МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«СЕВЕРО-КАВКАЗСКАЯ ГОСУДАРСТВЕННАЯ АКАДЕМИЯ»

П.А. Кочкарова

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ И ИНСТРУМЕНТАЛЬНЫЕ МЕТОДЫ ПОДДЕРЖКИ ПРИНЯТИЯ РЕШЕНИЙ

Учебно-методическое пособие для обучающихся по направлению
подготовки 09.04.03 Прикладная информатика,
профиль «Прикладная информатика в экономике и управлении»

Черкесск
2025

УДК 19.816
ББК 22.185.1
К-75

Рассмотрено на заседании кафедры Прикладной информатики
Протокол № 1 от 31. 08. 2024 г.
Рекомендовано к изданию редакционно-издательским советом СКГА.
Протокол № 27 от 07. 11. 2024 г.

Рецензенты: Хапаева Л.Х. – к.ф.-м.н., доцент

К-75 **Кочкарова, П.А.** Математические и инструментальные методы поддержки принятия решений: учебно-методическое пособие для обучающихся по направлению подготовки 09.04.03 Прикладная информатика, профиль «Прикладная информатика в экономике и управлении» / П.А. Кочкарова. – Черкесск: БИЦ СКГА, 2025. – 44 с.

Данное учебно-методическое пособие содержит необходимый теоретический и практический материал для изучения дисциплины «Математические и инструментальные методы поддержки принятия решений» обучающихся по направлению подготовки 09.04.03 Прикладная информатика, профиль «Прикладная информатика в экономике и управлении».

В учебно-методическом пособии содержатся тестовые задания, которые помогают закрепить полученные теоретические и практические знания по дисциплине.

УДК 19.816
ББК 22.185.1

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Учебно-методическое пособие предназначено для обучающимся по магистерской программе «Прикладная информатика в экономике и управлении» направления подготовки 09.04.03 Прикладная информатика при изучении дисциплины «Математические и инструментальные методы поддержки принятия решений».

Основная задача учебного пособия состоит в классификации ситуаций принятия решений, построении, если это возможно, математических моделей для этих ситуаций и изучении математических методов, которые можно применить для выбора оптимального решения в конкретной ситуации.

Учебно-методическое пособие содержит основные математические методы и модели принятия управленческих решений в условиях определенности, неопределенности, риска, конфликта. Рассмотрена задача о назначениях. Пособие можно рекомендовать студентам при изучении дисциплин, связанных с принятием управленческих и иных решений, аналитического планирования, решением задач оптимизации.

Учебно-методическое пособие содержит теоретический материал, примеры решения задач, задачи для самостоятельного решения, тестовые задания.

Тема 1. Введение в теорию принятия решений. Основные понятия

Принятие решений – это основная функция человеческой деятельности. Постоянно, ежесекундно, сознательно или подсознательно человек принимает решения. Поэтому очень важно изучение теории и методов принятия решений, как математических, так и социальных, психологических, политических и других.

Под принятием решений понимают особый процесс человеческой деятельности, направленный на выбор наилучшего варианта действий.

Задача принятия решения лежит целиком либо на конкретном человеке, либо на группе людей, работающих над некоторой проблемой. Человек (или группу лиц), фактически осуществляющего выбор наилучшего варианта действий, называют лицом, принимающим решения (ЛПР). Часто в литературе, если решение принимает несколько человек, то их называют группой, принимающей решения. Но для математической модели совершенно не важно, один или несколько субъектов решают проблему, поэтому под ЛПР будем понимать как одного, так и несколько лиц, считая их обобщением одного субъекта.

Очевидно, что процесс принятия решений очень сложен и зависит от многих факторов и характеристик ЛПР: его характера, опыта, темперамента, видения проблемы, интуиции, азартности, настроения и многого-многого другого. Поэтому, полный анализ деятельности ЛПР при принятии решения привести крайне сложно. Однако, этот процесс во многих случаях имеет некоторые общие закономерности, что позволяет строить математическую модель разрешения некоторых проблемных ситуаций и рассчитать оптимальное из решений, добиваясь наилучшего результата.

Основную роль при принятии решения играет ЛПР. Однако существуют другие субъекты, которые играют немало-важную роль при принятии решений. Например, следует выделить как отдельную личность владельца проблемы – человека, который несет ответственность за принятые решения. Часто владелец проблемы является также и ЛПР. Но бывают ситуации, когда владелец проблемы является лишь одним из нескольких человек, принимающих участие в ее решении, либо совсем не участвует в принятии решения. Например, многие задачи деятельности организации решают заместители ее руководителя или специализированные отделы, однако за результаты этой деятельности отвечает непосредственно руководитель.

В процессе принятия решений можно выделить также эксперта – независимого лица, являющегося специалистом в некоторой области, который может дать рекомендацию или экспертную оценку ЛПР по имеющейся проблеме и эта информация может серьезно повлиять на решение. Так, эксперты могут помочь бизнесмену в оценке экономической эффективности выпуска новой продукции или опытный адвокат может дать рекомендации юристу при ведении дела.

Кроме того, в принятии решений не малую роль играет инициативная группа – непосредственное окружение ЛПР, которая заинтересована в результате, и которая иногда очень значительно влияет на ЛПР.

Любые ситуации, требующие принятия решения, содержат, как, большое число неопределенных факторов, которые оказывают влияние, как на формальную постановку задачи, так и на средства ее решения. Эти неопределенные факторы можно в самом общем виде разбить на три группы.

Прежде всего, это так называемая неопределенность природы, т.е. факторы людям попросту неизвестные или от них не зависящие. Затем – неопределенность человека, который может вести себя непоследовательно, противоречиво, допускать ошибки, зависеть от других лиц (партнеров, противников и т. д.), чьи действия он не может полностью учесть или предвидеть. И наконец, неопределенность целей, которые могут различаться и не совпадать друг с другом. Например, авиаконструкторы, проектируя самолет, должны учитывать его целевое назначение, заданные показатели скорости, грузоподъемности и дальности полета, условия безопасности и комфортности для экипажа и пассажиров, факторы экономичности и технологичности производства и эксплуатации самолета, экологические требования и многие другие обстоятельства.

Полностью свести подобные задачи с неопределенностью к корректно поставленным математическим задачам нельзя в принципе. Чтобы сделать возможным их решение, надо как-то ограничить, уменьшить или, как говорят, «снять» неопределенность.

Для этого проводится содержательный анализ проблемной ситуации, делаются какие-либо предположения и вводятся упрощения в постановку задачи. И именно средства, входящие в состав тех или иных методов принятия решений, очень часто позволяют получить дополнительную информацию, нужную для формализации реальной проблемной ситуации и приведения ее к виду, пригодному для использования математических методов и получения приемлемого результата.

При построении математической модели принятия решения введем два основных понятия теории принятия решений.

Альтернативой или стратегией называется вариант, конкретные правила действий, которые возможны для ЛПР при принятии решений. Сам процесс принятия решений состоит в выборе ЛПР оптимальной альтернативы, наиболее выгодной для него. Например, при взятии кредита директором предприятия его альтернативами служат банки, готовые предоставить кредит. При защите обвиняемого альтернативами адвоката служат стратегии поведения, выбираемые им для защиты в суде. Альтернатив может быть несколько, все их можно перечислить и четко определить – например, какой выбрать банк для кредита из нескольких имеющихся, сколько яиц нужно сварить для салата. Такие альтернативы назовем дискретными. Однако, количество альтернатив может быть и бесконечным, все их перечислить нельзя, они могут изменяться непрерывно – например, сколько денег взять в кредит из банка, сколько минут нужно варить яйца для салата. Такие альтернативы назовем непрерывными.

Критериями оценки альтернатив (или просто критериями) называют показатели привлекательности (или непривлекательности) альтернатив для участников процесса выбора решения, в частности, для ЛПР. Именно оценка критериев служит базой для выбора наилучшей альтернативы. Например, при выборе банка руководитель предприятия использует такие критерии, как процентная ставка, надежность банка, условия предоставления кредита и др. критерии. При выборе адвокатом стратегии поведения в суде учитываются такие критерии как тяжесть предъявленного объявления, личность обвиняемого, может быть, личностные характеристики обвинителя или судьи и другие факторы.

Критерии могут быть количественные и качественные. Если показатель привлекательности можно точно оценить численным значением пропорциональным показателю, то он является количественным. Например, количественными являются критерии связанные с показателями цены, прибыли или затрат (рубли), времени (часы, дни и т.д.), размеры (метры), площади (м2) и подобные им. Однако часто показатели критериев нельзя точно связать с каким-либо числом. В этом случае он является качественным. Его в этом случае можно лишь охарактеризовать терминами сравнения: «лучше – хуже», «дальше-ближе», «больше-меньше» и другими. Для применения математических методов анализа качественных критериев необходимо задать им количественные характеристики. Для этого применяются экспертные оценки критериев, при которых специалисты в данной области либо оценивают по n-мерной шкале показатель привлекательности критериев для каждой альтернативы, либо сравнивают попарно все показатели критериев для каждой альтернативы и рассчитывают вес альтернатив по каждому критерию. Как это делать на практике и какие существуют методы обработки результата, приводящие к принятию оптимального решения, будет рассмотрено далее.

В профессиональной деятельности выбор критериев часто определяется многолетней практикой, опытом. В подавляющем большинстве задач имеется достаточно много критериев оценок вариантов решений. Эти критерии могут быть однонаправленными, противоречивыми или независимыми. Если улучшение одного критерия приводит к улучшению другого, то критерии однонаправленные, например объемы продаж и прибыль, опыт юриста и шанс на успех. Если же нельзя одновременно улучшить оба критерия (улучшая один, второй ухудшается), то критерии противоречивые, например цена и качество, гонорар адвоката и его профессионализм. Часто бывает, что критерии никак не влияют друг на друга и для одной группы альтернатив одновременно улучшаются, а для другой – изменяются в разных направлениях.

Если для альтернативы А все критерии имеют лучшие показатели, чем эти же критерии для альтернативы В, то альтернатива А называется доминирующей, а В – доминируемой.

