МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

СЕВЕРО-КАВКАЗСКАЯ ГОСУДАРСТВЕННАЯ АКАДЕМИЯ

Л. А. Кунижева
З. О. Коркмазова

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Учебно-методическое пособие для обучающихся направления подготовки
01.03.02 Прикладная математика и информатика

Черкесск
2025

УДК 512.6
ББК 22.143
К 91

Рассмотрено на заседании кафедры «Математика»
Протокол № 1 от «2» сентября 2024 г.
Рекомендовано к изданию редакционно-издательским советом СКГА.
Протокол № 27 от «07» ноября 2024 г.

Рецензенты:
Кочкаров А.М. – д.ф.-м.н., профессор
Токова А.А. – к.ф.-м.н., доцент

К 91 **Кунижева, Л. А.** Дифференциальные уравнения: учебно-методическое пособие для обучающихся направления подготовки 01.03.02 «Прикладная математика и информатика» / Л.А. Кунижева, З.О. Коркмазова. – Черкесск: СКГА, 2025. – 36 с.

Учебно-методическое пособие предназначено для обучающихся направления подготовки «Прикладная математика и информатика», содержит краткий теоретический материал по курсу дифференциальных уравнений, который сопровождается рассмотрением большого количества образцов решения задач.

УДК 512.6
ББК 22.143

© Кунижева Л.А., Коркмазова З.О., 2025
© ФГБОУ ВО СКГА, 2025

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ..... 4
Раздел 1. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ПЕРВОГО ПОРЯДКА... 5
1.1. Понятие дифференциального уравнения. Основные понятия…….. 5
1.2. Дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными…..... 6
1.3. Однородные дифференциальные уравнения первого порядка…..... 8
1.4. Линейные дифференциальные уравнения первого порядка……. 13
1.5. Уравнение Бернулли……..……... 16
1.6. Уравнения в полных дифференциалах……..……. 17
Задания для самостоятельного решения..... 19
Раздел 2. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ 21
2.1. Дифференциальные уравнения, допускающие понижение порядка…… 21
2.2. Линейные однородные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами……... 23
2.3. Линейные неоднородные уравнения с постоянными коэффициентами.. 24
Задания для самостоятельного решения…… 26
Раздел 3.ЛИНЕЙНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ВТОРОГОПОРЯДКА…….. 27
3.1. Линейные однородные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами…… 27
3.2. Линейные неоднородные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами……. 28
Задания для самостоятельного решения..... 29
Раздел 4. СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ……... 30
Задания для самостоятельного решения 33
СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ..... 35

ВВЕДЕНИЕ

Многие физические законы, которым подчиняются те или иные явления, записываются в виде математического уравнения, выражающего определенную зависимость между какими-то величинами. Часто речь идет о соотношении между величинами, изменяющимися с течением времени, например экономичность двигателя, измеряемая расстоянием, которое автомашина может проехать на одном литре горючего, зависит от скорости движения автомашины. Соответствующее уравнение содержит одну или несколько функций и их производных и называется дифференциальным уравнением. Большое значение, которое имеют дифференциальные уравнения для математики и особенно для ее приложений, объясняются тем, что к решению таких уравнений сводится исследование многих физических и технических задач. Дифференциальные уравнения играют существенную роль и в других науках, таких, как биология, экономика и электротехника; в действительности, они возникают везде, где есть необходимость количественного (числового) описания явлений (коль скоро окружающий мир изменяется во времени, а условия изменяются от одного места к другому).

В данном учебном пособии рассмотрены основные понятия и теоремы теории обыкновенных дифференциальных уравнений, а также основные типы дифференциальных уравнений, систем дифференциальных уравнений и методы их решения.

Пособие разбито на разделы в соответствии с видами дифференциальных уравнений. В каждом разделе изложен краткий теоретический материалпо всем темам, который сопровождается рассмотрением большого количества примеров и задач. В конце каждого раздела приведены задания для самостоятельной работы обучающихся.

Пособие может быть использовано обучающимися для самостоятельного изучения соответствующего материала, что поможет им правильно и рационально готовиться к лекционным, практическим занятиям, к сдаче экзамена. Оно может быть полезно также преподавателям при планировании и проведении практических занятий и проверочных работ.

Раздел 1. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

1.1. Понятие дифференциального уравнения. Основные понятия

Определение. Дифференциальным уравнением называется уравнение, связывающее независимые переменные, их функции и производные (или дифференциалы) этой функции.

Если дифференциальное уравнение имеет одну независимую переменную, то оно называется *обыкновенным дифференциальным уравнением*, если же независимых переменных две или более, то такое дифференциальное уравнение называется *дифференциальным уравнением в частных производных.*

Наивысший порядок производных, входящих в уравнение, называется *порядком дифференциального уравнения.*

Пример:

1) $x^3y' + 8y - x + 5 = 0$ - обыкновенное дифференциальное уравнение 1-го порядка. В общем виде записывается $F(x, y, y') = 0$.

2) $x\dfrac{d^2y}{dx^2} + xy\dfrac{dy}{dx} + x^2 = y$ - обыкновенное дифференциальное уравнение 2-го порядка. В общем виде записывается $F(x, y, y', y'') = 0$

3) $y^2\dfrac{\partial z}{\partial x} + xy\dfrac{\partial z}{\partial y} = 0$ - дифференциальное уравнение в частных производных первого порядка.

Определение. Общим решением дифференциального уравнения называется такая дифференцируемая функция y = φ(x, C), которая при подстановке в исходное уравнение вместо неизвестной функции обращает уравнение в тождество.

Определение. Дифференциальным уравнением первого порядка называется уравнение, содержащее неизвестную функцию и её первую производную, то есть уравнение вида

$$F(x, y, y') = 0, \qquad (1)$$

где x – независимая переменная, y – искомая функция, y' – её производная.

Если уравнение (1.1) можно разрешить относительно y', то оно принимает вид

$$y' = f(x, y) \qquad (2)$$

и называется дифференциальным уравнением первого порядка, *разрешённым относительно производной.*

Например, уравнения $y' = x \cdot e^y$, $y' = \dfrac{y \ln x}{x}$, $y' = x + y$ являются дифференциальными уравнениями первого порядка, разрешёнными относительно производной.

Определение. *Решением дифференциального уравнения* называется функция $y=\varphi(x)$, определённая на некотором интервале (a,b), которая при подстановке в уравнение обращает его в тождество. График решения дифференциального уравнения называется *интегральной кривой*.

Например, функция $y_1 = x^2$ тождественно обращает в ноль левую часть уравнения $xy' - 2x^2 = 0$ и поэтому представляет собой решение этого уравнения. Аналогично, функции $y_2 = x^2 + 1$, $y_3 = x^2 - 200$ и, вообще, любая функция вида $y = x^2 + \tilde{N}$, где $\tilde{N}$ – любое действительное число, является решением дифференциального уравнения $xy' - 2x^2 = 0$.

Определение. Общим решением дифференциального уравнения называется функция $y=\varphi(x,C)$, удовлетворяющая этому уравнению при произвольном значении постоянной C. На плоскости Oxy общее решение представляет собой *семейство интегральных кривых*.

Таким образом, функция $y = x^2 + \tilde{N}$ – общее решение дифференциального уравнения $xy' - 2x^2 = 0$.

В теории дифференциальных уравнений основным является вопрос о существовании и единственности решения. Ответ на него даёт теорема Коши.

Теорема Коши: *Пусть дано дифференциальное уравнение (2), разрешённое относительно производной. Если функция* $f(x,y)$ *и её производная* $f'(x,y)$ *непрерывны в некоторой области* D *плоскости* Oxy, *то в окрестности любой внутренней точки* (x_0,y_0) *этой области существует единственное решение уравнения (2), удовлетворяющее условию* $y = y_0$ *при* $x = x_0$.

Условия, которые задают значение функции y_0 в фиксированной точке x_0, называют *начальными условиями (условиями Коши)* и записывают в форме:

$$y\big|_{x_0} = y_0. \qquad (3)$$

Задача нахождения решения дифференциального уравнения (2), удовлетворяющего условию (3), называется *задачей Коши*. Начальные условия (3) из множества интегральных кривых выделяют ту, которая проходит через точку (x_0,y_0)области D.

1.2. Дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными

Определение. Дифференциальное уравнение $y' = f(x,y)$ называется *уравнением с разделяющимися переменными*, если его можно записать в виде

$$y' = \alpha(x)\beta(y) \qquad (1)$$

Такое уравнение можно представить также в виде:

$$y' - \alpha(x)\beta(y) = 0; \quad dy - \alpha(x)\beta(y)dx = 0; \quad \frac{dy}{\beta(y)} - \alpha(x)dx = 0 \text{ при } \beta(y) \neq 0;$$

Перейдем к новым обозначениям $\alpha(x) = -X(x); \quad \frac{1}{\beta(y)} = Y(y);$

Получаем: $X(x)dx + Y(y)dy = 0;$

$$\int X(x)dx + \int Y(y)dy = C$$

После нахождения соответствующих интегралов получается общее решение дифференциального уравнения с разделяющимися переменными.

Если заданы начальные условия, то при их подстановке в общее решение находится постоянная величина С, а, соответственно, и частное решение.

Пример 1. Найти общие решения дифференциального уравнения: $3y' - x + 1 = 0$.

