МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

СЕВЕРО-КАВКАЗСКАЯ ГОСУДАРСТВЕННАЯ АКАДЕМИЯ

З.З. Тикова

АЛГЕБРА И ГЕОМЕТРИЯ

Учебно-методическое пособие для обучающихся
I курса обучающихся по направлению подготовки
09.03.04 «Программная инженерия»

Черкесск
2024

УДК 512:514
ББК 22.14:22.15
Т 40

Рассмотрено на заседании кафедры «Математика»
Протокол № 1 от «31» августа 2023 г.
Рекомендовано к изданию редакционно-издательским советом СКГА.
Протокол № 26 от «29» сентября 2023 г.

Рецензенты: Токова А.А.– к.ф.-м.н., доцент

Т 40 **Тикова, З.З. А**лгебра и геометрия**:** учебно-методическое пособие для обучающихся I курса обучающихся по направлению подготовки 09.03.04 «Программная инженерия» / З.З. Тикова.– Черкесск: БИЦ СКГА, 2024. – 68 с.

Данное учебно-методическое пособие издается в соответствии с рабочей программой учебной дисциплины «Алгебра и геометрия» по учебному плану для студентов обучающихся по направлению09.03.04 «Программная инженерия » очной формы обучения.

В учебно-методическое пособии содержатся краткие теоретические сведения, примеры решения задач и задачи для промежуточной аттестации.

УДК 512:514
ББК 22.14:22.15

Содержание

Введение

В курсе «Алгебра и геометрия» студенты направления 09.03.04. очной формы обучения изучают раздел линейной алгебры. В данной учебно-методической пособий, содержатся краткие теоретические сведения и разобраны некоторые примеры, для решения типовых расчетов по линейной алгебре.

Методические указания к типовым расчетам

1. Вариант ТР должен соответствовать порядковому номеру фамилии студента в журнале его группы.

2. Каждая ТР выполняется в отдельной тетради чернилами любого цвета, кроме красного. В тетради должны быть поля для замечаний проверяющего, а в конце тетради должно быть несколько чистых листов для работы над ошибками в соответствии с замечаниями проверяющего.

3. Оформление обложки тетради должно соответствовать образцу:

Типовой расчет
по алгебре и геометрии
на тему: Линейная алгебра
студента (ки) гр. ………
Ф.И.О. …………………
вариант № …………….

4. Работа, выполненная по чужому варианту, не засчитывается.

5. Задачи и их решения располагаются в порядке возрастания их номеров в соответствии с нумерацией ТР.

6. Условие задачи полностью переписывается с заменой общих данных на конкретные из своего варианта.

7. Решение задачи записывается аккуратно и подробно с необходимыми выкладками, чтобы было понятно, откуда что получено.

8. Не зачтенная работа возвращается студенту для исправления ошибок. Студент должен в конце ТР в работе над ошибками исправить их и вновь сдать ТР на проверку.

1.Матрицы

1.1. Основные понятия.

Определение. **Матрицей** размера $m\times n$, где m- число строк, n- число столбцов, называется таблица чисел, расположенных в определенном порядке. Эти числа называются элементами матрицы. Место каждого элемента однозначно определяется номером строки и столбца, на пересечении которых он находится.

Обозначаются матрицы заглавными буквами латинского алфавита, а их элементы – соответствующими малыми буквами с двумя индексами. Например, для матрицы A, ее элементы обозначаются символами a_{ij}, где первый индекс i указывает номер строки, а второй индекс j – номер столбца данного элемента($i=\overline{1,m}$; $j=\overline{1,n}$)

Матрица A размерности $m\times n$ кратко обозначается символом $A_{m\times n}$ и имеет вид

$$A_{m\times n}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

1.2. Виды матриц.

Определение. Если в матрице $A_{m\times n}$ число строк не равно числу столбцов ($m\neq n$), то такая матрица называется прямоугольной, а если $m = n$, то такая матрица называется квадратной матрицей n-го порядка и она обозначается символом A_{nxn}:

$$A_{nxn}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Определение. Если квадратная матрица состоит из одного элемента a_{11}, то матрица называется первого порядка.

Определение. Матрица, состоящая из одной строки (m=1), называется матрицей-строкой или строчной матрицей. Например,$A_{1\times n} = (a_{11} a_{12} \dots\ a_{1n})$

Определение. Матрица, состоящая из одного столбца (n = 1), называется матрицей–столбцом или столбцевой матрицей. Например,

$$A_{m\times 1}=\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}$$

Определение. Нулевая матрица – это матрица, у которой все элементы равны нулю.

Нулевая матрица обозначается буквой O:

$$O = \begin{pmatrix} 0 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 0 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & 0 \end{pmatrix}$$

В матричном исчислении нулевая матрица играет ту же роль, что и число 0 в арифметике.

1.3. Квадратные матрицы.

Определение. Если число столбцов матрицы равно числу строк (m=n), то матрица называется **квадратной**.

Элементы с одинаковыми индексамиа$_{11,}$ a_{22}, …, a_{nn} образуют главную диагональ квадратной матрицы. Поэтому эти элементы называются диагональными элементами. Геометрически главная диагональ проходит через левый верхний и правый нижний угол квадратной матрицы (Рисунок 1)

$$\begin{pmatrix} * & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \end{pmatrix}$$

Рисунок 1.

Соответственно побочная диагональ квадратной матрицы проходит через ее правый верхний и левый нижний угол (Рисунок 2)

$$\begin{pmatrix} * & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \end{pmatrix}$$

Рисунок 2.

Диагональная матрица – это квадратная матрица, у которой все элементы, лежащие вне главной диагонали равны нулю.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & ... & 0 \\ 0 & a_{22} & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & a_{nn} \end{pmatrix}$$

В диагональной матрице среди ее диагональных элементов могут быть и нули, но только не на концах главной диагонали, т.е. $a_{11}\neq 0$, $a_{nn}\neq 0$.

Частным случаем диагональной матрицы является единичная матрица.

Единичная матрица – это диагональная матрица, у которой все диагональные элементы равны единице. Она обозначается буквой E.

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

Ее краткое обозначение $E = (\delta_{ij})$, где δ_{ij} – это символ Кронекера, $\delta_{ij} = \begin{cases} 1, \text{if } i = j \\ 0, \text{ if } i \neq j \end{cases}$

В матричном исчислении единичная матрица играет ту же роль, что и число 1 в арифметике.

Треугольная матрица – это квадратная матрица, у которой все элементы, расположенные выше (или ниже) главной диагонали, равны нулю. В верхней треугольной матрице равны нулю все элементы, расположенные ниже главной диагонали. В нижней треугольной матрице равны нулю все элементы, расположенные выше главной диагонали.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \text{и} \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

1.4. Действия над матрицами

Сложение и вычитание матриц сводится к соответствующим операциям над их элементами. Самым главным свойством этих операций является то, что они определены только для матриц одинакового размера. Таким образом, возможно определить операции сложения и вычитания матриц:

Определение. Суммой (разностью) матриц является матрица, элементами которой являются соответственно сумма (разность) элементов исходных матриц.

$$c_{ij} = a_{ij} \pm b_{ij}$$

$$C = A + B = B + A.$$

Операция **умножения (деления)** матрицы любого размера на произвольное число сводится к умножению (делению) каждого элемента матрицы на это число.

$$\alpha A = \begin{pmatrix} \alpha a_{11} & \alpha a_{12} & \dots & \alpha a_{1n} \\ \alpha a_{21} & \alpha a_{22} & \dots & \alpha a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha a_{m1} & \alpha a_{m2} & \dots & \alpha a_{mn} \end{pmatrix}$$

Свойства сложения матриц:

1) коммутативность (переместительное свойство): A + B = B + A;

2) ассоциативность (сочетательное свойство): A + B + C = (A + B) + C = A + (B + C);

3) свойство противоположной матрицы: A + (–A) = O;

4) свойство нулевой матрицы: O + A = A.

