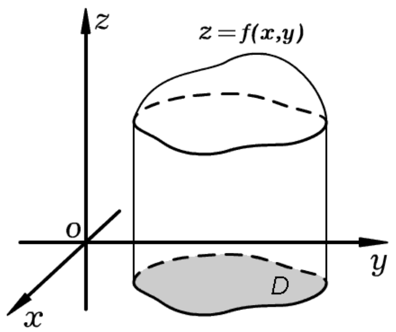
Тема: Функции многих переменных. Основные понятия

1. Определение функции нескольких переменных

Если каждой паре (x, y) значений двух переменных x, y из некоторого множества D соответствует одно определенное значение переменной z, то говорят, что **z – функция двух переменных x, y, определенная в области D**. Множество D называется **областью определения** функции Z. Символически функция двух переменных записывается в виде равенства $z = f(x, y)$, в котором f обозначает знак соответствия. Геометрически область определения D представляет собой некоторую часть плоскости Oxy, ограниченную линиями, которые могут принадлежать или не принадлежать области. Если функция задана формулой и область D её определения не указана, то считается, что D есть множество всех значений переменных, для которых эта формула имеет смысл.



Вообще, величина z называется **функцией переменных** $x_1, x_2, ..., x_n$, если каждой совокупности ($x_1, x_2, ..., x_n$) переменных $x_1, x_2, ..., x_n$ из некоторого множества D соответствует определенное значение y, что символически записывается в виде $z = f(x_1, x_2, ..., x_n)$. Множество D называется **областью определения** функции y.

Для каждой пары (x,y) из области определения функции $z = f(x, y)$ можно построить точку $M(x, y, z)$, где $z = f(x, y)$. Множество всех таких точек называется **графиком функции** $z = f(x, y)$. Обычно это некоторая поверхность.

2. Предел и непрерывность функции нескольких переменных

Окрестностью точки на плоскости называется любой круг с центром в этой точке, а окрестностью точки в пространстве – любой шар с центром в этой точке.

На функции многих переменных переносятся такие понятия, как предел, непрерывность и т.п.

Функция двух переменных $z = f(x, y)$ называется **непрерывной в точке** $M_0(x_0; y_0)$, если

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x, y) = f(x_0, y_0)$$

Например, функция $z = \frac{1}{2x^2 + y^2}$ непрерывна в любой точке плоскости, за исключением начала координат. Здесь функция терпит бесконечный разрыв.

Функция, непрерывная в каждой точке некоторой области, называется **непрерывной в этой области**.

3. Частные производные и дифференциалы

Рассмотрим функцию $z = f\ (x, y)$, определенную в точке $M(x; y)$ и некоторой ее окрестности. Если переменной x придать некоторое приращение Δx, а y оставить постоянной, то функция $z = f\,(x, y)$ получит приращение $\Delta_x z = f\,(x + \Delta x, y) - f\,(x, y)$, называемое **частным приращением функции z по переменной x**.

Аналогично, $\Delta_y z = f\ (x, y + \Delta y) - f\ (x, y)$ называют **частным приращением функции z по переменной y**.

Пределы

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_x z}{\Delta x} = \frac{\partial z}{\partial x} = f'_x(x, y), \quad \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta_y z}{\Delta y} = \frac{\partial z}{\partial y} = f'_y(x, y),$$

если они существуют, называются **частными производными функции $z = f(x, y)$ по переменным x** и y соответственно.

Частная производная $\frac{\partial z}{\partial x}$ вычисляется как производная от функции $z = f\ (x, y)$ по переменной x при условии, что $y = const$.

Частная производная $\frac{\partial z}{\partial y}$ вычисляется по y при условии, что $x = const$.

Все правила и формулы дифференцирования функций одной переменной применимы для нахождения частных производных функции любого числа переменных.

Полным приращением функции $z = f(x, y)$ называется разность

$$\Delta z = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y).$$

Главная часть полного приращения функции $z = f(x, y)$, линейно зависящая от приращений независимых переменных Δx и Δy, называется **полным дифференциалом** и обозначается dz. Если функция имеет непрерывные частные производные, то

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy,$$

где $dx = \Delta x$, $dy = \Delta y$ – приращения независимых переменных, называемые их дифференциалами. С точностью до бесконечно малых величин высшего порядка относительно Δx и Δy верно равенство $\Delta z \approx dz$. Последнее применяется для нахождения приближенного значения функции в точке:

4. Частные производные сложных и неявных функций. Полная производная

Функция $z = f(u, v)$, где $u = \varphi(x, y)$, $v = \psi(x, y)$, называется **сложной функцией переменных** x, y. Для нахождения частных производных сложных функций используются следующие формулы:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}.$$

Пусть $z = f(x, y)$, причем $x = x(t)$, $y = y(t)$. Тогда $z = f\,(x(t), y(t))$ – сложная функция от t. Её производная

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt}.$$

В частности, если $x = t$, то $\frac{dx}{dt} = 1$, и

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt}$$

– формула **полной производной**.

Если уравнение $F(x, y, z) = 0$ задает **неявно некоторую функцию двух переменных** $z = f(u, v)$ и $F'_z(x, y, z) \neq 0$, то

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F'_x(x, y, z)}{F'_z(x, y, z)},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F'_y(x, y, z)}{F'_z(x, y, z)}.$$

5. Частные производные второго порядка

Частными производными второго порядка называются частные производные, взятые от частных производных первого порядка:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = f''_{xx}(x, y), \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = f''_{yy}(x, y),$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = f''_{xy}(x, y), \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = f''_{yx}(x, y).$$

Частные производные $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ и $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$ называются **смешанными**. Значения смешанных производных в точках, в которых они непрерывны, равны между собой:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}.$$

6. Касательная плоскость и нормаль к поверхности

Прямая называется **касательной к поверхности в некоторой точке** $M_0(x; y; z)$, если она является касательной к какой-нибудь кривой, лежащей на поверхности и проходящей через точку M_0.