Перепишем уравнение в виде $3dy = (x-1)dx$.

Интегрируя обе части, имеем $3y = \frac{x^2}{2} - x + C_1$, где C_1 – произвольная постоянная. Выражая искомую функцию y, получаем $y = \frac{x^2}{6} - \frac{x}{3} + \frac{C_1}{3}$, $C_1 \in R$, что эквивалентно уравнению $y = \frac{x^2}{6} - \frac{x}{3} + C$, $\tilde{N} \in R$.

Ответ: $y = \frac{x^2}{6} - \frac{x}{3} + C$, $C \in R$.

Пример 2. Найти общие решения дифференциального уравнения $xy' - y = 0$.

Разделим переменные, перенеся y в правую часть, поделив обе части полученного уравнения на $xy \neq 0$ и умножив их на dx. Получим

$$\frac{dy}{y} = \frac{dx}{x}, \; xy \neq 0.$$

Интегрируя обе части, имеем $\ln|y| = \ln|x| + C$, где $C \in R$. При потенцировании получаем $e^{\ln|y|} = e^{\ln|x|+C}$ или $|y| = |x| \cdot e^C$, $|y| = C_1 \cdot |x|$, $C_1 > 0$, что эквивалентно уравнению $y = Cx$, $C \neq 0$.

Проверим, являются ли решениями $x = 0$ и $y = 0$.

Подставляя $x = 0$ в исходное уравнение, получаем $0 - y = 0$. Это не тождество, следовательно, $x = 0$ – не решение.

$y = 0$ является решением данного уравнения, так как обращает его в верное равенство. Его можно включить в общее решение, убрав ограничение $C \neq 0$.

Ответ: $y = Cx$, $C \in R$.

Пример 3. Найти решение дифференциального уравнения $\frac{y}{y'} = \ln y$ при условии y(2) = 1.

$$\frac{ydx}{dy} = \ln y$$

$$dx = \frac{\ln ydy}{y}$$

$$\int dx = \int \frac{\ln ydy}{y}$$

$$x + C = \int \ln yd(\ln y)$$

$$x + C = \frac{\ln^2 y}{2}$$

при y(2) = 1 получаем $2 + C = \frac{\ln^2 1}{2}; \quad \Rightarrow \quad 2 + C = 0; \quad \Rightarrow \quad C = -2;$

Итого: $2(x-2) = \ln^2 y;$ или $y = e^{\pm\sqrt{2x-4}}$ - частное решение.

Пример 4. $y' = tg\,x\,tg\,y$.

Решение: Данное уравнение относится к типу дифференциальных уравнений с разделяющимися переменными. Разделим переменные:

$$y' = tgxtgy \Rightarrow \frac{dy}{dx} = tgxtgy \Rightarrow \frac{dy}{tgy} = tgxdx.$$

Проинтегрируем обе части последнего неравенства

$$\int \frac{dy}{tgy} = \int tgxdx \Rightarrow \int \frac{cosydy}{siny} = \int \frac{\sin xdx}{\cos x} \Rightarrow \int \frac{d\sin y}{\sin y} = -\int \frac{d\cos x}{\cos x}\ .$$

$$\Rightarrow \ln|\sin y| = -\ln|\cos x| + \ln C$$

По свойству логарифмов $\ln|\sin x| = \ln\frac{C}{|\cos x|}$ или окончательно решение дифференциального уравнения имеет вид: $\sin y = \frac{C}{\cos x}$.

1.3. Однородные дифференциальные уравнения первого порядка

Определение. Функция $z = f(x,y)$ называется *однородной функцией порядка* m, если для любого числа $\lambda \neq 0$ выполняется равенство $f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^m f(x,y)$.

Например, $z = x^2 + y^2$ – однородная функция второго порядка, так как $z(\lambda x, \lambda y) = (\lambda x)^2 + (\lambda y)^2 = \lambda^2\left(x^2 + y^2\right) = \lambda^2 z(x,y);$ $z = \sqrt{xy}$ – однородная

функция первого порядка; $z=\dfrac{x-y}{x+y}$ – однородная функция нулевого порядка.

*Определение 2.*Дифференциальное уравнение вида

$$P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0, \qquad (1)$$

где $P(x,y)$, $Q(x,y)$ – однородные функции одного порядка, называется *однородным дифференциальным уравнением первого порядка*.

Это уравнение можно привести к виду

$$y'=f(x,y),$$

где $f(x,y)$ – однородная функция нулевого порядка.

С помощью замены $y=ux$, где u – новая неизвестная функция, $y'=u'x+u$ или $dy=xdu+udx$, однородное дифференциальное уравнение сводится к уравнению *с разделяющимися переменными.*

Пример 1. Найти общие решения дифференциального уравнения $xdy=(y-x)dx$.

Это уравнение является однородным, так как функции $P(x,y)=y-x$, $Q(x,y)=-x$ обе являются однородными функциями первого порядка. Сделаем замену $y=ux$, $dy=xdu+udx$, имеем

$$x(xdu+udx)=(ux-x)dx$$

или

$$x^2du+uxdx=uxdx-xdx,$$

$$x^2du=-xdx.$$

Последнее уравнение является уравнением с разделяющимися переменными. Поделим обе его части на $x^2\neq 0$, получим

$$du=-\frac{1}{x}dx,\ x\neq 0.$$

Интегрируя левую и правую части, имеем

$$u=-\ln|x|+C_1$$

или

$$u=\ln\left|\frac{\tilde{N}}{x}\right|, \text{ где } C=\pm e^{C_1},\ C\neq 0.$$

Сделав обратную замену $u=\dfrac{y}{x}$, получим $y=x\ln\left|\dfrac{C}{x}\right|$, $C\neq 0$.

Проверим, является ли $x=0$ решением. Подстановка в исходное уравнение приводит к тождеству $0=0$, значит, $x=0$ – это решение.

Ответ: $\left[\begin{array}{l} y = x\ln\left|\dfrac{C}{x}\right|, C \neq 0, \\ x = 0. \end{array}\right.$

Пример 2. Найти общие решения дифференциального уравнения $y' = \dfrac{x+y}{x-y}$.

Так как $f(x) = \dfrac{x+y}{x-y}$ – однородная функция нулевого порядка, то данное уравнение также является однородным.

Сделаем замену $y = ux$, $y' = u'x + u$, получим

$$u'x + u = \frac{x+ux}{x-ux}.$$

Сократив на $x \neq 0$, имеем

$$u'x + u = \frac{1+u}{1-u}$$

или

$$u'x = \frac{1+u}{1-u} - u,$$

$$u'x = \frac{1+u-u+u^2}{1-u},$$

$$u'x = \frac{1+u^2}{1-u}.$$

Последнее уравнение является дифференциальным уравнением с разделяющимися переменными. Разделив обе части уравнения на $x \neq 0$, $\dfrac{1-u}{1+u^2} \neq 0$ и умножив на dx, получим

$$\frac{1-u}{1+u^2}du = \frac{dx}{x}.$$

Интегрируя левую и правую части, имеем

$$\int\left(\frac{1}{1+u^2} - \frac{u}{1+u^2}\right)du = \int\frac{dx}{x},$$

$$arctgu - \frac{1}{2}\ln\left(1+u^2\right) = \ln|x| + C.$$

Сделав обратную замену $u = \dfrac{y}{x}$, находим общее решение уравнения:

$$arctg\frac{y}{x} - \frac{1}{2}\ln\left(1+\left(\frac{y}{x}\right)^2\right) = \ln|x| + C,\ C \in R.$$

Проверим, являются ли решениями $x=0$, $1-u=0$ или $y=x$. Подставляя $x=0$ и $y=x$ в исходное уравнение, тождества не получаем, следовательно, это не решения.

Ответ: $arctg\,\frac{y}{x}-\frac{1}{2}\ln\left(1+\left(\frac{y}{x}\right)^2\right)=\ln|x|+C,\ C\in R.$

Уравнения, приводящиеся к однородным

Кроме уравнений, описанных выше, существует класс уравнений, которые с помощью определенных подстановок могут приведены к однородным.

Это уравнения вида $y'=f\left(\frac{ax+by+c}{a_1x+b_1y+c_1}\right)$.