Свойства умножения матрицы на число:

5) дистрибутивность (распределительное свойство) относительно суммы матриц:

$\lambda\cdot(A+B) = \lambda\cdot A+\lambda\cdot B$;

6) дистрибутивность относительно суммы чисел: $(\lambda +\mu)\cdot A = \lambda\cdot A + \mu\cdot A$;

7) ассоциативность (сочетательное свойство) относительно произведения:

$\lambda\cdot\mu\cdot A = (\lambda\cdot\mu)\cdot A = \lambda\cdot(\mu\cdot A) = \mu\cdot(\lambda\cdot A)$;

8) $\lambda\cdot A = \begin{cases} A, \text{ if } \lambda = 1 \\ O, \text{ if } \lambda = 0 \\ -A, \text{ if } \lambda = -1 \end{cases}$

Пример. Даны матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 3 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 5 & 7 & 8 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$, найти 2A + B.

$$2A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 4 & 2 & 8 \\ 6 & 4 & 6 \end{pmatrix}, \qquad 2A + B = \begin{pmatrix} 3 & 7 & 10 \\ 9 & 9 & 16 \\ 7 & 6 & 10 \end{pmatrix}.$$

Операция умножения матриц.

Определение: Произведением матриц называется матрица, элементы которой могут быть вычислены по следующим формулам:

$$A\cdot B = C;$$

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}\cdot b_{kj}.$$

Из приведенного определения видно, что операция умножения матриц определена только для матриц, **число столбцов первой из которых равно числу строк второй.**

Свойства операции умножения матриц.

1)Умножение матриц **не коммутативно**, т.е. $AB \neq BA$ даже если определены оба произведения. Однако, если для каких – либо матриц соотношение AB=BA выполняется, то такие матрицы называются **перестановочными.**

Самым характерным примером может служить единичнаяматрица, которая является перестановочной с любой другой матрицей того же размера.

Перестановочными могут быть только квадратные матрицы одного и того же порядка.

$$A\cdot E = E\cdot A = A$$

Очевидно, что для любых матриц выполняются следующее свойство:

$$A\cdot O = O;\ \ O\cdot A = O,$$

где O – **нулевая** матрица.

2) Операция перемножения матриц **ассоциативна,** т.е. если определены произведения AB и (AB)C, то определены BC и A(BC), и выполняется равенство:

$$(AB)C=A(BC).$$

3) Операция умножения матриц **дистрибутивна** по отношению к сложению, т.е. если имеют смысл выражения A(B+C) и (A+B)C, то соответственно:

$$A(B + C) = AB + AC$$
$$(A + B)C = AC + BC.$$

4) Если произведение AB определено, то для любого числа α верно соотношение:

$$\alpha(AB) = (\alpha A)B = A(\alpha B).$$

5) Если определено произведение AB, то определено произведение $B^T A^T$ и выполняется равенство:

$$(AB)^T= B^T A^T,$$ где

индексом T обозначается **транспонированная** матрица.

6) Заметим также, что для любых квадратных матриц $\det(AB) = \det A\cdot\det B$.

Понятие det (определитель, детерминант) будет рассмотрено ниже.

Многочлены от квадратных матриц.

Опр. Квадратная матрица A в n–ой степени есть произведение матрицы A на себя n раз: $A^n = \underbrace{A\cdot A\cdots A}_{n\ \text{раз}}$ $(n\in N)$. Квадратная матрица A ($A\neq O$) в нулевой степени есть единичная матрица E того же порядка, что и матрица A, то есть $A^0 = E$.

NB. Возводить в степень можно только квадратные матрицы.

Свойства степени квадратной матрицы:

1) $A^m\cdot A^n = A^{m+n}$

2) $(A^m)^n = A^{m\cdot n}$

Из обычного многочлена (полинома) степени n ($n\in Z_+$)

$P_n(x)=a_n\cdot x^n + a_{n-1}\cdot x^{n-1} + \ldots+ a_1\cdot x^1 + a_0\cdot x^0$

заменой переменной x на квадратную матрицу A получают матричный многочлен $P_n(A)$ от квадратной матрицы A: $P_n(A) = a_n\cdot A^n + a_{n-1}\cdot A^{n-1} + \ldots+ a_1\cdot A+ a_0\cdot E$, который также является матрицей.

В матричных многочленах от квадратной матрицы A порядок единичной матрицы E равен порядку матрицы A.

Пример. Найти значение функции f(x) при x=A, если $f(x)=x^2-2x+2$, $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Решение: так как единичная матрица E в матричном исчислении играет роль единицы, то искомое значение функции следует искать в виде

$$f(A) = A^2-2A+2E = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + (-2) \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E$$

Определение. Матрица А называется корнем многочлена $P_n(x)$, если $P_n(A)=0$. В этом случае многочлен $P_n(x)$ называется аннулирующим многочленом для матрицы А.

Пример. Показать, что матрица $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$ является корнем многочлена $P_2(x) = x^2 + 2x - 1$.

Решение: $P_2(A) = A^2 + 2A - E =$

$$= \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}^2 + 2\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -4 & 7 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 4 & -6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = O$$

1.5. Транспонирование матриц.

Определение. Если в матрице А поменять местами строки на столбцы с сохранением их нумерации, то получится транспонированная матрица $A^т$.

Пример. Дано: $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \end{pmatrix}$. Найти: 1) $A^т$, 2) $A \cdot A^т$

$$A_{2\times4} \quad A^т_{4\times2} \quad C_{2\times2}$$

Решение: 1) $A^т = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 6 \\ 3 & 7 \\ 4 & 8 \end{pmatrix}$; 2) $A \cdot A^т = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 6 \\ 3 & 7 \\ 4 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 30 & 70 \\ 70 & 174 \end{pmatrix}$

Свойства операции транспонирования:

1) $(A^т)^т=A$;
2) $(A+B)^т=A^т+B^т$;
3) $(\lambda \cdot A)^т=\lambda \cdot A^т$;
4) $(A \cdot B)^т=B^т \cdot A^т$.

Транспонирование квадратной матрицы сводится к повороту ее элементов вокруг главной диагонали на угол π.

Опр. Симметрические матрицы – это квадратные матрицы, у которых равны элементы, симметричные относительно главной диагонали, то есть $a_{ij} = a_{ji}$.

2. Определители

2.1. Понятие определителя.

Определитель – это число, которое является характеристикой данной квадратной матрицы. Определители существуют только для квадратных матриц.

Чтобы подчеркнуть связь между квадратной матрицей и ее определителем, его обозначают также как и матрицу, к которой он относится, только меняют форму скобок.

