МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«СЕВЕРО-КАВКАЗСКАЯ ГОСУДАРСТВЕННАЯ АКАДЕМИЯ»

СРЕДНЕПРОФЕССИОНАЛЬНЫЙ КОЛЛЕДЖ

К.М. Узденова

ЭЛЕМЕНТЫ ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ

Практикум для студентов второго курса, обучающихся по специальности 09.02.07 «Информационные системы и программирование»

Черкесск, 2023

УДК 51
ББК 22.1
У 34

Рассмотрено на заседании цикловой комиссии «Информационные и естественнонаучные дисциплины».
Протокол № 1 от «31» 9. 2022 г.
Рекомендовано к изданию редакционно–издательским советом СКГА
Протокол № 24 от «26» 09. 2022 г.

Рецензенты: Котлярова О.Н. – преподаватель высшей категории

У34 **Узденова, К. М.** Элементы высшей математики: практикум для студентов второго курса, обучающихся по специальности 09.02.07 «Информационные системы и программирование » / К. М. Узденова. – Черкесск: БИЦ СКГА, 2023. – 40 с.

Практикум по дисциплине «Элементы высшей математики» является необходимым учебно-методическим пособием для выполнения практических работ, которые запланированы в учебном плане по специальности 09.02.07 Информационные системы (по отраслям). Содержание практикума соответствует требованиям к реализации федерального государственного образовательного стандарта и охватывает основные разделы дисциплины:

– элементы линейной алгебры;
– элементы аналитической геометрии на плоскости;
– комплексные числа;
– основные понятия и методы математического анализа;
– дифференциальные уравнения.

УДК 51
ББК 22.1

СОДЕРЖАНИЕ:

Введение

Методические указания для практических занятий по дисциплине «Элементы высшей математики» предназначены для закрепления теоретических знаний, полученных на лекциях, а также для овладения студентами умений и навыков применять эти знания при самостоятельной работе.

Перечень практических занятий соответствует рабочей программе по дисциплине «Элементы высшей математики»

Выполнение студентами практических занятий по дисциплине проводится с целью:

– закрепления полученных теоретических знаний по дисциплине;

– углубления теоретических знаний в соответствии с заданной темой;

– формирования умений решать практические задачи;

– развития самостоятельности, ответственности и организованности;

– формирования активных умственных действий студентов, связанных с поисками рациональных способов выполнения заданий;

– подготовки к экзамену.

Содержание заданий практической занятий ориентировано на подготовку студентов к освоению профессиональных модулей по специальности **09.02.07 Информационные системы и программирование** и овладению профессиональными компетенциями:

ОК 01	Выбирать способы решения задач профессиональной деятельности, применительно к различным контекстам
ОК 05	Осуществлять устную и письменную коммуникацию на государственном языке с учетом особенностей социального и культурного контекста.

В результате освоения учебной дисциплины обучающийся должен **уметь**:

– выполнять операции над матрицами;

– решать системы линейных уравнений;

– решать задачи, используя уравнения прямых и кривых второго порядка на плоскости;

– применять методы дифференциального и интегрального исчисления;

– решать дифференциальные уравнения;

– пользоваться понятиями теории комплексных чисел;

В результате освоения учебной дисциплины обучающийся должен **знать**:

– основы математического анализа, линейной алгебры и аналитической геометрии;

– основы дифференциального и интегрального исчисления;

– основы теории комплексных чисел.

В результате освоения учебной дисциплины обучающийся должен **уметь**:

– применять методы дифференциального и интегрального исчисления функции двух переменных;

– применять дифференциальные уравнения в науке и технике.

В методических указаниях приведены теоретический (справочный) материал в соответствии с темой работы, обращение к которому поможет выполнить задания практической работы и сами задания.

Организация выполнения и контроля практических занятий по дисциплине «Математика» является подготовительным этапом к сдаче экзамена по данной дисциплине.

Нормы оценки знаний, умений и навыков обучающихся по математике

Оценка практических работ обучающихся по математике

Ответ оценивается отметкой «5», если:

– работа выполнена полностью;

– в логических рассуждениях и обосновании решения нет пробелов и ошибок;

– в решении нет математических ошибок (возможна одна неточность, описка, которая не является следствием незнания или непонимания учебного материала).

Отметка «4» ставится в следующих случаях:

– работа выполнена полностью, но обоснования шагов решения недостаточны (если умение обосновывать рассуждения не являлось специальным объектом проверки);

– допущены одна ошибка или есть два – три недочёта в выкладках, рисунках, чертежах или графиках (если эти виды работ не являлись специальным объектом проверки).

Отметка «3» ставится, если:

– допущено более одной ошибки или более двух – трех недочетов в выкладках, чертежах или графиках, но обучающийся обладает обязательными умениями по проверяемой теме.

Отметка «2» ставится, если:

– допущены существенные ошибки, показавшие, что обучающийся не обладает обязательными умениями по данной теме в полной мере.

Отметка «1» ставится, если:

– работа показала полное отсутствие у обучающегося обязательных знаний и умений по проверяемой теме или значительная часть работы выполнена не самостоятельно.

Учитель может повысить отметку за оригинальный ответ на вопрос или оригинальное решение задачи, которые свидетельствуют о высоком математическом развитии обучающегося; за решение более сложной задачи или ответ на более сложный вопрос, предложенные обучающемуся дополнительно после выполнения им каких-либо других заданий

Общая классификация ошибок

При оценке знаний, умений и навыков учащихся следует учитывать все ошибки (грубые и негрубые) и недочёты.

Грубыми считаются ошибки:

– незнание определения основных понятий, законов, правил, основных положений теории, незнание формул, общепринятых символов обозначений величин, единиц их измерения;

– незнание наименований единиц измерения;

– неумение выделить в ответе главное;

– неумение применять знания, алгоритмы для решения задач;

– неумение делать выводы и обобщения;

– неумение читать и строить графики;

– неумение пользоваться первоисточниками, учебником и справочниками;

– потеря корня или сохранение постороннего корня;

– отбрасывание без объяснений одного из них;

– равнозначные им ошибки;

– вычислительные ошибки, если они не являются опиской;

– логические ошибки.

К **негрубым ошибкам** следует отнести:

– неточность формулировок, определений, понятий, теорий, вызванная неполнотой охвата основных признаков определяемого понятия или заменой одного - двух из этих признаков второстепенными;

– неточность графика;

– нерациональный метод решения задачи или недостаточно продуманный план ответа (нарушение логики, подмена отдельных основных вопросов второстепенными);

– нерациональные методы работы со справочной и другой литературой;

– неумение решать задачи, выполнять задания в общем виде.

Недочетами являются:

– нерациональные приемы вычислений и преобразований;

– небрежное выполнение записей, чертежей, схем, графиков.

Практическая работа № 1
Действия над комплексными числами. Геометрическое изображение комплексных чисел.

знать: формы записи комплексных чисел;

уметь: производить действия с комплексными числами в алгебраической и тригонометрической форме.

Комплексные числа – числа вида $x+iy$, где $x,y \in$R, а i, такое число, что $i^2 = -1$. Множество комплексных чисел обозначается С.

Действительные числа x и y комплексного числа $z=x+iy$, называются **действительной** и **мнимой частью** числа z и обозначаются, соответственно, $Rez=x$ и $Imz=y$.

Два комплексных числа $z_1=x_1+iy_1$ и $z_2=x_2+iy_2$ называются **равными** в том и только том случае, если $x_1=x_2$, $y_1=y_2$.

Запись $z=x+iy$ называют **алгебраической формой** комплексного числа z.

Числа $z_1=x+iy$ и $z_2=x-iy$ называют комплексно- сопряженными.:

Вариант 1 1. Выполнить действия: а) (1+i)+(1-2i); б) (6-5i)-(2-3i); в) (3+2i)(5-4i); г) $(1+i)^2$; д) i(1+i). 2. Выполнить деление чисел: 4+3i и 3+2i. 3.Изобразить комплексные числа на координатной плоскости: а) 3+i; б) 2-2i ; в) 4i . 4. Найти модуль комплексного числа: а) 3+4i; б) 15-8i; в) 2i.	*Вариант 2* 1. Выполнить действия: а) (4+i)+(3-2i); б) (2-3i)-(4+3i); в) (1+2i)(1-4i); г) $(3+i)^2$; д) i(1-i). 2. Выполнить деление чисел: 3+4i и 2+3i. 3. Изобразить комплексные числа на координатной плоскости: а) 3+2i ; б) 2-3i ; в) 2i . 4. Найти модуль комплексного числа: а) 4+3i; б) 15+8i; в) 4i.
Вариант 3 1. Выполнить действия: а) (3+2i)+(1-3i); б) (1-4i)-(3+i); в) (2+i)(3-2i); г) $(2+i)^2$; д) i(1+3i). 2. Выполнить деление чисел: 1+2i и 3-2i. 3. Изобразить комплексные числа на координатной плоскости: а) 2+i ; б) 1-2i ; в) 3i .	*Вариант 4* 1. Выполнить действия: а) (1+5i)+(2-3i); б) (1-4i)-(2+3i); в) (3-2i)(4+2i); г) $(1-i)^2$; д) i(3+i). 2. Выполнить деление чисел: 4-3i и 1-2i. 3. Изобразить комплексные числа на координатной плоскости: а) 2+3i; б) 4-2i ; в) 5i .