Если определитель $\begin{vmatrix} a & b \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix}\neq 0,$ то переменные могут быть разделены подстановкой

$$x=u+\alpha;\qquad y=v+\beta;$$

где α и β - решения системы уравнений $\begin{cases} ax+by+c=0 \\ a_1x+b_1y+c_1=0 \end{cases}$

Пример 1. Решить уравнение $(x-2y+3)dy+(2x+y-1)dx=0.$

Получаем $(x-2y+3)\frac{dy}{dx}=-2x-y+1;\qquad \frac{dy}{dx}=\frac{-2x-y+1}{x-2y+3};$

Находим значение определителя $\begin{vmatrix} -2 & -1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}=4+1=5\neq 0.$

Решаем систему уравнений $\begin{cases} -2x-y+1=0 \\ x-2y+3=0 \end{cases};\ \begin{cases} y=1-2x \\ x-2+4x+3=0 \end{cases};\ \begin{cases} x=-1/5 \\ y=7/5 \end{cases};$

Применяем подстановку $x=u-1/5;\quad y=v+7/5;$ в исходное уравнение:

$$(u-1/5-2v-14/5+3)dv+(2u-2/5+v+7/5-1)du=0;$$
$$(u-2v)dv+(2u+v)du=0;$$
$$\frac{dv}{du}=\frac{2u+v}{2v-u}=\frac{2+v/u}{2v/u-1};$$

Заменяем переменную $\frac{v}{u}=t;\quad v=ut;\quad v'=t'u+t;$ при подстановке в выражение, записанное выше, имеем:

$$t'u+t=\frac{2+t}{2t-1}$$

Разделяем переменные: $\frac{dt}{du}u=\frac{2+t}{2t-1}-t=\frac{2+t-2t^2+t}{2t-1}=\frac{2(1+t-t^2)}{2t-1};$

$$\frac{du}{u}=-\frac{1}{2}\cdot\frac{1-2t}{1+t-t^2}dt;\qquad \int\frac{du}{u}=-\frac{1}{2}\int\frac{(1-2t)dt}{1+t-t^2};$$

$$-\frac{1}{2}\ln\left|1+t-t^2\right|=\ln|u|+\ln C_1$$
$$\ln\left|1+t-t^2\right|=-2\ln|C_1u|$$
$$\ln\left|1+t-t^2\right|=\ln\left|\frac{C_2}{u^2}\right|;\quad 1+t-t^2=\frac{C_2}{u^2};$$

Переходим теперь к первоначальной функции y и переменной x.

$$t=\frac{v}{u}=\frac{y-7/5}{x+1/5}=\frac{5y-7}{5x+1};\quad u=x+1/5;$$
$$1+\frac{5y-7}{5x+1}-\left(\frac{5y-7}{5x+1}\right)^2=\frac{25C_2}{(5x+1)^2};$$
$$(5x+1)^2+(5y-7)(5x+1)-(5y-7)^2=25C_2$$
$$25x^2+10x+1+25xy+5y-35x-7-25y^2+70y-49=25C_2$$
$$25x^2-25x+25xy+75y-25y^2=25C_2+49-1+7$$
$$x^2-x+xy+3y-y^2=C_2+\frac{55}{25}=C;$$

Итого, выражение $x^2-x+xy+3y-y^2=C$ является общим интегралом исходного дифференциального уравнения.

В случае если в исходном уравнении вида $y'=f\left(\frac{ax+by+c}{a_1x+b_1y+c_1}\right)$ определитель $\begin{vmatrix}a & b\\ a_1 & b_1\end{vmatrix}=0,$ то переменные могут быть разделены подстановкой

$$ax+by=t.$$

Пример 2. Решить уравнение $2(x+y)dy+(3x+3y-1)dx=0.$

Получаем $2(x+y)\frac{dy}{dx}=-3x-3y+1;\qquad \frac{dy}{dx}=\frac{-3x-3y+1}{2x+2y}=-\frac{3x+3y-1}{2x+2y};$

Находим значение определителя $\begin{vmatrix}-3 & -3\\ 2 & 2\end{vmatrix}=-6+6=0;$

Применяем подстановку $3x+3y=t.$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{t'}{3}-1;$$

Подставляем это выражение в исходное уравнение:

$$\frac{t'}{3}-1=-\frac{3(t-1)}{2t};\quad 2t(t'-3)=-9t+9;\quad 2tt'=6t-9t+9;\quad 2tt'=-3t+9;$$

Разделяем переменные: $\frac{2t}{-3t+9}dt = dx; \qquad \frac{t}{t-3}dt = -\frac{3}{2}dx;$

$$\int\left(1+\frac{3}{t-3}\right)dt = -\frac{3}{2}\int dx;$$

$$t + 3\ln|t-3| = -\frac{3}{2}x + C_1$$

Далее возвращаемся к первоначальной функции y и переменной x.

$$2x + 2y + 2\ln|3(x+y-1)| = -x + C_2;$$

$$3x + 2y + 2\ln 3 + 2\ln|x+y-1| = C_2;$$

$$3x + 2y + 2\ln|x+y-1| = C;$$

таким образом, мы получили общий интеграл исходного дифференциального уравнения.

1.4. Линейные дифференциальные уравнения первого порядка

Определение. Дифференциальное уравнение называется *линейным* относительно неизвестной функции и ее производной, если оно может быть записано в виде:

$$y' + P(x)y = Q(x), \tag{1}$$

при этом, если правая часть *Q(x)* равна нулю, то такое уравнение называется *линейным однороднымдифференциальным* уравнением, если правая часть *Q(x)* не равна нулю, то такое уравнение называется *линейным неоднороднымдифференциальным* уравнением.

P(x) и*Q(x)*- функции непрерывные на некотором промежутке a<x<b.

Линейные однородные дифференциальные уравнения.

Рассмотрим методы нахождения общего решения линейного однородного дифференциального уравнения первого порядка вида

$$y' + P(x)y = 0.$$

Для этого типа дифференциальных уравнений разделение переменных не представляет сложностей.

$$\frac{dy}{y} = -P(x)dx$$

$$\ln|y| = -\int P(x)dx + \ln|C|;$$

$$\ln\left|\frac{y}{C}\right| = -\int P(x)dx;$$

Общее решение: $y = Ce^{-\int P(x)dx}$

Линейные неоднородные дифференциальные уравнения.

Для интегрирования линейных неоднородных уравнений ($Q(x)\neq 0$) применяются в основном два метода: метод Бернулли и метод Лагранжа.

Метод Бернулли

Суть метода заключается в том, что искомая функция представляется в виде произведения двух функций $y = uv$.

При этом очевидно, что $y' = u \cdot \frac{dv}{dx} + v \cdot \frac{du}{dx}$ - дифференцирование по частям.

Подставляя в исходное уравнение, получаем:

$$u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx} + P(x)uv = Q(x)$$

$$u\frac{dv}{dx} + v\left(\frac{du}{dx} + P(x)u\right) = Q(x)$$

Далее следует важное замечание – т.к. первоначальная функция была представлена нами в виде произведения, то каждый из сомножителей, входящих в это произведение, может быть произвольным, выбранным по нашему усмотрению.

Например, функция $y = 2x^2$ может быть представлена как $y = 1 \cdot 2x^2;\quad y = 2 \cdot x^2;$
$y = 2x \cdot x;$ и т.п.

Таким образом, можно одну из составляющих произведение функций выбрать так, что выражение $\frac{du}{dx} + P(x)u = 0$.

Таким образом, возможно получить функцию u, проинтегрировав, полученное соотношение как однородное дифференциальное уравнение по описанной выше схеме:

$$\frac{du}{u} = -P(x)dx; \qquad \int\frac{du}{u} = -\int P(x)dx; \qquad \ln|u| = -\int P(x)dx;$$

$$\ln|C_1| + \ln|u| = -\int P(x)dx; \qquad u = Ce^{-\int P(x)dx};\quad C = 1/C_1;$$

Для нахождения второй неизвестной функции v подставим поученное выражение для функции uв исходное уравнение $u\frac{dv}{dx} + v\left(\frac{du}{dx} + P(x)u\right) = Q(x)$ с учетом того, что выражение, стоящее в скобках, равно нулю.

$$Ce^{-\int P(x)dx}\frac{dv}{dx}=Q(x);\qquad Cdv=Q(x)e^{\int P(x)dx}dx;$$

Интегрируя, можем найти функцию *v*:

$$Cv=\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx+C_1;\qquad v=\frac{1}{C}\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx+C_2;$$

Т.е. была получена вторая составляющая произведения $y=uv$, которое и определяет искомую функцию.

Подставляя полученные значения, получаем:

$$y=uv=Ce^{-\int P(x)dx}\cdot\frac{1}{C}\left(\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx+C_2\right)$$

Окончательно получаем формулу:

$y=e^{-\int P(x)dx}\cdot\left(\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx+C_2\right)$, C_2 - произвольный коэффициент.

Это соотношение может считаться решением неоднородного линейного дифференциального уравнения в общем виде по способу Бернулли.

Метод Лагранжа

Метод Лагранжа решения неоднородных линейных дифференциальных уравнений еще называют методом *вариации произвольной постоянной.*

Вернемся к поставленной задаче:

$$y'+P(x)y=Q(x)$$

Первый шаг данного метода состоит в отбрасывании правой части уравнения и замене ее нулем.

$$y'+P(x)y=0$$

Далее находится решение получившегося однородного дифференциального уравнения:

$$y=C_1e^{-\int P(x)dx}.$$

Для того, чтобы найти соответствующее решение неоднородного дифференциального уравнения, будем считать постоянную C_1 некоторой функцией от x.

Тогда по правилам дифференцирования произведения функций получаем:

$$y'=\frac{dy}{dx}=\frac{dC_1(x)}{dx}e^{-\int P(x)dx}+C_1(x)e^{-\int P(x)dx}\cdot(-P(x));$$

Подставляем полученное соотношение в исходное уравнение

$$\frac{dC_1(x)}{dx}e^{-\int P(x)dx}-C_1(x)P(x)e^{-\int P(x)dx}+P(x)C_1(x)e^{-\int P(x)dx}=Q(x)$$

$$\frac{dC_1(x)}{dx}e^{-\int P(x)dx} = Q(x);$$

Из этого уравнения определим переменную функцию $C_1(x)$:

$$dC_1(x) = Q(x)e^{\int P(x)dx}dx;$$

Интегрируя, получаем:

$$C_1 = \int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx + C;$$

Подставляя это значение в исходное уравнение, получаем:

$$y = e^{-\int P(x)dx}\left(\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx + C\right).$$

Таким образом, мы получили результат, полностью совпадающий с результатом расчета по методу Бернулли.