В такой ситуации доминируемую альтернативу В можно исключить из рассмотрения и вывести из задачи.

Например, некто желает приобрести автомобиль и у него есть три варианта покупки: автомобили А, В и С. В качестве критериев покупатель определяет два: цена и качество. Оценки критериев для альтернатив представлены в таблице.

Автомобиль (***альтернатива***)	***Критерий***	
	Цена (тыс. руб.)	Качество (оценка по 10 – бальной шкале)
А	85	5
В	110	7
С	95	4

Видно, что автомобиль А лучше чем С по обоим критериям: и по цене (дешевле) и по качеству (лучше). Следовательно, альтернатива автомобиля А доминирует над С и вопрос покупки автомобиля С можно отбросить, выведя эту альтернативу из задачи. Далее, можно определять выбор лишь среди автомобилей А и В.

Однако, очень часто, особенно при большом количестве альтернатив и критериев, нельзя определить альтернативы доминирующие или доминируемые над остальными, и абсолютно оптимального решения выбрать нельзя. Здесь нужно идти на компромисс, жертвуя показателями привлекательности одних критериев за счет увеличения привлекательности других. Множество альтернатив, среди которых нельзя выбрать одну, доминирующую или доминируемую над всеми остальными по всем критериям, называется множеством Парето или областью Парето.

Выбор оптимальной альтернативы из множества Парето представляет из себя непростую задачу. Для ее решения разработано множество математических методов.

Тема 2. Принятие решений в условиях полной определенности

Рассмотрим ситуацию, когда имеется полная информация о всех альтернативах по всем критериям. Данное условие в математической модели предполагает, что каждый критерий измеряется количественно и его показатель привлекательности для каждой альтернативы пропорционален его количественной оценке.

Рассмотрим вначале простейший случай, когда оценки привлекательности альтернатив по каждому критерию качественные и имеются экспертные оценки критериев по одной и той же (например десятибалльной) шкале. Пусть имеется n альтернатив и k критериев. Обозначим - оценку i-й альтернативы по j-му критерию. Очевидно, что критерии имеют различную важность. Одни оказывают большее влияние на принятое в результате решение, другие меньшее. Назовем степень важности каждого критерия его весом. Пусть вес j-го критерия равен . Вес критерия измеряется по любой пропорциональной шкале (например от 0 до 1 или по десятибалльной или любой другой шкале). Веса критериев определяют либо эксперты, либо непосредственно ЛПР. Методы определения экспертных оценок альтернатив по критериям и весов критериев будут рассмотрены далее. ij U j W

Итак, если известны оценки альтернатив, веса критериев и если решается задача на максимизацию, то есть чем выше оценка альтернативы, тем она более привлекательна, то для принятия оптимального решения нужно вычислить функции полезности каждой альтернативы по формулам:

$$F_i = \sum_{j=1}^{k} U_{ij} W_j, \qquad i = 1,2,\dots,n.$$

и принимается та альтернатива, для которой функция полезности максимальна. Если решается задача минимизации (чем меньше оценка альтернатив по критериям, тем привлекательнее альтернатива), то выбирается альтернатива с меньшей функцией полезности. Рассмотрим пример.

Пример 1. Директор предприятия желает заключить договор с одной из ремонтно-сервисных компаний на обслуживание автоматизированной сборочной линии. Ему предлагают свои услуги четыре компании, которые условно обозначим A, B, C и D. Для выбора стороны по договору директор выделяет несколько критериев. В первую очередь важна стоимость обслуживания, гарантийные обязательства и прочие накладные расходы, которые в совокупности назовем «Финансовые условия», директор считает их вес наибольшим и по единичной шкале оценивает в W_1=0,8. Также немаловажна экспертная оценка надежности компании, их репутация. Данный критерий имеет оценку веса W_2=0,5. Кроме того нельзя не учесть такой критерий как быстрота реагирования, то как поставлена система обслуживания линии, как быстро устраняются неполадки и осуществляется наладка. Вес этого критерия W_3=0,3. Оценки альтернатив по каждому критерию (чем выше, тем привлекательнее альтернатива) приведены в таблице:

Альтернативы	Оценки критериев (10-балльная шкала)		
	Финансовые условия	Репутация	Быстрота реагирования
Кампания A	4	7	9
Кампания B	8	3	8
Кампания C	6	8	4
Кампания D	7	2	9

Рассчитываем функции полезности для каждой альтернативы:

$$F_A=4\cdot 0{,}8+7\cdot 0{,}5+9\cdot 0{,}3=9{,}4$$
$$F_B=8\cdot 0{,}8+3\cdot 0{,}5+8\cdot 0{,}3=10{,}3$$
$$F_A=6\cdot 0{,}8+8\cdot 0{,}5+4\cdot 0{,}3=10{,}0$$
$$F_D=7\cdot 0{,}8+2\cdot 0{,}5+9\cdot 0{,}3=9{,}3$$

Видно, что для второй альтернативы функция полезности максимальна, поэтому рациональнее всего ее принять и заключить договор с компанией B.

Как видно из примера, все показатели привлекательности критериев качественные и поэтому для количественной оценки использованы их экспертные оценки по десятибалльной шкале, то есть оценки имеют одинаковую размерность (они безразмерны). Другая ситуация возникает, когда оценки разных критериев имеют разную размерность, часть из них являются натуральными (например, один критерий оценивается в рублях, другой – в минутах, третий – в экспертных баллах и т.д.). Для их сравнения и включения в функции полезности на равных (точнее пропорциональных весам) условиях существует рад методов, которые имеют общее название методов нормализации. Под нормализацией критериев понимается такая последовательность процедур, с помощью которой все критерии приводятся к единому, безразмерному масштабу измерений. Рассмотрим один из наиболее часто применяемых на практике методов нормализации.

Предположим, что имеется n альтернатив и k критериев. Обозначим U_{ij} – оценку i-й альтернативы по j-му критерию. Пусть оценки альтернатив по критериям имеют различные размерности. Введем обозначение

$$\widehat{U_{ij}} = \max_i U_{ij}$$

– максимальное значение j-го критерия по каждой альтернативе, а

$$\widetilde{U_{ij}} = \operatorname{mix}_j U_{ij}$$

– минимальное значение j-го критерия по альтернативам. Тогда введем нормализованные оценки альтернатив по критериям.

В случае максимизации критериев (чем больше показатель, тем лучше) из каждого элемента столбца матрицы U_{ij} вычитают минимальный элемент данного столбца и результат делится на разницу между максимальным и минимальным элементами этого столбца:

$$u_{ij} = \frac{U_{ij} - \breve{U}_j}{\widehat{U}_j - \breve{U}_j}$$

В случае минимизации критериев (чем меньше показатель, тем лучше), нормализованные оценки равны:

$$u_{ij} = \frac{\widehat{U_{\imath \jmath}} - U_{ij}}{\widehat{U}_{\jmath} - \breve{U}_{\jmath}}$$

то есть из максимального элемента каждого столбца матрицы U_{ij} вычитают каждый элемент этого столбца и результат делится на разницу между максимальным и минимальным элементами столбца.

В результате нормализации, вне зависимости, ведется максимизация или минимизация критерия, альтернатива, имеющая наилучший для ЛПР показатель привлекательности по любому критерию получает оценку 1, наименее привлекательная имеет оценку 0, а остальные альтернативы имеют промежуточные оценки от 0 до 1 пропорционально их привлекательности между показателями наилучшей и наихудшей альтернатив.

Функции полезности каждой альтернативы F_i вычисляются по формулам (1), но с нормализованными показателями привлекательности,

$$F_i = \sum_{j=1}^{k} u_{ij} W_j, \qquad i = 1,2, \dots, n.$$

где W_j – веса критериев. Принимается та альтернатива, для которой функция полезности максимальна. Рассмотрим пример.

Пример 2. Сотовая компания, открывая свое представительство в городе Н. выбирает помещение, которое собирается снять в аренду для своего офиса. Имеется несколько альтернатив: *центр города* **A**, *парковая зона* **B**, *индустриальный район* **C**, *район ранка* **D**. Рассматриваются следующие критерии: *арендная плата* (тыс. руб./год.), *площади помещения* (кв. м.), *доступность для клиентов* (балл из 10), *состояние помещения* (балл из 10). Оценки альтернатив по критериям, а также веса критериев (по 10-балльной системе) приведены в таблице:

Альтер-натива	Критерии (матрица U_{ij})			
	Аренда	Площади	Доступность	Состояние
A	130	95	9	7
B	65	110	5	4
C	80	90	6	6
D	100	100	8	5
Вес	8	6	9	5

Проводим нормализацию показателей альтернатив по критериям. Для первого критерия (аренда), который минимизируется, максимальный элемент равен 130, минимальный 65. Данный критерий минимизируется, поэтому от максимального элемента первого столбца матрицы U_{ij} (который равен

$\widehat{U_{ij}} = 130$ отнимаем каждый элемент этого столбца отнимаем и делим на разность 130-65=65. Для второго элемента (площадь), который максимизируется, от каждого элемента второго столбца отнимаем минимальный элемент этого столбца, равный 90 и делим на разность максимального и минимального элементов 110-90=20. Аналогично рассчитывая нормализованные показатели третьего и четвертого критериев, получаем матрицу нормализованных показателей:

Альтер-натива	Нормализованный критерии (матрица u_{ij})			
	Аренда	Площади	Доступность	Состояние
A	0	0,25	1	1
B	1	1	0	0
C	0,77	0	0,25	0,67
D	0,46	0,5	0,75	0,33

В результате, рассчитанные с учетом весов функции полезности равны:

F_A=0·8+0,25·6+1·9+1·5=15,5

F_B=1·8+1·6+0·9+0·5=14

F_A=0,77·8+0·6+0,25·9+0,67·5=11,76

F_D=0,46·8+0,5·6+0,75·9+0,33·5=15,44

Видно, что альтернатива А (центр города) наилучшая, т.к. ее функция полезности максимальна.