4. Найти модуль комплексного числа: а) 6+8i; б) 4-3i; в) 12i.	4. Найти модуль комплексного числа: а) 8+6i; б) 8-15i; в) 4i.
Вариант 5 1. Выполнить действия: а) (1+i)+(1-2i); б) (6-5i)-(2-3i); в) (3+2i)(5-4i); 2. Выполнить деление чисел: 4+3i и 3+2i. 3. Изобразить комплексные числа на координатной плоскости: а) 3+i; б) 2-2i. 4. Найти модуль комплексного числа: 3+4i;	*Вариант 6* 1. Выполнить действия: а) (3+i)+(1+2i); б) (6-5i)-(2+3i); в) (2+3i)(4-5i); 2. Выполнить деление чисел: 3+2i и 1+2i. 3. Изобразить комплексные числа на координатной плоскости: а) 2+3i; б) 4-2i. 4. Найти модуль комплексного числа: 4+3i;
Вариант 7 1. Выполнить действия: а) (1-i)+(1+2i); б) (3-5i)-(2+3i); в) (2+i)(5+4i); 2. Выполнить деление чисел: 5+2i и 2-i. 3. Изобразить комплексные числа на координатной плоскости: а) 1+i; б) 2-i. 4. Найти модуль комплексного числа: 6+8i;	*Вариант 8* 1. Выполнить действия: а) (1-i)+(2-2i); б) (3+5i)-(2+3i); в) (4-2i)(3-4i); 2. Выполнить деление чисел: 2-3i и 3+i. 3. Изобразить комплексные числа на координатной плоскости: а) 3+3i; б) 4+2i. 4. Найти модуль комплексного числа: 8+15i;

Вопросы для самопроверки:

1. Какие действия можно производить с комплексными числами?
2. Формы записи комплексных чисел

Практическая работа № 2
Действия над комплексными числами в тригонометрической и показательной форме

знать: формы записи комплексных чисел;

уметь: производить действия с комплексными числами в алгебраической и тригонометрической показательной формах.

Контрольные вопросы: 1. Определение комплексного числа. 2. Определение комплексно сопряженного числа. 3. Определение суммы, произведения, частного комплексных чисел. 4. Тригонометрическая форма представления комплексного числа.
I. Следующие комплексные числа представить в тригонометрической и выполнить действия с ними: 1. z = 2 + 2i. z = -i. 2. z = $\sqrt{3}$ – i.   z = 5. 3. z = $\sqrt{2}$ - $\sqrt{2}$ i z = $\sqrt{2}$ + $\sqrt{2}$ i 4. z = $\sqrt{3}$ + i.   z = 4i. **II. Представить в показательной форме следующие комплексные числа:** **1.** $5-12i$. **2.** $-3-4i$. **3.** $1-i\sqrt{3}$. **4.** $-1/2+i3/\sqrt{2}$. **5.** $\sin p/3+i\cos p/3$. **III. Данные числа z_1 и z_2 представить в показательной форме и выполнить указанные действия над ними:** если $z_1=-\sqrt{3}+i\sqrt{2}$, $z_2=\sqrt{8}-i\sqrt{8}$. **1.** z_1 x z_2 **2.** z_1 / z_2

Практическое занятие № 3

Исследование функции с помощью производной

Цель: Используя теоретический материал и образцы решения задач, решить примеры по теме «Исследование функции при помощи производных. Исследование и построение графиков сложных функций»

Теоретические сведения:

Исследование функции при помощи производных. Некоторые теоремы о дифференцируемых функциях.

Теорема Ролля. Если функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;b]$, дифференцируема на интервале (a;b) и на концах отрезка принимает одинаковые значения $f(a)=f(b)$, то найдется хотя бы одна точка $c \in$ (a;b), в которой производная $f'(x)$ обращается в нуль, т. е. $f'(c)=0$.

Теорема Коши. Если функции $y = f(x)$ и $y=\varphi(x)$ непрерывны на отрезке $[a;b]$, дифференцируемы на интервале (a;b), причем $\varphi'(x) \neq 0$ для $x \in$ (a;b) то найдется хотя бы одна точка $c \in$ (a;b) такая, что выполняется равенство $\dfrac{f(b)-f(a)}{\varphi(b)-\varphi(a)} = \dfrac{f'(c)}{\varphi'(c)}$.

Теорема Лагранжа. Если функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;b]$, дифференцируема на интервале (a;b) и на концах отрезка принимает одинаковые значения $f(a)=f(b)$, то найдется хотя бы одна точка $c \in$ (a;b) такая, что выполняется равенство $f(b)-f(a)=f'(c)(b-a)$.

Следствие 1 Если производная некоторой функции на промежутке равна нулю, то функция постоянна на этом промежутке.

Следствие 2 Если две функции имеют равные производные на некотором промежутке, то они отличаются друг от друга на постоянное слагаемое.

Возрастание и убывание функций

Теорема 1. (необходимые условия). Если дифференцируемая на интервале (a;b) функция $y = f(x)$ возрастает (убывает), то $f'(x) \geq 0$ $(f'(x) \leq 0)$ для любого $x \in (a;b)$.

Теорема 2. (достаточные условия). Если функция $y = f(x)$ дифференцируема на интервале (a;b) и $f'(x) > 0$ $(f'(x) < 0)$ для любого $x \in (a;b)$, то эта функция возрастает (убывает) на интервале (a;b).

Теоремы 1 и 2 позволяют довольно просто исследовать функцию на монотонность (функция, убывающая или возрастающая, называется монотонной).

Пример. Исследовать функцию $f(x)$ =x^3-3x-4 на монотонность.

Решение:

$x \in R = (-\infty;+\infty)$

$f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x-1)\times(x+1)$

+ - +

X

-1 1

$f'(x) \geq 0$ при $x \in (-\infty;-1] \cup [1;+\infty)$

$f'(x) \leq 0$ при $x \in [-1;1]$

Ответ: данная функция возрастает при $x \in (-\infty;-1] \cup [1;+\infty)$ и убывает $x \in [-1;1]$

Максимум и минимум функций

Теорема (необходимое условие). Если дифференцируемая функция $y = f(x)$ имеет экстремум в точке x_0, то ее производная в этой точке равна нулю: $f(x)$ =0.

Теорема (достаточное условие экстремума). Если непрерывная функция $y = f(x)$ дифференцируема в некоторой δ-окрестности критической точки x_0 и при переходе через нее (слева на право) производная $f'(x)$ меняет знак с плюса на минус, то x_0 есть точка максимума, с минуса на плюс, то x_0 - точка минимума.

Удобно использовать другой достаточный признак существования экстремума основанный на определении знака второй производной.

Теорема. Если в точке x_0 первая производная функции $y = f(x)$ равна нулю $(f'(x) = 0)$, а вторая производная в точке x_0 существует и отличная от нуля $(f''(x) \neq 0)$, то при $f''(x_0) < 0$ в точке x_0 функция имеет максимум и минимум - при $f''(x_0) > 0$.

Выпуклость графика функции. Точки перегиба

Точка графика непрерывной функции $y = f(x)$, отделяющая его части разной выпуклости, называется точкой перегиба.

Теорема. Если функция $y = f(x)$ во всех точках интервала (a;b) имеет отрицательную вторую производную, т.е. $f''(x) < 0$, то график функции в этом интервале выпуклый вверх.

Если же $f''(x) > 0$ для любого $x \in (a;b)$ - график выпуклый вниз.

Теорема (достаточное условие существования точек перегиба). Если вторая производная $f''(x)$ при переходе через точку x_0 в которой она равна нулю или не существует, меняет знак, то точка графика с абсциссой x_0 есть точка перегиба.

Асимптоты графика функции

Асимптотой кривой называется прямая, расстояние до которой от точки, лежащей на кривой, стремится к нулю при неограниченном удалении от начала координат этой точки по кривой.

Асимптоты бывают вертикальными, наклонными и горизонтальными.

Прямая x=a является вертикальной асимптотой графика функции $y = f(x)$, если $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \infty$, или $\lim\limits_{x \to a-0} f(x) = \infty$, или $\lim\limits_{x \to a+0} f(x) = \infty$.

Если существует наклонная асимптота y=Rx+b, то R и b находится по формуле: $R = \lim\limits_{x \to \infty} \frac{y}{x}$, $b = \lim\limits_{x \to \infty} (y - Rx)$.

Если R=0, то y=b- уравнение горизонтальной асимптоты.

Общая схема исследования функции и построения графика функции

Исследование функции целесообразно вести в определенной последовательности.

1. Найти область определения функции.
2. Найти (если это можно) точки пересечения графика с осями координат.
3. Найти интервалы знакопостоянства функции (промежутки, на которых $f(x)$ >0 или $f(x)$ <0).
4. Выяснить, является ли функция четной, нечетной или общего вида.
5. Найти асимптоты графика функции.
6. Найти интервалы монотонности функции.
7. Найти экстремумы функции.
8. Найти интервалы выпуклости и точки перегиба графика функции.

Пример. Исследовать функцию $y=\frac{x}{1-x^2}$ и построить ее график.

1. $x\in(-\infty;-1),(-1;1),(1+\infty)$
2. $x=0, y(0)=0$

Точка (0;0)- точка пересечения графика с осями ОХ и ОУ.

3. Функция знакоположительна (у>0) в интервалах $(-\infty;-1)$ и $(0;1)$, знакоотрицательна – в $(-1;0)$ и $(1;+\infty)$

4. Функция $y=\frac{x}{1-x^2}$ является нечетной т.к. $y(-x)=\frac{-x}{1-(-x)^2}=-\frac{x}{1-x^2}=-y(x)$. Следовательно, график ее симметричен относительно начала координат. Для построения графика достаточно исследовать ее при $x\geq 0$.

5. Прямые х = 1 и х = -1 являются ее вертикальными асимптотами.

Выясним наличие наклонной асимптоты.

$$R=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x}{1-x^2}}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{1-x^2}=0$$

$$b=\lim_{x\to\infty}(\frac{x}{1-x^2}-0\times x)=\lim_{x\to\infty}\frac{x}{1-x^2}=0$$

Следовательно, есть горизонтальная асимптота ее уравнение у=0. Наклонных асимптот нет.

Прямая у=0 является асимптотой и при $x\to+\infty$, и при $x\to-\infty$.

6. $y'=(\frac{x}{1-x^2})'=\frac{x^2+1}{(1-x^2)^2}$.

Так как у'>0 в области определения, то функции является возрастающей на каждом интервале области определения.