При выборе метода решения линейных дифференциальных уравнений следует руководствоваться простотой интегрирования функций, входящих в исходный интеграл.

Далее рассмотрим примеры решения различных дифференциальных уравнений различными методами и сравним результаты.

Пример. Решить уравнение $x^2y' + y = ax^2e^{\frac{1}{x}}$.

Сначала приведем данное уравнение к стандартному виду: $y' + \frac{1}{x^2}y = ae^{\frac{1}{x}}$.

Применим полученную выше формулу: $P = \frac{1}{x^2}; \quad Q = ae^{\frac{1}{x}};$

$$y = e^{-\int \frac{1}{x^2}dx}\left(\int ae^{\frac{1}{x}}e^{\int \frac{1}{x^2}dx}dx + C\right)$$

$$y = e^{\frac{1}{x}}\left(\int ae^{\frac{1}{x}}e^{-\frac{1}{x}}dx + C\right) = e^{\frac{1}{x}}\left(\int adx + C\right)$$

$$y = e^{\frac{1}{x}}(ax + C).$$

1.5 Уравнение Бернулли

Определение. Уравнением Бернуллиназывается уравнение вида

$$y' + Py = Q \cdot y^n,$$

(1)

где P и Q – функции от x или постоянные числа, а n – постоянное число, не равное 1.

Для решения уравнения Бернулли применяют подстановку $z = \frac{1}{y^{n-1}}$, с помощью которой, уравнение Бернулли приводится к линейному.

Для этого разделим исходное уравнение на y^n.

$$\frac{y'}{y^n} + P\frac{1}{y^{n-1}} = Q;$$

Применим подстановку, учитывая, что $z' = -\frac{(n-1)y^{n-2}}{y^{2n-2}} \cdot y' = -\frac{(n-1)y'}{y^n}$.

$$-\frac{z'}{n-1} + Pz = Q$$

$$z' - (n-1)Pz = -(n-1)Q$$

Т.е. получилось линейное уравнение относительно неизвестной функции z. Решение этого уравнения будем искать в виде:

$$z = e^{-\int P dx}\left(\int Q_1 e^{\int P_1 dx} dx + C\right)$$

$$Q_1 = -(n-1)Q; \qquad P_1 = -(n-1)P.$$

Пример. Решить уравнение $xy' + y = xy^2 \ln x.$

Разделим уравнение на xy^2: $\frac{y'}{y^2} + \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{y} = \ln x.$

Полагаем $z = \frac{1}{y}; \quad z' = -\frac{y'}{y^2}.$

$$-z' + \frac{1}{x}z = \ln x; \qquad z' - \frac{1}{x}z = -\ln x.$$

Полагаем $P = -\frac{1}{x}, \quad Q = -\ln x.$

$$z = e^{\int \frac{dx}{x}}\left(\int -\ln x e^{-\int \frac{dx}{x}} dx + C\right); \qquad z = e^{\ln x}\left(\int -\ln x e^{-\ln x} dx + C\right);$$

$$z = x\left(\int -\ln x \cdot \frac{dx}{x} + C\right); \qquad z = x\left(-\int \ln x d(\ln x) + C\right);$$

$$z = x\left(-\frac{\ln^2 x}{2} + C\right)$$

Произведя обратную подстановку, получаем:

$$\frac{1}{y} = x\left(-\frac{\ln^2 x}{2} + C\right).$$

1.6. Уравнения в полных дифференциалах

Определение.. Уравнение вида

$$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0, \quad (1)$$

где левая часть представляет собой полный дифференциал некоторой функции $F(x,y)$ в области G, называется дифференциальным уравнением *в полных дифференциалах*.

Критерием того, что уравнение (1) есть дифференциальное уравнение в полных дифференциалах является выполнение равенства

$$\frac{\partial P(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}.$$

Действительно, так как левая часть представляет собой полный дифференциал некоторой функции $F(x,y)$, то есть $dF(x,y) = F'_x dx + F'_y dy$, где $F'_x = P(x,y)$, $F'_y = Q(x,y)$, то $\frac{\partial P(x,y)}{\partial y} = F''_{xy}$, $\frac{\partial P(x,y)}{\partial y} = F''_{yx}$, а для непрерывной функции смешанные частные производные второго порядка равны между собой.

Решение дифференциального уравнения (1) сводится *к отысканию функции* $F(x,y)$ и *общее решение имеет вид*

$F(x,y) = C$.

Пример 1. Найти общие решение дифференциального уравнения:

1) $(x + y + 1)dx + (x - y^2 + 3)dy = 0$.

В этом уравнении $P(x,y) = x + y + 1$, $Q(x,y) = x - y^2 + 3$, $\frac{\partial P(x,y)}{\partial y} = 1 = \frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}$. Следовательно, исходное уравнение является уравнением в полных дифференциалах, и выражение $(x + y + 1)dx + (x - y^2 + 3)dy$ представляет собой полный дифференциал некоторой функции $F(x,y)$, для которой $F'_x = x + y + 1$, $F'_y = x - y^2 + 3$, то есть

$$dF = (x + y + 1)dx + (x - y^2 + 3)dy.$$

Интегрируя левую и правую части по x, получим

$$F(x,y) = \int (x + y + 1)dx + C(y) = \frac{x^2}{2} + xy + x + C(y).$$

Чтобы найти $C(y)$ используем тот факт, что $F'_y = x - y^2 + 3$. Имеем

$$\frac{\partial(\frac{x^2}{2}+xy+x+C(y))}{\partial y}=x-y^2+3,$$

$$x+C'(y)=x-y^2+3,$$

$$dC(y)=-y^2+3,$$

$$C(y)=-\frac{y^3}{3}+3y+C_1.$$

Подставляя найденное $C(y)$ в (9), получаем

$$F(x,y)=\frac{x^2}{2}+xy+x-\frac{y^3}{3}+3y+C_1.$$

Общее решение исходного уравнения принимает вид

$$\frac{x^2}{2}+xy+x-\frac{y^3}{3}+3y+C_1=C_2.$$

Полагая $6(C_2-C_1)=C$, получаем окончательное решение исходного уравнения:

$$3x^2+6xy+6x-2y^3+18y=C.$$

Ответ: $3x^2+6xy+6x-2y^3+18y=C$.

Пример 2. Найти общие решение дифференциального уравнения: $2x\cos^2 ydx+(2y-x^2\sin 2y)dy=0$.

В этом уравнении $P(x,y)=2x\cos^2 y$, $Q(x,y)=2y-x^2\sin 2y$, $\frac{\partial P(x,y)}{\partial y}=-4x\cos y\sin y=\frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}$. Следовательно, исходное уравнение – дифференциальное уравнение в полных дифференциалах, и выражение $2x\cos^2 ydx+(2y-x^2\sin 2y)dy$ является полным дифференциалом некоторой функции $F(x,y)$, $F'_x=2x\cos^2 y$, $F'_y=2y-x^2\sin 2y$, то есть $dF=2x\cos^2 ydx+(2y-x^2\sin 2y)dy$.

Интегрируя левую и правую части последнего равенства по x, получим

$$F(x,y)=\int P(x,y)dx+C(y)=\int 2x\cos^2 ydx+C(y)=x^2\cos^2 y+C(y).$$

Чтобы найти $C(y)$ используем тот факт, что $F'_y=2y-x^2\sin 2y$. Имеем

$$\frac{\partial(x^2\cos^2 y+C(y))}{\partial y}=2y-x^2\sin 2y,$$

$$-2x^2\cos y\sin y+C'(y)=2y-x^2\sin 2y,$$

$$-x^2\sin 2y+C'(y)=2y-x^2\sin 2y,$$

$$dC(y)=2y,$$

$$C(y) = y^2 + C_1.$$

Подставляя найденное $C(y)$ в (10), получаем

$$F(x, y) = x^2 \cos^2 y + y^2 + C_1.$$

Общее решение исходного уравнения принимает вид

$$x^2 \cos^2 y + y^2 + C_1 = C_2.$$

Полагая $C_2 - C_1 = C$, получаем окончательное решение исходного уравнения:

$$x^2 \cos^2 y + y^2 = C.$$

Задания для самостоятельного решения

1. Найти общий интеграл дифференциального уравнения. (Ответ представить в виде $\psi(x, y) = C$.)

   1.1. $4xdx - 3ydy = 3x^2 ydy - 2xy^2 dx.$

   1.2. $6xdx - 6ydy = 3x^2 ydy - 2xy^2 dx.$

   1.3. $\left(1 + e^x\right) y' = y e^x.$

   1.4. $3\left(x^2 y + y\right) dy + \sqrt{2 + y^2}\, dx = 0.$

   1.5. $2x + 2xy^2 + \sqrt{2 - x^2}\, y' = 0.$

2. Найти общий интеграл дифференциального уравнения.

   2.1. $y' = \dfrac{x + y}{x - y}.$

   2.2. $xy' = \dfrac{3y^3 + 4yx^2}{2y^2 + 2x^2}.$

   2.3. $xy' = 3\sqrt{2x^2 + y^2} + y.$

   2.4. $y' = \dfrac{x^2 + xy - 5y^2}{x^2 - 6xy}.$

   2.5. $2y' = \dfrac{y^2}{x^2} + 8\dfrac{y}{x} + 8.$

3. Найти общий интеграл дифференциального уравнения.