Задачи для самостоятельного решения

1. Частный предприниматель открыл новый продовольственный магазин. При этом необходимо заключить долгосрочный договор с одной из оптовых баз по поставке продукции. В городе имеется пять оптовых баз: A,B,C,D и E. В качестве альтернатив, определяющих вы-бор базы выступают: *широта ассортимента* (К1); *кредитные и финансовые условия* (К2); *сервисные и транспортные условия* (К3); *репутация и надежность* (К4). По всем критериям были получены экспертные оценки в баллах по 10-балльной системе. Также имеются оценки весов критериев.

Критерий / Альтернатива	**К1**	**К2**	**К3**	**К4**
A	9	4	5	6
B	7	6	5	4
C	3	8	6	5
D	4	9	4	7
E	6	5	7	2
Вес	7	8	6	3

С какой базой лучше всего заключить договор?

2. Негосударственное образовательное учреждение в связи с расширением желает приобрести здание под учебный корпус. Имеют-ся варианты покупки четырех зданий: *в центре города* – А; *в жилом секторе* –

B; *в промышленной зоне* C; *на окраине города* D. В качестве критериев выступают: *цена покупки* (К1, млн.руб.), *площадь строения* (К2, кв.м.), *место расположения* (К3, минуты от метро), *качество строения* (К4, балл по 10-балльной шкале). Результаты оценок альтернатив по критериям и веса критериев приведены в таблице:

Критерий / Альтернатива	К1	К2	К3	К4
A	12	10500	25	4
B	11	12000	20	9
C	9	7500	15	8
D	7	6000	10	6
Вес	8	7	9	6

Какое здание следует выбрать?

3.Директор малого предприятия хочет выбрать адвоката для его представления в суде. Имеется 5 кандидатур A1, A2, A3, A4, A5. В качестве критериев выступают **Авторитет**, **Финансовые запросы** и **Репутация**, экспертные оценки по которым по 10-бальной шкале при-ведены в таблице:

Критерий / Альтернатива	**Авторитет**	**Финансовые запросы**	**Репутация**
A1	8	4	5
A2	3	6	8
A3	5	5	3
A4	2	7	9
A5	6	4	6
Вес критерия	7	8	4

Какого адвоката следует выбрать?

4.Торговая фирма выбирает помещение для открытия нового магазина. имеется четыре варианта (альтернативы) A1, A2, A3, A4. В качестве критериев выступают: *Цена строения* - К1 (тыс. руб. за м2), *Площадь строения* - К2 (м2), *Месторасположение* – К3 (балл из 10, чем больше, тем лучше), *Состояние здания* – К4 (балл из 10, чем больше, тем лучше). Показатели качества альтернатив по критериям и веса критериев приведены в таблице:

Альтернатива	**Критерии**			
	К1	**К2**	**К3**	**К4**
A1	15	80	8	3
A2	11	110	5	7
A3	14	90	7	6
A4	10	100	2	4
Вес	8	5	9	7

Выбрать оптимальный вариант помещения.

Фермер желает выбрать участок земли для посева кукурузы. Имеется возможность взять в аренду один из четырех свободных уча-стков: A, B, C и D. В качестве критериев ЛПР выбрал пять: стоимость аренды (тыс.руб.), качество чернозема (балл), толщина слоя чернозема (см), доступность (удаленность от трассы, балл, чем больше, тем ху-же), рельеф (балл, чем больше, тем хуже). Оценки альтернатив по кри-териям и веса критериев имеют вид:

Альтернатива	Критерии				
	Аренда	Качество почвы	Толщина почвы	Доступность	Рельеф
A	12	4	55	4	7
B	7	2	26	4	4
C	19	7	75	5	6
D	22	9	105	7	5
Вес	8	6	3	5	7

Определить наиболее оптимальный участок для фермера.

Тема 3. Принятие решений в условиях риска

Рассмотренная ранее ситуация подразумевала, что ЛПР обладает полной информацией (своими оценками или экспертизами) о рассматриваемой проблеме. Однако, часто бывает, когда степень привлекательности альтернативы по тому или иному критерию зависит от случайных факторов. Например, физическое лицо, желающее положить деньги в банк, становится над проблемой выбора: положить деньги в Сбербанк РФ, где процент дохода минимален, но надежность вклада составляет 100 %, или рискнуть, положив деньги в коммерческий банк и получить по ним больший процент, но рискуя иметь проблемы с выплатами вклада, в связи с возможным банкротством банка.

Если ЛПР не знает, как развернется ситуация по той или иной альтернативе при принятии решения, но имеются объективные вероятности развития возможных ситуаций, то такую математическую модель будем называть моделью принятия решений в условиях риска.

При анализе такой модели удобно пользоваться графическим представлением, называемым деревом решений.

Дерево решений представляет собой граф (графическую схему), которая состоит из дуг (линий), каждая из которых соответствует возможному варианту развития ситуации, и вершин, изображаемых окружностями или квадратами, каждая из которых соответствует «раз-вилке», когда развитие ситуации может принять тот или иной сценарий. Дерево строится слева направо, начиная с корневой ветки, кото-рая соответствует началу принятия решения. Если при развитии какой либо ситуации возможны несколько вариантов ее реализации, при этом выбор варианта осознанно осуществляет ЛПР, то на дереве событий эту «развилку» будем обозначать квадратом. Если же выбор вари-анта развития ситуации осуществляется благодаря случаю и ЛПР на него не влияет, то такую «развилку» будем обозначать окружностью. Под каждой линией указывается вероятность реализация соответствующему этой линии сценарию развития ситуации. Таким образом, все возможные сценарии развития событий будут отображены на дереве решений в виде ветвей этого дерева.

Последние правые ветви дерева решений соответствуют конкретным исходам, результатам принятого решения. В большинстве случаев этот результат можно измерить количественно, например, если он имеет смысл прибыли, вероятности успеха, степени риска. Если показатель привлекательности результата качественный, то его можно измерить путем экспертной оценки. Проставим в конце правых крайних ветвей дерева показатели их привлекательности, которые назовем весами этих ветвей.

На следующем этапе нужно проставить веса остальных ветвей. Процесс взвешивания производится справа налево, от крайних ветвей дерева к их корню. При этом нужно соблюдать следующие правила:

1. Если взвешиваемая ветка расходится на несколько в результате принятого ЛПР решения (развилка – квадрат), то вес ветки равен

максимальному весу веток, исходящих из нее, при этом ветки с меньшими весами обрубаются.

2. Если взвешиваемая ветка расходится из-за случайных обстоятельств (развилка - круг), то ее вес равен сумме произведений весов всех исходящих из нее веток, умноженных на вероятности этих веток.

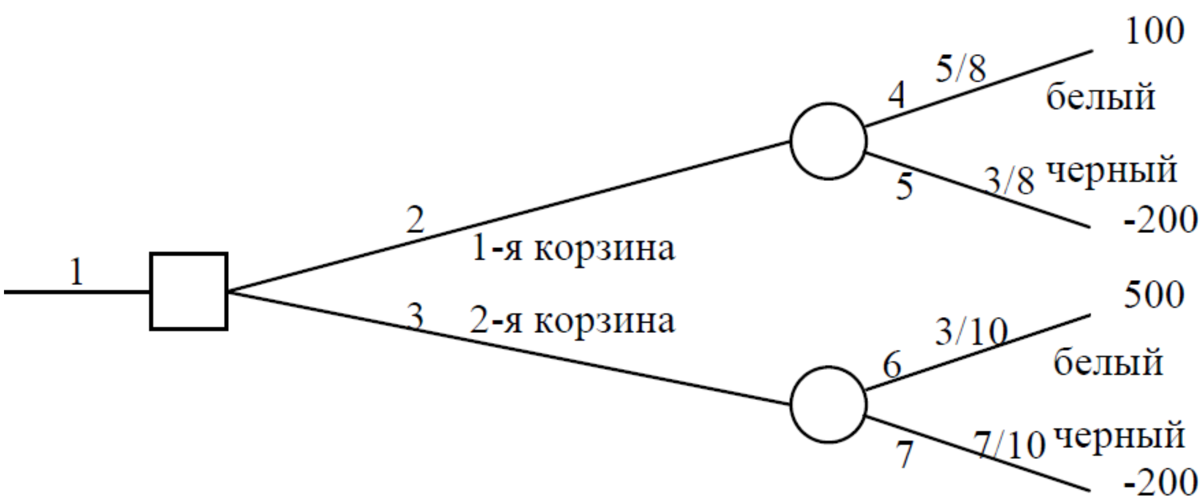
3. Если какая-либо ветка имеет дополнительных вес (например из-за промежуточных дополнительных затрат), то этот вес добавляется к рассчитанному.

Взвешивание веток производится до тех пор, пока не будет взвешена последняя левая корневая ветка. Ее вес и есть средний выигрыш ЛПР, если он будет действовать оптимально, принимая решения по «не отрубленным» веткам дерева решений.

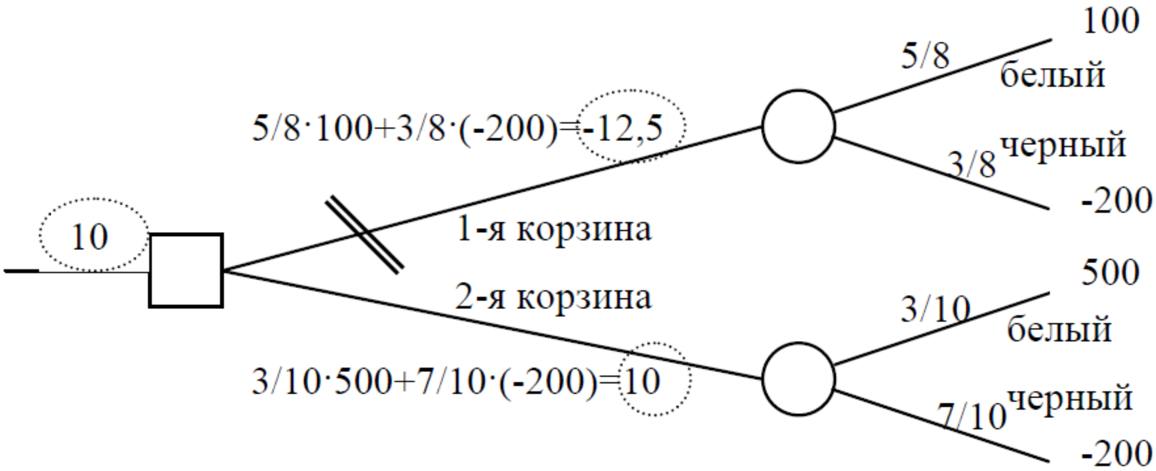
Пример 1.

