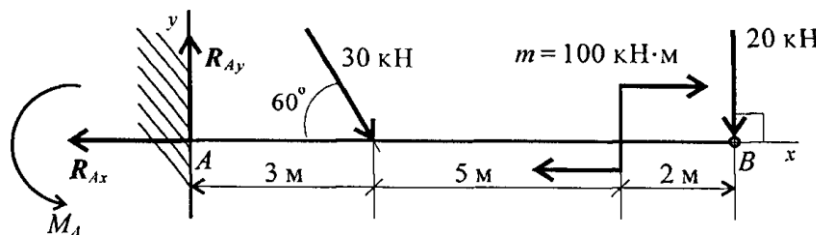


Рисунок 10

1. В заделке может возникнуть реакция, представляемая двумя составляющими (R_{Ay} ; R_{Ax}), и реактивный момент M_A . Наносим на схему балки возможные направления реакций.

Замечание. Если направления выбраны неверно, при расчетах получим отрицательные значения реакций.

В силу малой высоты считают, что все точки балки находятся на одной прямой; все три неизвестные реакции приложены в одной точке. Для решения удобно использовать систему уравнений равновесия в первой форме. Каждое уравнение будет содержать одну неизвестную.

2. Используем систему уравнений:

$$\sum_0^n F_{kx} = 0; \quad \sum_0^n F_{ky} = 0; \quad \sum_0^n m_{kA} = 0.$$

$$\sum_0^n F_{kx} = -R_{Ax} + 30 \cdot \cos 60^\circ + 20 \cdot \cos 90^\circ = 0.$$

$$R_{Ax} = 30 \cdot \cos 60^\circ + 20 \cdot \cos 90^\circ = 15 \text{ кН.}$$

$$\sum_0^n F_{ky} = R_{Ay} - 30 \cdot \cos 30^\circ - 20 \cdot \cos 0^\circ = 0.$$

$$R_{Ay} = 30 \cdot 0,866 + 20 \cdot 1 = 45,98 \text{ кН.}$$

$$\sum_0^n m_{kA} = -M_A + 30 \cdot 3 \cdot \sin 60^\circ + 100 + 20 \cdot 10 = 0.$$

$$M_A = 377,94 \text{ кН}\cdot\text{м.}$$

Знаки полученных реакций (+), следовательно, направления реакций выбраны верно.

3. Для проверки правильности решения составляем уравнения моментов относительно точки В.

$$\sum m_{kB} = -M_A + R_{Ay} \cdot 10 - 30 \cdot 7 \cdot \sin 60^\circ + 100 = 0.$$

Подставляем значения полученных реакций:

$$-377,94 + 45,98 \times 10 - 210 \times 0,866 + 100 = 0$$

$$-559,8 + 559,8 = 0.$$

Решение выполнено верно.

Пример 2. Двух опорная балка с шарнирными опорами А и В нагружена сосредоточенной силой F, распределенной нагрузкой интенсивностью q и парой сил с моментом m (рис. 11). Определить реакции опор.

Решение

1. Левая опора (точка А) – подвижный шарнир, здесь реакция направлена перпендикулярно опорной плоскости.

Правая опора (точка В) – неподвижный шарнир, здесь наносим две составляющие реакции вдоль осей координат. Ось Ох совмещаем с продольной осью балки.

2. Поскольку на схеме возникнут две неизвестные вертикальные реакции, использовать первую форму уравнений нецелесообразно.

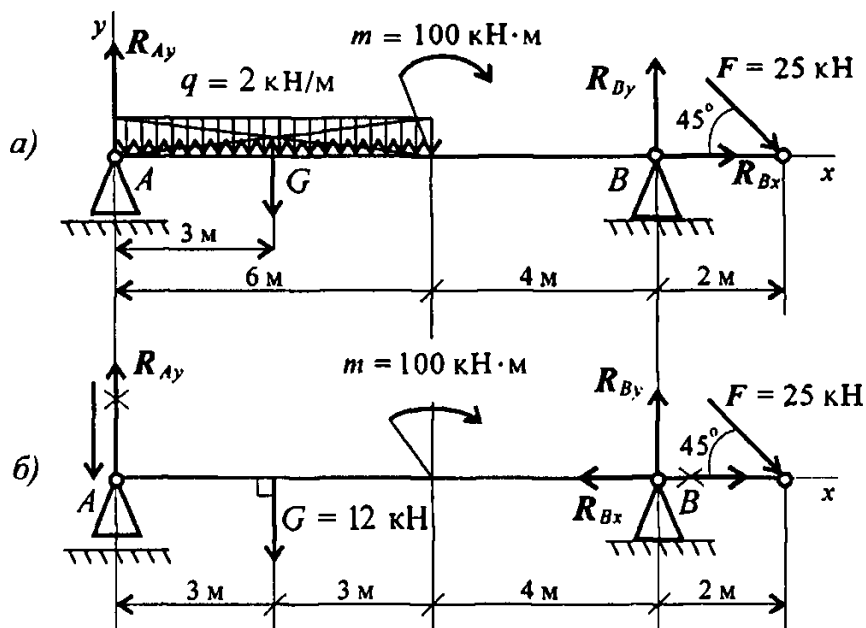


Рисунок 11

$F = 25 \text{ кН}; m = 100 \text{ кН}\cdot\text{м}; q = 2 \text{ кН/м}$

3. Заменяем распределенную нагрузку сосредоточенной:

$$G = ql; \quad G = 2 \cdot 6 = 12 \text{ кН.}$$

Сосредоточенную силу помещаем в середине пролета, далее задача решается с сосредоточенными силами (рис. 11, б).

4. Наносим возможные реакции в опорах (направление произвольное).

5. Для решения выбираем уравнение равновесия в виде

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_0^n m_{kA} = 0; \\ \sum_0^n m_{kB} = 0; \\ \sum_0^n F_{kx} = 0. \end{array} \right. \quad \text{Проверка:} \quad \sum_0^n F_{ky} = 0.$$

6. Составляем уравнения моментов относительно точек крепления:

$$\sum_0^n m_{kA} = G \cdot 3 + m - R_{By} \cdot 10 + F \cdot 12 \cdot \sin 45^\circ = 0.$$

$$R_{By} \cdot 10 = G \cdot 3 + m + F \cdot 12 \cdot \sin 45^\circ;$$

$$R_{By} \cdot 10 = 12 \cdot 3 + 100 + 25 \cdot 12 \cdot 0,7; \quad R_{By} = \frac{346}{10} = 34,6 \text{ кН.}$$

Реакция направлена верно

$$\sum_0^n m_{kB} = R_{Ay} \cdot 10 - G \cdot 7 + m + F \cdot 2 \cdot \sin 45^\circ = 0.$$

$$R_{Ay} \cdot 10 = G \cdot 7 - m - F \cdot 2 \cdot \sin 45^\circ;$$

$$R_{Ay} \cdot 10 = 12 \cdot 7 - 100 - 50 \cdot 0,7; \quad R_{Ay} = -\frac{51}{10} = -5,1 \text{ кН.}$$

Реакция отрицательная, следовательно, R_{Ay} нужно направить в противоположную сторону.

7. Используя уравнения проекций, получим:

$$\sum_0^n F_{kx} = R_{Bx} + F \cos 45^\circ; \quad R_{Bx} = -F \cos 45^\circ; \quad R_{Bx} = -17,5 \text{ кНм};$$

R_{Bx} – горизонтальная реакция в опоре В.

Реакция отрицательна, следовательно, на схеме ее направление будет противоположно выбранному направлению.

8. Проверка правильности решения. Для этого используем четвертое уравнение равновесия $\sum_0^n F_{ky} = 0$:

$$-R_{Ay} - G + R_{By} - F \cos 45^\circ = 0.$$

Подставляем полученные значения реакций.

Если условие выполнено, решение верно.

$$-5,1 - 12 + 34,6 - 25 \times 0,7 = 0.$$

ПРАКТИЧЕСКИЕ РАБОТЫ №9, 10

Центр тяжести

Цель занятия: Научить студентов определять положение центра тяжести сложных геометрических фигур, определять положение центра тяжести фигур, составленных из стандартных профилей.

Основные формулы и предпосылки расчета

Центры тяжести простейших сечений (рис. 12)

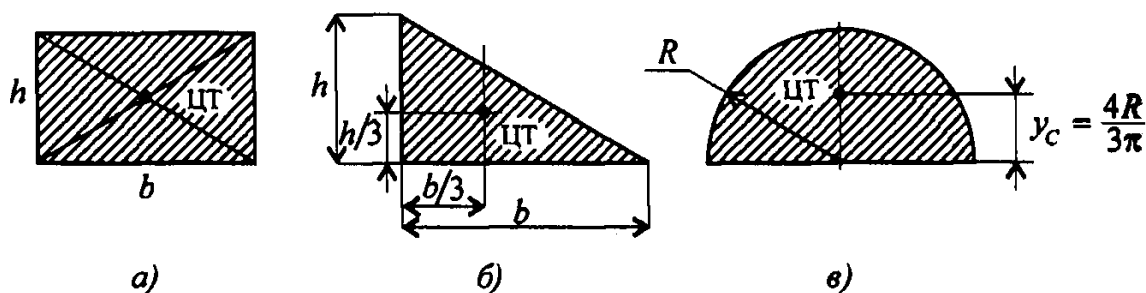


Рисунок 12

Геометрические характеристики стандартных прокатных профилей в Приложении.

Методы расчета:

- 1) метод симметрии;
- 2) метод разделения на простые части;
- 3) метод отрицательных площадей.

Координаты центров тяжести сложных и составных сечений

$$x_c = \frac{\sum_0^n A_k x_k}{A}; \quad y_c = \frac{\sum_0^n A_k y_k}{A},$$

где A_k – площади частей сечения;
 x_k, y_k – координаты ЦТ частей сечения;
 A – суммарная площадь сечения,

$$A = \sum_0^n A_k.$$

Определение координат центра тяжести тела методом дополнения

Он применяется к телам, имеющим вырезы, если центры тяжести тела без выреза и вырезанной части известны.

Пример 1. Определить положение центра тяжести фигуры, представленной на рис. 13.

Решение

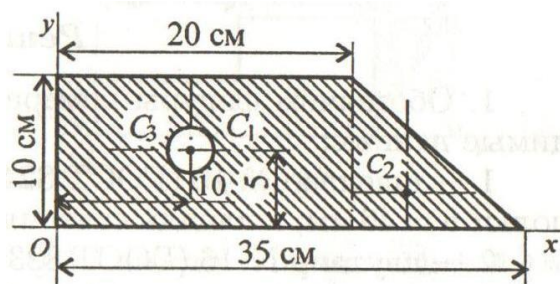


Рисунок 13

Разбиваем фигуру на три части:

1 – прямоугольник,

$$A_1 = 10 \cdot 20 = 200 \text{ см}^2;$$

2 – треугольник,

$$A_2 = 1/2 \cdot 10 \cdot 15 = 75 \text{ см}^2;$$

3 – круг, $A_3 = \pi R^2;$

$$A_3 = 3,14 \cdot 3^2 = 28,3 \text{ см}^2.$$

ЦТ фигуры 1: $x_1 = 10 \text{ см}; y_1 = 5 \text{ см}.$

ЦТ фигуры 2: $x_2 = 20 + 1/3 \cdot 15 = 25 \text{ см}; y_2 = 1/3 \cdot 10 = 3,3 \text{ см}.$

ЦТ фигуры 3: $x_3 = 10 \text{ см}; y_3 = 5 \text{ см};$

$$x_C = \frac{200 \cdot 10 + 75 \cdot 25 - 28,3 \cdot 10}{200 + 75 - 28,3} = 14,5 \text{ см}.$$

Аналогично определяется $y_C = 4,5 \text{ см}.$

Пример 2. Определить координаты центра тяжести составного сечения, состоящего из листа и прокатных профилей (рис. 14)

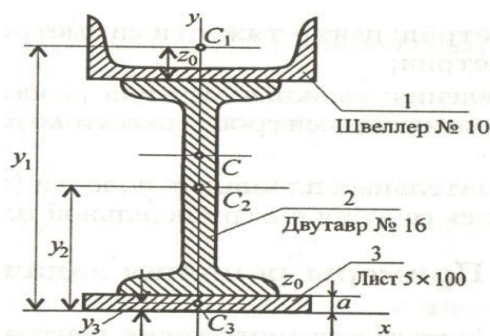


Рисунок 14

Решение

1. Выбираем оси координат, так как показано на рисунке.
2. Обозначим фигуры номерами и выпишем из таблицы необходимые данные:

1. – швеллер №10; высота $h=100$ мм; ширина $b=46$ мм; площадь сечения $A_1 = 10,9 \text{ см}^2$;

2. - двутавр №16; высота $h=160$ мм; ширина $b=81$ мм; площадь сечения

$$A_2 = 20,2 \text{ см}^2;$$

3. – лист 5×100 ; толщина 5 мм; ширина 100 мм.

3. Вычисляем координаты центра тяжести каждой фигуры. Составное сечение симметрично, поэтому центр тяжести находится на оси симметрии и координата $x_c = 0$. Результаты вычислений заносим в таблицу

№ фигуры	Площадь фигуры $A, \text{ см}^2$	Координаты центра тяжести	
		X, см	Y, см
1	$A_1 = 10,9$	0	$a + h_2 + z_0 = 0,5 + 16 + 1,44 = 17,54$
2	$A_2 = 20,2$	0	$a + \frac{h_2}{2} = 0,5 + \frac{16}{2} = 8,5$
3	$A_3 = 5 \cdot 10 = 50$	0	$\frac{a}{2} = \frac{0,5}{2} = 0,25$

4. Вычисляем координаты центра тяжести фигуры по формулам:

$$y_c = \frac{A_1 y_1 + A_2 y_2 + A_3 y_3}{A_1 + A_2 + A_3} = \frac{10,9 \cdot 17,54 + 20,2 \cdot 8,52 + 5 \cdot 0,25}{10,9 + 20,2 + 5} = 10 \text{ см}$$

Ответ: $C(0; 10)$

РАЗДЕЛ II. СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ ПРАКТИЧЕСКИЕ РАБОТЫ № 11, 12

Растяжение и сжатие

Цель занятия: научить строить эпюры продольных сил и нормальных напряжений. Объяснить порядок расчетов на прочность и жесткость и научить студентов проводить проектировочные и проверочные расчеты на прочность и жесткость при растяжении и сжатии.

Необходимые формулы

Нормальное напряжение

$$\sigma = \frac{N}{A},$$

где N – продольная сила;

A – площадь поперечного сечения.

Удлинение (укорочение) бруса

$$\Delta l = \frac{Nl}{AE}$$

или

$$\Delta l = \frac{\sigma l}{E},$$

E – модуль упругости;

l - начальная длина стержня.

Допускаемое напряжение

$$[\sigma] = \frac{\sigma_{\text{пред}}}{[s]},$$

$[s]$ - допускаемый запас прочности.

Условие прочности при растяжении и сжатии:

$$\sigma = \frac{N}{A} \leq [\sigma].$$

Примеры решения задач

Пример 1. Ступенчатый брус нагружен вдоль оси двумя силами. Брус зашпелен с левой стороны (рис. 15). Пренебрегая весом бруса, построить эпюру продольных сил и нормальных напряжений.

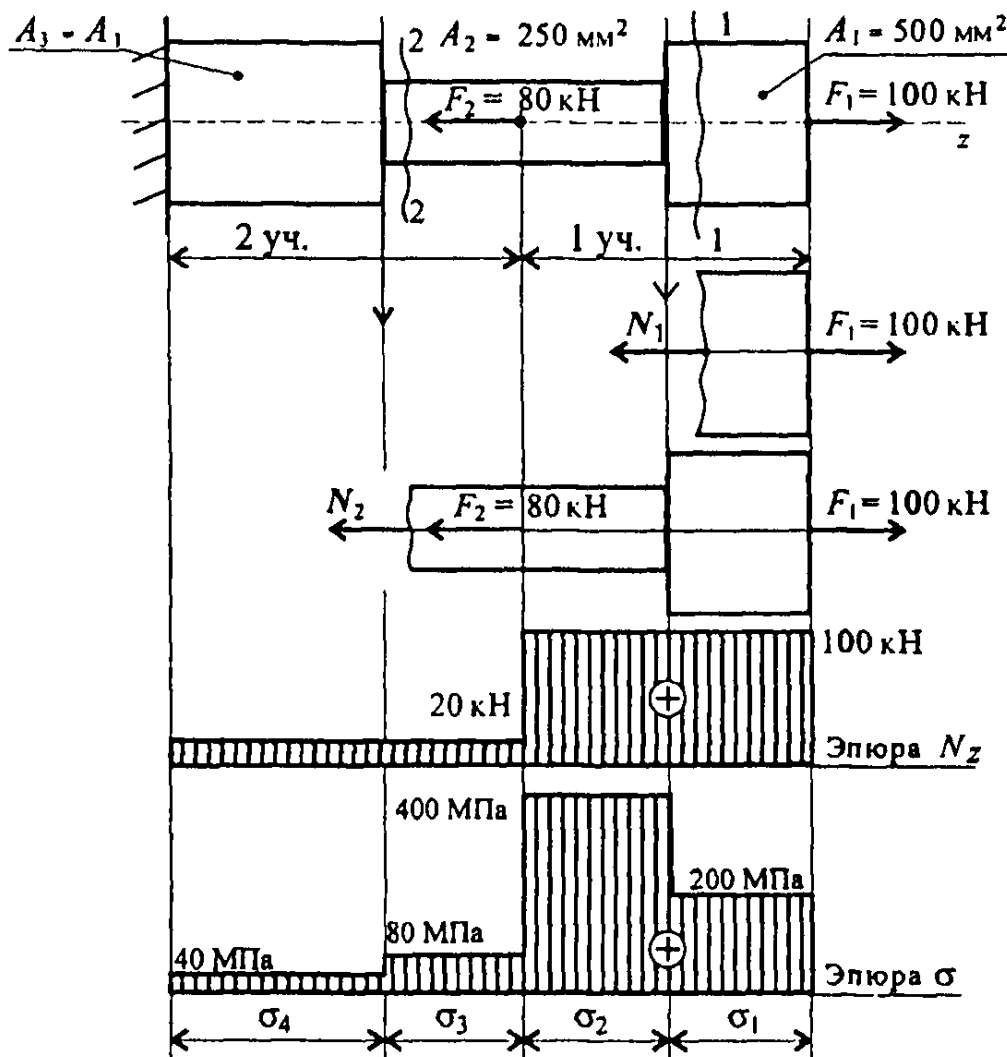


Рисунок 15

Решение

1. Определяем участки нагружения, их два.
2. Определяем продольную силу в сечениях 1 и 2.
3. Строим эпюру.
4. Рассчитываем величины нормальных напряжений и строим эпюру нормальных напряжений в собственном произвольном масштабе.

1. Определяем продольные силы.

$$\sum F_z = 0.$$

Сечение 1. $-N_1 + F_1 = 0$; $N_1 = F_1 = 100 \text{ кН}$.

Сечение 2. $-80 - N_2 + 100 = 0$; $N_2 = 100 - 80 = 20 \text{ кН}$.