Если в матрице элементы ограничены двумя круглыми скобками, то, выпрямив скобки до прямых вертикальных линий, мы получим определитель. При этом элементы матрицы автоматически становятся элементами определителя, который кратко обозначается одним из символов Δ, $|A_n|$, detA.

$$A_n = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \Delta,\ |A_n|,\ \det A.$$

Хотя внешне квадратная матрица и ее определитель отличаются только формой скобок, но между ними есть принципиальное отличие. Матрица – это таблица чисел, а ее определитель – это одно число, которое характеризует эту квадратную матрицу.

Правила вычисления определителей.

__Определение__. Определитель 1-го порядка – это определитель квадратной матрицы 1-го порядка A_1, который равен значению элемента a_{11}, так как матрица A_1 состоит из одного этого элемента, который одновременно является ее числовой характеристикой: $\Delta=|A_1|= a_{11}$.

__Определение__. Определитель 2-го порядка – это определитель квадратной матрицы 2-го порядка A_2, который вычисляется по формуле

$$\Delta = |A_2| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}\cdot a_{22} - a_{12}\cdot a_{21},$$

то есть он равен разности произведений элементов главной и побочной диагоналей (Рисунок3)

$$\begin{vmatrix} * & * \\ * & * \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} * & * \\ * & * \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} * & * \\ * & * \end{vmatrix}$$

Рисунок 3

Пример. $\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 1\cdot 4 - (-2)\cdot 3 = 10$

__Определение__. Определитель 3-го порядка – это определитель квадратной матрицы 3-го порядка A_3, который вычисляется по формуле

$$\Delta = |A_3| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11}\cdot a_{22}\cdot a_{33} + a_{12}\cdot a_{23}\cdot a_{31} + a_{13}\cdot a_{21}\cdot a_{32} - a_{13}\cdot a_{22}\cdot a_{31} - a_{12}\cdot a_{21}\cdot a_{33} - a_{11}\cdot a_{23}\cdot a_{32}$$

Для запоминания формулы используют правило треугольников(Рисунок4)

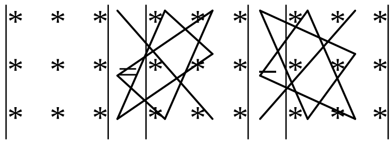

Рисунок 4.

Со знаком (+) берутся произведения элементов, стоящих на главной диагонали, и произведения элементов, стоящих в вершинах треугольников, основания которых параллельны главной диагонали. Со знаком (–) берутся произведения элементов, стоящих на побочной диагонали, и произведения элементов, стоящих в вершинах треугольников, основания которых параллельны побочной диагонали.

Пример. $\Delta=\begin{vmatrix}5 & -2 & 1\\ 3 & 1 & -4\\ 6 & 0 & -3\end{vmatrix} = 5\cdot1\cdot(-3) + (-2)\cdot(-4)\cdot6 + 3\cdot0\cdot1 - 1\cdot1\cdot6$ $-(-2)\cdot3\cdot(-3)-(-4)\cdot0\cdot5 = 9$

Определение. Минор M_{ij} элемента a_{ij}– это определитель, который получается из исходного определителя вычеркиванием i-й строки и j-го столбца, на пересечении которых находится элемент a_{ij}. Например,

$\Delta=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix} \Rightarrow M_{11} = \begin{vmatrix}\cancel{a_{11}} & \cancel{a_{12}} & \cancel{a_{13}}\\ \cancel{a_{21}} & a_{22} & a_{23}\\ \cancel{a_{31}} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}$, то есть $M_{11} = \begin{vmatrix}a_{22} & a_{23}\\ a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}$; $M_{12} = \begin{vmatrix}a_{21} & a_{23}\\ a_{31} & a_{33}\end{vmatrix}, \ldots,$

$M_{33} = \begin{vmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}$

Определение. Алгебраическое дополнение A_{ij} элемента a_{ij}– это минор M_{ij}, взятый со знаком $(-1)^{i+j}$, то есть $A_{ij} = (-1)^{i+j}\cdot M_{ij}$. Например,

$\Delta=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix} \Rightarrow A_{11}=(-1)^2\cdot M_{11} = \begin{vmatrix}a_{22} & a_{23}\\ a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}$; $A_{12}=(-1)^3\cdot M_{12} = -\begin{vmatrix}a_{21} & a_{23}\\ a_{31} & a_{33}\end{vmatrix}, \ldots,$

$A_{33}=(-1)^6\cdot M_{33} = \begin{vmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}$.

Теорема Лапласа (точнее, частный случай теоремы Лапласа).

Всякий определитель равен сумме попарных произведений элементов любой его строки (столбца) на соответствующие алгебраические дополнения, то есть

$$\Delta = |A_n| = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\cdot A_{ij} = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}\cdot A_{ij},$$

где $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\cdot A_{ij}$ есть разложение определителя по i-ой строке, а $\sum_{i=1}^{n} a_{ij}\cdot A_{ij}$ есть разложение определителя по j-му столбцу.

Доказательство.

Убедимся в справедливости теоремы Лапласа на примере разложения определителя 3-го порядка, например, по 1-й строке. По теореме это разложение будет иметь вид: $\Delta=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}= a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13}$ = {с учетом определения A_{ij} получим}= $=a_{11}(-1)^2M_{11} + a_{12}(-1)^3M_{12} + a_{13}(-1)^4M_{13} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} = a_{11}(a_{22}\cdot a_{33}- a_{23}\cdot a_{32}) - a_{12}(a_{21}\cdot a_{33}- a_{23}\cdot a_{31}) + a_{13}(a_{21}\cdot a_{32}- a_{22}\cdot a_{31}) = =a_{11}\cdot a_{22}\cdot a_{33} + a_{12}\cdot a_{23}\cdot a_{31} + a_{13}\cdot a_{21}\cdot a_{32}- a_{13}\cdot a_{22}\cdot a_{31}- a_{12}\cdot a_{21}\cdot a_{33}- a_{11}\cdot a_{23}\cdot a_{32}$ = {по правилу треугольников} = $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \Delta$. Аналогичный результат получается при разложении определителя по любой строке (столбцу).

Следствие. Если в i–й строке (j-м столбце) определителя Δ есть только один ненулевой элемент $a_{ij}\neq 0$, то результатом разложения определителя по этой строке (столбцу) будет выражение $\Delta = a_{ij}\cdot A_{ij}$.

2.2. Свойства определителей.

1) При транспонировании определителя его значение не меняется, (то есть значение определителя не меняется при замене его строк столбцами с теми же номерами).

Доказательство:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}\cdot a_{22} - a_{12}\cdot a_{21}$$

Следовательно, строки и столбцы определителя равноправны, поэтому его свойства можно формулировать и доказывать либо для строк, либо для столбцов.

2) При взаимной перестановке любых двух строк (столбцов) определителя его знак меняется на противоположный.

Доказательство:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}\cdot a_{22} - a_{12}\cdot a_{21} = -(a_{12}\cdot a_{21} - a_{11}\cdot a_{22}) = -\begin{vmatrix} a_{12} & a_{11} \\ a_{22} & a_{21} \end{vmatrix}$$

3) Определитель с двумя одинаковыми строками (столбцами) равен нулю.

Доказательство. Пусть определитель Δ имеет две одинаковые строки. Если поменять их местами, то, с одной стороны, величина определителя не изменится, так как строки одинаковы, а с другой стороны определитель *должен* поменять свой знак на противоположный по свойству 2. Таким образом, имеем: $\Delta = -\Delta \Rightarrow \Delta = 0$.

4) Общий множитель элементов какой-либо строки (столбца) можно выносить за знак определителя.