ЛПР должен выбрать одну из двух корзин. В первой корзине имеются пять белых шаров и три черных, во второй – три красных и семь черных. ЛПР может выбрать корзину по своему желанию, однако, шары из нее извлекаются случайно. Если ЛПР из выбранной корзины достанет белый шар, то получит 100 рублей, если красный, то 500 рублей, если черный, то отдаст 200 рублей. Какую корзину рациональнее всего выбрать?

Дерево решений начинаем строить от корневой ветки (номер 1, для удобства ветки пронумерованы), которая соответствует началу принятия решения. Далее ЛПР должен выбрать корзину. Этот выбор осознанный, поэтому развилка обозначена квадратом. Перемещаясь по ветки 2, соответствующей первой корзине подходим к ситуации, когда ЛПР наудачу выбирает шар. Этот выбор случаен, поэтому развилка обозначается окружностью. У линии указываем вероятности исходов – 5/8 и 3/8 соответственно. В конце линий указываем их веса – выигрыши ЛПР при том или ином исходе: 100 и -200. Аналогично размечаем ветви 3,6 и 7.



Рассчитываем веса других ветвей дерева решений. Из ветви 2 выходят две ветки со случайным выбором, поэтому в соответствии с правилом 2 ее вес 5/8*100+3/8*(-200)=-12,5. По аналогии, вес ветки 3 равен 10. Из корневой ветки 1 выходят две ветки с неслучайным выбором, поэтому ее вес равен максимальному из их весов, то есть 10. Ветка 2 с меньшим весом обрубается.



Задача решена. ЛПР должен выбирать вторую корзину и его средний выигрыш составит 10 руб.

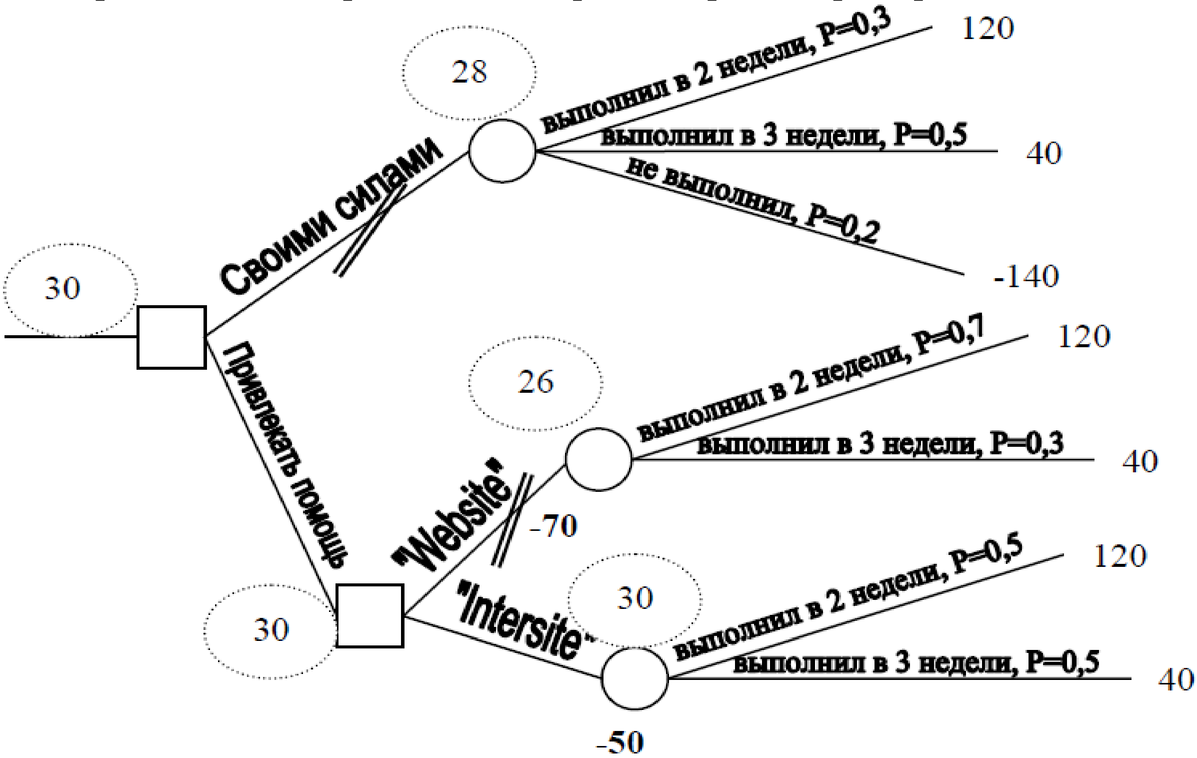
Пример 2.

Частный предприниматель, руководитель компании, которая занимается разработкой Интернет – сайтов для предприятий и организаций получил крупный заказ. При этом поставлены жесткие сроки – разработать сайт в течении двух недель. Если это удается, то предприниматель получает прибыль 120 тыс. руб. Однако, в соответствии с договоренностью, если срок разработки сайта будет продлен на неделю, то прибыль составит лишь 40 тыс. руб. Если заказ не выполнен и за 3 недели, то договор расторгается и предприниматель терпит убытки, связанные с невыполнением заказа и штрафными санкциями в сумме 140 тыс. руб.

По оценкам сотрудников организации, оценка шансов того, что заказ будет выполнен своими силами за две недели составит 30 %. Шанс выполнить заказ за три недели оценивается в 50%. Однако, можно воспользоваться услугами сотрудников посторонней организации, которые значительно ускорят время выполнения заказа. Можно привлечь сотрудников фирмы «WebSite», помощь которой гарантирует выполнение заказа за 3 недели, а выполнение заказа за 2 недели оценивается с вероятностью 70%. Можно заключить договор с фирмой «Intersite», помощь которой поможет выполнить заказ за 2 недели со 50 % вероятностью и гарантируют его выполнение за 3 недели. Помощь фирмы «Website» оценивается в 70 тыс. руб. (вне зависимости от срока выполнения заказа), а фирмы «Intersite» - в 50 тыс. руб. Какое решение оптимальнее всего принять предпринимателю?

Решение

Предприниматель должен сделать выбор: либо выполнять заказ своими силами, либо привлекать помощь. Если будет привлечена помощь, то нужно определиться, какая фирма будет участвовать в выполнении заказа. В результате, рассчитав все прибыли и издержки, строим дерево решений.



Рассчитав его, делаем вывод, что нужно привлекать помощь в виде компании Intersite, что даст среднюю прибыль в 30 тыс. руб.

Тема 4. Принятие решений в условиях неопределенности

В задачах принятия решения в условиях риска известны оценки вероятностей, с которыми можно ожидать тот или иной исход при их случайном выборе. Однако, во многих практических задачах очень часто совершенно не известно, с какой вероятностью можно ожидать возможные сценарий развития ситуации/

Математическую модель принятия решений при таких условиях называют методом принятия решений в условиях неопределенности.

Предположим, что ЛПР имеет п альтернатив решения ситуации, которые обозначим A_1 , A_2 ,..., A_n. Результат выбора (выигрыш ЛПР) зависит от того, как будит развиваться ситуация, на которую ЛПР повлиять ни как не может. Предположим, что ЛПР выделяет m вариантов развития ситуации, которые обозначим S_1 ,S_2 ,...,S_m. Данные варианты в теории принятия решений называют «Состояниями природы», т.к. в большинстве реальные задачи этого типа связаны с погодными, климатическими, социальными и другими неопределенностями.

Допустим, что известен результат для ЛПР (выраженный количественно) при каждой альтернатива A_i и развитии ситуации B_j .

Обозначим его a_{ij} . Получаем матрицу $A = (a_{ij})$, которую называют матрицей выигрышей или матрицей потерь, в зависимости от того, максимизируется или минимизируется результат для ЛПР.

В соответствии с реальными условиями, существует несколько критериев принятия решений в условиях неопределенности. Для более наглядного описания этих методов, рассмотрим их на примерах.

Изучим сначала критерии максимизации результата, когда показатели привлекательности $a_{i\,j}$ чем больше, тем лучше для ЛПР.

Пример 1.

Директор торговой фирмы, продающей телевизоры марки «Zarya» решил открыть представительство в областном центре. У него имеются альтернативы либо создавать собственный магазин в отдельном помещении, либо организовывать сотрудничество с местными торговыми центрами.

Всего можно выделить 5 альтернатив решения: A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 . Успех торговой фирмы зависит от того, как сложится ситуация на рынке предоставляемых услуг. Эксперты выделяют 4 возможных варианта развития ситуации $S_1, S_2, S_3, S_4,$ Прибыль фирмы для каждой альтернативы при каждой ситуации представлена матрицей выигрышей $a_{i\,j}$ (млн. р./год).

B_j / A_i	B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	8	12	14	5
A_2	9	10	11	10
A_3	2	4	9	22
A_4	12	14	10	1
A_5	15	6	7	14

Рассмотрим основные критерии, позволяющие выбирать оптимальную альтернативу для принятия решения.

1) Критерий Лапласа.

Он основан на предположении, что каждый вариант развития ситуации (состояния «природы») равновероятен. Поэтому, для принятия решения, необходимо рассчитать функцию полезности для каждой альтернативы, равную среднеарифметическому F_i показателей привлекательности по каждому «состоянию природы»:

$$F_i = \frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m} a_{ij}$$

Выбирается та альтернатива, для которой функция полезности максимальна. Для примера:

F_1=1/4(8+12+14+5)=9,75

F_2=1/4(9+10+11+10)=10

F_3=1/4(2+4+9+22)=9,25

F_4=1/4(12+14+10+1)=9,25

F_5=1/4(15+6+7+14)=10,5

Видно, что функция полезности максимальна для альтернативы A_5, следовательно ее рациональнее всего принять.