В обоих сечениях продольные силы положительны.

$$\sigma = \frac{N_z}{A}.$$

2. Определяем нормальные напряжения

Сопоставляя участки нагружения с границами изменения площади, видим, что образуется 4 участка напряжений.

Нормальные напряжения в сечениях по участкам:

$$\sigma_1 = \frac{N_1}{A_1} = \frac{100 \cdot 10^3}{500} = 200 \text{ Н/мм}^2; \quad \sigma_2 = \frac{N_1}{A_2} = \frac{100 \cdot 10^3}{250} = 400 \text{ Н/мм}^2;$$

$$\sigma_3 = \frac{N_2}{A_2} = \frac{20 \cdot 10^3}{250} = 80 \text{ Н/мм}^2; \quad \sigma_4 = \frac{N_2}{A_3} = \frac{20 \cdot 10^3}{500} = 40 \text{ Н/мм}^2.$$

Откладываем значения напряжений вверх от оси, т.к. значения их положительные (растяжение). Масштаб эпюр продольной силы и нормальных напряжений выбирается отдельно в зависимости от порядка цифр и имеющегося на листе места.

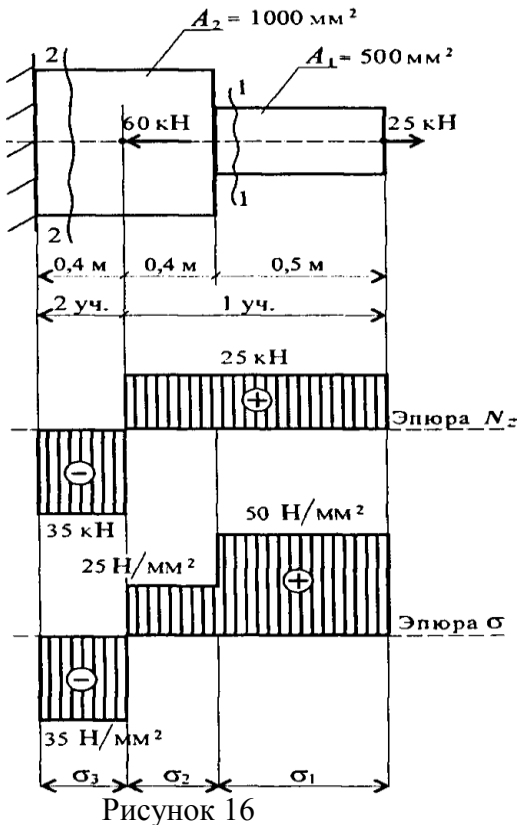


Рисунок 16

Определение удлинения бруса

Пример 2. Дана схема нагружения и размеры бруса до деформации (рис.16). Брус защемлен, определить перемещение свободного конца.

Решение

1. Брус ступенчатый, поэтому следует построить эпюры продольных сил и нормальных напряжений.

Делим брус на участки нагружения, определяем продольные силы, строим эпюру продольных сил.

2. Определяем величины нормальных напряжений по сечениям с учетом изменений площади поперечного сечения.

Строим эпюру нормальных напряжений.

3. На каждом участке определяем абсолютное удлинение. Результаты алгебраически суммируем.

Примечание. Балка закреплена, в заделке возникает неизвестная реакция в опоре, поэтому расчет начинаем со свободного конца (справа).

1. Два участка нагружения:

участок 1: $N_1 = +25\text{кН}$; растянут;

участок 2: $25 - 60 + N_2 = 0$; $N_2 = -35\text{кН}$; сжат.

2. Три участка по напряжениям:

$$\sigma_1 = \frac{N_1}{A_1}; \quad \sigma_1 = \frac{25 \cdot 10^3}{500} = 50 \text{ Н/мм}^2;$$

$$\sigma_2 = \frac{N_1}{A_2}; \quad \sigma_2 = \frac{25 \cdot 10^3}{1000} = 25 \text{ Н/мм}^2;$$

$$\sigma_3 = \frac{N_2}{A_2}; \quad \sigma_3 = \frac{-35 \cdot 10^3}{1000} = -35 \text{ Н/мм}^2.$$

3. Удлинения участков (материал – сталь $E = 2 \cdot 10^5 \text{ МПа}$):

$$\Delta l_1 = \frac{\sigma_1 l_1}{E}; \quad \Delta l_1 = \frac{50 \cdot 0,5 \cdot 10^3}{2 \cdot 10^5} = 0,125 \text{ мм};$$

$$\Delta l_2 = \frac{\sigma_2 l_2}{E}; \quad \Delta l_2 = \frac{25 \cdot 0,4 \cdot 10^3}{2 \cdot 10^5} = 0,05 \text{ мм};$$

$$\Delta l_3 = \frac{\sigma_3 l_3}{E}; \quad \Delta l_3 = \frac{-35 \cdot 0,4 \cdot 10^3}{2 \cdot 10^5} = -0,07 \text{ мм}.$$

4. Суммарное удлинение бруса (перемещение свободного конца).

$$\Delta l = \Delta l_1 + \Delta l_2 + \Delta l_3; \quad \Delta l = 0,125 + 0,05 - 0,07 = 0,105 \text{ мм}.$$

Расчет на прочность и жесткость

Пример 3. Груз закреплен на стержнях и находится в равновесии (рис.17). Материал стержней – сталь, допустимое напряжение 160 МПа. Вес груза 100 кН. Длина стержней: первого – 2 м, второго – 1 м. Определить размеры поперечного сечения и удлинение стержней. Форма поперечного сечения – круг.

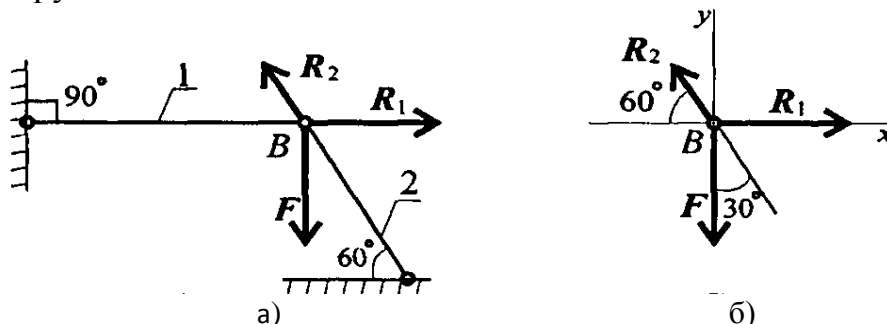


Рисунок 17

Решение

1. Определить нагрузку на стержни. Рассмотрим равновесие точки В, определим реакции стержней. По пятой аксиоме статики (закону действия и противодействия) реакция стержня численно равна нагрузке на стержень.

Наносим реакции связей, действующих в точке В. Освобождаем точку В от связей.

Выбираем систему координат так, чтобы одна из осей координат совпала с неизвестной силой

Составим систему уравнений равновесия для точки В:

$$\begin{aligned}\sum F_x &= -R_2 \cos 60^\circ + R_1 = 0; \\ \sum F_y &= R_2 \cos 30^\circ - F = 0.\end{aligned}$$

Решаем систему уравнений и определяем реакции стержней.

$$R_2 = \frac{F}{\cos 30^\circ}; \quad R_2 = \frac{100}{0,866} = 115,5 \text{ кН.}$$

$$R_1 = R_2 \cos 60^\circ; \quad R_1 = 115,5 \cdot 0,5 = 57,4 \text{ кН.}$$

Направления реакций выбраны верно. Оба стержня сжаты. Нагрузки на стержни: $F_1 = 57,4 \text{ кН}$; $F_2 = 115,5 \text{ кН}$.

2. Определяем требуемую площадь поперечного сечения стержней из условий прочности.

Условие прочности на сжатие: $\sigma = N/A \leq [\sigma]$, откуда

$$A \geq \frac{N}{[\sigma]}.$$

Стержень 1 ($N_1 = F_1$):

$$A_1 \geq \frac{57,4 \cdot 10^3}{160} = 358,75 \text{ мм}^2.$$

Для круга

$$A = \pi R^2; \quad R = \sqrt{\frac{A}{\pi}}; \quad R_1 \geq \sqrt{\frac{358,75}{3,14}} = 10,68 \text{ мм}; \quad d_1 = 21,3 \text{ мм.}$$

Стержень 2 ($N_2 = F_2$):

$$A_2 \geq \frac{115,5 \cdot 10^3}{160} = 722 \text{ мм}^2; \quad R_2 \geq \sqrt{\frac{722}{3,14}} = 15,2 \text{ мм};$$

$$d_2 = 30,4 \text{ мм.}$$

Полученные диаметры округляем: $d_1 = 25 \text{ мм}$, $d_2 = 32 \text{ мм}$.

3. Определяем удлинение стержней

$$\Delta l = \frac{Nl}{AE}.$$

Укорочение стержня 1:

$$A_1 = \frac{\pi d_1^2}{4}; \quad A_2 = \frac{3,14 \cdot 25^2}{4} = 490 \text{ мм}^2;$$

$$\Delta l_1 = \frac{57,4 \cdot 10^3 \cdot 2 \cdot 10^3}{2 \cdot 10^5 \cdot 490} = 1,17 \text{ мм.}$$

Укорочение стержня 2:

$$A_2 = \frac{3,14 \cdot 32^2}{4} = 804 \text{ мм}^2; \quad \Delta l_2 = \frac{115,5 \cdot 10^3 \cdot 1 \cdot 10^3}{2 \cdot 10^5 \cdot 804} = 0,72 \text{ мм.}$$

ПРАКТИЧЕСКИЕ РАБОТЫ № 13, 14

Геометрические характеристики плоских сечений

Цель занятия: Научить определять полярные и главные центральные моменты инерции для сечений, имеющих ось симметрии.

Моменты инерции простейших сечений

Прямоугольник и квадрат (рис. 18).

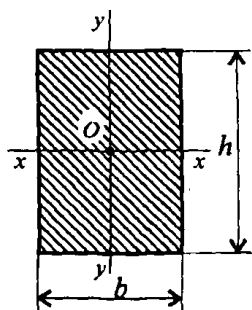


Рисунок 18

Осевые:

$$J_x - \text{относительно оси } xx \quad J_x = \frac{bh^3}{12};$$

$$J_y - \text{относительно оси } yy \quad J_y = \frac{hb^3}{12}.$$

$$\text{Полярный} \quad J_p = J_x + J_y.$$

Кольцо и круг (рис.19).

$$\text{Осевые: } J_x = J_y = \frac{\pi d^4}{64} \text{ — круг;}$$

$$J_x = J_y = \frac{\pi d^4}{64} (1 - c^4) \text{ — кольцо.}$$

$$\text{Полярный: } J_p = \frac{\pi d^4}{32} \text{ — круг;}$$

$$J_p = \frac{\pi d^4}{32} (1 - c^4) \text{ — кольцо,}$$

где d – диаметр круга и наружный диаметр кольца;

$d_{вн}$ – внутренний диаметр кольца;

$c = d_{вн}/d$.

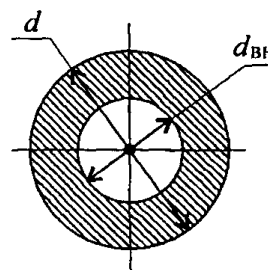
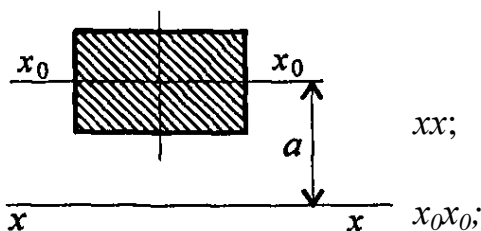


Рисунок 19

Моменты инерции относительно параллельных осей (рис. 20)



сечения;

Рисунок 20

$$J_x = J_{x_0} + a^2 A,$$

где J_x – момент инерции относительно оси

J_{x_0} – момент инерции относительно оси

A – площадь

a – расстояние между осями.

Рекомендации для определения моментов инерции сложных фигур

1. Момент инерции сложной фигуры является суммой моментов инерции частей, на которые ее разбивают. Разбить заданную фигуру на

простейшие части, для каждой определить главные центральные моменты инерции по известным формулам.

2. Моменты инерции вырезов и отверстий можно представить отрицательными величинами.

3. Заданные сечения симметричны, главные центральные оси совпадают с осями симметрии составного сечения.

4. Моменты инерции частей, чьи главные центральные оси не совпадают с главными центральными осями сечения в целом, пересчитывают с помощью формулы для моментов инерции относительно параллельных осей. Расстояние между параллельными осями определить по чертежу.

5. При определении моментов инерции сечения, составленного из стандартных профилей, главные центральные моменты инерции отдельных стандартных профилей определить по таблицам ГОСТ.

6. Для использованных в составных сечениях полос момент инерции определить по известной формуле для прямоугольника.

ПРАКТИЧЕСКИЕ РАБОТЫ № 15, 16

Кручение.

Расчеты на прочность и жесткость при кручении

Цель занятия: Научить студентов выполнять проектировочные и проверочные расчеты круглого бруса для статически определимых систем, проводить проверку на жесткость.

Основные положения расчетов при кручении

Распределение касательных напряжений по сечению при кручении

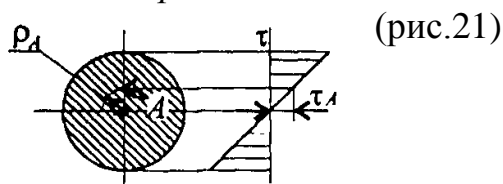


Рисунок 21

Касательное напряжение в точке А:

$$\tau_A = \frac{M_k \rho_A}{J_p},$$

где ρ_A – расстояние от точки А до центра сечения.

Условие прочности при кручении

$$\tau_k = \frac{M_k}{W_p} \leq [\tau_k]; \quad W_p = \frac{\pi d^3}{16} \approx 0,2 d^3 \quad (\text{круг}),$$

$$W_p = \frac{\pi d^3}{16} (1 - c^4) \quad (\text{кольцо}),$$

M_k – крутящий момент в сечении, Н·м, Н·мм;

W_p – момент сопротивления при кручении, м³, мм³;

$[\tau_k]$ – допускаемое напряжение при кручении, Н/м², Н/мм².

Проектировочный расчет, определение размеров поперечного сечения

Сечение – круг:
$$d \geq \sqrt[3]{\frac{M_k}{0,2[\tau_k]}}$$

Сечение – кольцо:
$$d \geq \sqrt[3]{\frac{M_k}{0,2(1-c^4)[\tau_k]}}$$

где d – наружный диаметр круглого сечения;

$d_{\text{вн}}$ – внутренний диаметр кольцевого сечения; $c = d_{\text{вн}}/d$.

Определение рационального расположения колес на валу

Рациональное расположение колес – расположение, при котором максимальное значение крутящего момента на валу – наименьшее из возможных.

Для экономии металла сечение бруса рекомендуется выполнить кольцевым.

Условие жесткости при кручении

$$\varphi_0 = \frac{M_k}{GJ_p} \leq [\varphi_0]; \quad G \approx 0,4E,$$

G – модуль упругости при сдвиге, Н/м², Н/мм²;

E – модуль упругости при растяжении, Н/м², Н/мм²;

$[\varphi_0] \cong 0,5 \div 1$ град/м;

J_p – полярный момент инерции в сечении, м⁴, мм⁴.

Проектировочный расчет, определение наружного диаметра сечения

$$J_p \geq \frac{M_k}{G[\varphi_0]}; \quad J_p = \frac{\pi d^4}{32} \approx 0,1d^4 \quad (\text{круг}); \quad d \geq \sqrt[4]{\frac{32J_p}{\pi}}$$

$$J_p = \frac{\pi d^4}{32}(1-c^4) \quad (\text{кольцо}); \quad d \geq \sqrt[4]{\frac{32J_p}{\pi(1-c^4)}}$$

Пример. Из расчетов на прочность и жесткость определить потребный диаметр вала передачи мощности 63 кВт при скорости 30 рад/с. Материал вала – сталь, допускаемое напряжение при кручении 30 МПа; допускаемый относительный угол закручивания $[\varphi_0] = 0,02$ рад/м; модуль упругости при сдвиге $G = 0,8 \cdot 10^5$ МПа.

Решение

1. Определение размеров поперечного сечения из расчета на прочность. Условие прочности при кручении:

$$\tau_k^{\text{max}} = \frac{M_k}{W_p} \leq [\tau_k].$$

Определяем вращающий момент из формулы мощности при вращении:

$$M_{\text{вр}} = \frac{P}{\omega} \left[\frac{\text{Вт}}{\text{рад/с}} \right]; \quad M_{\text{вр}} = \frac{63 \cdot 10^3}{30} = 2,1 \cdot 10^3 \text{ Н} \cdot \text{м}; \quad M_{\text{вр}} = M_k.$$

Из условия прочности определяем момент сопротивления вала при кручении

$$W_p \geq M_k / [\tau_k].$$

Значения подставляем в ньютонах и мм.

$$W_p \geq \frac{2,1 \cdot 10^3 \cdot 10^3}{30} = 7 \cdot 10^4 \text{ мм}^3.$$

Определяем диаметр вала

$$W_p = \frac{\pi d^3}{16}; \quad d \geq \sqrt[3]{\frac{16 W_p}{\pi}}; \quad d \geq \sqrt[3]{\frac{16 \cdot 7 \cdot 10^4}{3,14}} = 71 \text{ мм}.$$

2. Определение размеров поперечного сечения из расчета на жесткость.

Условие жесткости при кручении:

$$\varphi_0 = \frac{M_k}{G J_p} \leq [\varphi_0].$$

Из условия жесткости определяем момент инерции сечения при кручении:

$$J_p \geq \frac{M_k}{G [\varphi_0]}; \quad J_p \geq \frac{2,1 \cdot 10^6}{0,8 \cdot 10^5 \cdot 0,02 \cdot 10^{-3}}; \quad J_p \geq 1312,5 \cdot 10^3 \text{ мм}^4.$$

Определяем диаметр вала:

$$J_p = \frac{\pi d^4}{32}; \quad d \geq \sqrt[4]{\frac{32 J_p}{\pi}}; \quad d \geq \sqrt[4]{\frac{32 \cdot 1312,5 \cdot 10^3}{3,14}} = 60,2 \text{ мм}.$$

3. Выбор потребного диаметра вала из расчетов на прочность и жесткость.

Для обеспечения прочности и жесткости одновременно из двух найденных значений выбираем большее.

Полученное значение следует округлить, используя ряд предпочтительных чисел. Практически округляем полученное значение так, чтобы число заканчивалось на 5 или 0. Принимаем значение $d_{\text{вала}} = 75 \text{ мм}$.

ПРАКТИЧЕСКИЕ РАБОТЫ № 17, 18

Изгиб

Цель занятия: Научить студентов строить эпюры поперечных сил и изгибающих моментов.

Правила построения эпюр

1. Для участка, где отсутствует распределенная нагрузка, поперечная сила постоянна, а изгибающий момент меняется по линейному закону.

2. В частном случае, когда поперечная сила на участке равна нулю, изгибающий момент постоянен (чистый изгиб), график – прямая линия, параллельная продольной оси.

3. В том месте, где к балке приложена внешняя сосредоточенная сила, на эпюре Q возникает скачок на величину приложенной силы, а на эпюре моментов – излом.