Доказательство:

$$\Delta=\begin{vmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \lambda a_{11}\cdot a_{22} - \lambda a_{12}\cdot a_{21} = \lambda(a_{11}\cdot a_{22} - a_{12}\cdot a_{21}) = \lambda \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}.$$

Следствие: $\Delta = \begin{vmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} \\ \mu a_{21} & \mu a_{22} \end{vmatrix} = \lambda\cdot\mu \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}.$

Правило умножения определителя на число. Чтобы умножить определитель на число, надо все элементы какой-то *одной* его строки (столбца) умножить на это число.

5) Определитель с нулевой строкой (столбцом) равен нулю.

Доказательство. По свойству 4 вынесем общий множитель $\lambda = 0$ элементов нулевой строки (столбца) за знак определителя. Получим $0\cdot\Delta = 0$.

6) Определитель с двумя и более пропорциональными строками (столбцами) равен нулю.

Доказательство. Если вынести за знак определителя коэффициент пропорциональности двух строк (столбцов) $\lambda\neq 0$, то получится определитель с двумя одинаковыми строками (столбцами), равный нулю по свойству 3.

7) Если каждый элемент какой-либо строки (столбца) определителя представить в виде суммы k слагаемых, то такой определитель равен сумме k определителей, у которых элементы этой строки (столбца) заменены соответствующими слагаемыми, а все остальные элементы такие же как у исходного определителя.

Доказательство:

$$\Delta=\begin{vmatrix} (a_{11}+b_{11}) & (a_{12}+b_{12}) \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = (a_{11} + b_{11})a_{22} - (a_{12} + b_{12})a_{21} = (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) + (b_{11}a_{22} - b_{12}a_{21}) = = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}.$$

Определение. n-ая строка определителя называется линейной комбинацией его остальных (n–1) строк, если ее можно представить в виде суммы произведений этих строк на соответствующие числа $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{n-1}$. Например, в определителе

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ \lambda_1 a_{11} + \lambda_2 a_{21} & \lambda_1 a_{12} + \lambda_2 a_{22} & \lambda_1 a_{13} + \lambda_2 a_{23} \end{vmatrix}$$

3–я строка является линейной комбинацией первых двух строк.

Линейная комбинация называется тривиальной, если в ней $\forall\lambda_i = 0$. В противном случае линейная комбинация называется нетривиальной (if$\exists\lambda_i \neq 0$).

8 а) Если одна строка (столбец) определителя является линейной комбинацией других его строк (столбцов), то такой определитель равен нулю.

Доказательство: $\Delta =$

$$=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ \lambda_1 a_{11}+\lambda_2 a_{21} & \lambda_1 a_{12}+\lambda_2 a_{22} & \lambda_1 a_{13}+\lambda_2 a_{23} \end{vmatrix} = \left\{\begin{matrix}\text{по свойству} \\ 7)\end{matrix}\right\} =$$

$$=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ \lambda_1 a_{11} & \lambda_1 a_{12} & \lambda_1 a_{13} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ \lambda_2 a_{21} & \lambda_2 a_{22} & \lambda_2 a_{23} \end{vmatrix} = \left\{\begin{matrix}\text{по свойству} \\ 6)\end{matrix}\right\} = 0$$

8 б) Величина определителя не изменится, если к элементам любой его строки (столбца) прибавить соответствующие элементы любой другой строки (столбца) определителя, умноженные на одно и то же число.

Доказательство:

Пусть $\Delta=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \Rightarrow$ {к 1-й строке прибавим 2-ю строку, умноженную на число λ} $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} a_{11}+\lambda a_{21} & a_{12}+\lambda a_{22} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \left\{\begin{matrix}\text{по свойству} \\ 7)\end{matrix}\right\} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \lambda a_{21} & \lambda a_{22} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \left\{\begin{matrix}\text{по свойству} \\ 6)\end{matrix}\right\} =$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}.$$

9) Сумма произведений элементов какой-либо строки (столбца) определителя на алгебраические дополнения соответствующих элементов любой другой строки (столбца) определителя равна нулю, то есть $\sum_{s=1}^{n} a_{is} \cdot A_{js} = 0$ (ifi $\neq$ j).Например, пусть

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \neq 0$$

Тогда $a_{11}A_{21} + a_{12}A_{22} + a_{13}A_{23} = 0$, так как выполнено умножение элементов 1-ой строки определителя на алгебраические дополнения соответствующих элементов 2-ой строки.

Доказательство:

$$a_{11}A_{21} + a_{12}A_{22} + a_{13}A_{23} = a_{11}\cdot(-1)^{2+1}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{12}\cdot(-1)^{2+2}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\cdot(-1)^{2+3}$$

$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$={это есть разложение по 1-й строке определителя $(-1)\cdot\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$ 0}= 0.

Если определитель $\Delta \neq 0$, то по свойству 8 б) в нем всегда можно «обнулить» i-ю строку (j-й столбец) до единственного ненулевого элемента и разложить определитель по этой строке (столбцу). Применяя эту операцию нужное число раз, всегда можно из определителя n-го порядка получить определитель 2-го порядка.

Пример. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{vmatrix}$

Решение. $\begin{vmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{vmatrix}_{-1} = \begin{vmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}^{-2} = \begin{vmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1\cdot(-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 4 - 3 = 1$

Определитель треугольного вида равен произведению его диагональных элементов, то есть $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & ... & 0 \\ a_{21} & a_{22} & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} \end{vmatrix} =$ $a_{11}\cdot a_{22}\cdots a_{nn}$

Доказательство. Последовательно разлагая определитель треугольного вида

$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & ... & 0 \\ a_{21} & a_{22} & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} \end{vmatrix}$ сначала по 1-ой строке, затем по 2-ой строке и так далее, получим

$$\Delta = a_{11}\cdot a_{22}\cdots a_{nn} = \prod_{i=1}^{n} a_{ii}\,.$$

Пример. Вычислить определитель сведением его к треугольному виду.

$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & -5 \end{vmatrix}$

Решение. Чтобы свести определитель к треугольному виду, необходимо в 1-ом столбце обнулить три элемента, во 2-ом – два, в 3-ем – один и опустить их вниз, чтобы все они были под главной диагональю. Начнем обнуление с 1-го столбца. Для этой цели выберем в качестве активной 2-ую строку, у которой 1-ый элемент равен 1, а остальные элементы минимальны по модулю по сравнению с элементами 1-ой и 4-ой строк. С помощью этой активной строки обнулим 1-ый столбец.

$$\Delta=\begin{array}{c|c}\begin{vmatrix}1&2&3&4\\1&0&1&2\\3&-1&-1&0\\1&2&0&-5\end{vmatrix}&\begin{array}{c}-1\\ \\-3\\-1\end{array}\end{array}=\begin{vmatrix}0&2&2&2\\1&0&1&2\\0&-1&-4&-6\\0&2&-1&-7\end{vmatrix}$$

= {Вынесем общий множитель 1-ой и 2-ой строк за знак определителя и переставим местами эти строки, чтобы опустить вниз все нули в1-м столбце}= $2\cdot\begin{array}{cc}\begin{vmatrix}1&0&1&2\\0&1&1&1\\0&1&4&6\\0&2&-1&-7\end{vmatrix}&\begin{array}{c} \\ \\-1\\-2\end{array}\end{array}$ =