2) Критерий Вальда

Данный критерий основывается на принципе максимального пессимизма, то есть на предположении, что скорее всего произойдет наиболее худший вариант развития ситуации и риск наихудшего варианта нужно свести к минимуму. Для применения критерия нужно для каждой альтернативы выбрать наихудший показатель привлекательности (наименьшее число в каждой строке матрицы выигрышей) и выбрать ту альтернативу, для которой этот показатель максимальный.

Для нашего примера: α_1=5; α_2=9; α_3=5; α_4=1; α_5=6. Видно, что наилучшим из наихудших показателей обладает альтернатива A_2, для нее α_2=9 наибольшее.

3) Критерий максимального оптимизма

Наиболее простой критерий, основывающийся на идее, что ЛПР, имея возможность в некоторой степени управлять ситуацией, рассчитывает, что произойдет такое развитие ситуации, которое для него является наиболее выгодным. В соответствии с критерием принимается альтернатива, соответствующая максимальному элементу матрицы выигрышей. Для приведенного примера эта величина a_{34}=22, поэтому выбираем альтернативу A_3.

4) Критерий Сэвиджа

Он основан на принципе минимизации потерь, связанных с тем, что ЛПР принял не оптимальное решение. Для решения задачи составляется матрица потерь, которая называется ***матрицей рисков*** r_{ij} , которая получается из матрицы выигрышей a_{ij} путем вычитания из максимального элемента каждого столбца a_j^{max} = max(a_{ij}) всех остальных элементов. В рассматриваемом примере эта матрица есть:

B_j / A_i	B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	7	2	0	17
A_2	6	4	3	12
A_3	13	10	5	0
A_4	3	0	4	21
A_5	0	8	7	8

Далее, для каждой альтернативы определяем величины, равные максимальному риску (наибольшее число в каждой строке матрицы рисков) и выбирают ту альтернативу, для которой максимальный риск минимален. В нашем примере: β_1=17, β2=12, β_3=13, β_4=21, β_5=8, минимально β_5=8. Принимаем альтернативу A_5 .

5) Критерий Гурвица.

Это самый универсальный критерий, который позволяет управлять степенью «оптимизма - пессимизма» ЛПР. Введем некоторый коэффициент α, который назовем ***коэффициентом доверия*** или коэффициентом оптимизма. Этот коэффициент можно интерпретировать как вероятность, с которой произойдет наилучший для ЛПР исход. Исходя из этого, наихудший вариант можно ожидать с вероятностью (1- α). Коэффициент доверия α показывает, насколько ЛПР может управлять ситуацией и в той или иной степени рассчитывает на благоприятный для него исход. Если вероятности благоприятной и неблагоприятной ситуации для ЛПР равны, то следует принять α =0,5.

Для реализации критерия определяются наилучшие a_i^+ и наихудшие a_i^- значение каждой альтернативе по формулам, a_i^+ = max(a_{ij}), a_i^- = min (a_{ij}).

Далее, вычисляются функции полезности по формуле:

$$F\,i = a_i^{+} \cdot \alpha + a_i^{-} \cdot (1-\alpha)$$

Выбирается та альтернатива, для которой функция полезности максимальна.

Предположим, что для нашего примера ЛПР достаточно уверен в положительном результате и оценивает вероятность максимального успеха в $\alpha = 0{,}7$. Тогда:

$$F_1=14 \cdot 0{,}7+5 \cdot (1-0{,}7)=11{,}3$$
$$F_2=11 \cdot 0{,}7+9 \cdot 0{,}3 =10{,}4$$
$$F_3=22 \cdot 0{,}7+2 \cdot 0{,}3 =16{,}0$$
$$F_4=14 \cdot 0{,}7+1 \cdot 0{,}3 =10{,}1$$
$$F_5=15 \cdot 0{,}7+6 \cdot 0{,}3 =12{,}3$$

В соответствии с расчетами ЛПР следует выбрать альтернативу *А*3. Если же, например, ЛПР не очень уверен в положительном исходе и расценивает его вероятность порядка α =0,2, то функции полезности равны:

$$F_1=14 \cdot 0{,}2+5 \cdot (1-0{,}2)=6{,}8$$
$$F_2=11 \cdot 0{,}2+9 \cdot 0{,}8 =9{,}4$$
$$F_3=22 \cdot 0{,}2+2 \cdot 0{,}8 =6$$
$$F_4=14 \cdot 0{,}2+1 \cdot 0{,}8 =3{,}6$$
$$F_5=15 \cdot 0{,}2+6 \cdot 0{,}8 =7{,}8$$

Видно, что в этом случае следует принять A_2, для которого функция полезности максимальна.

Следует отметить, что при α = 0, критерий Гурвица переходит в пессимистический критерий Вальда, а при α =1 – в критерий максимального оптимизма.

В случае, если показатель привлекательности по критерию a_{ij} минимизируются (чем меньше, тем лучше для ЛПР, например затраты, риск и др.), то критерии принятия оптимального решения несколько меняются. Рассмотрим эти отличия.

Критерий Лапласа определяет оптимальное решение по минимальной функции полезности. Применяя критерий Вальда необходимо вычислять максимальный показатель каждой альтернативы (строки) α_i и принимать альтернативу, где этот показатель минимален. Критерий максимального оптимизма позволяет определить оптимальное решение, соответствующее минимальному элементу матрицы выигрышей (которую в случае минимизации часто называют матрицей потерь). Матрица рисков в критерии Сэвиджа получается в результате вычитания из каждого элемента матрицы потерь a_{ij} минимального элемента каждого столбца $a_j^{\min\ x}= \min (a_{ij})$/ Для реализации критерия ***Гурвица*** вычисляются максимальные и минимальные показатели для каждой альтернативы $a_i^{+} = \max(a_{ij})$, $a_i^{-} = \min (a_{ij})$ и функции полезности рассчитываются по формуле: $F_i= a_i^{-} \cdot \alpha + a_i^{+} \cdot (1-\alpha)$.

Выбирается альтернатива с наименьшей функцией полезности. Рассмотрим пример.

Пример 2.

Нефтяная компания собирается построить в районе крайнего севера нефтяную вышку. Имеется 4 проекта A, B, C и D. Затраты на строительство (млн. руб.) зависят от того, какие погодные условия будут в период строительства. Возможны 5 вариантов погоды

S_1, S_2, S_3, S_4, S_5. Выбрать оптимальный проект для строительства используя критерии Лапласа, Вальда, максимального оптимизма, Сэвиджа и Гурвица при α=0,6. .Матрица затрат имеет вид:

A_i \ S_j	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5
A_1	7	12	8	10	5
A_2	9	10	7	8	9
A_3	6	8	15	9	7
A_4	9	10	8	11	7

Критерий ***Лапласа***.

F_1=1/5(7+12+8+10+5)=8,4
F_2=1/5(9+10++7+8+9)=8,6
F_3=1/5(6+8+15+9+7)=9
F_4=1/5(9+10+8+11+7)=9

Следует выбрать альтернативу A_1.

Критерий Вальда: среди наихудших вариантов α_1=12, α_2=10, α_3=15, α_4=11, наилучший соответствует α_2=10, следовательно принимаем альтернативу A2.

Критерий ***максимального оптимизма.*** Соответствует альтернативе, для которой α_5=5 минимальное.

Критерии ***Сэвиджа*** имеет матрицу рисков:

A_i \ S_j	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5
A_1	1	4	1	2	0
A_2	3	2	0	0	4
A_3	0	0	8	1	2
A_4	3	2	1	3	2

Максимальные элементы для каждого критерия матрицы рисков равны: β_1=4; β_2=4; β_3=8; β_4=3. Принимаем альтернативу, соответствующую минимальному значению β_4=3, то есть A_4.

В соответствии с критерии Гурвица на уровне α=0,6, функции полезности равны:

F_1=5 · 0,6+12 · 0,4 =7,8

$F_2=7 \cdot 0{,}6+10 \cdot 0{,}4 =8{,}2$

$F_3=6 \cdot 0{,}6+15 \cdot 0{,}4 =9{,}6$

$F_4=7 \cdot 0{,}6+11 \cdot 0{,}4 =8{,}6$

Принимаем альтернативу A_2 с наименьшей функцией полезности $F_1=7{,}8$.

Задачи для самостоятельного решения.

1. Имеется 4 проекта A, B, C и D. Затраты на строительство (млн. руб.) зависят от того, какие погодные условия будут в период строительства. Возможны 5 вариантов погоды $S1$- $S5$. Выбрать оптимальный проект для строительства используя критерии Лапласа, Вальда, максимального оптимизма, Сэвиджа и Гурвица при a =0,6 . Матрица затрат имеет вид:

$A_i \backslash S_j$	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5
A_1	7	12	8	10	5
A_2	9	10	7	8	9
A_3	6	8	15	9	7
A_4	9	10	8	11	7

2. Страховая компания предлагает застраховать сделку и предлагает 4 вида страховки: A1, A2, A3, A4. Компенсация ущерба для каждого варианта зависит от того, какой из возможных страховых случаев произошел. Выделяют 5 видов страховых случаев S1, S2, S3, S4, S5.

Компенсации (тыс. у.е.) для каждого вида страховки при каждом страховом случае составляют матрицу выигрышей вида (таблица). Выбрать наилучшую альтернативу, используя критерии Лапласа, Вальда, максимального оптимизма, Сэвиджа и Гурвица при коэффициенте доверия a=0,4.