   3.1. $y' = \dfrac{x + 3y + 4}{3x - 6}.$

   3.2. $y' = \dfrac{3y + 3}{2x + y - 1}.$

3.3. $y' = \dfrac{x+2y-3}{4x-y-3}.$

3.4. $y' = \dfrac{x-2y+3}{-2x-2}.$

3.5. $y' = \dfrac{x+8y-9}{10x-y-9}.$

4. Найти решение задачи Коши.

4.1. $(a^2+y^2)dx + 2x\sqrt{ax-x^2}dy,\ \ y(a)=0.$

4.2. $y' - y\operatorname{ctg} x = 2x\sin x, \quad y(\pi/2)=0.$

4.3. $y' - \dfrac{1}{x+1}y = \mathrm{e}^x(x+1), \quad y(0)=1.$

4.4. $y' + \dfrac{3y}{x} = \dfrac{2}{x^3}, \quad y(1)=1.$

4.5. $y' + \dfrac{xy}{2(1-x^2)} = \dfrac{x}{2}, \quad y(0)=\dfrac{2}{3}.$

4.6. $y' + 2xy = x\mathrm{e}^{-x^2}\sin x, \quad y(0)=1.$

4.7. $y' + 4x^3y = 4y^2\mathrm{e}^{4x}(1-x^3), \quad y(0)=-1.$

4.8. $2xy' - 3y = -(5x^2+3)y^3, \quad y(1)=1/\sqrt{2}.$

5. Решить задачу Коши.

5.1. $8(4y^3+xy-y)y' = 1, \quad y\big|_{x=0}=0.$

5.2. $\sin 2y dx = (\sin^2 2y - 2\sin^2 y + 2x)dy, \quad y\big|_{x=-1/2}=\pi/4.$

5.3. $(13y^3-x)y' = 4y, \quad y\big|_{x=5}=1.$

5.4. $(2xy+\sqrt{y})dy + 2y^2dx = 0, \quad y\big|_{x=-1/2}=1.$

5.5. $dx + (2x+\sin 2y - 2\cos^2 y)dy = 0, \quad y\big|_{x=-1}=0.$

Раздел 2.ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ

*Определение 1.*Дифференциальным уравнением порядка n называется уравнение вида:

$$F(x, y, y', ..., y^{(n)}) = 0 \qquad (1)$$

В некоторых случаях это уравнение можно разрешить относительно $y^{(n)}$:

$$y^{(n)} = f(x, y, y', ..., y^{(n-1)}).$$

Так же как и уравнение первого порядка, уравнения высших порядков имеют бесконечное количество решений.

Определение 2. Решение $y = \varphi(x)$ удовлетворяет начальным условиям $x_0, y_0, y_0', ..., y_0^{(n-1)}$, если $\varphi(x_0) = y_0$, $\varphi'(x_0) = y_0'$, ... , $\varphi^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}$.

Определение 3. Нахождение решения уравнения $F(x, y, y', ..., y^{(n)}) = 0$, удовлетворяющего начальным условиям $x_0, y_0, y_0', ..., y_0^{(n-1)}$, называется *решением задачи Коши.*

Теорема Коши. (Теорема о необходимых и достаточных условиях существования решения задачи Коши).

Если функция (n-1) –й переменных вида $f(x, y, y', ..., y^{(n-1)})$ в некоторой области D (n-1)- мерного пространства непрерывна и имеет непрерывные частные производные по $y, y', ..., y^{(n-1)}$, то какова бы не была точка ($x_0, y_0, y_0', ..., y_0^{(n-1)}$) в этой области, существует единственное решение $y = \varphi(x)$ уравнения $y^{(n)} = f(x, y, y', ..., y^{(n-1)})$, определенного в некотором интервале, содержащем точку x_0, удовлетворяющее начальным условиям $x_0, y_0, y_0', ..., y_0^{(n-1)}$

.

2.1. Дифференциальные уравнения, допускающие понижение порядка

Понижение порядка дифференциального уравнения – основной метод решения уравнений высших порядков. Этот метод дает возможность сравнительно легко находить решение, однако, он применим далеко не ко всем уравнениям. Рассмотрим случаи, когда возможно понижение порядка.

Уравнения вида $y(n) = f(x)$.

Если $f(x)$ – функция непрерывная на некотором промежутке a<x<b, то решение может быть найдено последовательным интегрированием.

$$y^{(n-1)} = \int f(x)dx + C_1;$$

$$y^{(n-2)} = \int \left(\int f(x)dx + C_1 \right) dx + C_2 = \int dx \int f(x)dx + C_1 x + C_2;$$

$$y = \int dx \int dx ... \int f(x)dx + C_1 \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + C_2 \frac{x^{n-2}}{(n-2)!} + ... + C_n;$$

Пример 1. Решить уравнение $y''' = e^{2x}$ с начальными условиями $x_0 = 0$; $y_0 = 1$; $y_0' = -1$; $y_0'' = 0$.

$$y'' = \int e^{2x} dx + C_1 = \frac{1}{2} e^{2x} + C_1;$$

$$y' = \int \left(\frac{1}{2} e^{2x} + C_1 \right) dx = \frac{1}{4} e^{2x} + C_1 x + C_2;$$

$$y = \int \left(\frac{1}{4} e^{2x} + C_1 x + C_2 \right) = \frac{1}{8} e^{2x} + \frac{1}{2} C_1 x^2 + C_2 x + C_3;$$

Подставим начальные условия:

$$1 = \frac{1}{8} + C_3; \quad -1 = \frac{1}{4} + C_2; \quad 0 = \frac{1}{2} + C_1;$$

$$C_1 = -\frac{1}{2}; \quad C_2 = -\frac{5}{4}; \quad C_3 = \frac{7}{8};$$

Получаем частное решение (решение задачи Коши):

$$y = \frac{1}{8} e^{2x} - \frac{1}{4} x^2 - \frac{5}{4} x + \frac{7}{8}$$

Уравнения, не содержащие явно искомой функции и ее производных до порядка k – 1 включительно.

Это уравнения вида: $F(x, y^{(k)}, y^{(k+1)}, ..., y^{(n)}) = 0.$

В уравнениях такого типа возможно понижение порядка на *k* единиц. Для этого производят замену переменной:

$$y^{(k)} = z; \quad y^{(k+1)} = z'; \quad ... \quad y^{(n)} = z^{(n-k)}.$$

Тогда получаем: $F(x, z, z', ..., z^{(n-k)}) = 0.$

Теперь допустим, что полученное дифференциальное уравнение проинтегрировано и совокупность его решений выражается соотношением:

$$z = \psi(x, C_1, C_2, ..., C_{n-k}).$$

Делая обратную подстановку, имеем:

$$y^{(k)} = \psi(x, C_1, C_2, ..., C_{n-k})$$

Интегрируя полученное соотношение последовательно *k* раз, получаем окончательный ответ:

$$y = \varphi(x, C_1, C_2, ..., C_n).$$

Пример. Найти общее решение уравнения $y''' = \frac{y''}{x}$ применяем подстановку $z = y''; \quad z' = y'''$;

$$z' = \frac{z}{x}; \qquad \frac{dz}{dx} = \frac{z}{x}; \qquad \frac{dz}{z} = \frac{dx}{x}; \qquad \int \frac{dz}{z} = \int \frac{dx}{x};$$

$$\ln|z| = \ln|x| + \ln C_1; \qquad z = C_1 x;$$

Произведя обратную замену, получаем:

$$y'' = C_1 x; \qquad y' = \int C_1 x dx = \frac{C_1}{2} x^2 + C_2;$$

$$y = \int \left(\frac{C_1}{2} x^2 + C_2 \right) dx = \frac{C_1}{6} x^3 + C_2 x + C_3;$$

Общее решение исходного дифференциального уравнения:

$$y = Cx^3 + C_2x + C_3;$$

Отметим, что это соотношение является решением для всех значений переменной *x* кроме значения *x =0.*

Уравнения, не содержащие явно независимой переменной.

Это уравнения вида $F(y, y', ..., y^{(n)}) = 0.$

Порядок таких уравнений может быть понижен на единицу с помощью замены переменных $y' = p.$

$$y'' = \frac{dy'}{dx} = \frac{dy'}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{dp}{dy} p;$$

$$y''' = \frac{dy''}{dx} = \frac{dy''}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{dy''}{dy} p = \frac{d\left(\frac{dp}{dy} p\right)}{dy} p = \frac{d^2p}{dy^2} p^2 + \left(\frac{dp}{dy}\right)^2 p; \text{ и т.д.}$$

Подставляя эти значения в исходное дифференциальное уравнение, получаем:

$$F_1\left(y, p, \frac{dp}{dy}, ..., \frac{d^{n-1}p}{dy^{n-1}}\right) = 0$$

Если это уравнение проинтегрировать, и $\Phi(y, p, C_1, C_2, ..., C_{n-1}) = 0$ - совокупность его решений, то для решения данного дифференциального уравнения остается решить уравнение первого порядка:

$$\Phi(y, y', C_1, C_2, ..., C_{n-1}) = 0.$$

2.2. Линейные однородные дифференциальные уравнения спостоянными коэффициентами

Решение дифференциального уравнения вида $y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + ... + a_n y = 0$ или, короче, $L(y) = 0$ будем искать в виде $y = e^{kx}$, где *k = const.*

Т.к. $y' = ke^{kx}; \quad y'' = k^2 e^{kx}; \quad ... \quad y^{(n)} = k^n e^{kx}$, то

$L(e^{kx}) = e^{kx}(k^n + a_1 k^{n-1} + ... + a_n).$

При этом многочлен $F(k) = k^n + a_1 k^{n-1} + ... + a_n$ называется характеристическим многочленом дифференциального уравнения.