4. В сечении, где к балке приложена пара сил (сосредоточенный момент), на эпюре M_u возникает скачок на величину момента этой пары. Поперечная сила при этом не изменяется.

5. В сечении на конце балки поперечная сила равна приложенной в этом сечении сосредоточенной силе или реакции в заделке.

6. На свободном конце балки или шарнирно опертом конце момент равен нулю, за исключением случаев, когда в этом сечении приложена пара сил (внешний момент).

7. Для участка балки с равномерно распределенной нагрузкой поперечная сила Q изменяется по линейному закону, эпюра ограничена наклонной прямой. Изгибающий момент изменяется по квадратичному закону, эпюра M_u ограничена параболой второго порядка.

8. В сечении, где эпюра Q переходит через ноль (наклонная линия пересекает ось абсцисс), изгибающий момент экстремален: касательная к эпюре M_u в этом месте параллельна оси абсцисс.

9. Параболическая и прямолинейная части эпюры моментов там, где кончается или начинается распределенная нагрузка, соприкасаются плавно, без излома, если в соответствующем сечении к балке не приложена сосредоточенная сила.

10. Если распределенная нагрузка направлена вниз, то эпюра момента очерчена параболой, обращенной выпуклостью вверх.

11. Из теоремы Журавского следует:

- если на участке $Q > 0$, M_u растет;
- если на участке $Q < 0$, M_u убывает;
- если на участке $Q = 0$, изгибающий момент постоянен (чистый изгиб);
- если в точке $Q = 0$, изгибающий момент достигает экстремального значения (M_u^{min} или M_u^{max}).

Знаки изгибающих моментов и поперечных сил (рис.22)

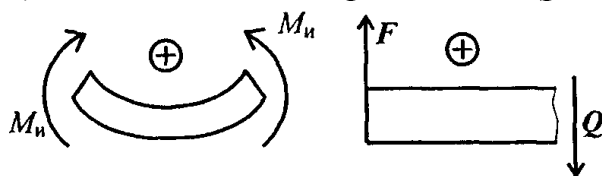


Рисунок 22

Примеры решения задач

Пример 1. Одноопорная балка нагружена сосредоточенными силами и распределенной нагрузкой (рис. 23). Построить эпюры поперечных сил и изгибающих моментов.

Решение

Задачу решаем с помощью составления уравнений поперечных сил и изгибающих моментов в поперечных сечениях балки.

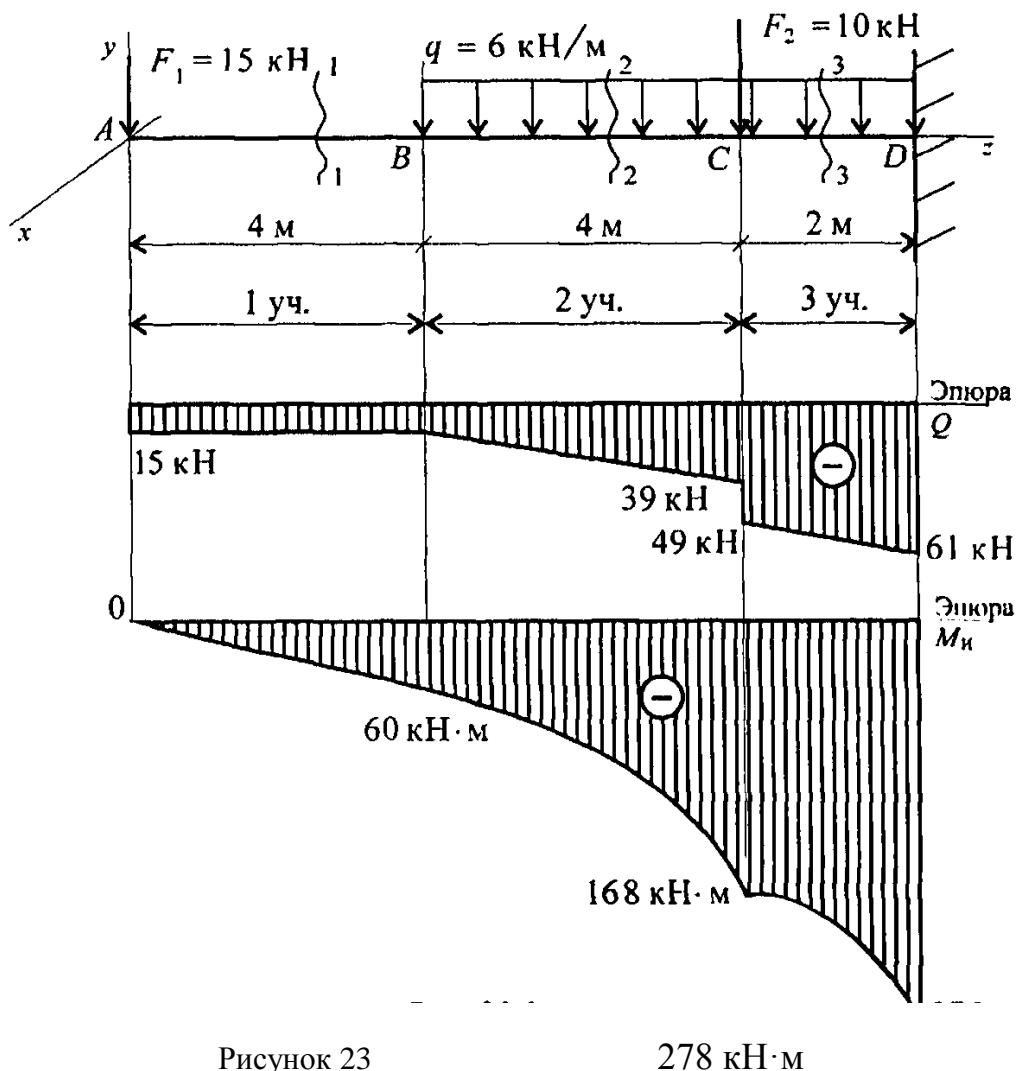
При проверке эпюр используем дифференциальные зависимости между интенсивностью распределенной нагрузки, поперечной силой и изгибающим моментом:

1. Производная от поперечной силы по длине балки равна интенсивности распределенной нагрузки

$$\frac{dQ}{dz} = q.$$

2. Производная изгибающего момента по длине балки равна поперечной силе

$$\frac{dM_x}{dz} = Q.$$



Рассмотрим участок 1, сечение 1.

Поперечная сила $Q_1 = -F_1 = -15$ кН.

По принятому правилу знаков поперечная сила отрицательна и постоянна на этом участке.

Изгибающий момент $M_{x1} = -F_1 z_1$.

$$0 \leq z_1 \leq 4 \text{ м: } M_A = 0; M_B = -15 \cdot 4 = -60 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Рассмотрим участок 2, сечение 2.

Поперечная сила $Q_2 = -F_1 - q(z_2 - 4)$.

$$4 \text{ м} \leq z_2 \leq 8 \text{ м: } Q_B = -F_1 = -15 \text{ кН}; Q_C^{\text{слева}} = -39 \text{ кН}.$$

Поперечная сила изменяется по линейному закону.

$$\text{Изгибающий момент} \quad M_{x2} = -F_1 z_2 - \frac{q(z_2 - 4)^2}{2}.$$

$$4 \text{ м} \leq z_2 \leq 8 \text{ м:}$$

при $z_2 = 4 \text{ м}$ изгибающий момент $M_B = -60 \text{ кНм}$. В точке B нет внешнего момента, поэтому изгибающий момент слева и справа от точки B одинаков. В этом случае рассчитывать дважды его не следует;

$$\text{при } z_2 = 8 \text{ м} \quad M_C = -15 \times 8 - \frac{6 \times 4^2}{2} = -168 \text{ кНм}.$$

Рассмотрим участок 3, сечение 3.

В точке C приложена внешняя сила F_2 . На эпюре должен быть скачок, равный приложенной силе; на эпюре моментов должен быть излом.

Поперечная сила на участке 3: $Q_3 = -F_1 - q(z_3 - 4) - F_2$;

$$\text{при } z_3 = 8 \text{ м} \quad Q_C^{\text{справа}} = -15 - 6 \times 4 - 10 = -49 \text{ кН};$$

$$\text{точка } C: Q_C^{\text{слева}} = 39 \text{ кН}; \quad Q_C^{\text{справа}} = 49 \text{ кН};$$

$$\text{при } z_3 = 10 \text{ м} \quad Q_D = -15 - 6 \times 6 - 10 = -61 \text{ кН}.$$

Поперечная сила изменяется по линейному закону.

Изгибающий момент $M_{x3} = -F_1 z_3 - q(z_3 - 4)^2 / 2 - F_2(z_3 - 8)$.

$$8 \text{ м} \leq z_3 \leq 10 \text{ м:}$$

$$\text{при } z_3 = 10 \text{ м} \quad M_D = -15 \times 10 - 6(10 - 4)^2 / 2 - 10(10 - 8) = -278 \text{ кНм}.$$

На участках 2 и 3 эпюра изгибающих моментов ограничена квадратичной параболой.

По полученным результатам, учитывая дифференциальные зависимости между поперечной силой и изгибающим моментом, строим эпюры Q и M . На втором и третьем участках поперечная сила не имеет нулевых значений, поэтому на эпюре моментов нет экстримумов.

ПРАКТИЧЕСКИЕ РАБОТЫ № 19, 20

Изгиб.

Расчеты на прочность при изгибе

Цель занятия: Научить студентов выполнять проектировочные и проверочные расчеты на прочность, выбирать рациональные формы поперечных сечений.

Основные положения и расчетные формулы при изгибе

Расчет на прочность при изгибе

Расчитать на прочность — это значит определить напряжение и сравнить его с допустимым.

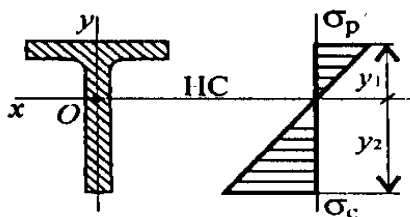
Условие прочности при изгибе:

$$\sigma_{\text{и}}^{\text{max}} = \frac{M_x}{W_x} \leq [\sigma_{\text{и}}],$$

где $[\sigma_{\text{и}}]$ — допускаемое напряжение.

По этому неравенству проводят *проверочные расчеты* после окончания конструирования балки.

Для балок из хрупких материалов расчеты ведут по растянутой и сжатой зоне одновременно (рис. 24).



$$\sigma_{\text{p}}^{\text{max}} = \frac{M_x y_1}{J_x} \leq [\sigma_{\text{p}}];$$

$$\sigma_{\text{c}}^{\text{max}} = \frac{M_x y_2}{J_x} \leq [\sigma_{\text{c}}].$$

При *проектировочном расчете* определяют необходимые размеры поперечных сечений балки или подбирают материал.

Рисунок 24

Схема нагружения и действующие нагрузки известны.

По условию прочности можно определить *нагрузочную способность балки* $[M_{\text{и}}] = W_p [\sigma]$.

Пример. Подобрать размеры сечения балки в виде двутавра. Известна схема нагружения балки (рис. 25), материал — сталь, допускаемое напряжение материала при изгибе $[\sigma_{\text{p}}] = [\sigma_{\text{c}}] = 160$ МПа.

Решение. 1. Для защемленной балки реакции в опоре определять не следует.

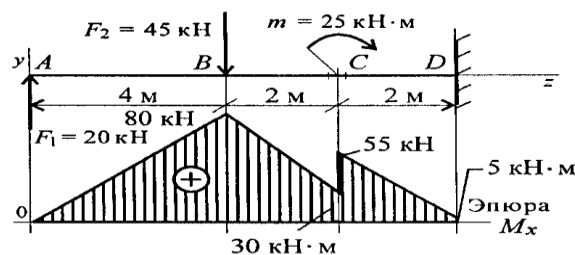


Рисунок 25

$$M_A = 0; M_B = F_1 \cdot 4; M_D = 20 \cdot 4 = 80 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Проводим расчеты по характерным точкам. Размеры сечения подбираем из расчета по нормальным напряжениям. Эпюру поперечных сил строить необязательно.

Определяем моменты в характерных точках.

В точке С приложен внешний момент пары, поэтому расчет проводим для левого сечения (без момента) и для правого – с моментом m .

$M_C^{\text{лев}} = F_1 \cdot 6 - F_2 \cdot 2$; $M_C^{\text{лев}} = 20 \cdot 6 - 45 \cdot 2 = 30 \text{ кН}\cdot\text{м}$. Момент положительный.

$$M_C^{\text{прав}} = M_C^{\text{лев}} + m; M_C^{\text{прав}} = 30 + 25 = 55 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

Момент в заделке $M_D = F_1 \cdot 8 - F_2 \cdot 4 + m$;

$$M_D = 20 \cdot 8 - 45 \cdot 4 + 25 = 5 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

Выбираем соответствующий масштаб по максимальному значению изгибающего момента.

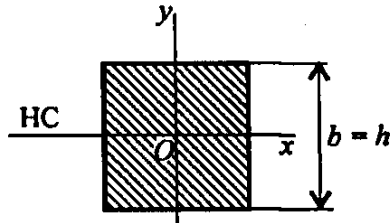
Опасное сечение — сечение балки, где действует максимальный момент. Подбираем размеры балки в опасном сечении по условию прочности

$$\sigma_{\text{и}}^{\text{max}} = \frac{M_{\text{и}}}{W_x} \leq [\sigma_{\text{и}}]; \quad W_x \geq \frac{M_{\text{В}}}{[\sigma_{\text{и}}]}$$

$$W_x = \frac{80 \cdot 10^3 \cdot 10^3}{160} = 500 \cdot 10^3 \text{ мм}^3; \quad W_x = 500 \text{ см}^3.$$

Основываясь на значении $W_x = 500 \text{ см}^3$ по таблице ГОСТ 8239–89 выбираем двутавр № 30а: момент сопротивления $W_x = 518 \text{ см}^3$; площадь сечения $A = 49,9 \text{ см}^2$.

Для сравнения рассчитаем размеры балки квадратного сечения (рис.26) при том же моменте сопротивления сечения



$$W_x = \frac{bh^2}{6}; \quad b = h; \quad W_x = \frac{b^3}{6}.$$

$$W_x = 500 \text{ см}^3 = \frac{b^3}{6}; \quad b \geq \sqrt[3]{6W_x}.$$

Рисунок 26

Сторона квадрата $b \geq \sqrt[3]{6 \cdot 500} \approx 14,5 \text{ см}$. Площадь сечения балки $A = b^2 = 14,5^2 = 210,2 \text{ см}^2$.

$$\frac{A_{\text{квадрата}}}{A_{\text{двутавра}}} = \frac{210,2}{49,9} = 4,2.$$

Балка квадратного сечения в 4 раза тяжелее.

РАЗДЕЛ III. СТАТИКА СООРУЖЕНИЙ ПРАКТИЧЕСКИЕ РАБОТЫ № 21, 22, 23

Основные сведения о многопролетных статически определимых (шарнирных) балках

Цель занятия: Научить студентов строить эпюры внутренних усилий в шарнирных балках.

Статически определимая многопролетная балка всегда содержит промежуточные шарниры, поэтому для ее решения сначала нужно построить **поэтажную схему**.

Поэтажная схема - это схема, которая дает понять, как передается нагрузка от одной к другой части многопролетной балки. Также, поэтажная схема многопролетной балки позволяет наметить наиболее рациональный путь ее расчета.

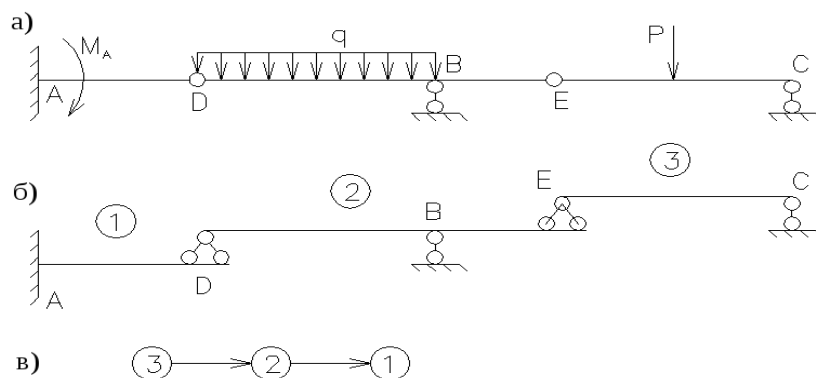


Рисунок 27 - Статически определимая многопролетная балка и ее поэтажная схема
Согласно схеме (рис. 27) расчет нужно начинать с самой верхней балки

3.

Далее нужно рассчитать балку 2, а затем балку 1.

Пример. Построить эпюры внутренних усилий для многопролетной балки (рис. 28).

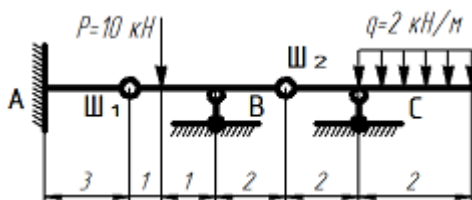


Рисунок 28

Строим поэтажную схему для многопролетной балки (рис. 29).