{Получилась так называемая 1-ая ступенька, которая отделяет 1-ую строку от остальных трех симметричных строк одинаково начинающихся с нулевых элементов. Это означает, что 1-ая строка больше не участвует в дальнейших преобразованиях, а мы продолжаем работать с тремя оставшимися симметричными строками. Из этих строк выбираем в качестве активной 2-ую строку, так как ее элементы минимальны по модулю, и с ее помощью обнуляем два элемента во 2-ом столбце, согласно схемы}= $2\cdot\begin{array}{cc}\begin{vmatrix}1&0&1&2\\0&1&1&1\\0&0&3&5\\0&0&-3&-9\end{vmatrix}&\begin{array}{c} \\ \\ \\1\end{array}\end{array}$ = {Получился определитель с двумя ступеньками, которые означают, что 1-ая и 2-ая строки завершены и больше не участвуют в дальнейших преобразованиях. Мы продолжаем работать с двумя оставшимися симметричными строками, из которых выбираем в качестве активной 3-ю строку и обнуляем последний элемент в 3-ем столбце. В результате получился определитель треугольного вида, у которого все элементы ниже главной диагонали равны нулю}=

$$= 2\cdot\begin{vmatrix}1&0&1&2\\0&1&1&1\\0&0&3&5\\0&0&0&-4\end{vmatrix} = 2\cdot(1\cdot1\cdot3\cdot(-4)) = 2\cdot(-12) = -24$$

3. Невырожденные матрицы.

3.1. Обратная матрица.

__Определение__. Матрица $\tilde{A}$ называется присоединенной (союзной) к квадратной матрице A, если она состоит из алгебраических дополнений элементов транспонированной матрицы $A^{т}$. Чтобы получить присоединенную матрицу $\tilde{A}$, следует транспонировать матрицу A, а затем все ее элементы заменить их алгебраическими дополнениями, то есть

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

Определение. Квадратная матрица A называется вырожденной (особенной), если ее определитель $|A|=0$, и невырожденной, если ее определитель $|A|\neq 0$.

Определение. Квадратная матрица A^{-1} называется обратной (инверсной) к квадратной матрице A, если выполняется условие
$A^{-1}\cdot A = A\cdot A^{-1} = E$

Определение. Обратная матрица A^{-1} возможна только для невырожденной матрицы A.

Теорема. Для любой невырожденной квадратной матрицы A существует единственная обратная матрица A^{-1}, которая находится по формуле $A^{-1} = \dfrac{\tilde{A}}{|A|}$

Доказательство.

1) Из определения $A^{-1}\cdot A = A\cdot A^{-1}$ следует, что A и A^{-1}– это квадратные матрицы одного порядка.

Пусть матрица A – невырожденная, то есть $|A|\neq 0$. Тогда, по правилу умножения матриц, по теореме Лапласа и по свойству 9 определителей, получим

$$A\cdot\tilde{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} |A| & 0 & \dots & 0 \\ 0 & |A| & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & |A| \end{pmatrix} =$$

$$= |A|\cdot\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = |A|\cdot E$$

Следовательно, $A\cdot\tilde{A} = |A|\cdot E$. Аналогично доказывается, что $\tilde{A}\cdot A = |A|\cdot E$.

Из $A\cdot\tilde{A} = |A|\cdot E \Rightarrow A^{-1}\cdot A\cdot\tilde{A} = A^{-1}\cdot|A|\cdot E \Rightarrow E\cdot\tilde{A} = A^{-1}\cdot|A| \Rightarrow \tilde{A} = A^{-1}\cdot|A| \Rightarrow A^{-1} = \dfrac{\tilde{A}}{|A|}$.

2) Докажем единственность обратной матрицы. Предположим, что для матрицы A существует еще одна обратная матрица B. Тогда, согласно определению произведение $A\cdot B=E$. Обе части последнего равенства умножим слева на обратную матрицу A^{-1} и получим: $A^{-1}\cdot A\cdot B = A^{-1}\cdot E \Rightarrow E\cdot B = A^{-1}\cdot E \Rightarrow B = A^{-1}$.

Свойства обратной матрицы:

1) $|A^{-1}| = \dfrac{1}{|A|}$;

2) $(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$;

3) $(A^{-1})^{т} = (A^{т})^{-1}$.

3.2. Вычисление обратной матрицы A^{-1} с помощью присоединенной матрицы $\tilde{A}$.

Для этого необходимо:

1) Вычислить определитель $|A|$. Если $|A|=0$, следовательно матрица A – вырожденная и для нее нет обратной матрицы A^{-1}. Если же $|A| \neq 0$, то следует выполнить следующие действия.

2) Вычислить алгебраические дополнения A_{ij} всех элементов a_{ij} матрицы A и построить матрицу A_A, в которой на местах элементов a_{ij} будут стоять их алгебраические дополнения A_{ij}:

$$A_A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{n1} & A_{n2} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

3) Транспонировать матрицу A_A, чтобы получить присоединенную матрицу $\tilde{A}$:

$$\tilde{A} = A_A^{T} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}.$$

4) Вычислить обратную матрицу A^{-1} по формуле: $A^{-1} = \dfrac{\tilde{A}}{|A|}$

5) Выполнить проверку: $A^{-1} \cdot A = E$.

Пример. Дано: $A = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \end{pmatrix}$, A^{-1}=?

Решение: 1) Вычислим определитель $|A|$. Для этого сначала «обнулим» первый столбец, а затем приведем определитель к треугольному виду.

$$|A| = \begin{vmatrix} -2 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \end{vmatrix}\begin{matrix} 2 \\ \\ -2 \end{matrix} = \begin{vmatrix} 0 & 7 & 9 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 7 & 9 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -(-7) = 7 \neq 0 \Rightarrow \exists\ A^{-1}.$$

2) Найдем алгебраические дополнения A_{ij} всех элементов a_{ij} матрицы A:

$A_{11}=(-1)^2\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = -2$; $A_{12}=(-1)^3\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 1$; $A_{13}=(-1)^4\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 0$;

$A_{21}=(-1)^3\begin{vmatrix}3&3\\4&5\end{vmatrix}=-3$; $A_{22}=(-1)^4\begin{vmatrix}-2&3\\2&5\end{vmatrix}=-16$; $A_{23}=(-1)^5\begin{vmatrix}-2&3\\2&4\end{vmatrix}=14$;

$A_{31}=(-1)^4\begin{vmatrix}3&3\\2&3\end{vmatrix}=3$; $A_{32}=(-1)^5\begin{vmatrix}-2&3\\1&3\end{vmatrix}=9$; $A_{33}=(-1)^6\begin{vmatrix}-2&3\\1&2\end{vmatrix}=-7$.

3) Составим матрицу A_A из алгебраических дополнений A_{ij} и транспонируем ее, чтобы получить присоединенную матрицу $\tilde{A}$:

$$A_A=\begin{pmatrix}-2&1&0\\-3&-16&14\\3&9&-7\end{pmatrix}\Rightarrow\tilde{A}=A_A^T=\begin{pmatrix}-2&-3&3\\1&-16&9\\0&14&-7\end{pmatrix}.$$

4) Найдем обратную матрицу по формуле: $A^{-1}=\dfrac{\tilde{A}}{|A|}=\dfrac{1}{7}\cdot\begin{pmatrix}-2&-3&3\\1&-16&9\\0&14&-7\end{pmatrix}$

В случае, когда $|A|\neq\pm1$, множитель $\dfrac{1}{|A|}$ лучше оставлять вне обратной матрицы A^{-1} для удобства проверки.