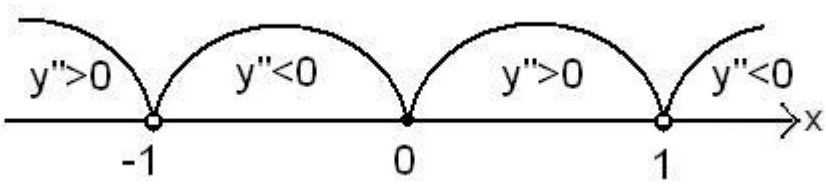
7. Т.к. $y'=\frac{x^2+1}{(1+x^2)^2}$, то критическими точками является точки

$x_1 = -1$ и $x_2 = 1$.

Данные точки не принадлежат области определения функции, значит, функция экстремумов не имеет.

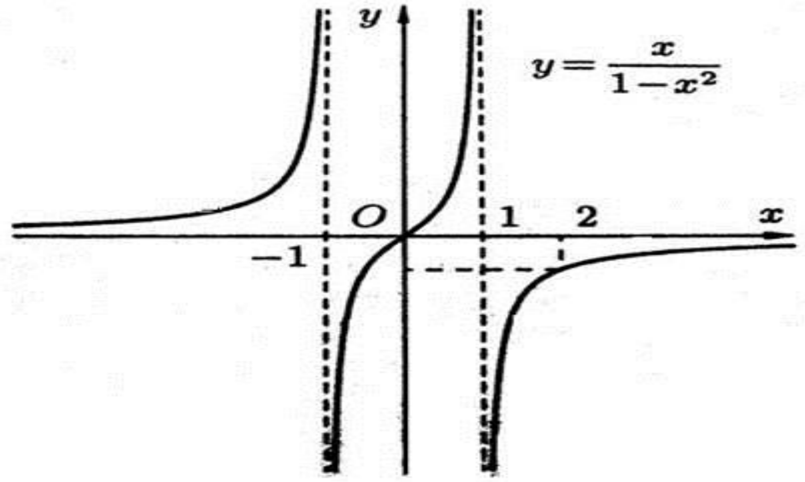
8. Найдем y”

$$y'' = \left(\frac{x^2+1}{(1-x^2)^2}\right)' = \frac{2x(x^2+3)}{(1-x^2)^3}$$



Точка (0;0) – точка перегиба графика функции.

График выпуклый вверх на интервалах $(-1;0)$ и $(1;+\infty)$; выпуклый вниз на интервалах $(-\infty;-1)$ и $(0;1)$



Содержание практической работы:

Задание. Исследовать функцию и построить её график:

Вариант № 1

y=$x^3 - 3x^2 + 4$

y=$\frac{5-2x}{x^2-4}$

Вариант № 2

y=$\frac{1}{3}x^3 - x^2 - 3x + \frac{1}{3}$

y=$\frac{x}{x^2-1}$

Вариант № 3

1. y=$-x^3 + 3x^2 - 2$
2. y=$\frac{x^2}{x^2-1}$

Вариант № 4

1. y=$-x^3 + 3x^2 - 2$
2. y=$\frac{x^3}{x^2-1}$

Вариант № 5

1. y=$x^3 - 12x + 6$
2. y=$\frac{2x}{x^2+1}$

Вариант № 6

1. y=$x^3 - 12x^2$-9x+1
2. y=$\frac{1}{x^2+1}$

Практические занятия № 4
Тема: Вычисление производных высших порядков.

Цель: сформировать умение находить производные *n-го* порядка функций, заданных в явном, логарифмическом и параметрическом виде, находить производные сложных функций.

Теоретические сведения:

Производной n-го порядка называется производная от производной (*n*–1)-го порядка. Производные высших порядков вычисляются последовательным дифференцированием данной функции.

Производная второго порядка $y'' = (y')'$ или $\frac{d^2y}{dx^2}$.

Производная третьего порядка $y''' = (y'')'$ или $\frac{d^3y}{dx^3}$ и т. д.

Дифференциал функции

Определение. Если функция $y = f(x)$ дифференцируема в точке x, т.е. имеет в этой точке конечную производную $f'(x)$, то ее приращение Δy можно записать в виде $\Delta y = f'(x)\Delta x + \alpha(\Delta x)\times\Delta x$, где $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\alpha(\Delta x) = 0$.

Главная, линейная относительно Δx часть $f'(x)\Delta x$ приращения функции называется **дифференциалом функции** и обозначается dy:

$dy = f'(x)\times\Delta x$. $(dy = f'(x)dx)$

При достаточно малых Δx приращение функции приближенно равно ее дифференциалу т.е. $\Delta y \approx dy$.

Пример 1. Найти производную второго порядка функции $y = x^2 \ln x$.

Решение. $y'' = (y')'$, поэтому найдём производную первого порядка, а затем второго.

$$y' = (x^2\ln x)' = (x^2)'\ln x + x^2(\ln x)' = 2x\cdot\ln x + x^2\frac{1}{x} = 2x\ln x + x = x(2\ln x + 1).$$

$$y'' = (x(2\ln x + 1))' = x'(2\ln x + 1) + x(2\ln x + 1)' = 2\ln x + 1 + x\frac{2}{x} = 2\ln x + 3.$$

Вариант 1

Найдите вторую производную функции:

$$y = 3x^5 + 8x^3 + 7x^2 - \sqrt{3}$$

Вариант 2

Найдите вторую производную функции:

$$y = 4x^6 - 7x^2 + 9x + \frac{\pi}{4}$$

$$y=-\frac{15}{x}+2\sqrt{x}-ctg3x+5^{x}$$

$$y=\left(-2x^{7}+4x^{5}-\sqrt{3}x\right)^{4}$$

$$y=(8x-7)^{3}+\sqrt{9-3x}$$

5. $y=\dfrac{(4x-9)^{4}}{(3-5x)^{3}}$

$$y=-\frac{5}{x}-7\sqrt{x}+sin2x-e^{3x}$$

$$y=\left(7x^{5}-2x^{3}+8x-\frac{\pi}{2}\right)^{5}$$

$$y=(3-8x)^{3}+\sqrt{4-x^{3}}$$

$$y=\frac{(4-5x)^{3}}{(4x+7)^{4}}$$

Вариант 3

Найдите вторую производную функции:

$$y=7x^{5}-2x^{3}+8x-\frac{\pi}{2}$$

$$y=-\frac{5}{x}-7\sqrt{x}+sinx$$

$$y=(3x^{5}+8x^{3}+7x^{2}-\sqrt{3})^{5}$$

$$y=\sqrt{2-5x}+(3x-5)^{6}$$

$$y=\frac{(3x-5)^{4}}{(2x-4)^{3}}$$

Вариант 4

Найдите вторую производную функции:

$$y=-2x^{7}+4x^{5}-\sqrt{3}x$$

$$y=-\frac{15}{x}+2\sqrt{x}-ctg\,x$$

$$y=\left(4x^{6}-7x^{2}+9x+\frac{\pi}{4}\right)^{4}$$

$$y=(9x-1)^{5}+\sqrt{5-x^{2}}$$

$$y=\frac{(5-2x)^{3}}{(3x+7)^{4}}$$

Вариант 5

Найдите вторую производную функции:

$$y=8x^{6}-25x^{2}-8x+\pi$$

$$y=\frac{4}{x}+5\sqrt{x}+ctg2x+5^{x}$$

$$y=\left(4x^{3}-9x^{2}+3x-\frac{1}{3}\right)^{4}$$

$$y=(2x-9)^{10}+\sqrt{3x-1}$$

$$y=\frac{(8-5x)^{4}}{(2x-4)^{3}}$$

Вариант 6

Найдите вторую производную функции:

$$y=4x^{3}-9x^{2}+3x-\frac{1}{3}$$

$$y=sin3x-\frac{1}{x}+6\sqrt{x}-e^{4x}$$

$$y=(8x^{6}-25x^{2}-8x+\pi)^{5}$$

$$y=(3-8x)^{5}+\sqrt{5-2x}$$

$$y=\frac{(4-8x)^{3}}{(6-5x)^{4}}$$

Практическая работа № 5
Вычисление определенного интеграла по формулам, подстановкой и по частям.

Студент должен:

знать: приложение определенного интеграла к вычислению площадей плоских фигур, объемов тел вращения, пути, пройденного точкой;

уметь: вычислять определенные интегралы.

Первообразная. Неопределенный интеграл

Определение 1: Функция *F(x)* называется *первообразной функцией для данной функции f(x)*, если для любого *x* из области определения *f(x)* выполняется равенство *F'(x)= f(x)* или *dF(x)= f(x)dx*

Определение 2: Множество *F(x) + C* всех первообразных функций для данной функции *f (x)* , где *C* принимает все возможные числовые значения, называется *неопределенным интегралом от функции f (x)* и обозначается символом

$$\int f(x)dx$$

Таким образом, по определению,

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C$$

, где *F'(x) = f (x)* или *dF(x) = f(x)dx* и *C* - произвольная постоянная. В последней формуле *f(x)* называется *подынтегральной функцией, f(x)dx* - *подынтегральным выражением*, а символ ∫ - знаком неопределенного интеграла.

Неопределенным интегралом называют не только множество всех первообразных, но и любую функцию этого множества.

Таким образом, *неопределенный интеграл представляет собой любую функцию, дифференциал которой равен подынтегральному выражению, а производная равна подынтегральной функции*

Нахождение первообразной по данной функции *f(x)* называется *интегрированием* и является действием, обратным дифференцированию.

Свойства неопределенных интегралов

$$d\int f(x)dx = f(x)dx$$

$$\int df(x) = f(x) + C$$

$$\int kf(x)dx = k\int f(x)dx + C$$

$$\int (f(x) + g(x))dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$$

Таблица интегралов

$\int kdx = kx + C$	$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$
$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \quad (n \neq -1)$	$\int e^x dx = e^x + C$
$\int \frac{dx}{x} = \ln\lvert x\rvert + C$	$\int \sin x dx = -\cos x + C$
$\int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a} arctg \frac{x}{a} + C$	$\int \cos x dx = \sin x + C$

$\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left\|\frac{x-a}{x+a}\right\| + C$	$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = tg\,x + C$
$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C$	$\int \frac{dx}{x} = \ln\|x\| + C \int \frac{dx}{\sin^2 x} = -ctg\,x + C$
$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}} = \ln\left\|x + \sqrt{x^2+a^2}\right\| + C$	$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C$

Определенный интеграл.
Геометрический смысл определенного интеграла

Формула Ньютона – Лейбница

Если функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке [a;b] и функция y = *F(x)* является некоторой ее первообразной на этом отрезке, то имеет место формула Ньютона – Лейбница $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$.