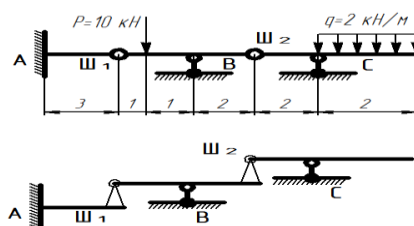
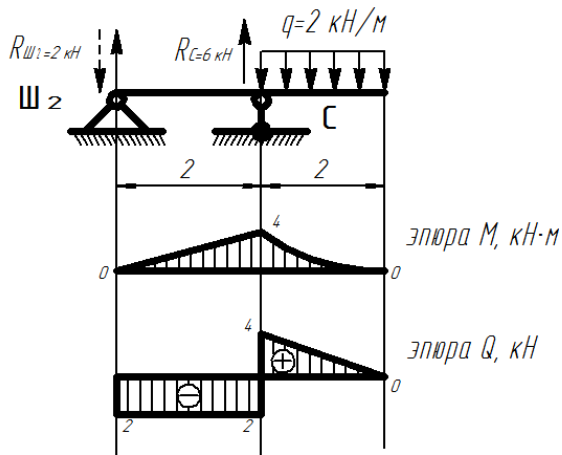


Рисунок 29 – многопролетная балка

Рассчитываем балку Ш₂С:
 Определяем реакции в опорах:



$$\begin{aligned} \sum M_{Ш_2} &= 0 \\ q \cdot 2 \cdot \left(\frac{2}{2} + 2\right) - R_C \cdot 2 &= 0 \\ R_C &= \frac{2 \cdot 2 \cdot 3}{2} = 6 \text{ кН} \\ \sum M_C &= 0 \\ R_{Ш_2} \cdot 2 + q \cdot 2 \cdot \frac{2}{2} &= 0 \\ R_{Ш_2} &= -\frac{2 \cdot 2 \cdot 1}{2} = -2 \text{ кН} \end{aligned}$$

Рисунок 30 - Балка Ш₂С
 Проверка:

$$\begin{aligned} \sum Y &= 0 \\ -R_{Ш_2} + R_C - q \cdot 2 &= 0 \\ -2 + 6 - 2 \cdot 2 &= 0 \end{aligned}$$

Построение эпюр выполняется как для **простой однопролетной балки**.
 Рассчитываем балку Ш₁Ш₂ (рис. 31):

Определяем реакции в опорах:

$$\begin{aligned} \sum M_{Ш_1} &= 0 \\ P \cdot 1 - R_B \cdot 2 - R_{Ш_2} \cdot 4 &= 0 \\ R_B &= \frac{10 \cdot 1 - 2 \cdot 4}{2} = 1 \text{ кН} \\ \sum M_B &= 0 \\ R_{Ш_1} \cdot 2 - P \cdot 1 - R_{Ш_2} \cdot 2 &= 0 \\ R_{Ш_1} &= \frac{10 \cdot 1 + 2 \cdot 2}{2} = 7 \text{ кН} \end{aligned}$$

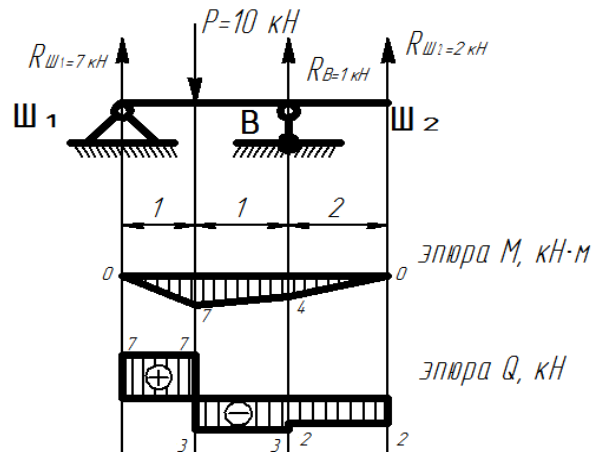


Рисунок 31 - Балка Ш₁Ш₂

Проверка:

$$\sum Y = 0$$

$$R_{Ш_1} - P + R_B + R_{Ш_2} = 0$$

$$7 - 10 + 1 + 2 = 0$$

Рассчитываем балку АШ₁ (рис.32):

Определяем реакции в опорах:

$$\sum M_A = 0$$

$$-M_A + R_{Ш_1} \cdot 3 = 0$$

$$M_A = 7 \cdot 3 = 21 \text{ кН}\cdot\text{м}$$

$$\sum Y = 0$$

$$R_A - R_{Ш_1} = 0$$

$$R_A = 7 \text{ кН}$$

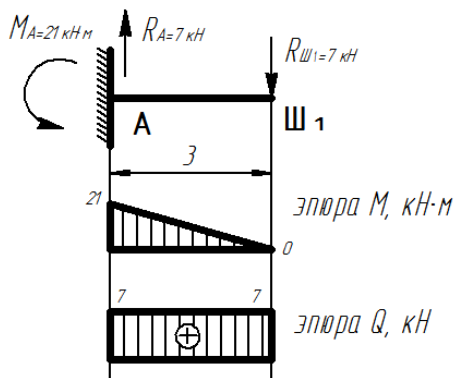


Рисунок 32 - Балка АШ₁

ПРАКТИЧЕСКИЕ РАБОТЫ № 24, 25

Статически определимые плоские рамы

Цель занятия: Научить студентов строить эпюры внутренних усилий в рамах.

Правила построения эпюр в рамах

В стержнях плоских рам возникают три внутренних усилия: продольная и поперечная силы и изгибающий момент.

Первым этапом расчета является определение усилий в опорных связях, т. е. реакций опор.

Внутренние усилия в рамах определяются методом сечений, и порядок их нахождения тот же, что и для балок. Из шести внутренних силовых факторов в сечениях плоской рамы в общем случае возникают три: продольная сила N ; поперечная сила Q ; изгибающий момент M . Напомним, что согласно методу сечений:

– **продольная сила** N равна сумме проекций всех сил, действующих с одной стороны от сечения, на ось стержня;

– **поперечная сила** Q равна сумме проекций всех сил, действующих с одной стороны от сечения, на ось, перпендикулярную оси стержня;

– **изгибающий момент** M равен сумме моментов всех сил, действующих с одной стороны от сечения, относительно оси, проходящей через центр тяжести рассматриваемого сечения.

Правила знаков для продольной и поперечной сил те же, что и в балке: растягивающая продольная сила положительна, поперечная сила положительна, если она обходит сечение по ходу часовой стрелки. **Правило знаков для изгибающего момента в рамах** следующее: момент считается положительным, если он изгибает стержень рамы выпуклостью вовнутрь (для некоторых рам невозможно определить, где внешняя часть рамы, а где внутренняя. В этом случае знак изгибающего момента не определяется и эпюра изгибающих моментов строится со стороны растянутых волокон без знака).

На эпюрах N и Q положительные значения принято откладывать снаружи, на эпюре M – внутри – со стороны растянутых волокон.

Пример. Построить эпюры внутренних усилий для рамы (рис.33, а).

Дано: $F=30\text{кН}$, $q=40\text{кН/м}$, $M=50\text{кНм}$, $a=1,8\text{м}$, $h=2\text{м}$.

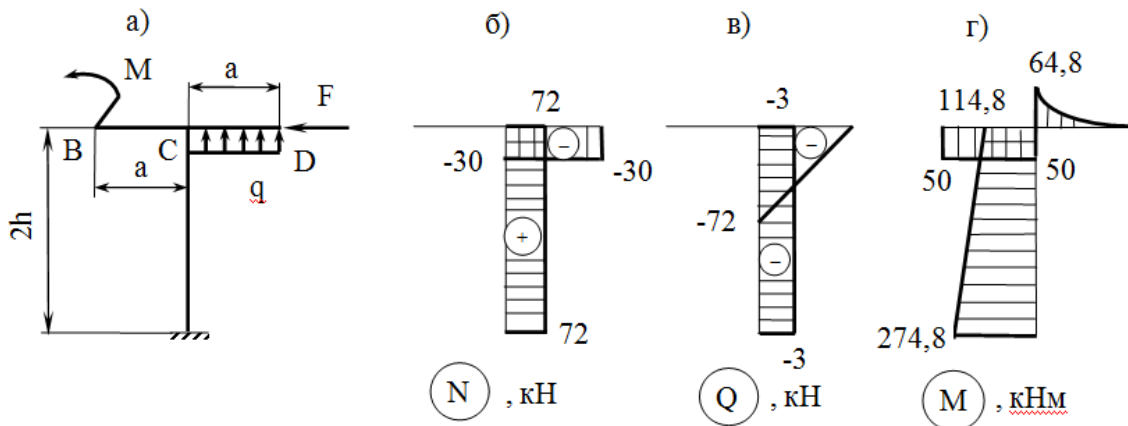


Рисунок 33 - эпюры нормальных (продольных) сил — (б), поперечных сил — (в) и изгибающих моментов — (г).

Решение.

Для рассматриваемой рамы опорные реакции **можно не определять**, поскольку будем рассматривать участки, идя от свободных концов рамы к заделке.

Вычислим значения внутренних усилий N , Q и M в характерных сечениях рамы. Правило знаков для поперечных сил Q и изгибающих моментов M такие же, как в балках. Эпюры моментов построим на сжатых волокнах. Для продольной N , силы правило знаков: **растягивающая сила – положительна, сжимающая – отрицательна.**

Участок ВС:

$N_B=0, Q_B=0, M_B=M=50\text{кНм}$ (сжаты нижние волокна).

$N_C=0, Q_C=0, M_C=M=50\text{кНм}$ (сжаты нижние волокна).

Участок DC:

$N_D=-F=-30\text{кН}, Q_D=0, M_D=0, N_C=-F=-30\text{кН}, Q_C=-qa=-40\cdot 1,8=-72\text{кН},$

$M_C=qa^2/2=40\cdot 1,8^2/2=64,8\text{кНм}$

(сжаты верхние волокна).

Участок

СК:

$N_C=qa=40\cdot 1,8=72\text{кН}, Q_C=-F=-30\text{кН}, M_C=qa^2/2+M=40\cdot 1,8^2/2+50=114,8\text{кНм}$

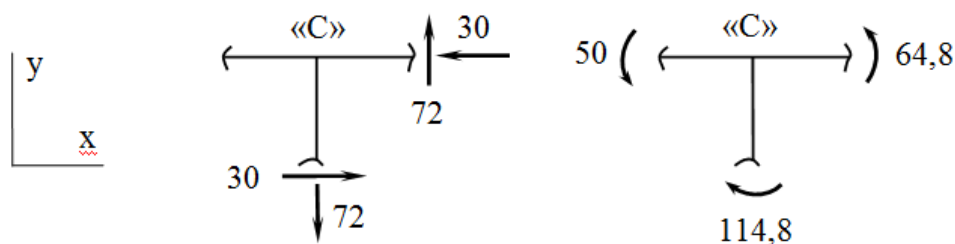
(сжаты левые волокна)

$N_C=qa=40\cdot 1,8=72\text{кН}, Q_C=-F=-30\text{кН}, M_C=qa^2/2+M=40\cdot 1,8^2/2+50=114,8\text{кНм}$

(сжаты левые волокна)

На рисунке 33 показаны эпюры продольных сил — (б), поперечных сил — (в) и изгибающих моментов — (г).

Проверка равновесия узла С:



$$\sum Y=0, 72-72=0,$$

$$\sum X=0, 30-30=0.$$

$$\sum M_{(C)}=0,$$

$$50+64,8-114,8=0.$$

ПРАКТИЧЕСКИЕ РАБОТЫ № 26, 27

Трехшарнирная арка

Цель занятия: Научить студентов строить эпюры поперечных сил, изгибающих моментов и продольных сил в арках.

Трехшарнирные арки (рис. 34) относятся к так называемым распорным системам, так как от действия вертикальных нагрузок в них возникают горизонтальные опорные реакции H_A и H_B , называемые распором.

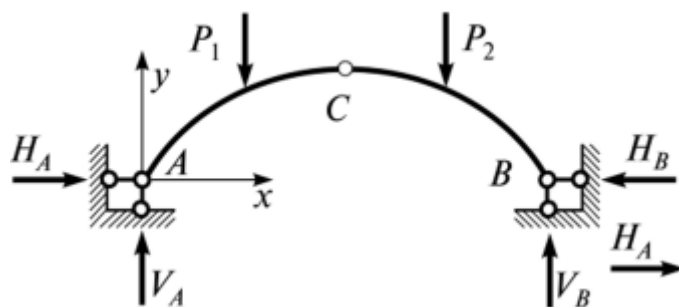


Рисунок 34

При отсутствии горизонтальных нагрузок из уравнения $X = H_A - H_B = 0$ следует, что $H_A = H_B = H$. Вертикальные опорные реакции V_A и V_B определяются из уравнения $\sum M_A = 0$ и $\sum M_B = 0$. Распор H определяется из условия равенства нулю суммы моментов сил, расположенных слева или справа относительно шарнира С:

$$\sum M_C^{\text{лев}} = 0 \quad \text{или} \quad \sum M_C^{\text{пр}} = 0.$$

Рассмотрим расчет трехшарнирных арок. Оси арок могут быть очерчены по дуге окружности, параболе, эллипсу и т.п.

Пример. Для заданной трехшарнирной арки с размерами, показанными на рис. 35, вычислить значения внутренних усилий в сечениях m и n . Построить эпюры внутренних усилий. Уравнение оси арки – квадратная парабола с началом координат в точке А:

$$y = \frac{4f}{l^2}(l-x)x,$$

где $l = 12$ м, $f = 4$ м.

1. Определяем опорные реакции:

$$\sum m_A = q \cdot 6 \cdot 3 + P \cdot 9 - R_B \cdot 12 = 0. \quad R_B = 6 \text{ кН.}$$

$$\sum m_B = q \cdot 6 \cdot 9 + P \cdot 3 - R_A \cdot 12 = 0. \quad R_A = 10 \text{ кН.}$$

$$H = M_C^{\text{бал}} / f = (R_B \cdot 6 - P \cdot 3) / 4 = 6 \text{ кН.}$$

2. Строим эпюры $Q_x^{\text{бал}}$ и $M_x^{\text{бал}}$.

3. По формуле вычисляем значения M_x , получив предварительно ординаты заданных сечений m и n :

$$M_x = M_x^{\text{бал}} - H \cdot y,$$

$$y_m = \frac{4 \cdot 4}{12^2} (12 - 3) \cdot 3 = 3 \text{ м} = y_n$$

$$M_m = M_m^{\text{бал}} - H y_m = 21 - 6 \cdot 3 = 3 \text{ кН} \cdot \text{м.}$$

$$M_n = M_n^{\text{бал}} - H y_n = 18 - 6 \cdot 3 = 0.$$

4. Вычисляем Q_m и Q_n , используя формулу

$$Q_x = Q_x^{\text{бал}} \cos \varphi_x - H \sin \varphi_x,$$

$$Q_m = Q_m^{\text{бал}} \cos \varphi_m - H \sin \varphi_m$$

Для вычисления тригонометрических функций воспользуемся следующими математическими соотношениями:

$$\sin \varphi = \frac{\operatorname{tg} \varphi}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi}};$$

$$\cos \varphi = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi}}$$

$$\operatorname{tg} \varphi = y' = \frac{4f}{l^2}(l - 2x),$$

тогда

$$\operatorname{tg} \varphi_m = \frac{4 \cdot 4}{12^2}(12 - 2 \cdot 3) = 0,667 \quad , \quad \operatorname{tg} \varphi_n = \frac{4 \cdot 4}{12^2}(12 - 2 \cdot 9) = -0,667 \quad ,$$

$$\sin \varphi_m = \frac{0,667}{\sqrt{1 + 0,667^2}} = \frac{0,667}{3,6} = 0,555 \quad , \quad \cos \varphi_m = \frac{1}{\sqrt{1 + 0,667^2}} = \frac{1}{3,6} = 0,832 \quad .$$

Аналогично:

$$\sin \varphi_n = -0,555, \quad \cos \varphi_n = 0,832.$$

Подсчитаем значения Q в заданных сечениях:

$$Q_m = Q_m^{\text{бал}} \cos \varphi_m - H \sin \varphi_m = 4 \cdot 0,832 - 6 \cdot 0,555 = 0.$$

В сечении n эпюра $Q^{\text{бал}}$ имеет разрыв, аналогично будет разрыв и в эпюре поперечных сил арки. Поэтому необходимо подсчитать поперечную силу слева и справа от сечения:

$$Q_n^{\text{л}} = (-2) \cdot 0,832 - 6 \cdot (-0,555) = 1,658 \text{ кН},$$

$$Q_n^{\text{пр}} = (-6) \cdot 0,832 - 6 \cdot (-0,555) = -1,686 \text{ кН}.$$

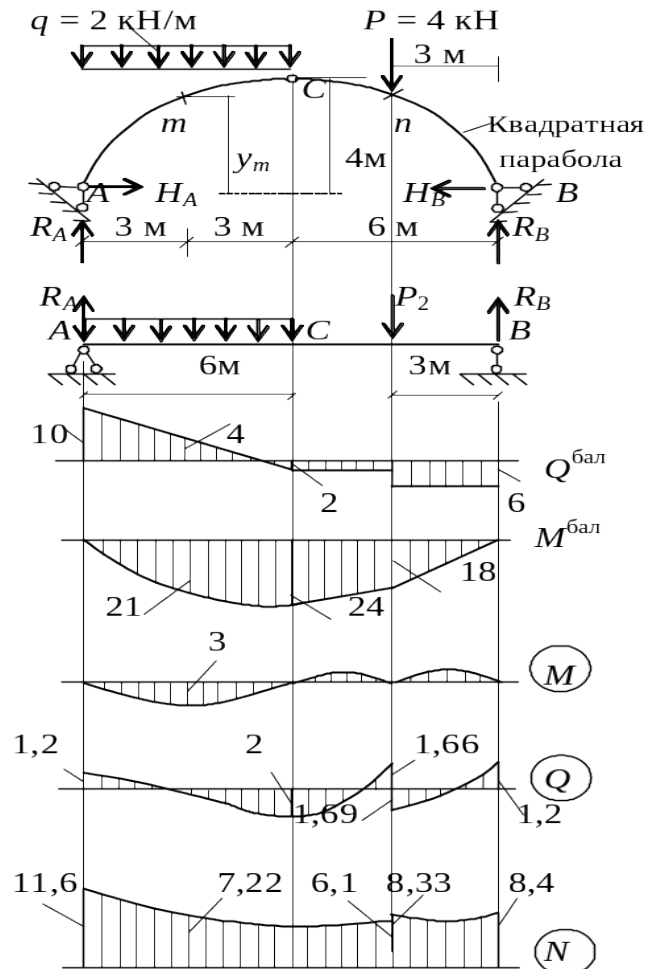


Рисунок 35

Одновременно найдем поперечные силы в опорных сечениях A и B .

$$\operatorname{tg} \varphi_A = -\operatorname{tg} \varphi_B = \frac{4 \cdot 4}{12^2} 12 = 1,333;$$

$$\sin \varphi_A = -\sin \varphi_B = \frac{1,333}{\sqrt{1+1,333^2}} = 0,8;$$

$$\cos \varphi_A = \cos \varphi_B = \frac{1}{\sqrt{1+1,333^2}} = 0,6.$$

$$Q_A = 10 \cdot 0,6 - 6 \cdot 0,8 = 1,2 \text{ кН}; \quad Q_B = -6 \cdot 0,6 - 6(-0,8) = 1,2 \text{ кН}.$$

$$Q_C = -2 \cdot 1 = -2 \text{ кН}.$$

5. Вычисляем продольные усилия по формуле:

$$N_x = Q_x^{\text{бал}} \sin \varphi_x + H \cos \varphi_x.$$

$$N_m = Q_m^{\text{бал}} \sin \varphi_m + H \cos \varphi_m = 4 \cdot 0,555 + 6 \cdot 0,832 = 7,218 \text{ кН},$$

$$N_n^{\text{л}} = (-2) \cdot (-0,555) + 6 \cdot 0,832 = 6,108 \text{ кН},$$

$$N_n^{\text{пр}} = (-6) \cdot (-0,555) + 6 \cdot 0,832 = 8,328 \text{ кН},$$

В опорных сечениях:

$$N_A = 10 \cdot 0,8 + 6 \cdot 0,6 = 11,6 \text{ кН},$$

$$N_B = (-6) \cdot (-0,8) + 6 \cdot 0,6 = 8,4 \text{ кН}.$$

5. Сводим полученные значения в таблицу и строим эпюры внутренних усилий в арке (рис. 35).