5) Проверка: $A^{-1}\cdot A=\dfrac{1}{7}\cdot\begin{pmatrix}-2&-3&3\\1&-16&9\\0&14&-7\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-2&3&3\\1&2&3\\2&4&5\end{pmatrix}=\dfrac{1}{7}\cdot\begin{pmatrix}7&0&0\\0&7&0\\0&0&7\end{pmatrix}=$

$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=E$. Ответ: $A^{-1}=\dfrac{1}{7}\cdot\begin{pmatrix}-2&-3&3\\1&-16&9\\0&14&-7\end{pmatrix}$.

3.3. Вычисление обратной матрицы A^{-1} методом элементарных преобразований над строками матрицы.

Элементарными преобразованиями матрицы называются:

1) перестановка строк (столбцов) матрицы;

2) умножение элементов строки (столбца) на число $\lambda\neq0$;

3) прибавление элементов одной строки (столбца) к соответствующим элементам другой строки (столбца);

4) вычеркивание нулевой строки (столбца) матрицы.

При элементарных преобразованиях получают только эквивалентные матрицы.

<u>Определение</u>. Матрицы A и B называются эквивалентными (A~B), если одна из них получается из другой в результате конечного числа элементарных преобразований.

Суть метода элементарных преобразований над *строками* матрицы. К исходной квадратной матрице A_n справа через разделительную вертикальную черту приписывают единичную матрицу E того же порядка, что и A, и таким образом получают расширенную матрицу (A|E). Далее, с помощью элементарных преобразований над *строками* приводят матрицу (A|E) сначала к ступенчатому виду $(A_1|B)$, где A_1 – верхняя треугольная матрица, а затем к виду $(E|A^{-1})$. Таким образом, имеет место преобразование: $(A|E)\Rightarrow(E|A^{-1})$.

Пример. Дано: $A=\begin{pmatrix} 2 & 7 & 3 \\ 3 & 9 & 4 \\ 1 & 5 & 3 \end{pmatrix}$. Методом элементарных преобразований над *строками* найти обратную матрицу A^{-1}.

Решение. $(A|E)$ $$=\left\langle\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 7 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 9 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 5 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right\rangle \sim \left\langle\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 7 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 5 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right\rangle \sim$$

$$\sim\left\langle\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 3 & 1 & 3 & -2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right\rangle \sim \left\langle\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 3 & 1 & 3 & -2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 1 \end{array}\right\rangle \sim \left\langle\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 1 \end{array}\right\rangle \sim$$

$$\sim\left\langle\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & 0 & 5 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 1 \end{array}\right\rangle \sim \left\langle\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{5}{3} & -1 & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 1 \end{array}\right\rangle$$

$$\sim\left\langle\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{7}{3} & 2 & -\frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{5}{3} & -1 & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 1 \end{array}\right\rangle \Rightarrow\Rightarrow \mathbf{A^{-1}}=\begin{pmatrix} -\frac{7}{3} & 2 & -\frac{1}{3} \\ \frac{5}{3} & -1 & -\frac{1}{3} \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix} -7 & 6 & -1 \\ 5 & -3 & -1 \\ -6 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

Проверка: $\mathbf{A^{-1}\cdot A} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -7 & 6 & -1 \\ 5 & -3 & -1 \\ -6 & 3 & 3 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 2 & 7 & 3 \\ 3 & 9 & 4 \\ 1 & 5 & 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathbf{E}$

3.4. Ранг матрицы

Если в прямоугольной матрице $A_{m\times n}$ выделить любые k строк и k столбцов($k\le\min(m,n)$), то элементы, стоящие на пересечении этих строк и столбцов, образуют квадратную матрицу k–го порядка A_k. Определитель квадратной матрицы A_k называется минором k–го порядка исходной прямоугольной матрицы $A_{m\times n}$, который обозначается символом M_k.

<u>Определение</u> Минор k–го порядка M_k матрицы А называется базисным минором, если сам он не равен нулю, а все миноры более высоких порядков равны нулю.

В матрице может быть несколько базисных миноров, но все они будут одного порядка.

Строки и столбцы базисного минора называются базисными строками и столбцами.

<u>Определение</u> Ранг матрицы есть порядок ее базисного минора. Ранг матрицы A обозначается символом r(A) или rangA.

Только для нулевой матрицы O ее ранг r(O)=0.

Ранг матрицы не меняется:

1) при транспонировании матрицы;

2) если в матрице приписать или вычеркнуть нулевую строку (столбец);

3) при элементарных преобразованиях матрицы.

<u>Определение</u>. Матрица называется ступенчатой, если в каждой ее строке, начиная со второй, первый ненулевой элемент от начала строки расположен строго правее, чем первый ненулевой элемент предыдущей строки. Например,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 10 & 11 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 12 \end{pmatrix} \text{ или } B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 5 & 6 & 7 \\ 0 & 0 & 8 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

С помощью элементарных преобразований матрицу всегда можно привести к ступенчатому виду

<u>Определение</u>. Ранг ступенчатой матрицы равен числу ее ненулевых строк.

В ступенчатой матрице всегда можно выделить базисный минор треугольного вида с ненулевыми диагональными элементами, порядок которого равен числу ненулевых строк.

Пример. Найти ранг матрицы $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 6 \\ 1 & 2 & 3 & 14 & 32 \\ 4 & 5 & 6 & 32 & 77 \end{pmatrix}$

Решение. Элементарными преобразованиями приведем матрицу A к ступенчатому виду.

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 6 \\ 1 & 2 & 3 & 14 & 32 \\ 4 & 5 & 6 & 32 & 77 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 6 \\ 0 & 2 & 3 & 13 & 28 \\ 0 & 5 & 6 & 28 & 61 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 3 & 9 & 18 \\ 0 & 0 & 6 & 18 & 36 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = B \Rightarrow r(B) = 3.$$ Так как $A \sim B \Rightarrow r(A) = r(B) = 3$.

Ответ: $r(A) = 3$

3.5. Понятие линейной зависимости и линейной независимости.

В прямоугольной матрице $A_{m\times n}$ обозначим ее строки следующим образом:

$(a_{11}\ a_{12}\ \dots\ a_{1n}) = a_1$

$(a_{21}\ a_{22}\ \dots\ a_{2n}) = a_2$

………………………………..

$(a_{m1} a_{m2}\ \dots\ a_{mn}) = a_m$

Определение. Строка a_m называется линейной комбинацией строк a_1, a_2, …, $a_k (k<m)$, если ее можно представить в виде суммы попарных произведений этих строк на соответствующие числа $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$, то есть $a_m = \lambda_1 \cdot a_1 + \lambda_2 \cdot a_2 + \dots + \lambda_k \cdot a_k = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \cdot a_i$

Вообще, линейной комбинацией величин $a_1, a_2, \dots, a_k$ называется сумма попарных произведений этих величин на соответствующие числа λ_1, $\lambda_2, \dots, \lambda_k$: $\sum_{i=1}^{k} \lambda_i \cdot a_i$, где λ_i= const.

Определение. Величины a_i называются ***линейно независимыми***, если их линейная комбинация равна нулю, то есть

$$\sum_{i=1}^{k} \lambda_i \cdot a_i = 0$$

только когда $\forall \lambda_i=0$. В противном случае, если линейная комбинация равна нулю хотя бы при одном $\lambda_i \neq 0$, то величины a_i называются ***линейно зависимыми***.