Вычисление определенных интегралов

Простым и удобным методом вычисления определенного интеграла $\int_a^b f(x)dx$ от непрерывной функции является формула Ньютона-Лейбница: $\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$.

При вычислении определенных интегралов широко используется метод замены переменной и метод интегрирования по частям.

Интегрирование подстановкой

Пусть для вычисления интеграла $\int_a^b f(x)dx$ от непрерывной функции сделана подстановка $x = \varphi$(t)

Теорема. Если:

1) функция $x = \varphi(t)$ и её производная $x' = \varphi'(t)$ непрерывны при $t \in [d;\beta]$;

2) множеством значений функции $x = \varphi(t)$ при $t \in [\alpha;\beta]$ является отрезок [a;b];

3) $\varphi(\alpha) = a$ и $\varphi(\beta) = b$ то $\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)dt$

Интегрирование по частям

Теорема. Если функции $u = u(x)$ и $v = v(x)$ имеют непрерывные производные на отрезке [a;b], то имеет место формула $\int_a^b u\,dv = uv\Big|_a^b - \int_a^b v\,du$.

Пример 1. Вычислить определенный интеграл $\int\limits_1^3 \left(x^2 - 16x + 3\right)dx$

Решение.

$$\int\limits_1^3 \left(x^2 - 16x + 3\right)dx = \left(\frac{x^3}{3} - 16\cdot\frac{x^2}{2} + 3x\right)\Bigg|_1^3 = \left(\frac{x^3}{3} - 8x^2 + 3x\right)\Bigg|_1^3 =$$

$$= \left(\frac{3^3}{3} - 8\cdot 3^2 + 3\cdot 3\right) - \left(\frac{1^3}{3} - 8\cdot 1^2 + 3\cdot 1\right) = \left(\frac{27}{3} - 72 + 9\right) - \left(\frac{1}{3} - 8 + 3\right) =$$

$$= (9 - 63) - \left(\frac{1}{3} - 5\right) = -54 - \frac{1}{3} + 5 = -49 - \frac{1}{3} = -49\frac{1}{3}$$

Пример 2.

Вычислить $\int\limits_0^{\pi} e^x \sin\frac{x}{2}dx$.

Решение:

$$\int\limits_0^{\pi} e^x \sin\frac{x}{2}dx = \left|\begin{array}{ll} u = e^x & dx = \sin\frac{x}{2}dx \\ du = e^x dx & x = -2\cos\frac{x}{2} \end{array}\right| = -2\cos\frac{x}{2}e^x \;\Big|_0^{\pi} + 2\int\limits_0^{\pi} e^x \cos\frac{x}{2}dx =$$

$$= \left|\begin{array}{ll} u = e^x & dx = \cos\frac{x}{2}dx \\ du = e^x dx & x = 2\sin\frac{x}{2} \end{array}\right| = -2\cos\frac{\pi}{2}e^{\pi} + 2\cos\frac{0}{2}e^0 + 2\left(2e^x \sin\frac{x}{2}\Big|_0^{\pi} - \int\limits_0^{\pi} e^x \sin\frac{x}{2}dx\right) =$$

$$= 2 + 4e^{\pi}\sin\frac{\pi}{2} - 4e^0\sin\frac{0}{2} - \int\limits_0^{\pi} e^x \sin\frac{x}{2}dx = 2 + 4e^{\pi} - \int\limits_0^{\pi} e^x \sin\frac{x}{2}dx$$

$$\int\limits_0^{\pi} e^x \sin\frac{x}{2}dx = 1 + 2e^{\pi}$$

Ответ: $\int\limits_0^{\pi} e^x \sin\frac{x}{2}dx = 1 + 2e^{\pi}$

Вариант1 1)Вычислить определенный интеграл: $\int\limits_0^2 \left(4x^2 + x - 3\right)dx$. 2)Вычислить определенный интеграл методом подстановки: $\int\limits_2^3 (2x-1)^3 dx$	Вариант 2 1)Вычислить определенный интеграл: $\int\limits_0^3 \left(2x^2 - x + 4\right)dx$. 2)Вычислить определенный интеграл методом подстановки: $\int\limits_0^1 (3x+1)^4 dx$

3) $\int_1^2 (x^3+10x)dx$	3) $\int_0^8 (21x-19)dx$
4) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx$ 5) $\int_0^1 (\sqrt{x}-x^2)dx$	4) $\int_{-4}^0 (x^3+8)dx$ 5) $\int_0^{\pi} \sin x dx$

Вопросы для самопроверки 1. Что называется определенным интегралом? 2. В чем заключается геометрический смысл определенного интеграла? 3. Какая связь существует между определенным и неопределенным интегралом? 4. Как вычислить площадь криволинейной трапеции с применением определенного интеграла?

Практическая работа № 6
Решение задач на применение определенного интеграла

знать: приложение определенного интеграла к вычислению площадей плоских фигур, объемов тел вращения, пути, пройденного точкой;

уметь: вычислять определенные интегралы, решать прикладные задачи в области профессиональной деятельности.

Формула Ньютона-Лейбница: $\int_a^b f(x)dx = F(b)-F(a)$

Вариант 1	**Вариант 2**
1. Найти площадь плоской фигуры, ограниченной линиями $y=2x-x^2$, $y=-x$.	1. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями $y=x^2-2$, $y=2x+1$.
2. Вычислить, предварительно сделав рисунок, площадь фигуры, ограниченной линиями: $y=-x^2+4,\quad y=0,\quad x=-2,\quad x=2$.	2. Вычислить, предварительно сделав рисунок, площадь фигуры, ограниченной линиями: $y=-x^2+1,\quad y=0,\quad x=-1,\quad x=1$.
3. Найти объем тела, полученного при вращении вокруг оси абсцисс криволинейной трапеции, ограниченной линиями: $y=\sqrt{x},\quad y=0,\quad x=1,\quad x=4$.	3. Найти объем тела, полученного при вращении вокруг оси абсцисс криволинейной трапеции, ограниченной линиями: $y=\sqrt{x},\quad y=0,\quad x=0,\quad x=1$.
Скорость движения точки изменяется по закону $v=3t^2+2t+1$ (м/с). Найти путь *S*, пройденный точкой за 10 с от начала движения	*4.* Скорость движения точки изменяется по закону $v=9t^2-8t$ (м/с). Найти путь *S*, пройденный точкой за четвертую секунду.

Вопросы для самопроверки
1. Дайте определение определенного интеграла. 2. Какие задачи можно решать с помощью определенного интеграла? 3. Формулы определения площади. 4. По каким формулам находится объем тела вращения? 5. Написать формулу для вычисления работы переменной силы. 6. По какой формуле вычисляется сила давления жидкости на пластинку?

Практическая работа № 7

Решение линейных дифференциальных уравнений первого порядка

Студент должен:

знать: методы решения дифференциальных уравнений первого порядка;

уметь: решать дифференциальные уравнения первого порядка.

Вариант 1	**Вариант 2**
Являются ли данные функции решениями данных дифференциальных уравнений (для № 1 – 2).	Являются ли данные функции решениями данных дифференциальных уравнений (для № 1-2).
1. $y = \frac{8}{x}, \quad y' = -\frac{1}{8}y^2$.	1. $y = e^{3x} - 5, \quad y' = 3y + 15$.
2. $y = e^{4x} + 2, \quad y' = 4y$.	2. $y = \frac{5}{x}, \quad y' = -y^2$.
Решить следующие дифференциальные уравнения первого порядка (для № 3 – 7).	Решить следующие дифференциальные уравнения первого порядка (для № 3 – 7).
3. $y' = \frac{1}{\cos^2 x} + x^4$.	3. $y' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - x^7$.
4. $y' = -6y$.	4. $y' = 8y$.
5. $y' = \frac{x-1}{y^2}$.	5. $y' = \frac{2x}{y^2}$.
6. $y' = \frac{y}{\sqrt{1-x^2}}$.	6. $y' = \frac{y}{1+x^2}$.
7. $y' + 8y - 3 = 0$.	7. $y' - 3y + 5 = 0$

Вопросы для самопроверки
1. Определение дифференциального уравнения. 2. Как определить порядок дифференциального уравнения? 3. Сколько постоянных интегрирования имеет дифференциальное уравнение первого порядка? 4. Чем отличается дифференциальное уравнение от алгебраических? 5. Составить алгоритм решения дифференциального уравнения первого порядка с разделяющимися переменными.

Практическая работа № 8
Нахождение общего и частного решения линейного однородного дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами

Студент должен:

знать: составление прикладных задач в области профессиональной деятельности;

уметь: решать дифференциальные уравнения второго порядка.

Вариант 1	**Вариант 2**
Являются ли данные функции решениями данных дифференциальных уравнений: 1. $y = c_1e^{-2x} + c_2xe^{-2x}, \quad y'' + 4y' + 4y = 0$. 2. $y = c_1e^{3x} + c_2e^{x}, \quad y'' - y' - 6y = 0$. Решить следующие дифференциальные уравнения второго порядка 3. $y'' + 8y' + 16y = 0$. 4. $y'' - y' - 12y = 0$.	Являются ли данные функции решениями данных дифференциальных уравнений 1. $y = c_1e^{-5x} + c_2e^{x}, \quad y'' + 4y' - 5y = 0$. 2. $y = c_1e^{x} + c_2xe^{x}, \quad y'' + 2y' + y = 0$ Решить следующие дифференциальные уравнения второго порядка 3. $y'' - 7y' + 10y = 0$. 4. $y'' + 4y' + 4y = 0$.