№ сеч.	x (м)	y (м)	$\operatorname{tg} \varphi$	$\sin \varphi$	$\cos \varphi$	M^{δ}	H	M	Q^{δ}	$\frac{Q^{\delta}}{\cos \varphi}$	$H \sin \varphi$	Q	$\frac{Q^{\delta}}{\sin \varphi}$	$\frac{H}{\cos \varphi}$	N
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	13	15	11	14	16
A	0	0	1.333	0.8	0.6	0	6	0	10	6	4.8	1.2	8	3.6	11.6
m	3	3	0.667	0.555	0.83	21	6	3	4	3.33	3.33	0	2.22	4.99	7.22
C	6	4	0	0	1	24	6	0	-2	-2	0	-2	0	6	6
$n(\text{л})$	9	3	-0.667	-0.555	0.83	18	6	0	-2	-1.66	-3.33	1.66	-1.11	4.99	6.11
$n(\text{пр})$	9	3	-0.667	-0.555	0.83	18	6	0	-6	-4.99	-3.33	-1.69	-3.33	4.99	8.33
B	12	0	-1.333	-0.8	0.6	0	6	0	-6	-3.6	-4.8	1.2	4.8	3.6	8.4

ПРАКТИЧЕСКИЕ РАБОТЫ № 28, 29, 30

Статически определимые плоские фермы

Цель занятия: Научить студентов определять усилия в стержнях ферм аналитическими методами.

Расчет ферм на неподвижную нагрузку аналитическим способом

Сначала определяют опорные реакции. При этом составляют три уравнения равновесия для всей фермы в целом.

При определении же внутренних усилий выделяют сечениями те или иные части фермы (в том числе отдельные узлы) и рассматривают условия их равновесия под действием внешних сил и усилий в рассеченных стержнях (последние заменяют действие на рассматриваемую часть фермы отброшенной ее части).

Способы аналитического определения усилий в стержнях ферм:

1. Способ вырезания узлов

Этот способ заключается в последовательном отсечении от фермы ее узлов и рассмотрении равновесия каждого из них под действием внешней силы (если она приложена к этому узлу) и внутренних усилий в рассеченных стержнях, заменяющих действие на узел отброшенной части фермы.

Способ вырезания узлов легче всего уяснить на примере:

Пример. Определить продольные силы в стержнях фермы, изображенной на рис. 36, а.

Решение. Находим опорные реакции:

$$\begin{aligned}\sum Z &= 0, \quad H_B = 0; \\ \sum M_B &= -R_C \cdot 15 + F_1 \cdot 5 + F \cdot 10 = 0; \\ R_C &= (17,5 \cdot 5 + 10 \cdot 10) / 15 = 12,5 \text{ кН}; \\ \sum M_C &= R_B \cdot 15 - F_1 \cdot 10 - F_2 \cdot 5 = 0; \\ R_B &= (17,5 \cdot 10 + 10 \cdot 5) / 15 = 15 \text{ кН}.\end{aligned}$$

В данной ферме в опорных узлах В и С сходятся по два стержня, поэтому вначале вырежем один из них, например, узел В (рис. 36, б):

$$\begin{aligned}\sum Y &= R_B + N_{B2} \sin 45^\circ = 0, \\ N_{B2} &= -R_B / \sin 45^\circ = -15 / 0,707 = -21,21 \text{ кН}; \\ \sum Z &= N_{B2} \cos 45^\circ + N_{B1} = 0, \\ N_{B1} &= -N_{B2} \cos 45^\circ = -(21,21) \cdot 0,707 = 15 \text{ кН}.\end{aligned}$$

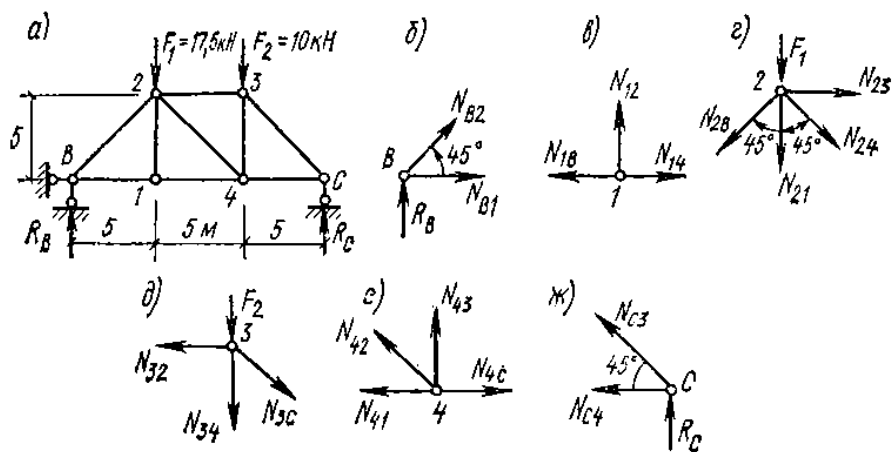


Рисунок 36

Следующим вырезаем узел 1, в котором сходятся две неизвестные силы N_{12} и N_{14} (рис. 36, в):

$$\sum Y = 0, \quad N_{12} = 0;$$

$$\sum Z = -N_{1B} + N_{14} = 0, \quad N_{14} = N_{1B} = 15 \text{ кН.}$$

Затем вырезаем узел 2, в котором две неизвестные силы N_{23} и N_{24} (рис. 36, г):

$$\sum Y = -N_{B1} \cos 45^\circ - F_1 - N_{24} \cos 45^\circ = 0,$$

$$N_{24} = -N_{B1} - F_1 / \cos 45^\circ = -(-21,21) - 17,5 / 0,707 = -3,54 \text{ кН};$$

$$\sum Z = -N_{B1} \sin 45^\circ + N_{24} \sin 45^\circ + N_{23} = 0,$$

$$N_{23} = (N_{B1} - N_{24}) \sin 45^\circ = (-21,21 + 3,54) \cdot 0,707 = -12,5 \text{ кН.}$$

Следующим вырезаем узел 3 (рис. 36, д):

$$\sum Z = -N_{32} + N_{3c} \sin 45^\circ = 0,$$

$$N_{3c} = N_{32} / \sin 45^\circ = -12,5 / 0,707 = -17,68 \text{ кН};$$

$$\sum Y = -N_{34} - F_2 - N_{3c} \sin 45^\circ = 0,$$

$$N_{34} = F_2 - N_{3c} \sin 45^\circ = -10 - (-17,68) \cdot 0,707 = 2,5 \text{ кН.}$$

Вырезаем узел 4 (рис. 36, е):

$$\sum Z = -N_{41} - N_{42} \sin 45^\circ + N_{4c} = 0,$$

$$N_{4c} = N_{41} + N_{42} \sin 45^\circ = 15 + (-3,54) \cdot 0,707 = 12,5 \text{ кН.}$$

После обхода узлов B , 1 , 2 , 3 и 4 определены силы во всех стержнях ферм. При этом не рассматривался узел C . Условия равновесия узла C используем в качестве проверки найденных сил N_{c3} и N_{c4} (рис. 36, ж):

$$\sum Y = N_{c3} \sin 45^\circ + R_c = 0,$$

$$N_{c3} = -R_c / \sin 45^\circ = -12,5 / 0,707 = -17,68 \text{ кН};$$

$$\sum Z = -N_{c4} - N_{c3} \cos 45^\circ = 0,$$

$$N_{c4} = N_{c3} \cos 45^\circ = -(-17,68) \cdot 0,707 = 12,5 \text{ кН.}$$

Силы N_{c3} и N_{c4} имеют те же значения, следовательно, расчет фермы выполнен, верно.

2. Способ моментных точек

В данном способе сквозным сечением ферма разрезается на две части таким образом, чтобы перерезанными оказались не более трех стержней с неизвестными силами. При этом оси этих перерезанных стержней не должны

пересекаться в одной точке. Одну из частей фермы отбрасывают, а ее действие на оставшуюся часть заменяют внутренними продольными силами, направленными вдоль осей перерезанных стержней.

Для оставшейся части записывают три уравнения моментов относительно трех точек плоскости, не лежащих на одной прямой. Если взять произвольные точки, то придется при определении трех неизвестных сил решать систему трех уравнений с тремя неизвестными. Для упрощения расчета в качестве моментных точек принимают точки, находящиеся на пересечении осей двух из трех перерезанных стержней. В этом случае получим три независимых уравнения, в каждое из которых входит только одна неизвестная сила. Поскольку три моментные точки выбираются так, чтобы получить каждый раз уравнение с одним неизвестным, то данный способ расчета ферм получил название способа моментных точек.

Преимущество этого способа по сравнению со способом вырезания узлов состоит в том, что сила в любом стержне определяется независимо от сил в других стержнях.

3. Способ проекций

Способ проекций применяется при расчете ферм с параллельными поясами. Здесь также ферма сквозным сечением разрезается на две части так, чтобы перерезанными оказались не более трех стержней. Одна часть отбрасывается и рассматривается равновесие оставшейся части.

В отличие от способа моментных точек в этом способе третье уравнение моментов заменяется уравнением проекций на ось, перпендикулярную к поясам фермы. Данная замена вызвана тем, что моментная точка пересечения осей стержней параллельных поясов фермы находится в бесконечности. В остальном методика расчета такая же, как и при расчете способом моментальных точек.

ПРАКТИЧЕСКИЕ РАБОТЫ № 31, 32

Статически определимые плоские фермы

Цель занятия: Научить студентов определять усилия в стержнях ферм графическим методом.

Графический способ расчета основан на построении многоугольника сил для данного узла фермы. Так как каждый узел фермы находится в равновесии, а действующие в нем внешние и внутренние силы представляют собой систему сходящихся сил, то многоугольник сил в каждом узле будет замкнутым. Ввиду того, что силы в стержнях фермы неизвестны, построение многоугольника сил, а точнее треугольника сил, начинают с того узла, в котором сходятся два стержня с неизвестными силами.

В таком узле действующую на него известную нагрузку — силу или равнодействующую нескольких сил раскладывают по направлению двух стержней, т. е. строят замкнутый треугольник сил. Затем переходят к

следующему узлу, в котором неизвестных сил не более двух, и т. д. Последовательно строя замкнутые многоугольники для всех узлов фермы, находят графически неизвестные силы в стержнях фермы. Объединенные на одном чертеже многоугольники сил, построенные для каждого узла фермы, носят название диаграммы Максвелла-Кремоны или диаграммы сил.

Перед расчетом фермы графическим способом необходимо выполнить следующие подготовительные операции:

1) найти опорные реакции фермы. Обычно их вычисляют аналитическим способом;

2) вычертить в масштабе схему фермы с приложенными в узлах заданными силами F_t и опорными реакциями;

3) обозначить внешние поля (зоны между каждой заданной силой и реакциями) и внутренние поля фермы (зоны внутри решетки), обходя их по ходу часовой стрелки. Поля удобнее обозначать цифрами. При таком обозначении полей каждая внешняя и внутренняя сила будут содержать два подстрочных индекса по наименованию смежных полей.

Для внешних сил первой записывается цифра при обходе фермы по ходу часовой стрелки, а для усилия в стержне первой — цифра при обходе вырезанного узла по ходу часовой стрелки.

Пример. Определить графическим способом силы в стержнях, изображенной на рис. 37, а.

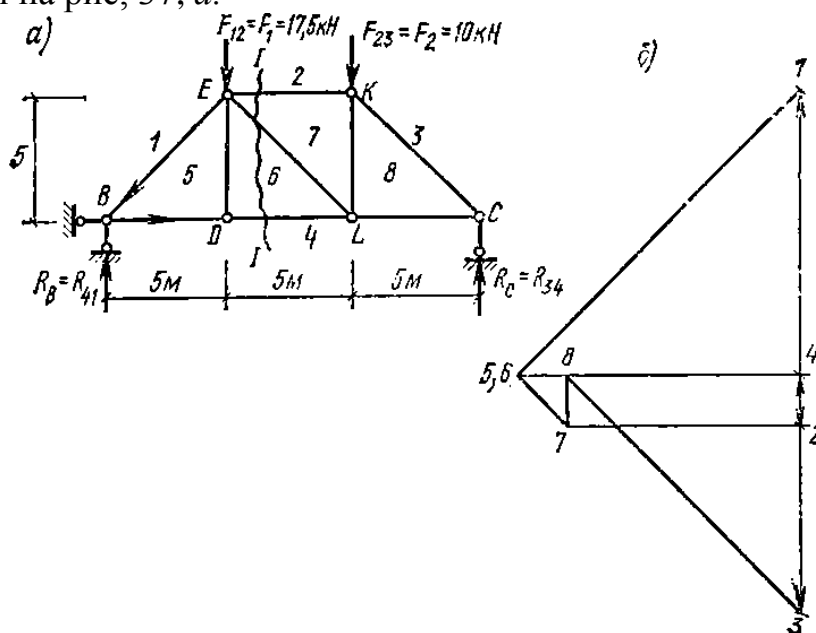


Рисунок 37

Решение. Опорные реакции определяем по формулам равновесия: $H_6=0$; $R_c = 12,5\text{кН}$; $R_B = 15\text{ кН}$.

Обозначим внешние поля фермы цифрами 1, 2, 3 и 4 и внутренние — цифрами 5, 6, 7 и 8 (рис. 37, а). Для пояснения процесса построения диаграммы сил все узлы фермы дополнительно обозначим буквами В, С, D, E, К, L. При практических расчетах такого обозначения узлов не делают.

Выбираем масштаб сил и построим многоугольник внешних сил F_{12} , F_{23} , R_{34} и R_{41} , обходя ферму по ходу часовой стрелки (рис. 37,6). Так как эта система сил, направленных вертикально, уравновешена, то замкнутый многоугольник превращается в две накладывающиеся друг на друга вертикальные линии $1—2—3$ и $3—4—1$.

Определение сил в ферме начинается с левого опорного узла В, в котором сходятся две неизвестные силы N_{15} и N_{54} . Для их определения строим замкнутый треугольник трех сил R_{41} , N_{15} и N_{54} . На диаграмме сил построение силового треугольника на базе известной силы R_{41} производится следующим образом. Через точку 1 проводится прямая, параллельная стержню фермы $1—5$, а через точку 4 — прямая, параллельная стержню $5—4$. Пересечение этих прямых образует на диаграмме точку 5. Отрезки диаграммы $1—5$ и $5—4$, умноженные на масштаб сил, равны силам N_{15} и N_{54} .

Знаки сил N_{15} и N_{54} определяются по направлению соответствующих векторов на диаграмме сил. Начало вектора соответствует первой подстрочной цифре сил, а конец вектора — второй подстрочной цифре сил. Так, вектор $1—5$ на диаграмме имеет начало в точке 1 и конец в точке 5, т. е. направлен к узлу В. Следовательно, сила N_{15} в стержне $1—5$ сжимающая. Вектор $5—4$ на диаграмме имеет начало в точке 5 и конец в точке 4, т. е. направлен от узла В. Следовательно, сила N_{54} в стержне $5—4$ растягивающая.

Переходим к узлу D, в котором сходятся три силы N_{45} , N_{56} и N_{64} . Однако из этих сил определено $N_{45} = N_{54}$. Для определения сил N_{56} и N_{64} на диаграмме через точку 5 проводится прямая, параллельная стержню фермы $5—6$ (вертикальная), и через точку 4 — прямая, параллельная стержню $6—4$ (горизонтальная). Пересечение этих прямых образует точку 6. В данном случае точки 5 и 6 совпадают. Следовательно, сила в стержне $5—6$ равна нулю $N_{56} = 0$, а сила в стержне $6—4$ равна силе в стержне $4—5$, т. е. $N_{45} = N_{64}$. Полученный результат полностью соответствует рассмотренному ранее частному случаю равновесия трехстержневого незагруженного узла.

Следующим рассматриваем узел E, в котором сходятся четыре силы N_{51} , N_{27} , N_{76} и N_{65} и внешняя сила F_{12} . Две силы уже известны: $N_{51} = N_{15}$ и

$N_{65} = N_{56}$. Для определения двух неизвестных сил N_{27} и N_{76} через точку 6 проводится прямая, параллельная стержню фермы $7—6$, и через точку 2 — прямая, параллельная стержню фермы $2—7$. Пересечение этих прямых образует на диаграмме точку 7. Отрезки диаграммы $2—7$ и $7—6$, умноженные на масштаб сил, равны силам N_{27} и N_{76} .

Переходим к узлу L, в котором сходятся четыре силы N_{46} , N_{67} , N_{78} и N_{84} . Для определения двух неизвестных сил N_{78} и N_{84} через точку 7 проводится прямая, параллельная стержню фермы $7—8$, и через точку 4 — прямая, параллельная стержню $8—4$.

Последним вырезаем узел K (можно вырезать узел C), в котором сходятся три силы N_{87} , N_{72} и N_{38} . Первые две силы уже известны. Для определения неизвестной силы N_{38} из точки 3 (или из точки 8) проводится прямая, параллельная стержню фермы $3—8$, которая должна соединить на диаграмме две известные точки 3 и 8. Эта последняя прямая $3—8$ называется

замыкающей прямой диаграммы и является контролем правильности построенной диаграммы сил в ферме. Если замыкающая прямая действительно соединяет точки 3 и 5 и при этом параллельна стержню фермы 3—8, то диаграмма сил построена верно.

ПРАКТИЧЕСКИЕ РАБОТЫ №33, 34

Линии влияния и их применение для расчета статически определимых балок

Цель занятия: Научить вычислять усилия по линиям влияния от неподвижной нагрузки.

1. Нагрузки и внутренние силовые факторы

Сопrotивление материалов рассматривает только однопролетные балки при действии на них *неподвижных нагрузок*. В курсе строительной механики рассматриваются эти же балки, но при действии на них и *подвижных нагрузок*.

Подвижной нагрузкой называется нагрузка, движущаяся по сооружению с некоторой скоростью. К примеру, такой нагрузкой является транспорт, поезд, движущийся по мосту; кран, движущийся по подкрановой балке и др. Его можно рассматривать как систему взаимосвязанных параллельных сил, движущихся по сооружению (рис. 5.1, б). При этом усилия (а также напряжения и деформации) зависят от положения подвижной нагрузки. Для определения расчетных значений усилий необходимо из всех возможных положений нагрузки выбрать такое, при котором рассчитываемый элемент будет находиться в самых неблагоприятных условиях. Такое положение нагрузки называется *невыгоднейшим*, или *опасным*.

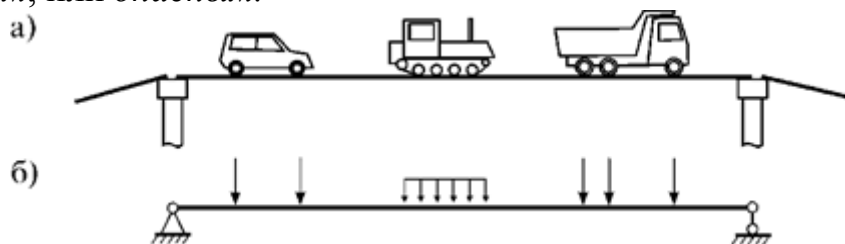


Рисунок 38

2. Методы расчета сооружений на подвижную нагрузку

Подвижная нагрузка вызывает в элементах сооружения переменные внутренние усилия. Расчет сооружения на подвижную нагрузку, даже без учета динамических эффектов (например, ускорений и инерционных сил), сложнее расчета на постоянную нагрузку.

Метод линий влияния. *Сущность метода:* искомая величина (внутреннее усилие, реакция и др.) определяется как функция от подвижной

единичной силы; строится график этой функции, а затем находятся расчетное положение и расчетное значение этой величины.