$A_i \backslash S_j$	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5
A_1	43	22	42	49	45
A_2	41	37	40	38	42
A_3	39	48	37	42	36
A_4	37	29	32	58	41

3. Имеется 4 проекта A, B, C и D. Затраты на строительство (млн. руб.) зависят от того, какие погодные условия будут в период строительства. Возможны 5 вариантов погоды $S1$- $S5$. Выбрать оптимальный проект для строительства используя критерии Лапласа, Вальда, максимального оптимизма, Сэвиджа и Гурвица при a =0,6 . Матрица затрат имеет вид:

$A_i \backslash S_j$	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5
A_1	7	12	8	10	5
A_2	9	10	7	8	9
A_3	6	8	15	9	7
A_4	9	10	8	11	7

4. Найти оптимальный вариант объекта по критериям Лапласа, Вальда, Гурвица с показателем 0,8 и Сэвиджа по заданной таблице эффективностей:

Варианты/Среда	B1	B2	B3	B4
A1	9	10	4	11
A2	10	8	5	10
A3	8	10	3	14
A4	7	7	8	11

5. Найти оптимальный вариант объекта по критериям Лапласа, Вальда, Гурвица с показателем 0,8 и Сэвиджа по заданной таблице эффективностей:

Варианты/Среда	B1	B2	B3	B4
A1	9	10	4	9
A2	10	8	5	10
3,A3	8	10	3	14
A4	7	7	8	11

6. Найти оптимальный вариант объекта по критериям Лапласа, Вальда, Гурвица с показателем 0,6 и Сэвиджа по заданной таблице эффективностей:

Варианты/Среда	B1	B2	B3	B4
A1	10	10	4	11
A2	13	9	9	10
A3	11	10	3	14
A4	7	7	8	11

7. Найти оптимальный вариант объекта по критериям Лапласа, Вальда, Гурвица с показателем 0,3 и Сэвиджа по заданной таблице эффективностей:

Варианты/Среда	B1	B2	B3	B4
A1	9	10	4	11
A2	10	8	5	10
A3	8	10	3	14
A4	7	7	8	11

8. Найти оптимальный вариант объекта по критериям Лапласа, Вальда, Гурвица с показателем 0,8 и Сэвиджа по заданной таблице эффективностей:

Варианты/Среда	B1	B2	B3	B4
A1	9	10	4	11

A2	10	8	5	10
A3	8	10	7	14
A4	7	7	8	15

9. Найти оптимальный вариант объекта по критериям Лапласа, Вальда, Гурвица с показателем 0,8 и Сэвиджа по заданной таблице эффективностей:

Варианты/Среда	B1	B2	B3	B4
A1	9	10	6	11
A2	10	9	5	10
A3	7	10	3	14
A4	8	7	8	11

Тема 5. Принятие решений в условиях конфликта

В рассмотренных выше моделях, «соперник» ЛПР, который мы называли «состоянием природы», ни как не реагировал на возможные решения ЛПР, то есть последний был ему совершенно безразличен. Однако часто таким соперником является мыслящий субъект или их группа, который осознанно выбирает вариант реализации ситуации.

Рассмотрим следующую модель. ЛПР A желает принять решение, на результат которого влияет другое ЛПР B, цели которого противоположны A. ЛПР B анализирует все возможные варианты A и принимает такое решение, которое приводит к наименьшему выигрышу A (соответственно максимальному своему выигрышу). Примерами таких ситуаций служат отношения между продавцом и покупателем, адвокатом и прокурором, кредитором и дебитором, истцом и ответчиком и т.д. Подобные ситуации называются ***конфликтными***.

Математические методы анализа конфликтных ситуаций объединяются под названием ***теории игр***, сама конфликтная ситуация носит название ***игры***, а стороны, участвующие в конфликте, называются ***игроками***. Исход игры называется ***выигрышем*** (или ***проигрышем***) игроков. Если выигрыш одного игрока равен проигрышу другого, то игра называется ***антагонистической***. Пусть игрок A может выбрать в качестве действий одну из n альтернатив: A_1, $A_2,\ldots, A_n$. Эти альтернативы в теории игр принято называть ***стратегиями***. Аналогично, игрок B может принять одну из m стратегий B_1, $B_2,\ldots, B_m$. Предположим, что известны выигрыши (проигрыши) игрока A при любой выбранной им стратегии A_i и любом ответе ему игроком B – стратегии B_j. Пусть этот результат выражен числом a_{ij} (которое может быть и отрицательным в случае проигрыша A). Величины a_{ij} образуют матрицу:

A_i \ B_j	B_1	B_2	$\ldots$	B_m
A_1	a_{11}	a_{12}	$\ldots$	a_{1m}
A_2	a_{21}	a_{21}	$\ldots$	a_{2m}
$\ldots$			$\ldots$	
A_n	a_{n1}	a_{n2}	$\ldots$	a_{nm}

Эта матрица называется ***платежной*** или ***матрицей игры***.

Рассмотрим игру со стороны A. Он, выбирая свою стратегию A_i, понимает, что B ответит ему такой стратегией B_j, чтобы выигрыш A был минимальным. Поэтому, из всех наихудших вариантов (минимальных элементов каждой строки платежной матрицы) $\alpha_i = \min_j a_{ij}$, игроку A выгодно выбрать стратегию, соответствующую максимальному из этих элементов:

$$\alpha = \max_i \alpha_i = \max_i \min_j \alpha_{ij}.$$

Величина α называется ***нижней ценой игры*** или ***максимином***. Это гарантированный выигрыш игрока A. С другой стороны, игрок B выбирая свою стратегию B_j понимает, что игрок A ответит такой стратегией A_i, чтобы его выигрыш был максимален. Поэтому из наилучших вариантов для A (максимальных элементов каждого столбца) игроку В рационально выбрать свою стратегию, соответствующую минимальному из этих чисел: $\beta = \max_i \beta_i = \max_j \min_i \alpha_{ij}$.

Величина β называется ***верхней ценой игры*** или ***минимаксом***. Это максимальный проигрыш игрока B. Реальный результат решения конфликтной ситуации, называемый ***ценой игры*** ν, заключен между верхней и нижней ценой: $\alpha \leq \nu \leq \beta$.

В случае, если верхняя и нижняя цены совпадают $\alpha = \nu = \beta$, то игра имеет ***решение в чистых стратегиях***, то есть можно точно определить стратегии (A_i,B_j), которые выгодны для обоих сторон. Если одна сторона отойдет от своей оптимальной стратегии, то ее выигрыш от этого только уменьшится.

Пример : Дебитор A желает выбрать один из четырех условий займа: A_1, A_2, A_3, A_4. Кредитор может на любой вариант займа ответить вариантом предоставления кредита B_1, B_2, B_3, B_4, B_5. Процентные ставки для дебитора при любом варианте кредитора представлены платежной матрицей:

A_i \ B_j	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5
A_1	6	1	8	7	4
A_2	4	3	2	6	5
A_3	3	7	6	9	8
A_4	2	6	7	8	3

Находим минимальные элементы каждой строки платежной матрицы α_I и из них находим максимальное значение. Из максималь-ных элементов каждого столбца β_j выбираем минимальный.

A_i \ B_j	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	α_i
A_1	6	1	8	4	4	*1*
A_2	9	6	7	5	8	*5*
A_3	3	7	6	2	8	*2*
A_4	2	6	7	3	3	*2*
β_j	*9*	*7*	*8*	*5*	*8*	

Видно, что верхние и нижние цены игры совпадают $\alpha = \nu = \beta = 5$, следовательно для обоих игроков выгодны стратегии (A_2,B_4) и процентная ставка, равная 5. При принятии игроками иной стратегии, отличной от оптимальной, этот игрок только проиграет.

Рассмотрим теперь ситуацию, когда верхняя и нижняя цены не совпадают. В этом случае игра решается в ***смешанных стратегиях***. Смешанный стратегии предполагают, что каждый игрок будет выбирать случайно из возможно допустимых чистых стратегий (но выбирать их с вероятностями), либо частично реализовывать чистые стратегии в заданных пропорциях. Нахождение этих вероятностей (или пропорций) и является решением игры. Таким образом, в общем виде, решением игры являются смешанные стратегии $\begin{pmatrix} A_1 & A_2 & \dots A_n \\ p_1 & p_2 & \dots p_n \end{pmatrix}$ и , $\begin{pmatrix} B_1 & B_2 & \dots B_n \\ q_1 & q_2 & \dots q_n \end{pmatrix}$ где p_i и q_j - вероятности чистых стратегий A_i и B_j в смешанной.

Рассмотрим сначала простейший случай игры, решаемой в смешанных стратегиях – игру 2х2, когда у каждого игрока имеется лишь по две стратегии. Платежная матрица такой игры есть:

A_i \ B_j	B_1	B_2
A_1	a_{11}	a_{12}
A_2	a_{21}	a_{22}

Решение игры $\begin{pmatrix} A_1\, A_2 \\ p_1\, p_2 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} B_1\, B_2 \\ q_1\, q_2 \end{pmatrix}$, где $p_1 = \dfrac{a_{22} - a_{21}}{a_{11} + a_{22} - a_{21} - a_{12}}$,

$p_2 = 1 - p_1$, $q_1 = \dfrac{a_{22} - a_{12}}{a_{11} + a_{22} - a_{21} - a_{12}}$, $q_2 = 1 - q_1$. Цена игры равна

$$\nu = \frac{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}{a_{11} + a_{22} - a_{21} - a_{12}}.$$

Задачи для самостоятельного решения.

1.Оперативный работник собирается принять решение о том, где проводить задержание подозреваемого. По имеющейся информации, подозреваемый может находиться в одном из 4-х населенных пунктов: (стратегии $A1$, $A2$, $A3$, $A4$). Подозреваемый знает, что его будут искать в этих же четырех населенных пунктах, но других альтернатив у него нет, в связи с чем имеются лишь четыре варианта укрытия (стратегии $B1$, $B2$, $B3$, $B4$). И оперативный работник, и подозреваемый знают оценки шансов поимки подозреваемого, которые составляют aij процентов. Результат выбора решения описан платежной матрицей:

A_i \ B_j	B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	50	60	70	40
A_2	90	30	20	50
A_3	50	80	20	40
A_4	20	30	40	90

Найти оптимальную стратегию выбора решения для оперативного работника, чтобы вероятность поимки подозреваемого была максимальна. Какова эта вероятность?