Плоскость, в которой расположены все касательные прямые к линиям на поверхности, проходящим через данную ее точку M_0, называется **касательной плоскостью к поверхности в точке** M_0.

Прямая, проведенная через точку M_0 поверхности перпендикулярно к касательной плоскости, называется **нормалью к поверхности в точке** M_0.

Если поверхность задана уравнением $F(x, y, z) = 0$, то:

- уравнение касательной плоскости в данной точке $M_0(x_0; y_0; z_0)$ к поверхности имеет вид:

$$F'_x(x_0, y_0, z_0) \cdot (x - x_0) + F'_y(x_0, y_0, z_0) \cdot (y - y_0) + F'_z(x_0, y_0, z_0) \cdot (z - z_0) = 0$$

- уравнения нормали:

$$\frac{x - x_0}{F'_x(x_0, y_0, z_0)} = \frac{y - y_0}{F'_y(x_0, y_0, z_0)} = \frac{z - z_0}{F'_z(x_0, y_0, z_0)}.$$

В частности, если поверхность задана уравнением $z = f(x, y)$, где $f(x, y)$ – функция, дифференцируемая в точке $M_0(x_0, y_0)$, то касательная плоскость в точке $N_0(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ имеет уравнение:

$$z - f(x_0, y_0) = f'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f'_y(x_0, y_0)(y - y_0),$$

а уравнение нормали к поверхности в этой точке:

$$\frac{x-x_0}{f'_x(x_0 y_0)}=\frac{y-y_0}{f'_y(x_0,y_0)}=\frac{z-z_0}{-1}.$$

7. Градиент

Определение. **Градиентом** функции *u* (*x, y,...*) называется вектор, координаты которого есть частные производные функции *u* по *x, y,...* . Обозначение: *grad u*.

Если *u* – функция двух переменных, то $grad\, u = (u'_x, u'_y)$, а если трех переменных, то $grad\, u = (u'_x, u'_y, u'_z)$.

Градиент в данной точке M_0 находим, подставляя координаты точки M_0:

$$grad\, u(M_0)=\left(u'_x(M_0), u'_y(M_0), u'_z(M_0)\right).$$

8. Производная по направлению

Дадим характеристику скорости роста функции $F(x, y, z)$ по направлению от точки M_0 к точке M, т.е. по направлению вектора $\overline{M_0 M}$.

Опр. Производной функции F по направлению вектора $\bar{u}=\overline{M_0 M}$ называется функция

$$\frac{\partial F}{\partial u}=\lim_{M\to M_0}\frac{F(M)-F(M_0)}{\left|M_0 M\right|}.$$

Функция F в направлении вектора $\bar{u}$: возрастает, если $\frac{\partial F}{\partial u}>0$, убывает, если $\frac{\partial F}{\partial u}<0$, не меняется при $\frac{\partial F}{\partial u}=0$.

Производную $\frac{\partial F}{\partial u}$ проще вычислять как скалярное произведение

$$\frac{\partial F}{\partial u}(M_0)=grad\, F(M_0)\cdot\frac{\bar{u}}{|\bar{u}|}.$$

9. Экстремумы функции двух переменных

Точка $M_0(x_0; y_0)$ из области определения D функции $z = f(x, y)$ называется **точкой максимума функции**, если $z = f(x_0, y_0) > f(x, y)$ для всех точек $M(x; y)$ из некоторой окрестности точки M_0, отличных от M_0.

Точка $M_0(x_0; y_0)$ из области определения D функции $z = f(x, y)$ называется **точкой минимума функции**, если $z = f(x_0, y_0) < f(x, y)$ для всех точек $M(x; y)$ из некоторой окрестности M_0, отличных от M_0.

Максимум и минимум функции называются ее **экстремумами**.

Точки области определения функции $z = f(x, y)$, в которых частные производные первого порядка равны нулю или не существуют, называются **критическими точками данной функции**. Точки экстремума всегда являются критическими, но критическая точка может и не быть точкой экстремума. Для исследования функции в критических точках применяются достаточные условия экстремума.

Пусть точка $M_0(x_0; y_0)$ - **стационарная**, то есть

$$\frac{\partial f}{\partial x}(M_0) = 0, \frac{\partial f}{\partial y}(M_0) = 0.$$

Теорема (достаточные условия экстремума). Пусть в некоторой области, содержащей точку $M_0(x_0; y_0)$, функция $z = f(x, y)$ имеет непрерывные частные производные до третьего порядка включительно.

Обозначим

$$A = \frac{\partial^2 f(M_0)}{\partial x^2}, C = \frac{\partial^2 f(M_0)}{\partial y^2}, B = \frac{\partial^2 f(M_0)}{\partial x \partial y} \text{ и } D = AC - B^2.$$

Тогда:

1) если $D > 0$, $A > 0$, $(C > 0)$, то в точке $M_0(x_0; y_0)$ функция $z = f(x, y)$ имеет минимум;

2) если $D > 0$, $A < 0$, $(C < 0)$, то в точке $M_0(x_0; y_0)$ функция $z = f(x, y)$ имеет максимум;

3) если $D < 0$, то экстремума в точке $M_0(x_0; y_0)$ нет.

Если $D = 0$, то экстремум в этой точке может быть и может не быть (требуется дальнейшее исследование).