Метод линий влияния более прост для реализации, позволяет достаточно просто определять расчетное положение нагрузки и ее величину. Поэтому далее остановимся только на нем.

Линия влияния (ЛВ) – это график изменения одного усилия (опорной реакции, реакции в связи, изгибающего момента, перерезывающего и продольного усилий) в определенном месте (сечении) конструкции от единичной безразмерной силы $P=1$, которая движется по конструкции без ускорения, сохраняя при этом постоянное направление.

Понятия ЛВ и эпюры нельзя путать, потому что эпюра показывает значение внутреннего усилия для всех точек (сечений) от постоянной нагрузки, а ЛВ показывает значение внутреннего усилия от подвижной единичной силы $P=1$ только для одного сечения.

3. Построение линий влияния усилий простой балки

Пример 1. Рассмотрим консольную балку, на которую действует подвижная нагрузка $P=1$ (рис. 39, а).

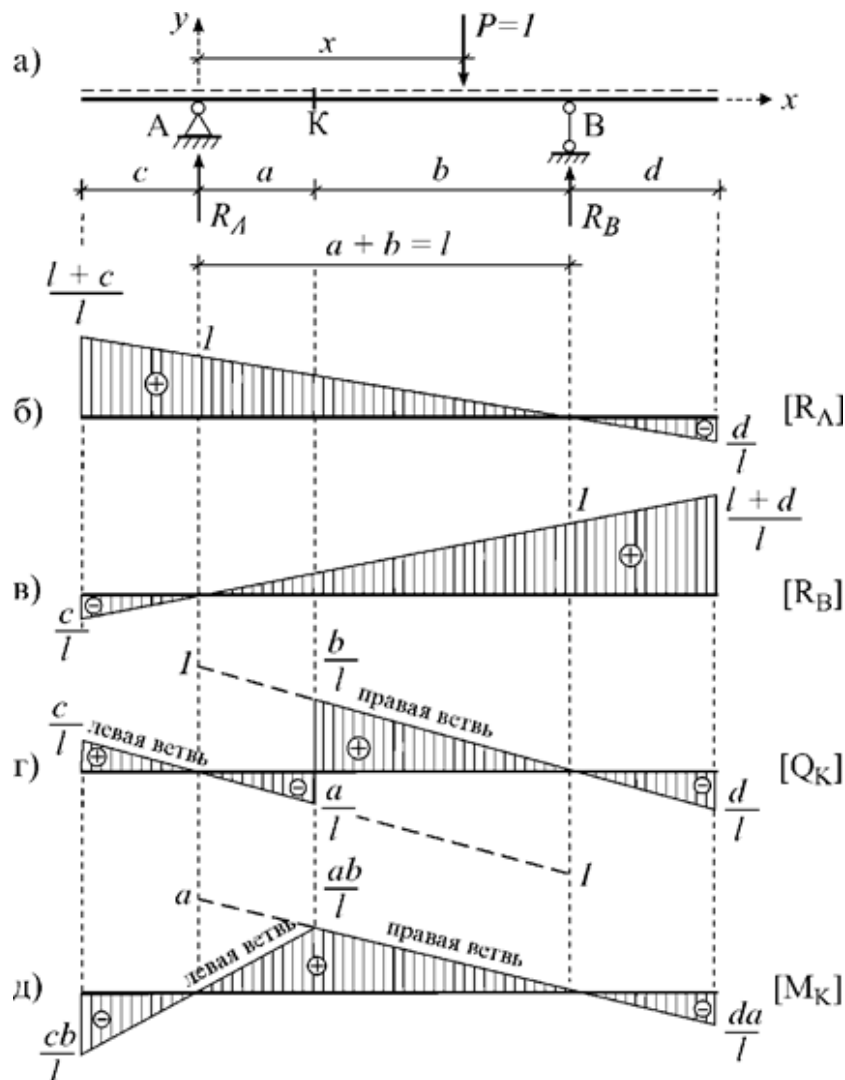


Рисунок 39

1) Линии влияния опорных реакций

Сумма моментов в правой опоре:

$$\Sigma M_B = -R_A \cdot l + 1 \cdot (l - x) = 0.$$

Отсюда

$$R_A = \frac{l - x}{l}.$$

Для построения графика этой функции найдем положение двух точек:

если $x=0$, то $R_A=1$;

если $x=l$, то $R_A=0$.

Через эти точки проводим прямую и строим ЛВ реакции R_A (рис. 39, б).

Для определения правой опорной реакции составим уравнение

$$\Sigma M_A = R_B \cdot l - 1 \cdot x = 0.$$

Отсюда

$$R_B = \frac{x}{l}.$$

Если $x=0$, то $R_B=0$;

если $x=l$, то $R_B=1$.

Через эти точки проводим прямую и строим л.в. реакции R_B (рис. 39, в).

2) Линии влияния поперечной силы и момента

Они зависят от положения сечения, в котором определяются.

а) Единичная сила правее сечения K

В этом случае $Q_K = R_A$, $M_K = R_A \cdot a$.

Эти функции определяют **правые ветви ЛВ** поперечной силы и момента в сечении K (рис. 39, з, д).

б) Единичная сила левее сечения K

В этом случае внутренние усилия определяем через правую опорную реакцию. Тогда $Q_K = -R_B$, $M_K = R_B \cdot b$. Эти функции определяют **левые ветви ЛВ** поперечной силы и момента в сечении K (рис. 39, з, д).

Если сечение располагается на консольных (левой или правой) частях балки (рис. 40, а), ЛВ поперечной силы и момента будут совсем другими. Приведем результат их построения для двух сечений K_1 и K_2 (рис. 40, б-д).

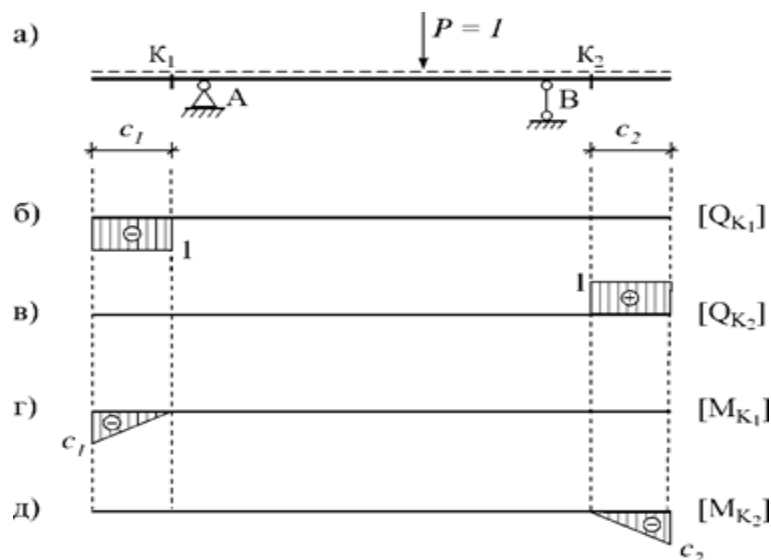


Рисунок 40

Вычисление усилий по линиям влияния от неподвижной нагрузки

Обратимся к л.в. усилия R_A простой балки (рис. 41). Отметим, что при нахождении силы $P = 1$ на опоре А величина реакции равна 1, а при нахождении силы $P = 1$ на расстоянии x от опоры А величина R_A будет равна величине $R_{A(x)}$, взятой из графика (рис. 41). Если силу $P = 1$ увеличить в « n » раз, то и график (его значения) увеличится в « n » раз.

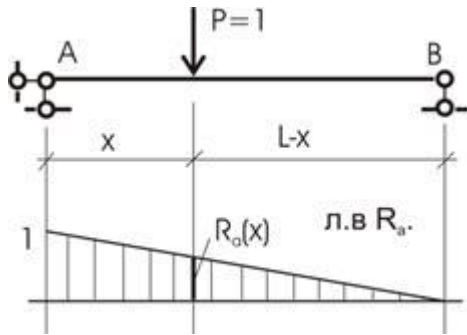


Рисунок 41

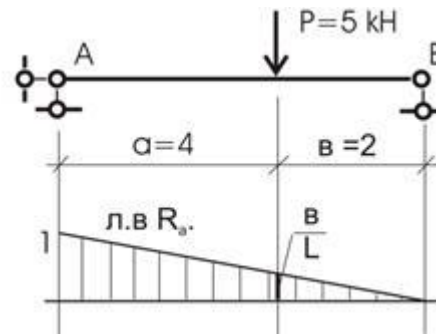


Рисунок 42

Тогда при загрузении одной сосредоточенной силой, скажем, $P = 5$ кН (рис.42), величина R_A будет равна произведению силы 5 (кН) на ординату Л.В. R_A , взятую под силой, т. е.

$$R_A = 5 \cdot \frac{b}{l}$$

или, вычисляя аналитически, получим то же значение R_A .

$$\Sigma M_B = 0; \quad R_A \cdot l - 5 \cdot b = 0 \quad R_A = \frac{5 \cdot b}{l}.$$

Если же балка или другая конструкция нагружена сосредоточенными силами (рис.43) и, пользуясь принципом независимости действия сил, вычислим значения усилия от каждой силы и результаты сложим, т. е.

$$S = P_1 y_1 + P_2 y_2 + \dots + P_n y_n = \sum_{i=1}^n P_i y_i,$$

где: P_i – значение сосредоточенной i -ой силы;

y_i – ордината Л.В. усилия S , взятая под силой P_i , т. е.:

$$R_A = P_1 \cdot y_1 + P_2 \cdot y_2 + P_3 \cdot y_3.$$

От распределенной нагрузки $q(x)$ усилие через линии влияния определяется:

$$S = \int_a^b q(x) y(x) dx,$$

где a и b - координаты начальной и конечной точек действия распределенной нагрузки.

Для равномерно распределенной нагрузки (рис. 44) $q = \text{const}$:

$$S = q \int_a^b y(x) dx = q \Omega_{ab},$$

где Ω_{ab} - площадь, ограниченная линией влияния, осью абсцисс и прямыми $x = a$ и $x = b$.

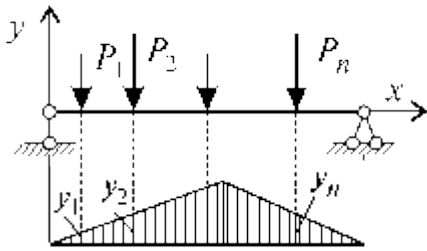


Рисунок 43

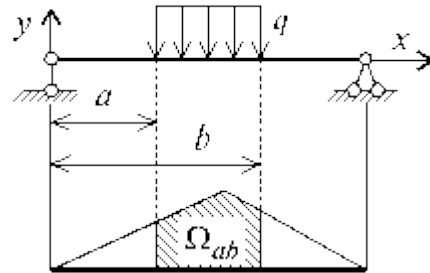


Рисунок 44

Так для схемы на рис.45 с равномерно распределенной нагрузкой усилие S будет подсчитываться как произведение интенсивности нагрузки на площадь $(-\Omega)$ л.в. усилия (на рис. 45 л.в. усилия M_k), т. е. $S = \Omega \cdot q$ или для M_k :

$$M_k = \frac{q \cdot b \cdot a \cdot l}{l} \cdot \frac{1}{2} = \frac{q \cdot b \cdot a}{2}.$$

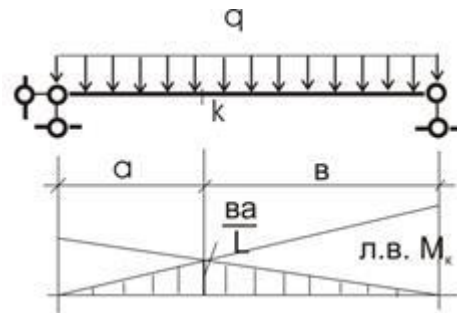


Рисунок 45

ПРАКТИЧЕСКИЕ РАБОТЫ № 35, 36 Расчет неразрезных балок

Цель занятия: Научить рассчитывать неразрезные балки с помощью уравнения трех моментов

Пример. Неразрезная балка нагружена во всех пролетах. Построить эпюры Q и M для неразрезной балки.

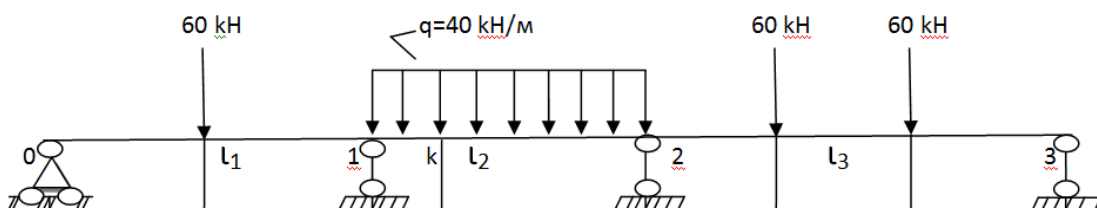


Рисунок 46

1. Определяем степень статической неопределимости балки по формуле:

$$n = C_{оп} - 3 = 5 - 3 = 2,$$

где $C_{оп}$ – число неизвестных реакций,

3 – число уравнений статики.

Для решения данной балки требуется два дополнительных уравнения.

2. Обозначим номера опор с нулевой по порядку (0,1,2,3)

3. Обозначим номера пролетов с первого по порядку (l_1, l_2, l_3)

4. Каждый пролет рассматриваем как простую балку и строим для каждой простой балки эпюры Q и M . То, что относится к простой балке, будем обозначать с индексом «0», то, что относится к неразрезной балке, будем обозначать без этого индекса. Таким образом, Q^0, M^0 — это поперечная сила и изгибающий момент для простой балки.

Рассмотрим балку 1^{го} пролета

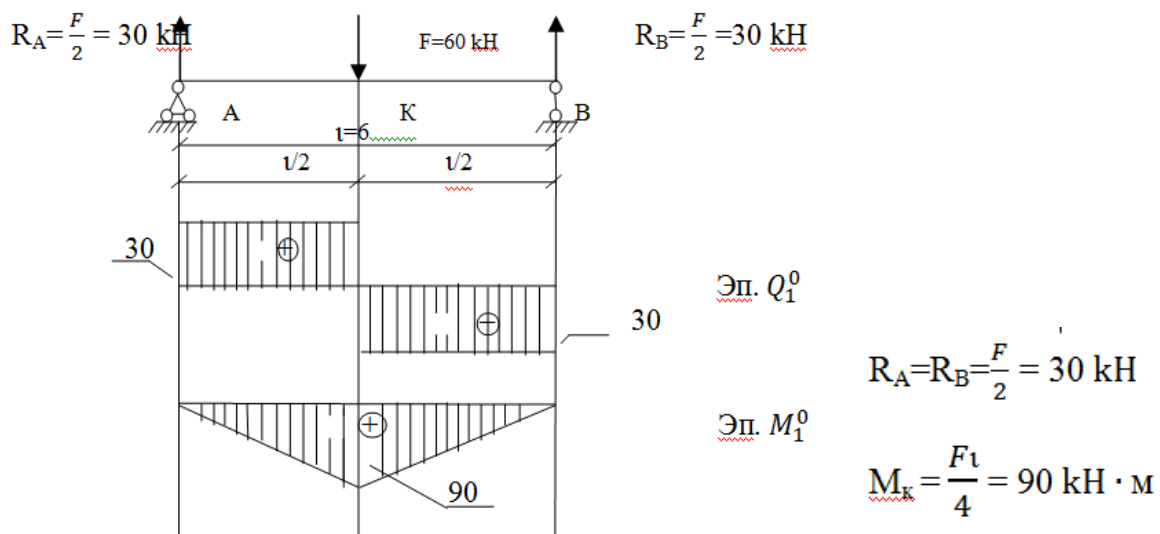


Рисунок 47

Определим фиктивные реакции для балки первого пролета по табличным формулам (см. таблицу «Фиктивные опорные реакции...»)

$$A_1^{\phi} = B_1^{\phi} = \frac{Fl^2}{16} = \frac{60 \cdot 6^2}{16} = 135 \text{ kH} \cdot \text{м}^2$$

Балка 2^{го} пролета

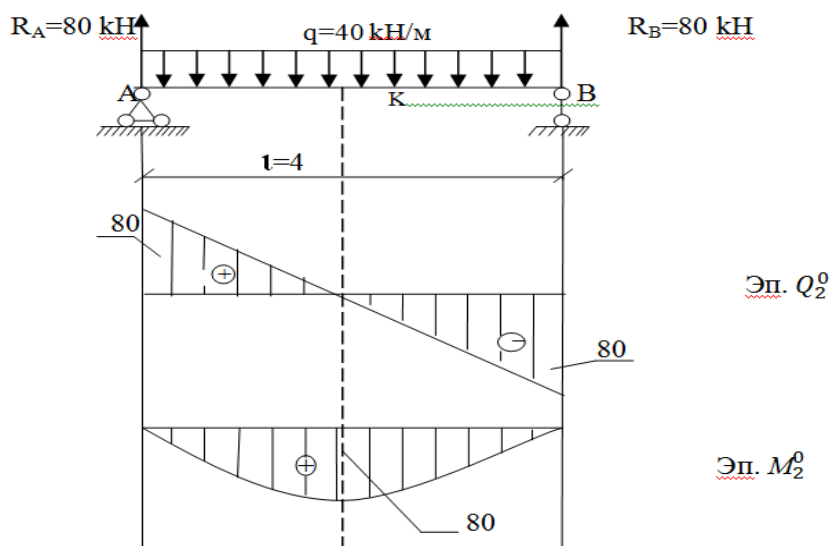


Рисунок 48

$$R_A = R_B = \frac{ql}{2} = 80 \text{ кН}$$

$$M_K = \frac{ql^2}{8} = 80 \text{ кН} \cdot \text{м}$$

$$A_2^{\phi} = B_2^{\phi} = \frac{ql^3}{24} = \frac{40 \cdot 4^3}{24} = 106,6 \text{ кН} \cdot \text{м}^2$$

Балка 3^{го} пролета

$$R_A = R_B = F$$

$$M_K = M_D = F \cdot a = 120 \text{ кН} \cdot \text{м}$$

$$A_3^{\phi} = B_3^{\phi} = \frac{F \cdot a \cdot (l-a)}{2} = \frac{60 \cdot 2 \cdot (6-2)}{2} = 240 \text{ кН} \cdot \text{м}^2$$

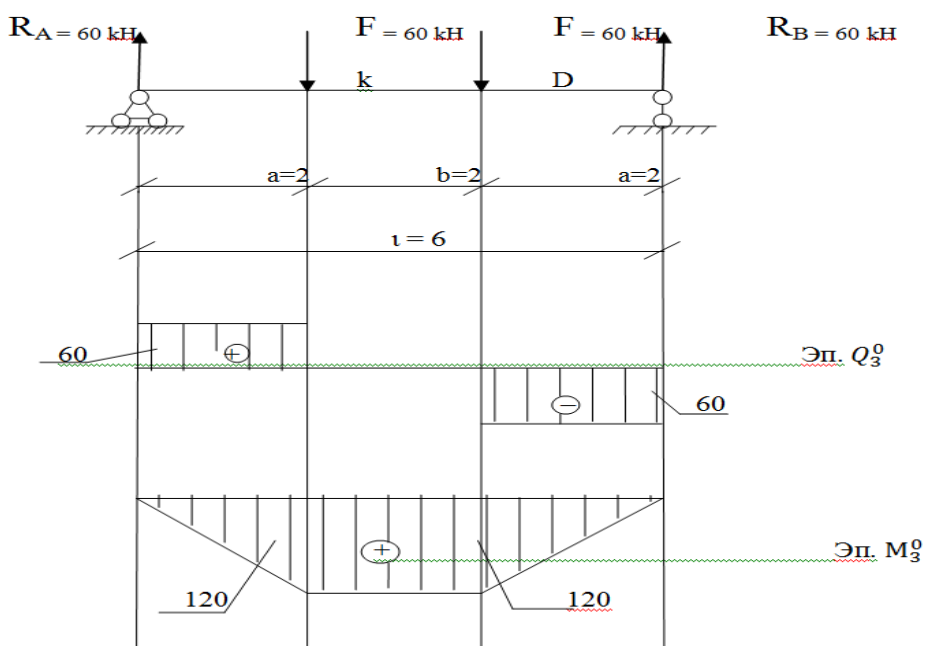


Рисунок 49

5. Составляем уравнение 3^х моментов для двух точек – промежуточных опор – опора 1 и опора 2. Это и будут два недостающих уравнения для решения задачи.