Какая оптимальная стратегия для подозреваемого, чтобы вероятность его поимки была минимальной. Какова эта вероятность?

2. Директор предприятия А заключает договор с конкурирую- щей фирмой В о реализации своей продукции на конкретной территории областного центра. Конкурирующие стороны выделили пять районов области. Каждая из них может развивать свое производство в этих пяти районах: $A1$, $A2$, $A3$, $A4$, $A5$ - для стороны А и $B1$, $B2$, $B3$, $B4$, $B5$- для В.

Вероятности успеха для стороны А приведены в платежной матрице:

$A_i \setminus B_j$	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5
A_1	30	70	50	40	60
A_2	90	20	10	30	40
A_3	20	40	30	80	60
A_4	50	40	30	60	90
A_5	20	30	80	60	10

Определить оптимальные стратегии для каждой стороны.

3. Решить игру, описанную платежной матрицей для обоих игроков (матрица приведена для игрока А).

$A_i \setminus B_j$	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5
A_1	9	11	6	3	5
A_2	10	7	6	7	5
A_3	5	8	12	11	1
A_4	5	6	4	8	11

Тема 6. Задача о назначениях

Постановка задачи.

В задаче о назначении имеется n-видов работ (объектов) и n-видов исполнителей (оборудование). Известны затраты (средств, времени и т.д.). C_{ij} $(i,j=1,2,\ ..,n)$,возможные при выполнении и i-ым исполнителем j-ой работы , представленные в виде матрицы затрат.

Требуется распределить исполнителей (оборудование) так по видам работ (объектов), чтобы сумма затрат была оптимальной при выполнении всего объема работ.

Это типичная экстремальная задача комбинаторного вида. Решение ее методом прямого перебора не целесообразно, т.к. число возможных вариантов составляет $N = n!$.

Есть несколько деталей, которые проходят обработку на станках. Задана матрица технологических маршрутов, определяющая порядок обработки деталей на станках, и матрица трудоемкостей, определяющая времена обработки деталей на станках.

Допустимым расписанием обработки деталей на станках назовем порядок обработки деталей на станках, при котором одновременно на одном станке не может обрабатываться более одной детали, деталь может начинать обработку на очередном станке лишь после того, как её обработка закончилась на предшествующем по технологии станке, и обработка деталей на станках происходит без перерывов до полного выполнения соответствующих операций.

Требуется найти такое допустимое расписание, время завершения выполнения всех операций для которого минимально.

Задача Джонсона. Графики Ганта

Если порядок обработки деталей на станках одинаков, то такие задачи называются задачами Джонсона (по имени американского математика С.М. Джонсона, изучавшего такие задачи). В этих задачах предполагается, что порядок обработки каждой детали совпадает с естественной нумерацией станков. Среди задач Джонсона особая роль принадлежит задачам с двумя станками, для которых Джонсон разработал эффективный алгоритм решения.

Пусть A(j) и B(j), соответственно, времена обработки детали с номером j на первом и втором станке.

Алгоритм Джонсона построения оптимального расписания выполнения работ на двух станках включает в себя следующие шаги:

Шаг 1. Найти минимальную величину среди A(j) и B(j), j=1,2,...,n.

Шаг 2. Если минимум достигается на A(j), то деталь с номером j ставится на обработку самой первой, если на B(j), то деталь с номером j ставится на обработку последней, деталь с номером j исключается из рассмотрения, и процесс построения расписания продолжается с шага 1.

Построенные расписания наглядно отображаются с помощью так называемых **графиков Ганта**.

График Ганта – это графическое отображения расписания, в котором каждому станку соответствует своя ось времени.

Пример. Пусть время обработки пяти деталей на двух машинах задана в таблице:

j	A(j)	B(j)
1	1	2
2	3	4
3	4	2
4	2	3
5	4	2
6	3	1
7	2	3
8	2	3

Здесь A(j) и B(j), соответственно, времена обработки детали с номером j на первом и втором станке.

Оптимальное расписание определяется перестановкой

r=(1,4,7,8,5,3,6).

График Ганта имеет вид:

1	4	4	7	7	8	8	2	2	2	5	5	5	5	3	3	3	3	6	6	6				ст1
	1	1	4	4	4	7	7	7	8	8	8	2	2	2	2	5	5	3	3		6			ст2

Длина оптимального расписания F(**r**)=22.

Задачи для самостоятельного решения.

Решить задачу Джонсона. Построить график Ганта для оптимального расписания

Вариант 1.

j	A(j)	B(j)
1	1	2
2	3	1
3	4	2
4	2	3
5	4	2
6	3	1
7	2	3
8	2	3

Вариант 2.

j	A(j)	B(j)
1	3	2
2	3	4
3	4	4
4	2	3
5	4	2
6	3	4
7	2	3
8	2	3

Вариант 3.

j	A(j)	B(j)
1	1	2
2	3	1
3	4	2
4	2	3
5	4	5
6	3	1
7	3	2
8	2	3

Вариант 4.

j	A(j)	B(j)
1	1	2
2	3	4
3	1	2
4	2	1
5	4	4
6	3	1
7	2	3
8	2	3

Вариант 5.

j	A(j)	B(j)
1	3	2
2	3	4
3	4	2
4	2	3
5	1	2
6	4	1
7	2	3
8	2	3

Вариант 6.

j	A(j)	B(j)
1	1	2
2	3	4
3	1	2
4	2	3
5	1	2
6	6	1
7	2	3
8	2	1

Вариант 7.

j	A(j)	B(j)
1	2	1
2	3	4
3	3	2
4	2	3
5	4	2
6	1	3
7	2	3
8	2	3

Вариант 8.

j	A(j)	B(j)
1	2	1
2	3	4
3	3	2
4	2	3
5	4	2
6	1	3
7	2	3
8	2	3

Тестовые вопросы

Вопрос №1: Принятие решений заключается …

1. в генерации возможных альтернативных решений
2. в выборе согласно, заданного критерия, наилучшей альтернативы;
3. в генерации возможных альтернативных решений, их оценке и выборе наилучшего решения;
4. в выборе наилучшего, из возможных на данный момент, решений.

Вопрос №2:

Какое решение можно назвать «наилучшим» в смысле принятия решений?

1. решение, максимизирующее функцию полезности;
2. решение, которое из всех разнообразных факторов и противоречивых требований, оптимизирует общую ценность
3. ешение, наиболее целесообразное для обстановки в которой оно принимается;
4. решение, позволяющее найти оптимум функции, выражающей цель системы.

Вопрос № 3. С помощью каких инструментов формируется решение в условиях риска: ______________

Вопрос № 4: Задача, характеризующаяся тем, что целевая функция является линейной функцией переменных, а область допустимых значений определяется системой линейных равенств или неравенств, называется

1. Задача математического программирования
2. Задача линейного программирования
3. Задача динамического программирования
4. Задача о составлении плана производства

Вопрос № 5 В симплексных преобразованиях таблицы ЗЛП разрешающий столбец это

1. столбец, в котором все элементы положительны
2. столбец, в котором отношение $\frac{\alpha_{ir}}{c_i}$ максимально
3. столбец, в котором отношение $\frac{\alpha_{ir}}{c_i}$ минимально
4. столбец, в котором все элементы 0, а индексный отличен от нуля
5. столбец с отрицательным и наибольшим по модулю элементом в индексной строке

Вопрос № 6: Допустимая область задачи линейного программирования это

1. множество опорных планов задачи линейного программирования

2. множество точек отрезка

3. опорный план, число ненулевых компонент которого меньше числа ограничений полуплоскость

Вопрос № 7: Интерпретация зависимостей, имеющих место в задаче линейного программирования в виде геометрических фигур (точек, прямых, полуплоскостей, многоугольников) в декартовой системе координат называется

1. Аналитическая интерпретация задачи линейного программирования
2. Геометрическая интерпретация задачи линейного программирования
3. Опорный план

Вопрос № 8: Угловой точкой системы ограничений ЗЛП

$$\begin{cases} -x_1 + 2x_2 \le 6 \\ 3x_1 + 5x_2 \ge 4 \\ 9x_1 + 4x_2 \le 56 \end{cases}$$

является точка

1. (1,0)
2. (-5,4)
3. (-1,0)
4. (4,5)

Вопрос № 9 В канонической форме ЗЛП имеет вид

1. целевая функция (ЦФ) – максимизируема система ограничений
X={x: Аx=В, $x \ge 0$}
2. ЦФ $\to$ min и X={x: Аx = В}
3. ЦФ $\to$ min и X={x: А$x \ge$ В}
4. ЦФ $\to$ max и X={x: А$x \ge$ В, $x \ge 0$}
5. ЦФ $\to$ min и X={x: Аx = В, $x \ge 0$}

Вопрос № 10: Допустимое решение x ЗЛП в векторной форме $\bar{A}_1x_1 + \bar{A}_2x_2 + \ldots + \bar{A}_nx_n = \bar{B}$ является опорным

1. Если координаты x положительны
2. Если система векторов $\bar{A}_i$ соответствующая нулевым компонентам линейно зависима
3. Если все компоненты x положительны
4. Если точка x является внутренней точкой
5. Если система векторов $\bar{A}_i$ соответствующая его положительным компонентам линейно независима

.