Для того, чтобы функция $y = e^{kx}$ являлась решением исходного дифференциального уравнения, необходимо и достаточно, чтобы $L(e^{kx}) = 0;$ т.е. $e^{kx} F(k) = 0.$

Т.к. $e^{kx} \neq 0,$ то $F(k) = 0$ - это уравнение называется *характеристическим уравнением.*

Как и любое алгебраическое уравнение степени *n*, характеристическое уравнение $k^n + a_1 k^{n-1} + ... + a_n = 0$ имеет *n*корней. Каждому корню

характеристического уравнения k_iсоответствует решение дифференциального уравнения.

В зависимости от коэффициентов k характеристическое уравнение может иметь либо n различных действительных корней, либо среди действительных корней могут быть кратные корни, могут быть комплексно – сопряженные корни, как различные, так и кратные.

Общее правило нахождения решения линейного однородного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами.

1) Составляем характеристическое уравнение и находим его корни.

2) Находим частные решения дифференциального уравнения, причем:

а) каждому действительному корню соответствует решение e^{kx};

б) каждому действительному корню кратности m ставится в соответствие m решений:

e^{kx}; xe^{kx}; ... $x^{m-1}e^{kx}$.

в) каждой паре комплексно – сопряженных корней $\alpha \pm i\beta$ характеристического уравнение ставится в соответствие два решения:

$e^{\alpha x}\cos\beta x$ и $e^{\alpha x}\sin\beta x$.

г) каждой паре m – кратных комплексно – сопряженных корней $\alpha \pm i\beta$ характеристического уравнения ставится в соответствие $2m$ решений:

$$e^{\alpha x}\cos\beta x,\quad xe^{\alpha x}\cos\beta x,\quad \ldots\quad x^{m-1}e^{\alpha x}\cos\beta x,$$

$$e^{\alpha x}\sin\beta x,\quad xe^{\alpha x}\sin\beta x,\quad \ldots x^{m-1}e^{\alpha x}\sin\beta x.$$

3) Составляем линейную комбинацию найденных решений.

Эта линейная комбинация и будет являться общим решением исходного линейного однородного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами.

Пример 1. Решить уравнение $y''' - y = 0$.

Составим характеристическое уравнение: $k^3 - 1 = 0;$

$(k-1)(k^2+k+1) = 0;\qquad k_1 = 1;\qquad k^2+k+1=0;$

$D = 1-4 = -3;\qquad k_2 = -\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i;\qquad k_3 = -\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i;$

Общее решение имеет вид: $y = C_1e^x + e^{-\frac{x}{2}}\left[C_2\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x + C_3\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x\right].$

Пример 2. Решить уравнение $y'' - 4y' + 4y = 0.$

Характеристическое уравнение: $k^2 - 4k + 4 = 0;\qquad k_1 = k_2 = 2.$

Общее решение: $y = C_1e^{2x} + C_2xe^{2x}.$

2.3. Линейные неоднородные уравнения с постоянными коэффициентами

Представляется возможным представить вид частного решения в зависимости от вида правой части неоднородного уравнения.

Различают следующие случаи:

1) Правая часть линейного неоднородного дифференциального уравнения имеет вид:

$$f(x) = P(x)e^{\alpha x}, \qquad (1)$$

где $P(x) = A_0 x^m + A_1 x^{m-1} + ... + A_m$ - многочлен степени *m*.

Тогда частное решение ищется в виде:

$$y = x^r e^{\alpha x} Q(x)$$

Здесь *Q(x)*- многочлен той же степени, что и *P(x)*, но с неопределенными коэффициентами, а *r* – число, показывающее сколько раз число α является корнем характеристического уравнения для соответствующего линейного однородного дифференциального уравнения.

2) Правая часть линейного неоднородного дифференциального уравнения имеет вид:

$$f(x) = e^{\alpha x}\left[P_1(x)\cos\beta x + P_2(x)\sin\beta x\right] \qquad (2)$$

Здесь $P_1(x)$ и $P_2(x)$ – многочлены степени m_1 и m_2 соответственно.

Тогда частное решение неоднородного уравнения будет иметь вид:

$$y = x^r e^{\alpha x}\left[Q_1(x)\cos\beta x + Q_2(x)\sin\beta x\right]$$

где число *r* показывает сколько раз число $\alpha + i\beta$ является корнем характеристического уравнения для соответствующего однородного уравнения, а $Q_1(x)$ и$Q_2(x)$ – многочлены степени не выше *m*, где *m*- большая из степеней m_1 и m_2.

Заметим, что если правая часть уравнения является комбинацией выражений рассмотренного выше вида, то решение находится как комбинация решений вспомогательных уравнений, каждое из которых имеет правую часть, соответствующую выражению, входящему в комбинацию.

Т.е. если уравнение имеет вид: $L(y) = f_1(x) + f_2(x)$, то частное решение этого уравнения будет $y = y_1 + y_2$, где y_1и y_2 – частные решения вспомогательных уравнений

$$L(y) = f_1(x) \text{ и } L(y) = f_2(x)$$

Пример. Решить уравнение $y''' - y' = x^2 - 1.$

Характеристическое уравнение: $k^3 - k = 0; \quad k(k^2 - 1) = 0; \quad k_1 = 0; \quad k_2 = 1; \quad k_3 = -1;$

Общее решение однородного уравнения: $y = C_1 + C_2 e^x + C_3 e^{-x}.$

Частное решение неоднородного уравнения: $y = x^r e^{\alpha x} Q(x)$.

$$\alpha = 0; \quad r = 1; \quad Q(x) = Ax^2 + Bx + C.$$

$$y = Ax^3 + Bx^2 + Cx$$

Находим производные и подставляем их в исходное неоднородное уравнение:

$$y' = 3Ax^2 + 2Bx + C; \quad y'' = 6Ax + 2B; \quad y''' = 6A;$$

$$6A - 3Ax^2 - 2Bx - C = x^2 - 1;$$

$$-3A = 1; \quad -2B = 0; \quad 6A - C = -1;$$

$$A = -\frac{1}{3}; \quad B = 0; \quad C = -1;$$

Получаем общее решение неоднородного дифференциального уравнения:

$$y = C_1 + C_2 e^x + C_3 e^{-x} - \frac{1}{3}x^3 - x.$$

Задания для самостоятельного решения

1. Найти общее решение дифференциального уравнения.

1.1. $\operatorname{tg} x \cdot y'' - y' + \dfrac{1}{\sin x} = 0.$

1.2. $x^3 y''' + x^2 y'' = \sqrt{x}.$

1.3. $(1+\sin x)\, y''' = \cos x \cdot y''.$

1.4. $x^4 y'' + x^3 y' = 4.$

1.5. $y'' + \dfrac{2x}{x^2+1} y' = 2x.$

2. Найти решение задачи Коши.

2.1. $y'' + 2\sin y \cos^3 y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1.$

2.2. $y'' = 98y^3, \quad y(1) = 1, \quad y'(1) = 7.$

2.3. $y'' y^3 + 49 = 0, \quad y(3) = -7, \quad y'(3) = -1.$

2.4. $4y^3 y'' = 16y^4 - 1, \quad y(0) = \sqrt{2}/2, \quad y'(0) = 1/\sqrt{2}.$

2.5. $y'' + 8\sin y \cos^3 y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 2.$

2.6. $y'' y^3 + 36 = 0, \quad y(0) = 3, \quad y'(0) = 2.$

2.7. $y'' = 18\sin^3 y \cos y, \quad y(1) = \pi/2, \quad y'(1) = 3.$

2.8. $y'' y^3 + 25 = 0, \quad y(2) = -5, \quad y'(2) = -1.$

3. Найти общее решение дифференциального уравнения.

3.1. $y''' + 3y'' + 2y' = 1 - x^2.$

3.2. $7y''' - y'' = 12x.$

3.3. $y''' - 5y'' + 6y' = 6x^2 + 2x - 5.$

3.4. $y''' - 13y'' + 12y' = 18x^2 - 39.$

3.5. $y''' - y'' = 6x + 5.$

3.6. $y^{IV} + y''' = x.$

3.7. $y''' - 2y'' = 3x^2 + x - 4.$

4. $y''' + 3y'' + 2y' = x^2 + 2x + 3.$

Раздел 3. ЛИНЕЙНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА

*Определение.***Дифференциальным уравнением второго порядка** называется уравнение, содержащее неизвестную функцию и её вторую производную, то есть уравнение вида

$$F(x, y, y', y'') = 0, \qquad (1)$$

где x – независимая переменная, y – искомая функция, y' – её первая производная, y'' – вторая производная функции y.