Вопросы для самопроверки

1. Определение дифференциального уравнения.
2. Как определить порядок дифференциального уравнения?
3. Сколько постоянных интегрирования имеет дифференциальное уравнение первого порядка?
4. Чем отличается дифференциальное уравнение от алгебраических?
5. Составить алгоритм решения дифференциального уравнения первого порядка с разделяющимися переменными.

Практическое занятие № 9

Тема: Действия над матрицами, вычисление определителей.

Цель: сформировать умение выполнять арифметические действия с матрицами, находить определители матриц.

Теоретические сведения:

Матрицей называется прямоугольная таблица чисел, состоящая из m строк и n столбцов, которую записывают в следующем виде:

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Для обозначения матрицы используют прописные латинские буквы, для обозначения элементов матрицы – строчные латинские буквы с указанием номера строки и столбца, на пересечении которых стоит данный элемент. Запись « матрица B имеет размер mxn» означает, что речь идет о матрице, состоящей из m строк и n столбцов. Например, матрица $B=\begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 5 \end{pmatrix}$ имеет размер 2x3. Далее, b_{ij} - обозначение элемента, стоящего на пересечении i-й строки и j-го столбца данной матрицы (в примере $b_{23}=5$).

При ссылке на *i-ю* строку матрицы A используют обозначение A_i, при ссылке на *j-й* столбец – обозначение A^j.

Матрица, у которой число строк совпадает с числом столбцов, называется *квадратной*. Элементы a_{11} , a_{22} ,…, a_{nn} квадратной матрицы A (размера nxn) образуют *главную диагональ*. Квадратная матрица, у которой отличные от нуля элементы могут стоять только на главной диагонали, называется *диагональной.* Диагональная матрица, у которой все элементы (главной диагонали!) равны 1, называется *единичной.* Наконец, квадратная матрица, у которой ниже (выше) главной диагонали находятся только нули, называется *верхней (нижней) треугольной матрицей*. Например, среди квадратных матриц размера 3x3

$$A=\begin{pmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},\quad E=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},\quad C=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 3 & -4 & -2 \end{pmatrix}$$

матрица A является верхней треугольной, B – диагональной, C – нижней треугольной,
E – единичной.

Матрицы A, B называются *равными* ($A=B$), если они имеют одинаковый размер, и их элементы, стоящие на одинаковых позициях, совпадают.

Арифметические действия с матрицами.

Чтобы *умножить матрицу A на отличное от нуля вещественное число k*, необходимо каждый элемент матрицы умножить на это число:

$$kA=k\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} ka_{11} & ka_{12} & \dots & ka_{1n} \\ ka_{21} & ka_{22} & \dots & ka_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ ka_{m1} & ka_{m2} & \dots & ka_{mn} \end{pmatrix}.$$

Чтобы найти *сумму матриц A, B* одной размерности, необходимо сложить элементы с одинаковыми индексами (стоящие на одинаковых местах):

$$A+B=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \dots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \dots & a_{2n}+b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & \dots & a_{mn}+b_{mn} \end{pmatrix}.$$

Пример 1. Найти *2A-B*, если $A=\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$.

Решение. Сначала умножаем матрицу *A* на число «2», затем матрицу *B* на число «-1», и, наконец, находим сумму полученных матриц:

$$2A-B=2\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 8 & -2 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 7 & -2 \\ 7 & 4 \end{pmatrix}$$

Имеем: $\begin{vmatrix} 2 & -3 & -1 \\ 4 & -1 & 2 \\ 3 & 5 & 0 \end{vmatrix}=2\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 5 & 0 \end{vmatrix}-(-3)\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 0 \end{vmatrix}+(-1)\begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 3 & 5 \end{vmatrix}=$

$$=2(-1\cdot 0-2\cdot 5)+3(4\cdot 0-2\cdot 3)-1(4\cdot 5-(-1)\cdot 3)=-20-18-23=-61.$$

Произведение AB можно определить только для матриц *A* размера *mxn* и *B* размера *nxp*, при этом *AB=C*, матрица *C* имеет размер *mxp*, и ее элемент c_{ij} находится как скалярное произведение *i-й* строки матрицы *A* на *j-й* столбец

матрицы *B:* $c_{ij}=A_iB^j=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\dots+a_{in}b_{nj}$ *(i=1,2,…,m; j=1,2,…,p)*. Фактически необходимо каждую строку матрицы *A* (стоящей слева) умножить скалярно на каждый столбец матрицы *B* (стоящей справа).

Пример 2. Найти произведение матриц $A=\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ и $B=\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.

Решение. Размер матрицы *A 3*x*2*, матрицы *B* *2*x*2*. Поэтому произведение *AB* найти можно, произведение *BA* – нет. Действуя по сформулированному выше правилу, получаем:

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-1;1)(1,3) & (-1;1)(-2;4) \\ (0;4)(1;3) & (0,4)(-2;4) \\ (2;1)(1;3) & (2;1)(-2;4) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1+3 & 2+4 \\ 0+12 & 0+16 \\ 2+3 & -4+4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 12 & 16 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}$$

Матрицей, *транспонированной* к матрице A размера mxn, называется матрица A^T размера nxm, строки которой являются столбцами исходной матрицы.

Например, если $C = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 1 & -3 & 3 \end{pmatrix}$, то $C^T = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -3 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.

Пример 3. Найти $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} -2 & 4 & 6 \\ 5 & 7 & 3 \end{pmatrix}^T$.

Решение. Воспользовавшись вычислениями, проведенными при решении примера, а также правилами умножения матрицы на число и сложения матриц, получим:

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} -2 & 4 & 6 \\ 5 & 7 & 3 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 12 & 16 \\ 5 & 0 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} -2 & 5 \\ 4 & 7 \\ 6 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 16 \\ 20 & 30 \\ 17 & 6 \end{pmatrix}.$$

Матрицы А, В называются *эквивалентными*, если одна получена из другой путем элементарных преобразований.

Рангом матрицы A в дальнейшем будем считать число строк эквивалентной ей ступенчатой матрицы, используя обозначение $r(A)$. Так, в рассмотренном выше примере 3.4 $r(A)=3$, $r(B)=2$. Можно доказать, что ранг матрицы A (размера mxn) не может быть больше $\min\{m,n\}$ (например, для матрицы A размера 2x3 $r(A) \le 2$). Кроме того, ранг матрицы не зависит ни от выбора ведущих элементов, ни от проводимых преобразований. Это свойство можно использовать при проверке. Так, в примере 3.4 после перестановки первой и второй строки в матрице B можно в качестве ведущего сначала рассмотреть элемент b_{12}, а затем вычеркнуть третью строку, пропорциональную второй ($C_3 = -C_2$):

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 & 9 \\ 1 & 3 & 2 & 5 \\ 1 & 9 & 2 & 6 \end{pmatrix} \xrightarrow{C_1 \leftrightarrow C_2} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 5 \\ 2 & 0 & 4 & 9 \\ 1 & 9 & 2 & 6 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\xrightarrow{C_3 = C_3 - 3C_1} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 5 \\ 2 & 0 & 4 & 9 \\ -2 & 0 & -4 & -9 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 5 \\ 2 & 0 & 4 & 9 \end{pmatrix}$$

Вычисление определителей.

Определитель матрицы *A* размера *2*х*2* (определитель 2-го порядка) – это число, которое можно найти по правилу:

$$\det A = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

(произведение элементов, стоящих на главной диагонали матрицы, минус произведение элементов, стоящих на побочной диагонали).

Определитель матрицы *A* размера *3*х*3* (определитель 3-го порядка) – число, вычисляемое по правилу *«раскрытие определителя по первой строке»:*

$$\det A = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

Пример 4. Найти: $\begin{vmatrix} 2 & -3 & -1 \\ 4 & -1 & 2 \\ 3 & 5 & 0 \end{vmatrix}$

Решение. При нахождении определителя воспользуемся сначала формулой

$$\det A = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

, а затем (для вычисления определителей 2-го порядка) формулой $\det A = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$.

Содержание практической работы

Задание 1. Выполнить арифметические действия с матрицами:

1) $3\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}$; **2)** $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}^T + 2\begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$;**3)** $\begin{pmatrix} 3 & -4 & 5 \\ -8 & 10 & 4 \end{pmatrix}^T - 3\begin{pmatrix} -5 & -1 \\ 8 & 4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$;

4) $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 8 \\ 3 & 8 & 5 \\ 0 & -4 & 7 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 2 & 10 & 3 \\ 0 & 4 & -2 \\ 5 & 2 & -9 \end{pmatrix}^T$; **5)** $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 14 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 5 & 10 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$;

6) $\begin{pmatrix} -3 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 & -3 & 2 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & 1 & 10 \\ 2 & 4 & 8 & -1 \end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}^T$;

Задание 2. Доказать равенство *(AB)C=A(BC)* для матриц:

1) $A=\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 6 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$;

2) $A=\begin{pmatrix} -3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -3 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$;

3) $A=\begin{pmatrix} -3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix} -2 & 4 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$;

Задание 3. Найти: 1) $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}^2$; 2) $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}^3$; 3) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}^3$.

Задание 4. Вычислить определители:

1) $\begin{vmatrix} \sin\alpha & -\cos\alpha \\ \cos\alpha & \sin\alpha \end{vmatrix}$; **2)** $\begin{vmatrix} -1 & i \\ i & -1 \end{vmatrix}$; **3)** $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}$

4) $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 6 \end{vmatrix}$; **5)** $\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -10 \end{vmatrix}$; **6)** $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 0 & 4 & 7 \\ -3 & 1 & 5 \end{vmatrix}$

7) $\begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$;

Практическая работа № 10
Тема: Действия над матрицами.

знать: правила выполнения действий над матрицами; методы и способы вычисления определителей;

уметь: выполнять действия над матрицами; вычислять определители; решать матричные уравнения.