Вопрос № 11: В симплексных преобразованиях таблицы ЗЛП разрешающая строка – это

1. строка, в которой достигается максимум отношение $\frac{\beta_i}{\alpha_{ir}}$

2. строка, в которой все элементы положительны

3. строка, в которой все элементы положительны, кроме последнего отрицательного

4. нулевая строка

5. строка, в которой достигается минимум положительных отношений $\frac{\beta_i}{\alpha_{ir}}$

Вопрос №12: Пусть на МДР X={ x_1, x_2, x_3,x_4} для 3-критериальной задачи определения ВЦФ с минимизируемыми компонентами ($F_\nu(x)\to$min)

	$F_1(x_k)$	$F_2(x_k)$	$\boldsymbol{F_3(x_k)}$
x_1	1	2	**4**
x_2	6	5	**4**
x_3	1	2	**4**
$\boldsymbol{x_4}$	**6**	**5**	**4**

Тогда полные множества альтернатив будут

1. X^0={ x_1, x_2}

2. { x_1, x_3}

3. { x_1, x_2, x_3}

4. { x_2, x_3}

5. X_1^0={ x_1, x_2} и X_2^0={ x_2, x_3}

Вопрос № 13: Вопросы нормирования критериев $F_\nu(x)$ ВЦФ

$F(x)=(F_1(x), F_2(x),\ldots, F_\nu(x),\ldots, F_N(x))$ возникают в случае невыполнения следующих условий

1. все значения $F_\nu(x) \geq 0$

2. $\sum_{\nu=1}^{N} \lambda_\nu F_\nu(x) \geq 0$

3. $\lambda_\nu F_\nu(x)$ – целые числа

4. среди $F_\nu(x)$ – нет минимизируемых

5. однородности по виду экстремума, соизмеримости численных значений $\lambda_\nu F_\nu(x)$, сопоставимости численных значений параметров $\lambda_\nu F_\nu(x)$

Вопрос № 14: Для МКЗ значения $F_\nu(x)\to$min и КОВ λ_i заданы таблицей

	$F_1(x_k)$	$F_2(x_k)$	$\boldsymbol{F_3(x_k)}$
x_1	29	11	**20**
x_2	20	15	**18**
$\boldsymbol{x_3}$	**15**	**24**	**14**

Тогда оптимальное решение по РП (решающее правило) MINSUM

1. x_1
2. x_1 *и* x_3
3. x_1 *и* x_2
4. x_3
5. x_2

Вопрос № 15: Для МКЗ значения $F_v(x)$→min и КОВ λ_i заданы таблицей

	$F_1(x_k)$	$F_2(x_k)$	$\boldsymbol{F_3(x_k)}$
x_1	29	11	**20**
x_2	20	15	**18**
$\boldsymbol{x_3}$	**15**	**24**	**14**

Тогда оптимальное решение по РП «расстояние до идеальной точки»

1. x_2
2. x_3
3. x_2 *и* x_3
4. x_1 *и* x_3
5. x_1

Вопрос № 16: Для МКЗ значения $F_v(x)$→min и КОВ λ_i заданы таблицей

	$F_1(x_k)$	$F_2(x_k)$	$\boldsymbol{F_3(x_k)}$
x_1	29	11	**20**
x_2	20	15	**18**
$\boldsymbol{x_3}$	**15**	**24**	**14**

Тогда оптимальное решение по решающему правилу MINMAX будет

1. x_1
2. x_1 *и* x_2
3. x_2 *и* x_3
4. x_3
5. x_2

Вопрос № 17: Показатели оценки риска в условиях частичной неопределенности.

1. Абсолютные, относительные, средние.
2. Вероятностные, статистические.
3. Экспертные.
4. Интервальные.

Вопрос № 18: Показатели оценки риска в условиях полной неопределенности.

1. Абсолютные, относительные, средние.
2. Вероятностные, статистические.
3. Экспертные.
4. Интервальные.

Вопрос № 19: С помощью каких инструментов формируется решение в условиях определенности: ________________

Вопрос № 20: Кредитный риск – это

1. Вероятность досрочного отзыва депозита.
2. Вероятность больших потерь, которые ЛПР не может компенсировать.
3. Вероятность невозврата в срок взятого кредита.

Вопрос № 21: Простой формой статистического показателя, характеризующего риск, является:

1. Показатель размаха вариации ожидаемого результата.
2. Математическое ожидание.
3. Коэффициент эксцесса.
4. Ассиметрия.

Вопрос № 21: К общим методам уменьшения риска относятся:

1. Диверсификация, хеджирование, страхование, Форвардная и фьючерсная торговля.
2. Законы распределения случайных величин.
3. Теория ожидаемой полезности.
4. Форвардная и фьючерсная торговля.

Вопрос № 22: Уровень доверительного интервала – это

1. Это граница, которая отделяет «нормальные» колебания рынка от экстремальных ценовых всплесков по частоте их проявления.
2. Временной горизонт – сделки с данными активами.
3. Зависимость между размерами прибылей и убытков.
4. Концепция рисковой стоимости.

Вопрос № 23: Показатели оценки риска в условиях определенности:

1. Абсолютные, относительные, средние.
2. Вероятностные, статистические.
3. Экспертные.
4. Интервальные.

Вопрос № 24: Что показывает β – коэффициент ценной бумаги?

1. Величину риска, приходящегося на единицу дохода.
2. Размер риска данной ценной бумаги.
3. Индекс изменчивости доходности данного актива по отношению к изменчивости доходности в среднем на рынке.
4. Величину риска ценной бумаги по сравнению со средним риском портфеля ценных бумаг.

Вопрос № 24: Комплексный коэффициента риска вычисляется по формуле:

1. $Е_Б = \frac{Е_0+К_р}{1-К_р}$.
2. $Е_Б = \frac{Е_0}{1-К_р}$.
3. $Е_Б = \frac{Е_0+К_р}{1+К_р}$.
4. $Е_Б = \frac{Е_0+К_р}{К_р}$.

Вопрос № 25: Совместные действия игроков с целью получения максимального выигрыша это

1. Сговор в игре
2. Конфликт в игре
3. Партия игры

Вопрос № 26: Множество точек из R, которые не подчинены никаким другим точкам и для которых выполняется условие v~ v*, w~ w^*, это – множество ___________

Вопрос № 27: Матрица размерности mна n, i=1,...,nj=1,...,m(i,j)-ый элемент которой значение выигрыша (проигрыша) игроков в случае i-го хода первого игрока и j-го хода второго игрока называется ____________ матрицей.

Вопрос № 28: Набор чисел, удовлетворяющий ограничениям задачи линейного программирования это _______________

Вопрос № 29: Переменные, соответствующие переменным двойственной задачи для данной транспортной задачи это ___________ .

Вопрос № 30: Игры классифицируются по выигрышу на ___________

Вопрос № 34: В бескоалиционных играх могут рассматривать конфликты _____________ игроков.

Вопрос № 35:Кривая распределения вероятностей возможных потерь называется кривой _____________ .

Вопрос № 36 Зона допустимого риска это:

1. Потери, равные ожидаемой (расчетной) прибыли, т.е. полные потери прибыли.

2. Зона нулевых потерь – отсутствие отклонения полученных значений результата от расчетного.

3. Потери, равные имущественному состоянию предприятия.

4. Потери, равные кредитному состоянию предприятия.

Вопрос № 37: Область, которая характеризуется возможностью потерь, превышающих величину ожидаемой прибыли вплоть до величины полной расчетной выручки, представляющей сумму затрат и прибыли является зоной ________________ риска.

Вопрос № 38: Правило Сэвиджа–это правило _____________ риска.

Вопрос № 39 Критерий принятия решений в условиях неопределённости, когда за оптимальную принимается стратегия, которая в наихудших условиях гарантирует максимальный выигрыш называется критерием _____________ .

Вопрос № 40: Правило взвешивающее пессимистический и оптимистический подходы к ситуации называется правилом ______________

Список использованных источников

1. Граецкая, О. В. Математические и инструментальные методы принятия решений : учебное пособие / О. В. Граецкая, Ю. С. Чусова, Н. С. Ксенз. — Ростов-на-Дону, Таганрог : Издательство Южного федерального университета, 2020. — 146 с. — ISBN 978-5-9275-3399-2. — Текст : электронный // Цифровой образовательный ресурс IPR SMART : [сайт]. — URL: https://www.iprbookshop.ru/107951.html
2. Методы поддержки принятия решений : учебное пособие (курс лекций) / составители Т. В. Киселева. — Ставрополь : Северо-Кавказский федеральный университет, 2019. — 160 с. — Текст : электронный // Цифровой образовательный ресурс IPR SMART : [сайт]. — URL: https://www.iprbookshop.ru/92704.html
3. Орлов, А. И. Теория принятия решений : учебник / А. И. Орлов. — Москва : Ай Пи Ар Медиа, 2022. — 826 с. — ISBN 978-5-4497-1467-1. — Текст : электронный // Цифровой образовательный ресурс IPR SMART : [сайт]. — URL: https://www.iprbookshop.ru/117047.html (дата обращения: 27.01.2023). — Режим доступа: для авторизир. пользователей. - DOI: https://doi.org/10.23682/117047
4. Телипенко, Е. В. Математические методы и системы экспертной оценки в задачах поддержки принятия решений : практикум / Е. В. Телипенко, А. А. Захарова. — Томск : Томский политехнический университет, 2019. — 156 с. — ISBN 978-5-4387-0872-8. — Текст : электронный // Цифровой образовательный ресурс IPR SMART : [сайт]. — URL: https://www.iprbookshop.ru/96110.html
5. Рутта, Н. А. Методы и модели принятия оптимальных решений в экономике : учебное пособие для бакалавров / Н. А. Рутта. — Москва : Ай Пи Ар Медиа, 2022. — 87 с. — ISBN 978-5-4497-1534-0. — Текст : электронный // Цифровой образовательный ресурс IPR SMART : [сайт]. — URL: https://www.iprbookshop.ru/118015.html

КОЧКАРОВА Паризат Ахматовна

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ И ИНСТРУМЕНТАЛЬНЫЕ МЕТОДЫ ПОДДЕРЖКИ ПРИНЯТИЯ РЕШЕНИЙ

Учебно-методическое пособие для обучающихся по направлению подготовки 09.04.03 Прикладная информатика, профиль «Прикладная информатика в экономике и управлении»

Корректор Чагова О.Х.
Редактор Чагова О.Х.

Сдано в набор 30.05.2025 г.
Формат 60x84/16
Бумага офсетная.
Печать офсетная.
Усл. печ. л.2,56
Заказ №5130
Тираж 100 экз.

Оригинал-макет подготовлен
в Библиотечно-издательском центре СКГА
369000, г. Черкесск, ул. Ставропольская, 36