Лемма. Для того, чтобы величины a_1, a_2, …, a_kбыли линейно зависимыми, необходимо и достаточно, чтобы хотя бы одна из них была линейной комбинацией остальных.

1) Базисные строки (столбцы) матрицы – линейно независимы.

2) Любая небазисная строка (столбец) матрицы является линейной комбинацией ее базисных строк (столбцов).

Доказательство.

1) Допустим, что базисные строки (столбцы) матрицы являются линейно зависимыми. Тогда, согласно лемме, одна из них является линейной комбинацией остальных и, исходя из свойств определителя, базисный минор такой матрицы будет равен нулю, что противоречит определению базисного минора. Значит, базисные строки (столбцы) матрицы являются линейно независимыми.

2) Перестановкой строк и столбцов, то есть элементарными преобразованиями, добьемся того, чтобы базисный минор располагался в первых k строках и k столбцах матрицы $A_{m\times n}$. Тогда любой минор (k + 1)-го порядка и выше будет равен нулю, то есть строки (столбцы) матрицы , начиная с номера (k + 1) будут линейно зависимыми. Поэтому каждая из этих строк (столбцов) будет представлять собой линейную комбинацию каких-то других (остальных) строк (столбцов). Следовательно, элементарными преобразованиями их можно обнулить. В результате получится матрица, у которой, начиная с (k + 1)-го номера, все строки и столбцы будут нулевыми, а ненулевыми останутся только первые k базисных строк и столбцов, поскольку они линейно независимы. Тогда в обратном порядке мы можем восстановить первоначальный вид матрицы, оперируя только ее базисными строками и столбцами (так как только они остались ненулевыми). Следовательно, любая небазисная строка (столбец) матрицы является линейной комбинацией ее базисных строк (столбцов).

Теорема (о ранге матрицы). Ранг матрицы равен максимальному числу линейно независимых строк (столбцов) этой матрицы.

Доказательство. Пусть r(A)=k, тогда k строк матрицы A, составляющие ее базисный минор, являются линейно независимыми. По теореме о базисном миноре любая другая строка вне базисного минора является линейной комбинацией базисных строк. Поэтому число k является максимальным числом линейно независимых строк.

Следствие. Максимальное число линейно независимых строк в матрице равно максимальному числу линейно независимых столбцов в этой матрице.

Теорема (о линейной зависимости строк (столбцов) определителя). Для того чтобы определитель Δ равнялся нулю, необходимо и достаточно, чтобы его строки (столбцы) были линейно зависимыми.

Доказательство.

1) Необходимость. Пусть определитель Δ=0, тогда порядок его базисного минора меньше порядка определителя. Следовательно, хотя бы одна строка (столбец) определителя является небазисной. Тогда по теореме о базисном миноре, эта строка (столбец) является линейной комбинацией базисных строк (столбцов), и значит все строки (столбцы) определителя будут линейно зависимыми.

2) Достаточность. Если строки (столбцы) определителя Δ являются линейно зависимыми, то по лемме, хотя бы одна из них является линейной комбинацией базисных строк (столбцов). Следовательно, определитель Δ=0..

Пример Являются ли указанные векторы линейно зависимыми?

$\vec{x}_1 = (2; -3; 1), \vec{x}_2 = (3; -1; 5), \vec{x}_3 = (1; -4; 3)$

Решение. Составим определитель Δ из координат векторов. Если Δ=0, то приведенные векторы линейно зависимы, а если Δ≠0, то нет.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 3 & -1 & 5 \\ 1 & -4 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 5 & -5 \\ 0 & 11 & -4 \\ 1 & -4 & 3 \end{vmatrix} = -5\begin{vmatrix} 1 & -4 & 3 \\ 0 & 11 & -4 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -5\begin{vmatrix} 1 & -4 & 3 \\ 0 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 5\begin{vmatrix} 1 & -4 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 7 \end{vmatrix} =$$

$= 5\cdot 7 = 35 \neq 0 \Rightarrow$ указанные векторы линейно независимы.

4. Системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ).

4.1.Основные понятия.

Определение. Система линейных алгебраических уравнений (СЛАУ), состоящая из m уравнений с n неизвестными $x_1, \ldots, x_n$ имеет следующий вид

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}, \qquad (1)$$

где числа a_{ij} ($i = \overline{1, m}$; $j = \overline{1, n}$) – называются коэффициентами СЛАУ, а b_i – свободными членами СЛАУ, причем $(a_{ij}, b_i) \in R$. При этом индекс i обозначает номер уравнения, а индекс j – номер неизвестной.

Система алгебраических уравнений называется линейной, если все уравнения системы содержат неизвестные только в первой степени, причем они между собой не перемножаются.

СЛАУ называется квадратной, если в ней число уравнений равно числу неизвестных, то есть m = n.

СЛАУ называется однородной, если ***все*** ее свободные члены равны нулю, то есть $\forall b_i=0$ ($i = \overline{1, m}$).

СЛАУ называется неоднородной, если среди ее свободных членов хотя бы один не равен нулю, то есть $\exists b_i \neq 0$.

Решением СЛАУ называется такая совокупность значений неизвестных $x_1= C_1$, $x_2= C_2, \ldots, x_n= C_n$, которая ***каждое*** уравнение СЛАУ обращает в верное числовое равенство (тождество).

СЛАУ называется совместной, если она имеет хотя бы одно решение, и, соответственно, несовместной, если она вообще не имеет решений. Совместная СЛАУ называется определенной, если она имеет только одно решение, и неопределенной, если она имеет более одного решения. Неопределенная СЛАУ всегда имеет бесконечное множество решений. Тогда каждое ее решение называется частным решением СЛАУ, а множество всех частных решений называется общим решением СЛАУ.

Две СЛАУ называются эквивалентными, если они имеют одинаковые решения.

Элементарными (тождественными) преобразованиями СЛАУ называются:

1) перестановка уравнений,

2) умножение любого уравнения на число $\lambda \neq 0$,

3) прибавление одного уравнения к другому.

NB. При элементарных преобразованиях получаются эквивалентные СЛАУ.

СЛАУ (4.1) кратко записывается в виде матричного уравнения

$A \cdot X = B$,

где $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$ - матрица коэффициентов СЛАУ; $X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ - матрица-столбец неизвестных; $B=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$ - матрица-столбец свободных членов. Кроме того, СЛАУ (1) можно записать в виде суммы следующих матриц-столбцов:

$$\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} \cdot x_1 + \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix} \cdot x_2 + \ldots + \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix} \cdot x_n = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \qquad (2)$$

4.2. Матричный способ решения квадратной СЛАУ.

Для квадратной СЛАУ определитель матрицы коэффициентов (определитель матрицы А) называется главным определителем этой СЛАУ. Он обозначается одним из символов

Δ, $|A|$, $\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$

Если квадратная матрица А невырожденная, то ее определитель $\Delta \neq 0$ и, следовательно, $\exists A^{-1}$.

Если обе части матричного уравнения$A \cdot X = B$ умножить слева на обратную матрицу A^{-1}, то получится решение квадратной СЛАУ в матричной форме:

$$A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot B \Rightarrow E \cdot X = A^{-1} \cdot B \Rightarrow\Rightarrow X = A^{-1} \cdot B (3)$$

Таким образом, чтобы найти решение квадратной СЛАУ, надо матрицу A^{-1}, обратную матрице коэффициентов СЛАУ, умножить слева на матрицу-столбец свободных членов В.