3.1. Линейные однородные дифференциальные уравнениявторого порядка с постоянными коэффициентами

*Определение.*Линейным однородным дифференциальным уравнением второго порядка с постоянными коэффициентами называется дифференциальное уравнение, имеющее вид

$$y'' + py' + qy = 0, \qquad (2)$$

где y – искомая функция, а p и q – числа.

Линейное однородное дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами может иметь множество решений. Однако среди них выделяют два базисных решения, по которым строится общее решение уравнения.

Будем искать решение уравнения $y'' + py' + qy = 0$ в виде

$$y = e^{kx},$$

где k – некоторое число. Подставляя эту функцию в само уравнение, получаем

$$k^2 e^{kx} + pke^{kx} + qe^{kx} = 0.$$

Деля обе части уравнения на e^{kx}, имеем квадратное уравнение относительно k:

$$k^2 + pk + q = 0.$$

Уравнение $k^2 + pk + q = 0$ называется *характеристическим уравнением* для дифференциального уравнения $y'' + py' + qy = 0$. Обозначим корни характеристического уравнения через k_1, k_2.

Справедлива следующая теорема:

Теорема. *1)Если корни характеристического уравнения вещественные и различны:* $k_1 \neq k_2$, $k_1, k_2 \in R$, *то общее решение линейного однородного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами имеет вид*

$$y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x},\ C_1, C_2 \in R.$$

2) В случае, когда корни характеристического уравнения вещественные и равные: $k_1 = k_2 = k \in R$, *общим решением линейного однородного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами (1) является функция*

$$y = C_1 e^{kx} + C_2 x e^{kx} = e^{kx}(C_1 + C_2 x),\ C_1, C_2 \in R.$$

3) Если корни характеристического уравнения комплексно сопряженные: $k_1 = \alpha + \beta i$, $k_2 = \alpha - \beta i$, $k_1, k_2 \in C$, *то общее решение линейного однородного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами имеет вид*

$$y = e^{\alpha x}(C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x), C_1, C_2 \in R.$$

Пример 1. Решить дифференциальное уравнение

$y'' - 5y' + 4y = 0$.

Данное уравнение является линейным однородным дифференциальным уравнением с постоянными коэффициентами. Составим характеристическое уравнение: $k^2 - 5k + 4 = 0$. Его корни вещественны и различны: $k_1 = 1$, $k_2 = 4$. Следовательно, общее решение заданного уравнения имеет вид $y = C_1 e^x + C_2 e^{4x}$, $C_1, C_2 \in R$.

Ответ: $y = C_1 e^x + C_2 e^{4x}$, $C_1, C_2 \in R$.

3.2. Линейные неоднородные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами

Такие уравнения имеют вид:

$$y'' + py' + qy = f(x), \qquad (3)$$

где p, q – действительные числа, $f(x) \neq 0$. Соответствующим уравнению $y'' + py' + qy = f(x)$ однородным дифференциальным уравнением является уравнение $y'' + py' + qy = 0$. Для отыскания общего решения уравнения (3) используется следующая теорема .

Теорема. Общее решение уравнения (3) определяется формулой $y(x) = u(x) + v(x)$, где $u = u(x)$ - общее решение соответствующего однородного уравнения $y'' + py' + qy = 0$, $v = v(x)$ - некоторое частное решение неоднородного уравнения (1).

*Пример.*Решить линейное неоднородное дифференциальное уравнение $y'' + 12y' + 20y = \sin 2x$.

Решение. Однородное уравнение, соответствующее данному неоднородному, имеет вид $y'' + 12y' + 20y = 0$. Его характеристическое уравнение $k^2 + 12k + 20 = 0$ имеет действительные и различные корни $k_1 = -2$ и $k_2 = -10$. Следовательно, общее решение однородного уравения имеет вид $\tilde{y} = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{-10x}$.

Частное решение неоднородного уравнения ищем в виде $Y = A\sin 2x + B\cos 2x$.

Для определения коэффициентов A и B находим Y' и Y'' и подставляем выражения для Y, Y' и Y'' в исходное уравнение и получим

$$-4A\sin 2x - 4B\cos 2x +$$
$$+12\left(2A\cos 2x - 2B\sin 2x\right) +$$
$$+20\left(A\sin 2x + B\cos 2x\right) = \sin 2x,$$

или после приведения подобных членов

$$\left(16A - 24B\right)\sin 2x +$$
$$+\left(24A + 16B\right)\cos 2x = \sin 2x,$$

откуда для определения A и B получаем систему уравнений

$$\begin{cases} 16A - 24B = 1 \\ 24A + 16B = 0 \end{cases}$$

Решая её, найдём $A = \frac{1}{52},\ B = -\frac{3}{104}$.

Следовательно, частное решение исходного линейного неоднородного дифференциального уравнения $Y = \frac{1}{52}\sin 2x - \frac{3}{104}\cos 2x$, а его общее решение $y = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{-10x} + \frac{1}{52}\sin 2x - \frac{3}{104}\cos 2x$.

Задания для самостоятельного решения

Решить дифференциальные уравнения:

1. $y'' - y' - 2y = 0$.
2. $y'' + 6y' + 9y = 0$.
3. $y'' - 4y' + 4y = 8x^2 - 4x$.
4. $y'' + y' = 5x^2 + 7$.
5. $y'' + 2y' + 5 = 10e^{3x}$.
6. $y'' + y = sin(2x)$.

Раздел 4. СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Определение. Совокупность соотношений вида:

$$\begin{cases} F_1(x, y_1, y_2, ..., y_n, y_1', y_2', ..., y_n') = 0 \\ F_2(x, y_1, y_2, ..., y_n, y_1', y_2', ..., y_n') = 0 \\ ..... \\ F_n(x, y_1, y_2, ..., y_n, y_1', y_2', ..., y_n') = 0 \end{cases} \quad (1)$$

где x- независимая переменная, $y_1, y_2, ..., y_n$ – искомые функции, называется *системой дифференциальных уравнений первого порядка.*

Определение. Система дифференциальных уравнений первого порядка, разрешенных относительно производных от неизвестных функций называется *нормальной системой дифференциальных уравнений.*

Такая система имеет вид:

$$\begin{cases} \frac{dy_1}{dx} = f_1(x, y_1, y_2, ..., y_n) \\ \frac{dy_2}{dx} = f_2(x, y_1, y_2, ..., y_n) \\ ..... \\ \frac{dy_n}{dx} = f_n(x, y_1, y_2, ..., y_n) \end{cases} \quad (2)$$

Для примера можно сказать, что график решения системы двух дифференциальных уравнений представляет собой интегральную кривую в трехмерном пространстве.

Теорема. (Теорема Коши). *Если в некоторой области (n-1) –мерного пространства функции* $f_1(x, y_1, y_2, ..., y_n), f_2(x, y_1, y_2, ..., y_n), \ ... \ f_n(x, y_1, y_2, ..., y_n)$ *непрерывны и имеют непрерывные частные производные по* $y_1, y_2, ..., y_n$*, то для любой точки* $(x_0.y_{10}, y_{20}, ..., y_{n0})$ *этой области существует единственное решение*

$$y_1 = \varphi_1(x), \quad y_2 = \varphi_2(x), \quad ... \quad y_n = \varphi_n(x)$$

системы дифференциальных уравнений вида (2), определенное в некоторой окрестности точки x_0 *и удовлетворяющее начальным условиям* $x_0.y_{10}, y_{20}, ..., y_{n0}$.

Определение 2. Общим решениемсистемы дифференциальных уравнений вида (2) будет совокупность функций $y_1 = \varphi_1(x, C_1, C_2, ..., C_n)$, $y_2 = \varphi_2(x, C_1, C_2, ..., C_n)$, … $y_n = \varphi_n(x, C_1, C_2, ..., C_n)$, которые при подстановке в систему (1) обращают ее в тождество.

Нормальные системы линейных однородных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами.

При рассмотрении систем дифференциальных уравнений ограничимся случаем системы трех уравнений (n = 3). Все нижесказанное справедливо для систем произвольного порядка.

Определение 3. Нормальная система дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами называется **линейной однородной**, если ее можно записать в виде:

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = a_{11}y + a_{12}z + a_{13}u \\ \dfrac{dz}{dx} = a_{21}y + a_{22}z + a_{23}u \\ \dfrac{du}{dx} = a_{31}y + a_{32}z + a_{33}u \end{cases} \qquad (3)$$

Решения системы (3) обладают следующими свойствами:

1) Если y, z, u – решения системы, то Cy, Cz, Cu , где $C = const$ – тоже являются решениями этой системы.

2) Если y_1, z_1, u_1и y_2, z_2, u_2 – решения системы, то $y_1 + y_2$, $z_1 + z_2$, $u_1 + u_2$ – тоже являются решениями системы.

Решения системы ищутся в виде: $y = \alpha e^{kx}; \quad z = \beta e^{kx}; \quad u = \gamma e^{kx}, \quad \alpha, \beta, \gamma, k = const$

Подставляя эти значения в систему (2) и перенеся все члены в одну сторону и сократив на e^{kx}, получаем:

$$\begin{cases} (a_{11} - k)\alpha + a_{12}\beta + a_{13}\gamma = 0 \\ a_{21}\alpha + (a_{22} - k)\beta + a_{23}\gamma = 0 \\ a_{31}\alpha + a_{32}\beta + (a_{33} - k)\gamma = 0 \end{cases}$$

Для того, чтобы полученная система имела ненулевое решение необходимо и достаточно, чтобы определитель системы был равен нулю, т.е.:

$$\begin{vmatrix} a_{11} - k & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} - k & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} - k \end{vmatrix} = 0$$

В результате вычисления определителя получаем уравнение третьей степени относительно k. Это уравнение называется *характеристическим уравнением* и имеет три корня $k_1k_2k_3$.