Уравнение 3х моментов в общем виде:

$$M_{n-1}l_n + 2(l_n+l_{n+1}) \cdot M_1 + l_{n+1}M_{n+1} = -6 (B_n^\phi + A_{n+1}^\phi)$$

Для точки (опоры) 1 (n=1): $M_0l_1 + 2(l_1+l_2) \cdot M_1 + l_2M_2 = -6 (B_1^\phi + A_2^\phi)$

Для точки (опоры) 2 (n=2): $M_1l_2 + 2(l_2+l_3) \cdot M_2 + l_3M_3 = -6 (B_2^\phi + A_3^\phi)$

Подставляем все известные величины, учитываем, что момент на нулевой опоре и на третьей опоре равны нулю, $M_0=0$; $M_3=0$

$$\begin{cases} 20M_1 + 4M_2 = -1449,6 \\ 4M_1 + 20M_2 = -2079,6 \end{cases}$$

Тогда получим:

Поделим первое уравнение на сомножитель 4 при M_2

Второе уравнение поделим на сомножитель 20 при M_2

$$\begin{cases} 5M_1 + M_2 = -362,4 \\ 0,2M_1 + M_2 = -103,98 \end{cases}$$

Решим эту систему уравнений:

$$4,8 M_1 = -258,42$$

Из первого уравнения вычтем второе, получим: $M_1 = -54 \text{ кН} \cdot \text{м}$

Подставляем это значение в любое из уравнений и находим M_2

$$M_2 = -92 \text{ кН} \cdot \text{м}$$

Итак, нашли опорные моменты:

$$M_0 = 0 \text{ кН} \cdot \text{м}; M_1 = -54 \text{ кН} \cdot \text{м}; M_2 = -92 \text{ кН} \cdot \text{м}; M_3 = 0 \text{ кН} \cdot \text{м}$$

6. Построение эпюры поперечной силы Q для неразрезной балки

Формула для определения Q в любом сечении неразрезной балки:

$$Q_n = Q_n^0 + \frac{M_n - M_{n-1}}{l_n}, \text{ где } n - \text{ пролет}$$

1) Построение эп. Q в первом пролете:

$$n = 1$$

$$Q_1 = Q_1^0 + \frac{M_1 - M_0}{l_1}$$

$$Q_1 = Q_1^0 + \frac{-54 - 0}{6}$$

$$Q_1 = Q_1^0 - 9$$

Эта запись означает, что поперечная сила в неразрезной балке в первом пролете будет такая же, как в простой балке с разницей ординат на -9 .

На эпюрах должны прослеживаться **скачки** на величину сил.

2) Построение эпюры Q во втором пролете:

$$n = 2$$

$$Q_2 = Q_2^0 + \frac{M_2 - M_1}{l_2}$$

$$Q_2 = Q_2^0 + \frac{-92 - (-54)}{4}$$

$$Q_2 = Q_2^0 - 9,5$$

Поперечная сила в неразрезной балке во втором пролете будет такая же, как в простой балке с разницей ординат на $-9,5$.

3) Построение эп. Q в третьем пролете:

$$n = 3$$

$$Q_3 = Q_3^0 + \frac{M_3 - M_2}{l_3}$$

$$Q_3 = Q_3^0 + \frac{0 - (-92)}{6}$$

$$Q_3 = Q_3^0 + 15,3$$

Поперечная сила в неразрезной балке в третьем пролете будет такая же, как в простой балке с разницей ординат на $+15,3$.

Строим эпюру поперечных сил для неразрезной балки.

первого пролета на эпюре M^0 ордината равна 90, а на эпюре опорных моментов -27. В итоге получим $90-27=63$. Это значение и откладываем.

2 вариант – формула для определения изгибающего M в любом сечении неразрезной балки:

$$M_{nx} = M_{nx}^0 + x \left(\frac{M_n - M_{n-1}}{l_n} \right) + M_{n-1}$$

где n -пролет,

x — расстояние.

Для той же точки первого пролета, которую рассматривали в методе

$$M_{1x} = M_{1x}^0 + x \left(\frac{M_1 - M_0}{l_1} \right) + M_0$$

$$M_{1(3M)} = 90 + 3 \left(\frac{-54 - 0}{6} \right) + 0 = 90 - 27 = 63$$

«подвешивания»:

Построение эпюры M во 2^{ом} пролете, загруженном равномерно распределенной нагрузкой

Определим положения т. К. по эпюре Q — это точка экстремума.

$$\frac{x}{4-x} = \frac{70,5}{89,5}$$

$$89,5 \cdot x = 70,5(4-x)$$

$$x = 1,87 \text{ м}$$

Определим M неразрезной балки во 2^{ом} пролете в этой точке:

$$M_{2x} = M_{2x}^0 + \frac{x(M_2 - M_1)}{l_2} + M_1$$

$$M_{2x} = M_{2x}^0 + \frac{1,87(-92 - (-54))}{4} + (-54)$$

$$M_{2x} = M_{2x}^0 + \underbrace{\frac{1,87(-38)}{4}}_{-17,7} - 54$$

$$M_{2x} = M_{2x}^0 - 71,7$$

Теперь нужно определить в этой точке К изгибающий момент М в **простой** балке:

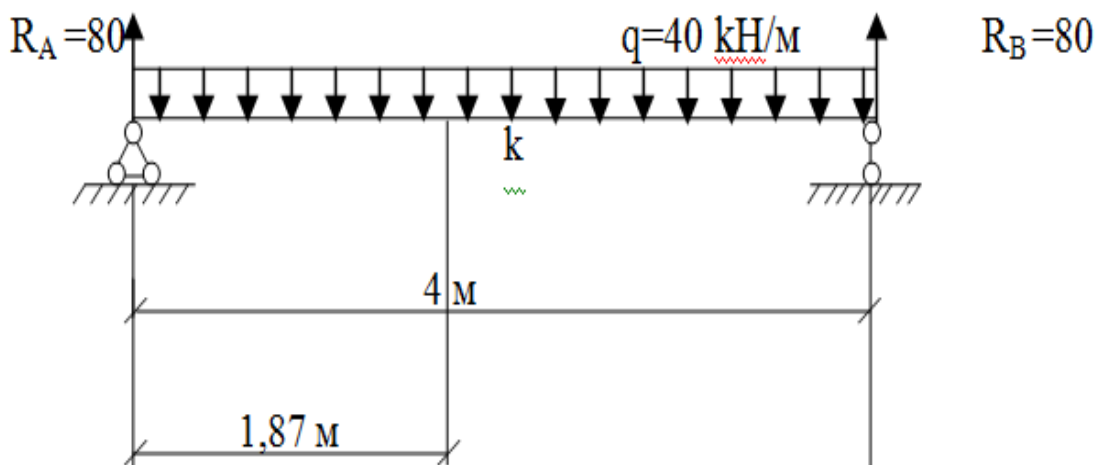


Рисунок 51

$$M_{2k}^0 = R_A \cdot 1,87 - q \cdot 1,87 \cdot 1,87 = 149,6 - 69,9 = 79,6$$

Таким образом, момент в точке К для неразрезной балки:

$$M_{2k} = 79,6 - 71,7 = 7,9$$

Строим **эпюру М**.

8. Выполним **проверку опорных реакций**. Покажем реакции R_0, R_1, R_2, R_3 на схеме балки на опорах, направив их вверх. Значения этих реакций определим **по скачкам эпюры Q**. Таким образом получим:

$$R_0 = 21 \text{ кН}$$

$$R_1 = 70,5 + 39 = 109,5 \text{ кН}$$

$$R_2 = 75,3 + 89,5 = 164,8 \text{ кН}$$

$$R_3 = 44,7 \text{ кН}$$

Спроецируем все силы, приложенные к балке, и реакции на вертикальную ось, выполним проверку.

$$R_0 + R_1 + R_2 + R_3 - F - 4q - F - F = 0$$

Подставим значения, получим **340-340=0**

ПРАКТИЧЕСКИЕ РАБОТЫ № 37, 38

Определение перемещений в статически определимых плоских системах

Цель занятия: Научить студентов определять перемещения.

Определение перемещений в стержневых системах методом Мора

Это универсальный метод, который заключается в использовании известной теоремы Мора о равенстве возможной работы внешних и внутренних сил и используется для определения линейных перемещений и углов поворота в любой стержневой системе от произвольной нагрузки. Метод широко применяется и при расчете статически неопределимых систем.

Пусть 1-е (грузовое) состояние представляет собой нагруженную стержневую систему заданной нагрузкой, а 2-е (единичное) состояние вызвано единичной нагрузкой $P = 1$, действующей в направлении искомого перемещения. Тогда в соответствии с указанной выше теоремой получаем выражение, которое называют интегралом Мора

$$1 \cdot \Delta = \sum \int \frac{M_p M_1}{EI} dx + \sum \int \frac{N_p N_1}{EA} dx + \sum \mu \int \frac{Q_p Q_1}{GA} dx$$

где: Δ – искомое перемещение; M_p, Q_p, N_p – внутренние усилия в стержневой системе, вызванные заданной внешней нагрузкой; M_1, Q_1, N_1 – внутренние усилия в стержневой системе, вызванные единичной нагрузкой, приложенной по направлению искомого перемещения в той точке (сечении), где определяется перемещение (при нахождении линейного перемещения прикладывается единичная сила $P = 1$, при вычислении угла поворота прикладывается единичный момент $m = 1$); EI, EA, GA – жесткости при изгибе, растяжении (сжатии) и сдвиге соответственно; μ – поправочный коэффициент, учитывающий распределение касательных напряжений в поперечном сечении;

l – длина участка.

Суммирование производится по всем участкам стержневой конструкции.

При расчете балок средней и большой длины и рамных конструкций влиянием продольной и поперечной сил (вторым и третьим членами формулы) можно пренебречь в силу их малого влияния на деформации изгиба. В этом случае интеграл Мора примет вид:

$$\Delta = \sum \int \frac{M_p M_1}{EI} dx$$

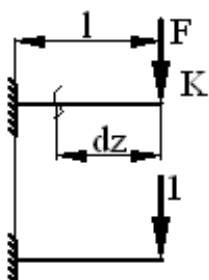
При расчете стержней, работающих только на растяжение (сжатие), и ферм в формуле останется только второй интеграл.

$$\Delta = \sum \int \frac{N_2 N_1}{EA} dx$$

В конструкциях, испытывающих значительные поперечные силы (например, в коротких балках), необходимо учитывать влияние поперечных сил.

Пример 1.

Определить перемещение точки K балки (см. рис. 52) при помощи интеграла Мора.



Решение.

1) Составляем уравнение изгибающего момента от внешней силы M_F .

2) Прикладываем в точке K единичную силу $F = 1$.

Рисунок 52

3) Записываем уравнение изгибающего момента от единичной силы \bar{M} .

$$\bar{M} = -1 \cdot z$$

4) Определяем перемещения

$$y_i = \frac{1}{EI} \int M_F \bar{M} dz = \frac{Fz^3}{3EI} \Big|_0^l = \frac{Fl^3}{3EI}$$

Пример 2.

по

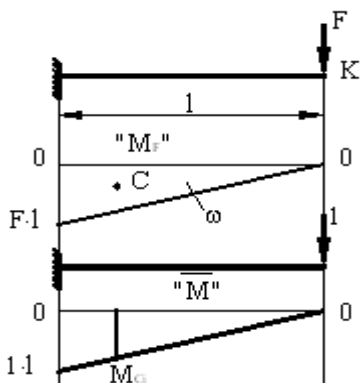


Рисунок 53

Определить перемещение точки K балки способом Верещагина.

Решение.

1) Строим грузовую эпюру.

2) Прикладываем в точке K единичную

силу.

3) Строим единичную эпюру.

4) Определяем прогиб

$$y_K = \frac{1}{EI} \sum \omega \cdot \bar{M}_C$$

$$\omega = \frac{1}{2} F \cdot l \cdot l \quad ; \quad \bar{M}_C = \frac{2}{3} l$$

$$y_K = \frac{F \cdot l \cdot l \cdot 2l}{2 \cdot 3EI} = \frac{F \cdot l^3}{3EI}$$

Пример 3. Вычислить прогиб и угол поворота свободного конца консоли (т. В) (рис. 54) от действия распределенной нагрузки.

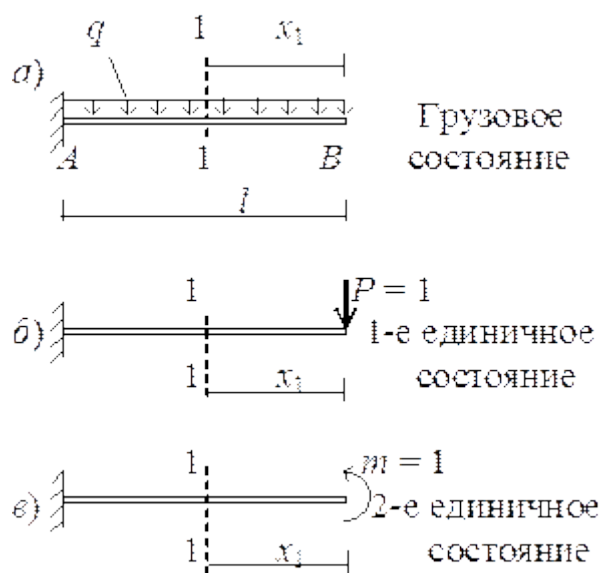


Рисунок 54

Решение. 1. В данной задаче один участок. Запишем для него выражение изгибающего момента в грузовом состоянии (рис. 36, а):

$$M_p = -\frac{qx_1^2}{2}.$$

2. Для вычисления прогиба свободного конца (т. В) прикладываем в этой точке единичную силу $P = 1$, т. е. создаем 1-е единичное состояние (рис. 36, б) и записываем выражение для единичного момента

$$M_1 = -1 \cdot x_1.$$

3. Записываем и вычисляем интеграл Мора, используя выражение:

$$\Delta = y_B = \int_0^l \frac{M_p M_1}{EI} dx = \int_0^l \frac{\left(-\frac{qx_1^2}{2}\right) (-1 \cdot x_1)}{EI} dx = \frac{qx^4}{8EI} \Big|_0^l = \frac{ql^4}{8EI}.$$

Знак «+» у Δ говорит о том, что перемещение происходит по направлению единичной силы $P=1$.

4. Для вычисления угла поворота прикладываем в заданном сечении (т. В) единичный момент (рис. 36, в) и записываем выражение для единичного момента M_2 на данном участке:

$$M_2 = m = 1.$$

5. Вычисляем интеграл Мора при 2-м единичном нагружении:

$$\Delta = \varphi_B = \int_0^l \frac{M_p M_2}{EI} dx = \int_0^l \frac{\left(-\frac{qx_1^2}{2}\right) \cdot 1}{EI} dx = -\frac{qx^3}{6EI} = -\frac{ql^3}{6EI}.$$

Знак «минус» говорит о том, что перемещение (поворот сечения С) происходит против направления единичного момента $m = 1$, т. е. по часовой стрелке.

ПРАКТИЧЕСКИЕ РАБОТЫ № 39, 40

Тема 10. Подпорные стены

Цель занятия: Научить рассчитывать устойчивость подпорных стен.

Расчет подпорной стены с вертикальной задней гранью, горизонтальной поверхностью засыпки и при наличии временной нагрузки на призме обрушения.

Определение давления грунта на стену

Определение давления грунта на подпорную стенку производится по приближенной теории Кулона, называемой теорией предельного равновесия. Принимается, что подпорная стенка под давлением грунта начинает отодвигаться, и предельное давление грунта на стенку определяется для первого момента сдвига стенки. При этом грунт рассматривается как сыпучая однородная масса, способная воспринять только сжимающие и сдвигающие усилия, так как предполагается, что между частицами сыпучего тела сила сцепления отсутствует, а имеются силы трения.

Величина давления грунта на стенку зависит от геометрических размеров стенки и ее высоты и физических свойств грунта: объемного веса, угла естественного откоса грунта, угла трения грунта по ограждающей плоскости.

Величина давления грунта на стенку определяется по формуле:

$$E_{\max} = \frac{1}{2} \gamma h^2 \operatorname{tg}^2 \left(45^\circ - \frac{\varphi}{2} \right)$$

где: γ - объемный вес грунта, кН/м³;

h - высота подпорной стены, м;

φ - угол естественного откоса грунта, принимается равным углу внутреннего трения, град.

Эпюры давления по высоте стенки

Интенсивность активного давления грунта в произвольной точке задней грани подпорной стены, расположенной на расстоянии y от горизонтальной поверхности грунта равна

$$q_y = \gamma y \operatorname{tg}^2 \left(45^\circ - \frac{\varphi}{2} \right)$$

Интенсивность давления грунта выражается линейной функцией. Чтобы графически изобразить распределение давления, достаточно определить две точки:

$$\text{при } y = 0 \quad q_y = 0$$

$$\text{при } y = h \quad q_{\max} = \gamma h \operatorname{tg}^2 \left(45^\circ - \frac{\varphi}{2} \right)$$

По этим точкам строим эпюру давления грунта.

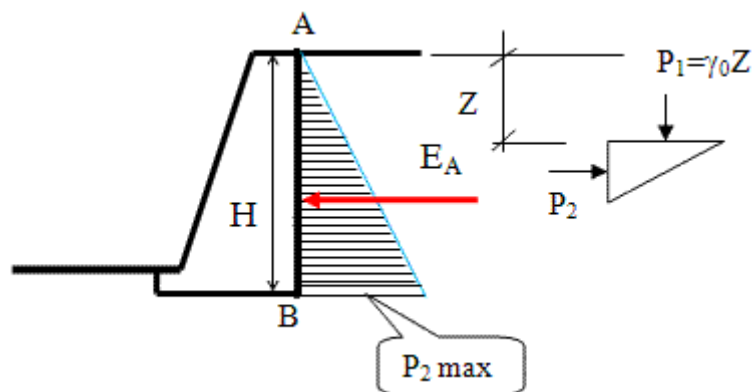


Рисунок 55

Равнодействующая этого давления, т.е. распор грунта, будет равняться площади данной эпюры:

$$E_{\max} = \frac{1}{2} q_{\max} h = \frac{1}{2} \gamma h^2 \operatorname{tg}^2 \left(45^\circ - \frac{\varphi}{2} \right)$$

Точка приложения распора находится в центре тяжести эпюры давления, в данном случае – в центре тяжести треугольника (на высоте $h/3$ от основания).