<table>
<tr>
<td>

Вариант 1

Даны матрицы: $A=\begin{pmatrix}2 & 3 & 0\\ -2 & 1 & 8\\ 2 & 4 & 3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 3\\ 2 & 4 & 1\\ 1 & 3 & 0\end{pmatrix}$.

1. Найти: A + 2B.
2. Найти: 3 A – B.
3. Найти: A · B.
4. Найти: A^{-1}.
5. Найти: $A \cdot A^{-1}$.
6. Решить матричное уравнение: $X\cdot\begin{pmatrix}9 & 7 & 6\\ 1 & 1 & 2\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 0 & -2\\ 18 & 12 & 9\\ 24 & 14 & 11\end{pmatrix}$

</td>
<td>

Вариант 2

Даны матрицы: $A=\begin{pmatrix}2 & 3 & 0\\ -2 & 1 & 8\\ 2 & 4 & 3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 3\\ 2 & 4 & 1\\ 1 & 3 & 0\end{pmatrix}$.

1. Найти: 2 A + B.
2. Найти: A – 3B.
3. Найти: B · A
4. Найти: B^{-1}
5. Найти: $B \cdot B^{-1}$
6. Решить матричное уравнение: $\begin{pmatrix}3 & 2 & 1\\ 2 & 3 & 1\\ 2 & 1 & 3\end{pmatrix}\cdot X-\begin{pmatrix}3\\ 1\\ 4\end{pmatrix}=2\begin{pmatrix}1\\ -1\\ 0\end{pmatrix}$

</td>
</tr>
<tr>
<td colspan="2">

Вопросы для самопроверки

1. Что такое дополнительный минор элемента определителя?
2. Что такое алгебраическое дополнение элемента определителя?
3. Как осуществляются линейные операции над матрицами?
4. Для каких двух матриц определяется сумма?
5. Для каких двух матриц определяется произведение?
6. Что такое дополнительный минор элемента определителя?
7. Что такое алгебраическое дополнение элемента определителя?
8. Как осуществляются линейные операции над матрицами?
9. Для каких двух матриц определяется сумма?
10. Для каких двух матриц определяется произведение?
11. Как перемножаются две матрицы?
12. Какими свойствами обладают линейные операции над матрицами?
13. Что такое транспонирование матрицы?
14. Что называется, определителем системы?
15. Как находить определитель?

</td>
</tr>
</table>

Практическая работа № 11,12,13
Решение систем линейных уравнений

Студент должен:

знать: решение систем линейных уравнений методом обратной матрицы; решение систем линейных уравнений по формулам Крамера; решение систем линейных уравнений методом Гаусса;

уметь: решать задачи линейной алгебры.

МАТРИЧНЫЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

Матрицы дают возможность кратко записать систему линейных уравнений. Пусть дана система из 3-х уравнений с тремя неизвестными:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3. \end{cases}$$

Рассмотрим матрицу системы $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ и матрицы столбцы неизвестных и свободных членов

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}.$$

Найдем произведение

$$AX = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 \end{pmatrix},$$

т.е. в результате произведения мы получаем левые части уравнений данной системы. Тогда пользуясь определением равенства матриц данную систему можно записать в виде

$$\begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

или короче $A \cdot X = B$.

Здесь матрицы A и B известны, а матрица X неизвестна. Её и нужно найти, т.к. её элементы являются решением данной системы. Это уравнение называют *матричным уравнением*.

Пусть определитель матрицы отличен от нуля $|A| \neq 0$. Тогда матричное уравнение решается следующим образом. Умножим обе части уравнения слева на матрицу A^{-1}, обратную матрице A: Поскольку $A^{-1}A = E$ и $E \cdot X = X$, то получаем решение матричного уравнения в виде $\boldsymbol{X = A^{-1}B}$.

Заметим, что поскольку обратную матрицу можно найти только для квадратных матриц, то матричным методом можно решать только те системы, в которых число уравнений совпадает с числом неизвестных. Однако, матричная запись системы возможна и в случае, когда число уравнений не равно числу неизвестных, тогда матрица *A* не будет квадратной и поэтому нельзя найти решение системы в виде $X = A^{-1}B$.

ПРАВИЛО КРАМЕРА

Рассмотрим систему 3-х линейных уравнений с тремя неизвестными:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3. \end{cases}$$

Определитель третьего порядка, соответствующий матрице системы, т.е. составленный из коэффициентов при неизвестных,

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

называется *определителем системы*.

Составим ещё три определителя следующим образом: заменим в определителе D последовательно 1, 2 и 3 столбцы столбцом свободных членов

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}.$$

Тогда можно доказать следующий результат.

Теорема (правило Крамера). Если определитель системы $\Delta \neq 0$, то рассматриваемая система имеет одно и только одно решение, причём

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \quad x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta}.$$

Пример: Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x + 2y - z = 2, \\ 2x - 3y + 2z = 2, \\ 3x + y + z = 8. \end{cases} \qquad \Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -3 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -5 + 2 \cdot 4 - 11 = -8 \neq 0.$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 2 & -3 & 2 \\ 8 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -10 + 28 - 26 = -8, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 8 & 1 \end{vmatrix} = -14 + 8 - 10 = -16,$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & -3 & 2 \\ 3 & 1 & 8 \end{vmatrix} = -26 - 20 + 22 = -24.$$

Итак, x=1, y=2, z=3.

МЕТОД ГАУССА

Ранее рассмотренные методы можно применять при решении только тех систем, в которых число уравнений совпадает с числом неизвестных, причём определитель системы должен быть отличен от нуля. Метод Гаусса является более универсальным и пригоден для систем с любым числом уравнений. Он заключается в последовательном исключении неизвестных из уравнений системы.

Вновь рассмотрим систему из трёх уравнений с тремя неизвестными:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases}.$$

Первое уравнение оставим без изменения, а из 2-го и 3-го исключим слагаемые, содержащие x_1. Для этого второе уравнение разделим на a_{21} и умножим на $-a_{11}$, а затем сложим с 1-ым уравнением. Аналогично третье уравнение разделим на a_{31} и умножим на $-a_{11}$, а затем сложим с первым. В результате исходная система примет вид:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1, \\ \quad a'_{22}x_2 + a'_{23}x_3 = b'_2, \\ \quad a'_{32}x_2 + a'_{33}x_3 = b'_3. \end{cases}$$

Теперь из последнего уравнения исключим слагаемое, содержащее x_2. Для этого третье уравнение разделим на a'_{32}, умножим на $-a'_{22}$ и сложим со вторым. Тогда будем иметь систему уравнений:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1, \\ \quad a'_{22}x_2 + a'_{23}x_3 = b'_2, \\ \qquad a''_{33}x_3 = b''_3. \end{cases}$$

Отсюда из последнего уравнения легко найти x_3, затем из 2-го уравнения x_2 и, наконец, из 1-го – x_1.

Вариант 1	Вариант 2	Вариант 3
$\begin{cases} x+2y+z=4; \\ 3x-5y+3z=1; \\ 2x+7y-z=8. \end{cases}$	$\begin{cases} 2x+3y+z=11; \\ x-2y-3z=2; \\ y-2z=4. \end{cases}$	$\begin{cases} 2x+y=5; \\ x+3z=16; \\ 5y-z=10. \end{cases}$

Вариант 4	Вариант 5	Вариант 6
$\begin{cases} 7x+2y+3z=15; \\ 5x-3y+2z=15; \\ 10x-11y+5z=36. \end{cases}$	$\begin{cases} 2x-y-z=4; \\ 3x+4y-2z=11; \\ 3x-2y+4z=11. \end{cases}$	$\begin{cases} x+y+2z=-1; \\ 2x-y+2z=-4; \\ 4x+y+4z=-2. \end{cases}$
Вариант 7	Вариант 8	Вариант 9
$\begin{cases} 3x+2y+z=5; \\ 2x+3y+z=1; \\ 2x+y+3z=11. \end{cases}$	$\begin{cases} x+2y+4z=31; \\ 5x+y+2z=29; \\ 3x-y+z=10. \end{cases}$	$\begin{cases} 3x+2y+z=5; \\ 2x+y-z=0; \\ 4x-y+5z=3. \end{cases}$
Вариант 10	Вариант 11	Вариант 12
$\begin{cases} x-2y+z=5; \\ 2x+3y-z=-3; \\ x-y+3z=8. \end{cases}$	$\begin{cases} x-3y+2z=-3; \\ 2x+y-3z=-13; \\ 3x+2y+z=4. \end{cases}$	$\begin{cases} 2x-y-3z=3; \\ y+3z=-1; \\ 3x-2y=-1. \end{cases}$