Каждому из этих корней соответствует ненулевое решение системы (1.9):

$$y_1 = \alpha_1 e^{k_1 x}, \quad z_1 = \beta_1 e^{k_1 x}, \quad u_1 = \gamma_1 e^{k_1 x},$$
$$y_2 = \alpha_2 e^{k_2 x}, \quad z_2 = \beta_2 e^{k_2 x}, \quad u_2 = \gamma_2 e^{k_2 x},$$
$$y_3 = \alpha_3 e^{k_3 x}, \quad z_3 = \beta_3 e^{k_3 x}, \quad u_3 = \gamma_3 e^{k_3 x}.$$

Линейная комбинация этих решений с произвольными коэффициентами будет решением системы (1.9):

$$y = C_1\alpha_1 e^{k_1 x} + C_2\alpha_2 e^{k_2 x} + C_3\alpha_3 e^{k_3 x};$$
$$z = C_1\beta_1 e^{k_1 x} + C_2\beta_2 e^{k_2 x} + C_3\beta_3 e^{k_3 x};$$
$$u = C_1\gamma_1 e^{k_1 x} + C_2\gamma_2 e^{k_2 x} + C_3\gamma_3 e^{k_3 x}.$$

*Пример 1.*Найти общее решение системы уравнений:

$$\begin{cases} x' = 5x + 2y \\ y' = 2x + 2y \end{cases}$$

Составим характеристическое уравнение:

$$\begin{vmatrix} 5-k & 2 \\ 2 & 2-k \end{vmatrix} = 0; \qquad (5-k)(2-k)-4=0; \qquad 10-5k-2k+k^2-4=0;$$

$$k^2-7k+6=0; \qquad k_1=1; \qquad k_2=6;$$

Решим систему уравнений:

$$\begin{cases} (a_{11}-k)\alpha + a_{12}\beta = 0 \\ a_{21}\alpha + (a_{22}-k)\beta = 0 \end{cases}$$

Для k_1: $\begin{cases} (5-1)\alpha_1 + 2\beta_1 = 0 \\ 2\alpha_1 + (2-1)\beta_1 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} 4\alpha_1 + 2\beta_1 = 0 \\ 2\alpha_1 + \beta_1 = 0 \end{cases}$

Полагая $\alpha_1 = 1$ (принимается любое значение), получаем: $\beta_1 = -2.$

Для k_2: $\begin{cases} (5-6)\alpha_2 + 2\beta_2 = 0 \\ 2\alpha_2 + (2-6)\beta_2 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} -1\alpha_2 + 2\beta_2 = 0 \\ 2\alpha_2 - 4\beta_2 = 0 \end{cases}$

Полагая $\alpha_2 = 2$ (принимается любое значение), получаем: $\beta_2 = 1.$

Общее решение системы: $\begin{cases} x = C_1e^t + 2C_2e^{6t} \\ y = -2C_1e^t + C_2e^{6t} \end{cases}$

Этот пример может быть решен другим способом:

Продифференцируем первое уравнение: $x'' = 5x' + 2y';$

Подставим в это выражение производную $y' = 2x + 2y$ из второго уравнения.

$$x'' = 5x' + 4x + 4y;$$

Подставим сюда y, выраженное из первого уравнения:

$$x'' = 5x' + 4x + 2x' - 10x$$

$$x'' - 7x' + 6x = 0$$

$$k_1 = 6; \qquad k_2 = 1$$

$$x = Ae^t + Be^{6t}; \qquad x' = Ae^t + 6Be^{6t};$$

$$2y = x' - 5x = Ae^t + 6Be^{6t} - 5Ae^t - 5Be^{6t};$$

$$y = -2Ae^t + \frac{1}{2}Be^{6t};$$

Обозначив $A = C_1; \quad \frac{1}{2}B = C_2$, получаем решение системы: $\begin{cases} x = C_1e^t + 2C_2e^{6t} \\ y = -2C_1e^t + C_2e^{6t} \end{cases}$

Пример 2. Найти решение системы уравнений:

$$\begin{cases} y' = z + w \\ z' = 3y + w \\ w' = 3y + z \end{cases}$$

Составим характеристическое уравнение:

$$\begin{vmatrix} -k & 1 & 1 \\ 3 & -k & 1 \\ 3 & 1 & -k \end{vmatrix} = 0; \qquad -k\begin{vmatrix} -k & 1 \\ 1 & -k \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 3 & -k \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 3 & -k \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 0;$$

$-k(k^2-1)+3k+3+3+3k=0;\qquad k^3-7k-6=0;\qquad k_1=-1;\quad k_2=-2;\quad k_3=3;$

1) $k = -1.$

$$\begin{cases}\alpha+\beta+\gamma=0\\ 3\alpha+\beta+\gamma=0;\\ 3\alpha+\beta+\gamma=0\end{cases}\qquad \alpha=0;\quad \beta=-\gamma;$$

Если принять $\gamma = 1$, то решения в этом случае получаем:

$y_1=0;\quad z_1=-e^{-x};\quad w_1=e^{-x};$

2) $k_2 = -2.$

$$\begin{cases}2\alpha+\beta+\gamma=0\\ 3\alpha+2\beta+\gamma=0;\\ 3\alpha+\beta+2\gamma=0\end{cases}\qquad \alpha=-\gamma;\quad \beta=\gamma;$$

Если принять $\gamma = 1$, то получаем:

$y_2=-e^{-2x};\quad z_2=e^{-2x};\quad w_2=e^{-2x};$

3) $k_3 = 3.$

$$\begin{cases}-3\alpha+\beta+\gamma=0\\ 3\alpha-3\beta+\gamma=0\\ 3\alpha+\beta-3\gamma=0\end{cases};\quad \alpha=\frac{2}{3}\gamma;\quad \beta=\gamma;$$

Если принять $\gamma = 3$, то получаем:

$y_3=2e^{3x};\quad z_3=3e^{3x};\quad w_3=3e^{3x};$

Общее решение имеет вид:

$$\begin{cases}y=-C_2e^{-2x}+2C_3e^{3x}\\ z=-C_1e^{-x}+C_2e^{-2x}+3C_3e^{3x}\\ w=C_1e^{-x}+C_2e^{-2x}+3C_3e^{3x}\end{cases}$$

Задания для самостоятельного решения

Решить систему дифференциальных уравнений:

1. $\begin{cases}y'=y+z\\ z'=y+z+x\end{cases}$

2. $\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=2x-y,\\ \dfrac{dy}{dt}=x+2y.\end{cases}$

3. $\begin{cases}\frac{dx}{dt}=-7x+y,\\ \frac{dy}{dt}=-2x+5y.\end{cases}$

4. $\begin{cases}\frac{dx}{dt}=x^2+y^2,\\ \frac{dy}{dt}=2xy.\end{cases}$

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Агафонов, С.А. Дифференциальные уравнения. Вып. VIII / С.А. Агафонов. - М.: МГТУ , 2011. - 347 с.

2. Боярчук, А.К. АнтиДемидович. Т.5. Ч.1: Дифференциальные уравнения в примерах и задачах. Дифференциальные уравнения первого порядка. Справочное пособие по высшей мат / А.К. Боярчук, Г.П. Головач. - М.: Ленанд, 2015. - 240 с.

3. Пантелеев, А.В. Обыкновенные дифференциальные уравнения в примерах и задачах [Текст]: учеб. пособие/ Пантелеев А.В.- М.: Высш.шк, 2001.- 376 с.

4. Федорюк, М.В. Обыкновенные дифференциальные уравнения [Текст]: учебник для вузов/ Федорюк М.В.- СПб.: Лань, 2003.- 448 с.

5. Егоров, А. И. Обыкновенные дифференциальные уравнения и система Maple [Электронный ресурс]/ А.И. Егоров. — Электрон. текстовые данные. — М.: СОЛОН-ПРЕСС, 2016. — 392 c. — 978-5-91359-205-7. — Режим доступа: http://www.iprbookshop.ru/64928.html

6. Литвин, Д.Б. Обыкновенные дифференциальные уравнения и системы [Электронный ресурс]: учебное пособие/ Д.Б. Литвин, С.В. Мелешко, И.И. Мамаев. — Электрон. текстовые данные. — Ставрополь: Ставропольский государственный аграрный университет, Сервисшкола, 2017. — 76 c. — 2227-8397. — Режим доступа: http://www.iprbookshop.ru/76118.html

КУНИЖЕВА Лариса Адамовна
КОРКМАЗОВА Зарема Османовна

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Учебно-методическое пособие для обучающихся направления подготовки
01.03.02 Прикладная математика и информатика

Корректор Чагова О.Х.
Редактор Чагова О.Х.

Сдано в набор 26.08.2025 г.
Формат 60х84/16
Бумага офсетная.
Печать офсетная.
Усл. печ. л. 2,09
Заказ № 5183
Тираж 100 экз.

Оригинал-макет подготовлен
в Библиотечно-издательском центре СКГА
369000, г. Черкесск, ул. Ставропольская, 36