Определение активного давления грунта при наличии временной нагрузки на призме обрушения.

Рассмотрим, как влияет на величину распора временная нагрузка, расположенная в пределах призмы обрушения. Для удобства расчета заменим эту нагрузку эквивалентным по весу воображаемым слоем грунта высотой h_0 .

$$h_0 = \frac{p}{\gamma}$$

где p – интенсивность временной нагрузки;

γ – объемный вес грунта.

Будем определять интенсивность давления в любой точке вертикальной грани подпорной стены по формуле:

$$q_y = \gamma y \operatorname{tg}^2 \left(45^\circ - \frac{\varphi}{2} \right)$$

где y – расстояние от воображаемой поверхности.

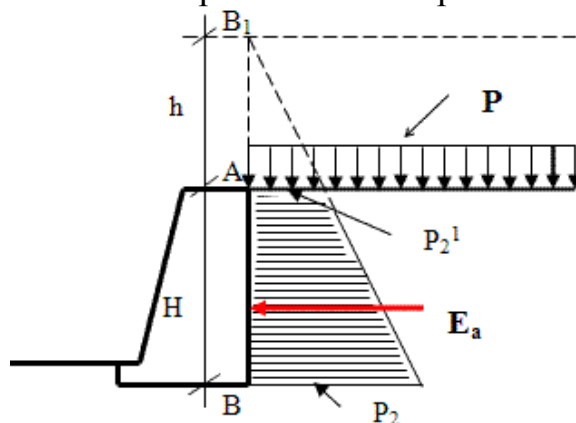


Рисунок 56

Для построения эпюры давления грунта определим интенсивность давления грунта в двух точках:

1) на действительной поверхности грунта ($y = h_0$)

$$q_{\min} = \gamma h_0 \operatorname{tg}^2 \left(45^\circ - \frac{\varphi}{2} \right)$$

2) у подошвы подпорной стены ($y = h_0 + h$)

$$q_{\max} = \gamma (h_0 + h) \operatorname{tg}^2 \left(45^\circ - \frac{\varphi}{2} \right)$$

По этим точкам строим эпюру давления грунта, которая в данном случае имеет форму трапеции.

Наклонная прямая эпюры давления должна пересекать вертикальную грань подпорной стены на высоте приведенного грунта.

Для определения распора грунта берем равнодействующую всего давления. Она равна площади эпюры давления, т.е. площади трапеции. Следовательно,

$$E_{\max} = \frac{q_{\max} + q_{\min}}{2} h = \frac{1}{2} \gamma (h^2 + 2hh_0) \operatorname{tg}^2 \left(45^\circ - \frac{\varphi}{2} \right)$$

E_{\max} – максимальный распор грунта, действующий на вертикальную грань подпорной стены, при наличии временной равномерно распределенной нагрузки.

Точка приложения распора находится в центре тяжести эпюры давления, т.е. в центре тяжести трапеции.

Расстояние Y_C до центра тяжести эпюры интенсивности (или линии действия активного давления) можно определить по одной из формул

$$Y_C = \frac{h}{3} \times \frac{h+3h_0}{h+2h_0} \qquad Y_C = \frac{h}{3} \times \frac{qh+h_0+2qh_0}{qh+h_0+qh_0}$$

Выполнение проверок:

- на прочность кладки по обрезу фундамента;
- на устойчивость стены против опрокидывания;
- на устойчивость стены против скольжения по основанию;
- на прочность основания под подошвой фундамента.

Расчет подпорной стенки на прочность и устойчивость

Прежде всего нужно собрать и подсчитать все нагрузки, действующие на подпорную стену, включая и ее собственный вес.

Для примера возьмем подпорную стену со ступенчатой задней гранью и горизонтальным уровнем грунта и с равномерно распределенной нормативной нагрузкой интенсивностью p (кН/м), расположенной на поверхности грунта.

Подсчитаем нормативный собственный вес стены, для удобства разбив ее на участки Q_1 , Q_3 и Q_4 , а также нормативный вес грунта Q_2 , расположенного на уступе стены. Эти силы Q_1 , Q_2 , Q_3 и Q_4 приложены в центрах тяжести каждого участка. Затем заменим временную нагрузку эквивалентным слоем грунта приведенной высоты $h_0 = \frac{p}{\gamma}$, где γ – объемный вес грунта.

Далее построим эпюру давления грунта. Так как все ступенчатые участки прямолинейны, достаточно построить только одну эпюру давления.

Для этого определим максимальную нормативную интенсивность давления грунта.

$$q_y = \gamma y \operatorname{tg}^2 \left(45^\circ - \frac{\varphi}{2} \right)$$

$$y = h_0 + h + h_1 \quad \text{получим}$$

$$q_{\max} = \gamma (h_0 + h + h_1) \operatorname{tg}^2 \left(45^\circ - \frac{\varphi^H}{2} \right)$$

где φ^H – нормативный угол внутреннего трения.

Аналогично находим нормативную минимальную интенсивность давления на уровне грунта при $h_0 = h$

$$q_{\min} = \gamma h \operatorname{tg}^2 \left(45^\circ - \frac{\varphi}{2} \right)$$

Соединим отрезки, равные q_{\max} и q_{\min} , прямой, получим трапециевидную эпюру давления грунта (рис. 57).

С противоположной стороны подпорной стены на высоте фундамента h , возникает активное давление грунта и отпор. Отпор в запас прочности не учитываем, т.к. он появляется в случае, когда стена уже сдвинулась, но это не допустимо.

Распор же является реально действующей силой, и максимальную нормативную интенсивность давления от него можно определить, подставив в формулу определения интенсивности вместо y - h_1 :

$$q_1 = \gamma h_1 \operatorname{tg}^2 \left(45^\circ - \frac{\varphi}{2} \right)$$

Эпюра давления грунта на h_1 будет иметь вид треугольника. Эту эпюру вычтем из общей эпюры давления. В результате получим, что на фундамент наружной грани подпорной стены действует равномерное давление грунта.

Для определения нормативной величины распора грунта общую эпюру давления грунта можно разбить на участки, для которых известно положение центра тяжести. В нашем случае площадь эпюры разбиваем на 2 прямоугольника и 1 треугольник. Нормативные величины распора грунта определим как площади эпюр давления:

$$E_1 = q_{\min} h; \quad E_2 = (q_{\max} - q_1 - q_{\min}) h/2; \quad E_3 = E_2 = (q_{\max} - q_1) h_1$$

Распоры E_1 , E_2 и E_3 прикладываем в центрах тяжести тех фигур, на которые расчленена эпюра давления грунта.

$$\ell_1 = h_1 + h/2;$$

$$\ell_2 = h_1 + h/3$$

$$\ell_3 = h_1/2$$

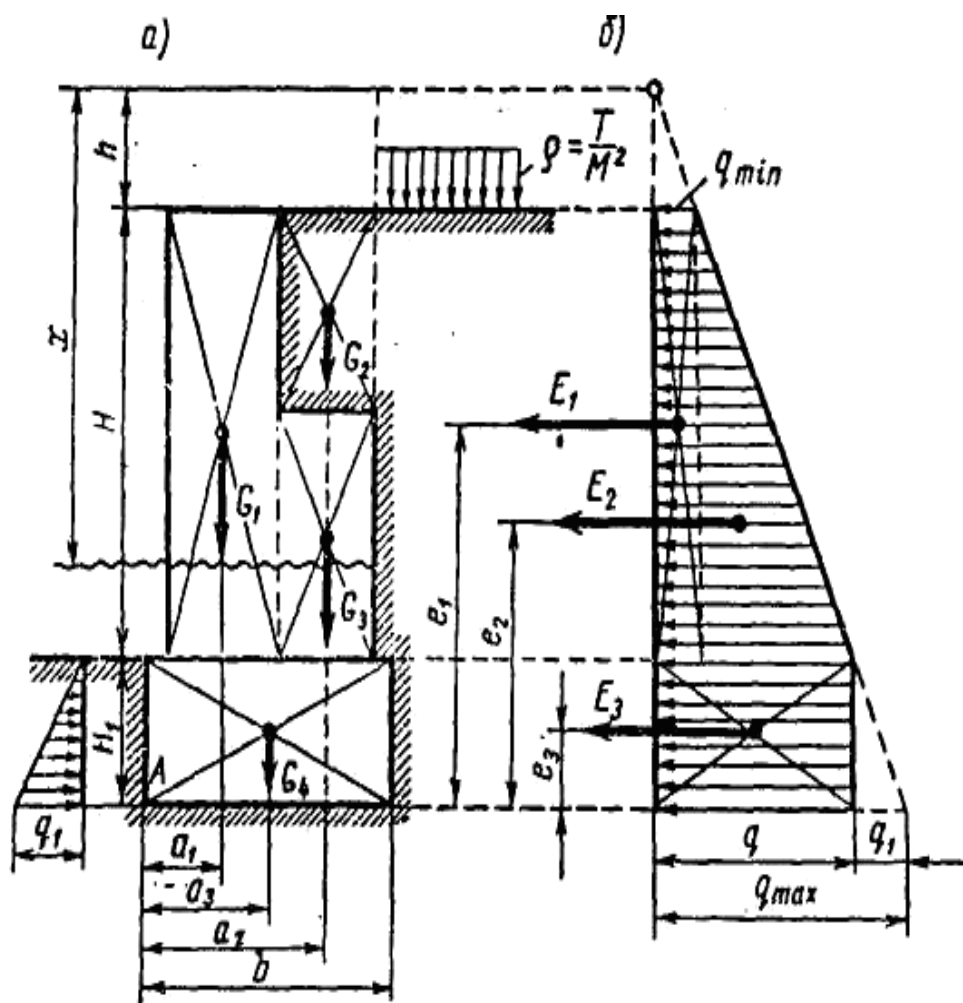


Рисунок 57

Расчет устойчивости подпорной стены сводится к проверке стены на опрокидывание и сдвиг от воздействия расчетных нагрузок.

Проверка на опрокидывание. В результате действия распора грунта подпорная стена может опрокинуться, наклоняясь относительно наружного ребра в (·) А. Опрокидывающий момент от нормативной нагрузки

$$M_{\text{опр}}^H = - (E_1 l_1 + E_2 l_2 + E_3 l_3)$$

От опрокидывания стена удерживается действием собственного веса, при этом удерживающий момент от нормативной нагрузки относительно той же (·) А

$$M_{\text{уд}}^H = Q_1 a_1 + Q_2 a_2 + Q_3 a_3 + Q_4 a_4$$

где a_1, a_2, a_3, a_4 – кратчайшие расстояния от (·) опрокидывания А до линии действия собственного веса.

Устойчивость подпорной стены на опрокидывание проверяют по формуле:

$$n M_{\text{опр}}^H \leq n_1 M_{\text{уд}}^H$$

где n – коэффициент перегрузки грунта, применяется не менее 1,2;

n_1 – коэффициент перегрузки (в данном случае недогрузки) собственного веса стены, равный 0,8.

В целях экономии материала большое расхождение величин левой и правой части формулы нежелательно.

Проверка на сдвиг. Нормативными сдвигающими стену силами являются распоры грунта E_1 , E_2 и E_3 , следовательно равнодействующая этих сил

$$\sum R_{\text{сдв}}^H = E_1 + E_2 + E_3$$

Удерживают стену от сдвига силы трения. Нормативная величина равнодействующей всех удерживаю

$$\sum R_{\text{уд}}^H = (Q_1 + Q_2 + Q_3 + Q_4) f ,$$

где f – коэффициент трения подошвы фундамента о грунт, $f = \tan \varphi$

Величина f обычно бывает 0,6-0,7, для основания из мокрой глины 0

,3.

Устойчивость подпорной стены на сдвиг проверяется по формуле

$$\sum R_{\text{сдв}}^H n \leq \sum R_{\text{уд}}^H n_1$$

где n и n_1 – коэффициенты перегрузки

$$n = 1,2 \quad \text{и} \quad n_1 = 0,8.$$

Расчет прочности подпорной стены и основания под ней

Подпорную стену и основание следует рассчитывать на прочность: действительные напряжения в любом сечении стены от расчетной нагрузки и среднее (осевое) давление на грунт основания от нормативной нагрузки не должны превышать соответствующего расчетного сопротивления (стены или основания).

Рассматривая какое-либо сечение, например, по подошве фундамента шириной $b=1$ м, замечаем, что в нем возникает центральное сжатие с изгибом.

Равнодействующая нормативных нормальных сил, вызывающих центральное сжатие:

$$N^H = Q_1 + Q_2 + Q_3 + Q_4$$

Нормальный изгибающий момент всех сил относительно оси изгиба $y-y$

$$M^H = (Q_2 + Q_3) Z_2 - Q_1 Z_1 - E_1 \ell_1 - E_2 \ell_2 - E_3 \ell_3$$

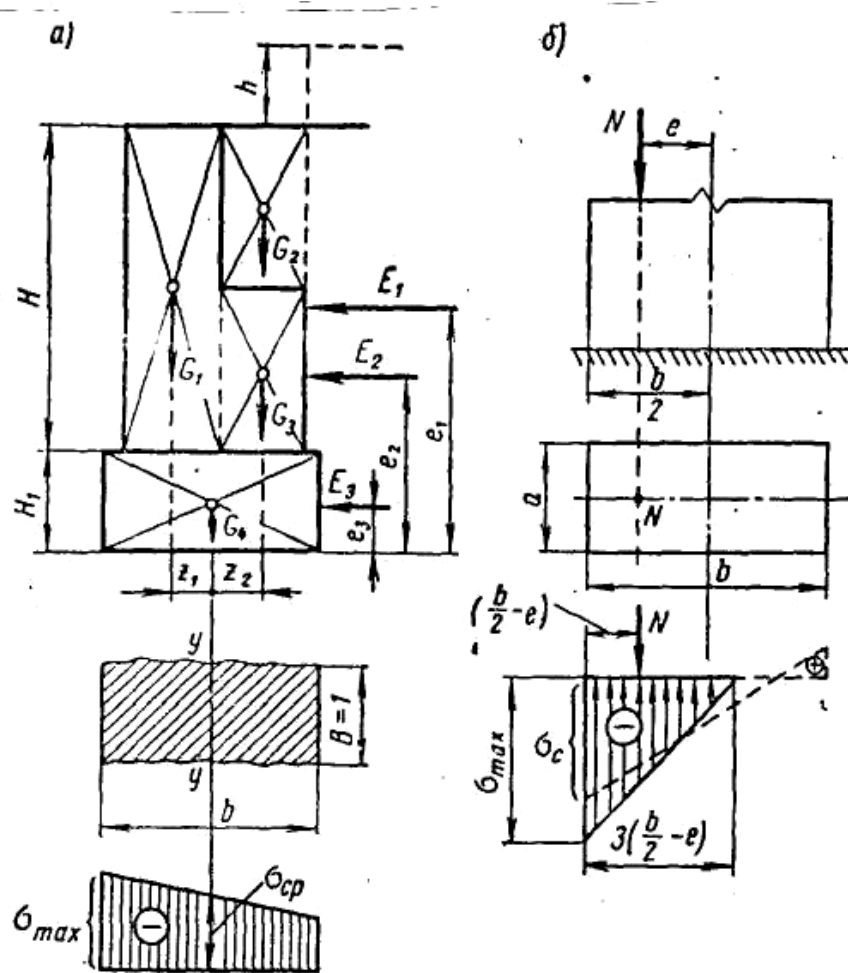


Рисунок 58

Прочность основания (грунта) будет обеспечена в следующих случаях:

1. когда осевое напряжение (давление) в основании

$$\sigma_{\text{ср}} = \frac{N^H}{F} \leq R$$

2. когда max (краевое) напряжение (давление)

$$\sigma_{\text{max}} = \frac{N^H}{F} + \frac{M^H}{W} \leq 1,2R$$

где F – площадь сечения подошвы фундамента = $B \times b$;

W – момент сопротивления сечения по подошве фундамента
 $= B \times b^2/2$;

R – расчетное сопротивление грунта основания.

Список использованных источников и литературы

СПИСОК ОСНОВНОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ганджунцев М.И. Техническая механика. Часть 1. Сопротивление материалов [Электронный ресурс]: учебное пособие/ М.И. Ганджунцев, А.А. Петраков, Л.П. Портаев— Электрон. текстовые данные.— М.: Московский государственный строительный университет, ЭБС АСВ, 2014.— 200 с.— Режим доступа: <http://www.iprbookshop.ru/30364.html>.— ЭБС «IPRbooks»
2. Максина, Е.Л. Техническая механика [Электронный ресурс]: учебное пособие/ Максина Е.Л.— Электрон. текстовые данные.— Саратов: Научная книга, 2012.— с.— Режим доступа: <http://www.iprbookshop.ru/6344>.— ЭБС «IPRbooks», по паролю
3. Мовнин М.С. Основы технической механики [Электронный ресурс]: учебник/ М.С. Мовнин, А.Б. Израелит, А.Г. Рубашкин— Электрон. текстовые данные.— СПб.: Политехника, 2016.— 289 с.— Режим доступа: <http://www.iprbookshop.ru/58853.html>.— ЭБС «IPRbooks»
4. Олофинская В.П. Техническая механика [Текст]: учебное пособие/ В.П. Олофинская. – 2-е изд., испр.и доп. – М.: ФОРУМ, 2007.-349 с.

Список дополнительной литературы

1. Вереина, Л.И. Техническая механика [Текст]: учебник для студ. сред. проф. образования / Вереина Л.И., М.М. Краснов. – 4-е изд., испр. и доп. – М.: Академия, 2011. -352 с.
2. Никитин, Е.М. Теоретическая механика для техникумов [Текст]: учебник/ Е.М.Никитин.- 10-е изд., перераб.- М.: Наука, 1978.- 416 с.
3. Портаев, Л.П. Техническая механика [Текст]: учебник для студ. сред. проф. образования / Л.П.Портаев, А.А.Петраков, В.Л.Портаев; под ред.Л.П.Портаева.- М.: Стройиздат, 1987.- 464 с.
4. Сетков, В.И. Сборник задач по технической механике [Текст] : учеб. пособие для студ. сред.проф. образования/ В.И. Сетков. – 2-е изд., стер. – М.: Академия, 2004. – 224 с.

ТОХАЕВА Мина Аскеровна

ТЕХНИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

Практикум для студентов специальности
08.02.01 Строительство и эксплуатация зданий и сооружений

Корректор Чагова О.Х.
Редактор Чагова О.Х.

Сдано в набор 08.07.2024 г.
Формат 60x84/16
Бумага офсетная.
Печать офсетная.
Усл. печ. л. 3,95
Заказ № 4912
Тираж 100 экз.

Оригинал-макет подготовлен
в Библиотечно-издательском центре СКГА
369000, г. Черкесск, ул. Ставропольская, 36