Вариант 13	Вариант 14	Вариант 15
$\begin{cases} x-y+z=5; \\ 2x+y+z=6; \\ x+y+2z=4. \end{cases}$	$\begin{cases} x-y+z=6; \\ 2x+y+z=3; \\ x+y+2z=5. \end{cases}$	$\begin{cases} x+y+z=6; \\ 5x+4y+3z=22; \\ 10x+5y+z=23. \end{cases}$
Вариант 16	**Вариант 17**	**Вариант 18**
$\begin{cases} x+\frac{1}{2}y+2z=8; \\ 5x-3y+2z=5; \\ x+3y+3z=16. \end{cases}$	$\begin{cases} x+2y+3z=6; \\ 4x+y+4z=9; \\ 3x+5y+2z=10. \end{cases}$	$\begin{cases} 2x+y+3z=3; \\ 4x+2y+5z=5; \\ 3x+4y+7z=2. \end{cases}$
Вариант 19	**Вариант 20**	**Вариант 21**
$\begin{cases} 2x+4y+z=4; \\ 3x+6y+2z=4; \\ 4x-y-3z=1. \end{cases}$	$\begin{cases} 3x-3y+2z=2; \\ 4x-5y+2z=1; \\ 5x-6y+4z=3. \end{cases}$	$\begin{cases} 3x+2y-4z=8; \\ 2x+4y-5z=11 \\ 4x-3y+2z=1. \end{cases}$
Вариант 22	**Вариант 23**	**Вариант 24**
$\begin{cases} 2x-y+z=2; \\ 3x+2y+2z=-2; \\ x-2y+z=1. \end{cases}$	$\begin{cases} x+2y+3z=5; \\ 2x-y-z=1; \\ x+3y+4z=6. \end{cases}$	$\begin{cases} 2x-3y+z=-1; \\ x+y+z=6; \\ 3x+y-2z=-1. \end{cases}$
Вариант 25	**Вариант 26**	**Вариант 27**
$\begin{cases} 2x-4y+z=3; \\ x-5y+3z=-1; \\ x-y+z=1. \end{cases}$	$\begin{cases} x+2y=5; \\ 3y+z=9; \\ y+2z=8. \end{cases}$	$\begin{cases} x+2y+z=0; \\ 2x+y+z=1; \\ x+3y+z=2. \end{cases}$
Вариант 28	**Вариант 29**	**Вариант 30**
$\begin{cases} 2x+y-2z=5; \\ x+2y+2z=-5; \\ 7x+y-2z=10. \end{cases}$	$\begin{cases} 3x-4y+4z=7; \\ 5x-3y+4z=11; \\ x-2y+2z=3. \end{cases}$	$\begin{cases} x+2y=10; \\ 3x+2y+z=23; \\ y+2z=13. \end{cases}$

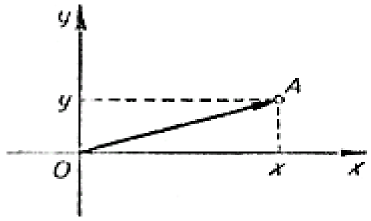
Вопросы для самопроверки

1. Методы выполнения действий с матрицами.
2. Что называется, определителем системы?
3. Как находить определитель?
4. Теорема (правило Крамера).
5. Способы решения систем линейных уравнений.
6. При каких условиях система линейных алгебраических уравнений имеет множество решений?
7. При каких условиях система линейных уравнений имеет единственное решение?
8. При каких условиях система линейных уравнений совместна?
9. При каких условиях система линейных уравнений несовместна?

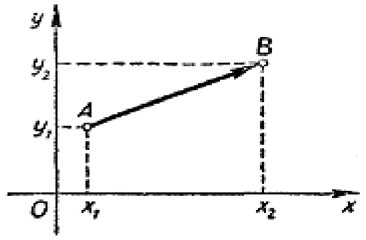
ЭЛЕМЕНТЫ АНАЛИТИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИИ

Точка и координаты. Расстояние между двумя точками плоскости

Каждая точка A плоскости характеризуется своими координатами (x, y). Они совпадают с координатами вектора 0A, выходящего из точки 0 — начала координат.



Пусть A и B — произвольные точки плоскости с координатами (x_1 y_1) и (x_2, y_2) соответственно.



Расстояние d между точками A и B, или, что то же самое, длина вектора AB, определяется из условия

$d^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$. Отсюда

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

Прямая линия

Общее уравнение

$$Ax + By + C = 0$$

Уравнение прямой в отрезках

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1,$$

где a, b – величины отрезков, отсекаемых прямой на осях координат.

Нормальное уравнение прямой

$$x\cos\alpha + y\sin\alpha - p = 0,$$

где α - угол, образуемый нормально к прямой и осью Ox; p - расстояние от начала координат до прямой.

Приведение общего уравнения прямой к нормальному виду:

$$\frac{Ax + By + C}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}} = 0.$$

Здесь $\frac{1}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}}$ - нормируемый множитель прямой; знак выбирается противоположным знаку C, если $C \neq 0$, и произвольно, если $C = 0$.

Каноническое уравнение прямой

$$\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m}.$$

Уравнение прямой по двум точкам

$$\frac{x-x_0}{x_1-x_0}=\frac{y-y_0}{y_1-y_0},$$

Уравнение прямой по точке и угловому коэффициенту

$$y-y_0=k(x-x_0) \quad \text{или} \quad y=kx+b,$$

Расстояние от точки до прямой

$$d=|x_0\cos\alpha+y_0\sin\alpha-p|, \quad d=\frac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}.$$

Угол между двумя прямыми

$$\cos\varphi=\cos(\widehat{\bar{n}_1,\ \bar{n}_2})=\frac{\bar{n}_1\cdot\bar{n}_2}{|\bar{n}_1||\bar{n}_2|}=\frac{A_1A_2+B_1B_2}{\sqrt{A_1^2+B_1^2}\sqrt{A_2^2+B_2^2}},$$

$$tg\varphi=\frac{k_2-k_1}{1+k_1k_2}=\frac{A_1B_2-A_2B_1}{A_1A_2+B_1B_2}.$$

Необходимое и достаточное условие перпендикулярности двух прямых

$$\bar{n}_1\cdot\bar{n}_2=0, \quad \text{или} \quad A_1A_2+B_1B_2=0, \quad \text{или} \quad k_1k_2=-1.$$

Расстояние между параллельными прямыми

Если прямые заданы уравнениями

$$Ax+By+C_1=0 \quad \text{и} \quad Ax+By+C_2=0, \quad \text{то} \quad d=\frac{|C_2-C_1|}{\sqrt{A^2+B^2}},$$

Практическая работа № 14
Решение задач на вычисление элементов треугольника в прямоугольной системе координат

знать: формулу уравнения прямой;

уметь: решать задачи на вычисление элементов треугольника в прямоугольной системе координат.

Теоретические сведения:

1^0. Общее уравнение прямой

Ax + By + C = 0. (1)

Вектор **n**(A,B) ортогонален прямой, числа A и B одновременно не равны нулю.

2^0. Уравнение прямой с угловым коэффициентом

$y - y_o = k(x - x_o)$, (2)

где k - угловой коэффициент прямой, то есть $k = tg\ \alpha$, где α - величина угла, образованного прямой с осью Ox, M (x_o, y_o) - некоторая точка, принадлежащая прямой.

Уравнение (2) принимает вид $y = kx + b$, если M (0, b) есть точка пересечения прямой с осью Oy.

3^0. Уравнение прямой в отрезках

x/a + y/b = 1, (3)

где a и b - величины отрезков, отсекаемых прямой на осях координат.

4^0. Уравнение прямой, проходящей через две данные точки - A(x_1, y_1) и B(x_2, y_2):

$$\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{x-x_1}{x_2-x_1}. \qquad (4)$$

5^0. Уравнение прямой, проходящей через данную точку A(x_1, y_1) параллельно данному вектору a(m, n)

$$\frac{y-y_1}{n}=\frac{x-x_1}{m}. \qquad (5)$$

Нормальное уравнение прямой в координатной форме имеет вид:

$x \cos \alpha + y \sin \alpha - p = 0$,

где α - величина угла, образованного прямой с осью Ox.

Уравнение пучка прямых с центром в точке A(x_1, y_1) имеет вид: **$y-y_1 = \lambda(x-x_1)$,**

где λ - параметр пучка. Если пучок задается двумя пересекающимися прямыми

$A_1 x + B_1 y + C_1= 0$, $A_2 x + B_2 y + C_2 = 0$, то его уравнение имеет вид:

$\lambda (A_1 x + B_1 y + C_1) + \mu (A_2 x + B_2 y + C_2)=0$,

где λ и μ - параметры пучка, не обращающиеся в 0 одновременно.

Величина угла между прямыми **$y = kx + b$** и **$y = k_1 x + b_1$** задается формулой:

$$\mathbf{tg}\,\varphi = \left|\frac{k_1-k}{1+k_1k}\right|. \qquad \mathbf{(6)}$$

Равенство **$1 + k_1 k = 0$** есть необходимое и достаточное условие **перпендикулярности прямых.**

Для того, чтобы два уравнения

$A_1 x + B_1 y + C_1= 0$, (7)

$A_2 x + B_2 y + C_2 = 0$, (8)

задавали одну и ту же прямую, необходимо и достаточно, чтобы их коэффициенты были пропорциональны: **$A_1/A_2 = B_1/B_2 = C_1/C_2$.**

Уравнения (7), (8) задают две различные параллельные прямые, если $A_1/A_2 = B_1/B_2$ и $B_1/B_2 \neq C_1/C_2$; прямые пересекаются, если $A_1/A_2 \neq B_1/B_2$.

Расстояние d от точки $M_o(x_o, y_o)$ до прямой есть длина перпендикуляра, проведенного из точки M_o к прямой.

Для треугольников, заданных координатами своих вершин найти: 1) уравнение сторон; 2) уравнение медиан; 3) уравнение высот 4) уравнение прямой, проходящей через вершину, параллельно	1) A (1; 1), B (2; 5), C (6; 2); 2) A (–1;–1), B (2; 5), C (4; –2); 3) A (–3; 1), B (2; 4), C (3; –1); 4) A (1;–2), B (6; 2), C (–1; 6); 5) A (–2; 3), B (4; 5), C (4; –2); 6) A (1;–3), B (3; 4), C (7; –2); 7) A (1; 3), B (8; 5), C (3; –2);

противоположной стороне, 5) угол А треугольника.	8) A (–4;–2), B (1; 5), C (3; –2); 9) A (–5; –1), B (–4; 6), C (1; 0); 10) A (1; 1), B (2; 2), C (3; –4).
Вопросы для самопроверки 1. Какой вид имеет общее уравнение прямой на плоскости? 2. Каков геометрический смысл коэффициентов при неизвестных в общем уравнении прямой? 3. Какое уравнение прямой на плоскости называется каноническим? 4. Что такое угловой коэффициент прямой? 5. Уравнения каких прямых не могут быть записаны в виде уравнения с угловым коэффициентом? 6. Как записывается условие параллельности двух прямых на плоскости? 7. Как записывается условие перпендикулярности двух прямых на плоскости? 8. Как определить взаимное расположение двух прямых на плоскости? 9. Как найти точку пересечения двух прямых на плоскости? 10. Как найти угол между двумя прямыми на плоскости? 11. Как вычисляется расстояние от точки до прямой на плоскости?	

Практическая работа № 15
Вычисление характеристик кривых второго порядка

Студент должен:

знать: формулировки определений кривых второго порядка и их характеристик;

уметь: решать задачи на составление уравнений кривых второго порядка; вычислять характеристики кривых второго порядка.

Кривые второго порядка

1. Окружность

Определение 1.1 Окружностью называется геометрическое место точек плоскости, равноудаленных от фиксированной точки, называемой центром окружности.

Получим уравнение окружности, если известны ее центр и радиус.

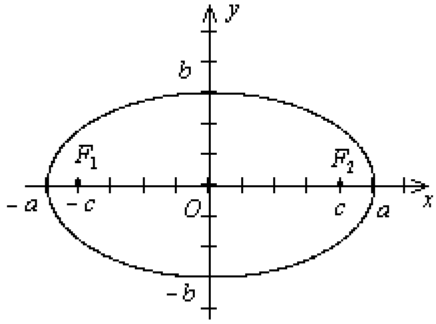
Теорема 1.1 *Окружность радиуса* R *с центром в точке* $M_0(x_0;y_0)$ *имеет уравнение*

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=R^2.$$

2. Эллипс

Определение 2.1 Эллипсом называется геометрическое место точек плоскости, для каждой из которых сумма расстояний до двух данных точек той же плоскости, называемых фокусами эллипса, есть величина постоянная.

Теорема 2.1 *Пусть сумма расстояний от точки эллипса до фокусов равна* $2a$ *, а расстояние между фокусами --* $2c$ *. Тогда в выбранной системе координат эллипс имеет уравнение*

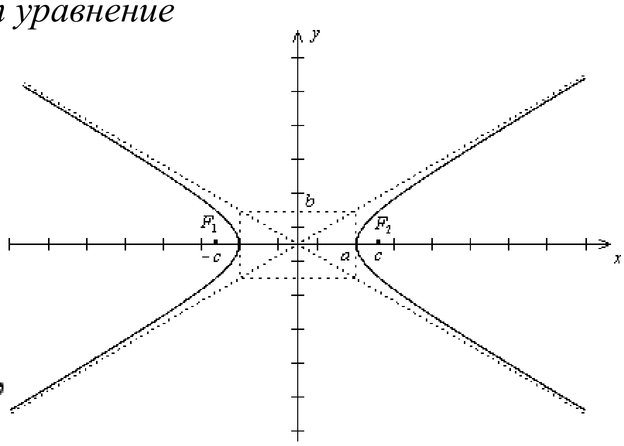


$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,$$

3. Гипербола

Определение 3.1 Гиперболой называется геометрическое место точек плоскости, для каждой из которых абсолютная величина разности расстояний до двух фиксированных точек той же плоскости, называемых фокусами гиперболы, есть величина постоянная.

Теорема 3.1 *Пусть расстояние между фокусами* F_1 *и* F_2 *гиперболы равно* $2c$ *, а абсолютная величина разности расстояний от точки гиперболы до фокусов равна* $2a$ *. Тогда гипербола в выбранной выше системе координат имеет уравнение*



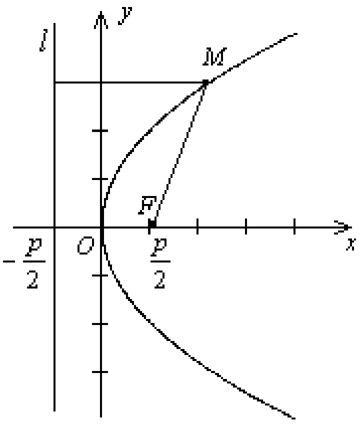
$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1,$$

4. Парабола

Определение 4.1 Параболой называется геометрическое место точек плоскости, для каждой из которых расстояние до фиксированной точки этой плоскости, называемой фокусом, равно расстоянию до фиксированной прямой, лежащей в той же плоскости и называемой директрисой параболы.

Теорема 4.1 *Пусть расстояние между фокусом* F *и директрисой* l *параболы равно* p *. Тогда в выбранной системе координат парабола имеет уравнение*

$y^2 = 2px.$

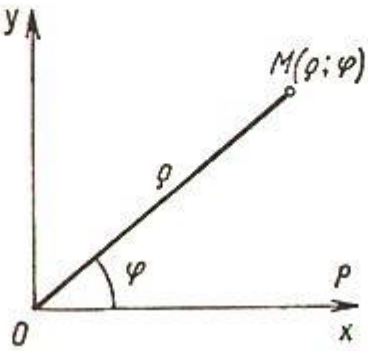


Полярные координаты

Полярные координаты (рис. 4.3)

O - полюс, *Ox* - полярная ось, $\rho = |OM|$ - полярный радиус, φ - полярный угол.

Главные значения ρ и φ: $0 \le \rho < \infty, \ -\pi < \varphi \le \pi$ (иногда $0 \le \rho < \infty, \ 0 \le \varphi < 2\pi$).



Выражение декартовых прямоугольных координат через полярные

$$x = \rho\cos\varphi,$$
$$y = \rho\sin\varphi.$$

Выражение полярных координат через декартовы прямоугольные

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \cos\varphi = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad \sin\varphi = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

Задания

1. Составить уравнение линии, каждая точка которой равноудалена от точки *A* (4;4) и от оси абсцисс. Сделать чертеж.

2. Составить уравнение линии, каждая точка которой удалена от точки *A* (2;0) вдвое дальше, чем от оси ординат. Сделать чертеж.

3. Составить уравнение линии, каждая точка которой находится вдвое дальше от точки *A* (-2;0), чем от точки *B* (1;0). Сделать чертеж.

4. Составить уравнение линии, расстояние каждой точки которой от начала координат и от прямой $3x + 16 = 0$ относятся как 3 : 5. Сделать чертеж.

5. Составить уравнение линии, расстояния каждой точки которой от точек *A* (6;0) и *B* (2;0) относятся как 2 : 1. Сделать чертеж.

6. Составить уравнение линии, каждая точка которой отстоит от точки A (3;0) вдвое дальше, чем от прямой $x = 1$. Сделать чертеж.

7. Составить уравнение линии, расстояния каждой точки которой от точки A (-2;0) и от точки B (2;0) относятся как 3 : 4.Сделать чертеж.

8. Составить уравнение линии, каждая точка которой равноудалена от точки A (1;3) и от прямой $y + 1 = 0$. Сделать чертеж.

9. Составить уравнение линии, расстояние каждой точки которой от точки A (1;0) втрое больше расстояния от прямой $y = -2$. Сделать чертеж.

10. Составить уравнение линии, расстояние каждой точки которой от точки A (4;2) равно расстоянию от оси ординат. Сделать чертеж.

Вопросы для самопроверки

1. Какие линии называются кривыми второго порядка?
2. Какой вид имеет каноническое уравнение эллипса?
3. Какой вид имеет каноническое уравнение гиперболы?
4. Какой вид имеет каноническое уравнение параболы?
5. Какой вид имеет каноническое уравнение окружности?
6. Какова схема приведения общего уравнения кривой второго порядка к каноническому виду?

Список литературы

Основные источники:

1. Григорьев В.П., Дубинский Ю. А. Элементы высшей математики : ”Москва, “Академия” – 2012.
2. Г р и г о р ь е в В. П., С а б у р о в а Т. Н. Сборник задач по высшей математике: учеб. пособие: Рекомендовано ФГУ «ФИРО». — 2-е изд., стер. — 160 с.
3. М.С. Спирина, П.А. Спирин Теория вероятностей и математическая статистика: ”Москва, “Академия” – 2012.

Дополнительные источники:

1. И.Д. Пехлецкий Математика: Учебник-М.: Мастерство,2010
2. Н.В. Богомолов Практические занятия по математике.- М.: Высшая школа, 2009
3. П.Е. Данко, А.Г. Попов Высшая математика в упражнениях и задачах. Часть 1 и 2.- М.: Высшая школа 2008
4. В.С. Щипачев Основы высшей математики.-М.: Высшая школа, 2001
5. Л.А. Кузнецов Сборник заданий по высшей математике (типовые расчеты) - электронная книга

Интернет-ресурсы:

1. Информационно-справочная система «В помощь студентам». Форма доступа: http://window.edu.ru
2. Информационно-справочная система Форма доступа: http://dit.isuct.ru.
3. Информационно-справочная система Форма доступа: http://www.resolventa.ru
4. **http://www.bymath.net/ Математическая школа в Интернете.**
5. www.aonb.ru/depart/is/mat.pdf Для учителей математики.
6. www.imc-new.com/index.php/teaching…/210-2011-04-19-06-23-55 Методические рекомендации.
7. uztest.net/course/view.php?id=11 Олимпиады по математике
8. www.nsc.ru/win/mathpub/ математические публикации
9. http://metodisty.ru/m/groups/files/matematika_v_shkole?cat=32 Математика в школе
10. http://pedsovet.su/load/18 Pedsovet.su
11. http://mathematic.su/ Математика
12. http://mathedu.ru/ Математическое образование: прошлое и настоящее

http://ilib.mccme.ru/ Интернет- библиотека

Справочники:

1. М. Я. Выгодский Справочник по высшей математике: Астрель, 2003
2. В. М. Брадис Четырехзначные математические таблицы: Дрофа, 1996

Узденова Клара Магометовна

УЗДЕНОВА Клара Магомедовна

ЭЛЕМЕНТЫ ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ

Практикум для студентов второго курса, обучающихся по специальности 09.02.07 «Информационные системы и программирование»

Корректор Чагова О.Х.
Редактор Чагова О.Х.

Сдано в набор 23.11.2023 г.
Формат 60х84/16
Бумага офсетная.
Печать офсетная.
Усл. печ. л. 2,32
Заказ № 5011
Тираж 100 экз.

Оригинал-макет подготовлен
в Библиотечно-издательском центре СКГА
369000, г. Черкесск, ул. Ставропольская, 36