Пример. Решить систему уравнений $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 = 3 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 2 \\ x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 9 \end{cases}$

Решение.

Это квадратная СЛАУ, где $A=\begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -2 \end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 9 \end{pmatrix}$; $X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$.

1) Находим обратную матрицу A^{-1} методом элементарных преобразований над строками:

$$(A|E) = \left\langle \begin{array}{ccc|ccc} 2 & 3 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right\rangle \begin{matrix} {}^{-2} \\ \\ {}_{-1} \end{matrix} \sim \left\langle \begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 3 & 1 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -3 & 0 & -1 & 1 \end{array} \right\rangle \sim \left\langle \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & -3 & 0 & -1 & 1 \end{array} \right\rangle_{-2} \sim$$

$$\sim \left\langle \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -9 & -2 & 3 & 1 \end{array} \right\rangle_{(-\frac{1}{9})} \sim \left\langle \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{2}{9} & -\frac{3}{9} & -\frac{1}{9} \end{array} \right\rangle \begin{matrix} {}^{-1} \\ {}^{-3} \\ \\ \end{matrix} \sim \quad \sim$$

$$\left\langle \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & -\frac{2}{9} & \frac{12}{9} & \frac{1}{9} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{3}{9} & -1 & \frac{3}{9} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{2}{9} & -\frac{3}{9} & -\frac{1}{9} \end{array} \right\rangle^{-1} \sim \left\langle \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{5}{9} & \frac{21}{9} & -\frac{2}{9} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{3}{9} & -1 & \frac{3}{9} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{2}{9} & -\frac{3}{9} & -\frac{1}{9} \end{array} \right\rangle \Rightarrow$$

$$A^{-1}=\begin{pmatrix} -\frac{5}{9} & \frac{21}{9} & -\frac{2}{9} \\ \frac{3}{9} & -\frac{9}{9} & \frac{3}{9} \\ \frac{2}{9} & -\frac{3}{9} & -\frac{1}{9} \end{pmatrix} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} -5 & 21 & -2 \\ 3 & -9 & 3 \\ 2 & -3 & -1 \end{pmatrix}$$

2)Проверка: $A^{-1}\cdot A = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} -5 & 21 & -2 \\ 3 & -9 & 3 \\ 2 & -3 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -2 \end{pmatrix} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E$

3) Решение СЛАУ находится по формуле (4.4):

$$X = A^{-1}\cdot B \Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} -5 & 21 & -2 \\ 3 & -9 & 3 \\ 2 & -3 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 9 \end{pmatrix} = \frac{1}{9} \cdot \begin{pmatrix} 9 \\ 18 \\ -9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \Rightarrow x_1 = 1,\ x_2 = 2,\ x_3 = -1.$$

4) Проверка. Подставляя значения $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = -1$ в исходную систему уравнений, получим

$2\cdot 1+3\cdot 2+5\cdot(-1)=3 \Leftrightarrow 3\equiv 3$

$1+2+(-1)=2 \Leftrightarrow 2\equiv 2$

$1+3\cdot 2-2\cdot(-1)=9 \Rightarrow 9\equiv 9.$

Ответ: $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = -1$

4.3. Формулы Крамера для решения квадратной СЛАУ.

Решение квадратной СЛАУ в матричной форме $X = A^{-1}\cdot B$ запишем в виде

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \frac{1}{\Delta}\cdot\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{A_{11}b_1 + A_{21}b_2 + \dots + A_{n1}b_n}{\Delta} \\ \dfrac{A_{12}b_1 + A_{22}b_2 + \dots + A_{n2}b_n}{\Delta} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dfrac{A_{1n}b_1 + A_{2n}b_2 + \dots + A_{nn}b_n}{\Delta} \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_1 = \frac{A_{11}b_1 + A_{21}b_2 + \dots + A_{n1}b_n}{\Delta},$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$x_n = \frac{A_{1n}b_1 + A_{2n}b_2 + \dots + A_{nn}b_n}{\Delta},$$

где $A_{11}b_1+A_{21}b_2+\dots+A_{n1}b_n$ есть разложение по первому столбцу определителя Δ_1:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_n & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Определитель Δ_1 называется первым побочным определителем квадратной СЛАУ, который получается из ее главного определителя Δ заменой 1-го столбца на столбец свободных членов. Следовательно, $x_1=\dfrac{\Delta_1}{\Delta}$. Аналогично находим, что $x_n=\dfrac{\Delta_n}{\Delta}$, где Δ_nесть n–ый побочный определитель квадратной СЛАУ, который получается из ее главного определителя Δ заменой n–го столбца на столбец свободных членов.

Таким образом, для квадратной СЛАУ значения неизвестных x_i находятся по формулам$x_i= \dfrac{\Delta_i}{\Delta}, (i = \overline{1, n})$, (4)

где Δ_i есть i–ый побочный определитель квадратной СЛАУ, который получается из ее главного определителя Δ заменой i–го столбца на столбец свободных членов.

Формулы (4.5) называются формулами Крамера.

Правило Крамера. Если главный определитель квадратной СЛАУ не равен нулю ($\Delta\neq0$), то такая СЛАУ имеет единственное решение в виде (4) (т.е. она является совместной и определенной).Если главный определитель квадратной СЛАУ равен нулю ($\Delta = 0$), то формулы Крамера в виде (4.5) применять нельзя, так как деление на нуль недопустимо. Тогда решение квадратной СЛАУ следует искать в виде

$$\Delta\cdot x_i= \Delta_i \qquad (5)$$

В этом случае, если хотя бы один из побочных определителей $\Delta_i \neq 0$ (при $\Delta = 0$), то такая СЛАУ решений не имеет (то есть она является несовместной), так как при $\forall x_i$ левая часть i–го уравнения (4.6) равна нулю, а правая – нет, то есть равенство (4.6) не выполняется ни при каких значениях x_i.

Если же $\Delta = \Delta_1 = \ldots = \Delta_n = 0$, то такая квадратная СЛАУ имеет бесконечное множество решений (то есть является совместной и неопределенной), так как равенства (4.6) выполняются при любых значениях x_i.

Пример. Решить СЛАУ $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0 \\ 2x_1 - x_2 + 4x_3 = 5 \\ 3x_1 + x_2 - x_3 = 2 \end{cases}$

Решение. Это квадратная СЛАУ. Ее главный определитель равен

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & -1 & 4 \\ 3 & 1 & -1 \end{vmatrix}_{\substack{-2 \\ -3}} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & -5 & 10 \\ 0 & -5 & 8 \end{vmatrix}_{-1} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & -5 & 10 \\ 0 & 0 & -2 \end{vmatrix} = 10 \neq 0$$

$\Rightarrow$ данная СЛАУ имеет единственное решение, определяемое формулами Крамера (4).

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & 2 & -3 \\ 5 & -1 & 4 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -4 & 2 & -1 \\ 7 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 1\cdot(-1)^5 \begin{vmatrix} -4 & -1 \\ 7 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 7 & 3 \end{vmatrix} = 12-7 = 5 \Rightarrow x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = 0{,}5.$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 2 & 5 & 4 \\ 3 & 2 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 10 \\ 3 & 2 & 8 \end{vmatrix} = 1\cdot(-1)^2\cdot \begin{vmatrix} 5 & 10 \\ 2 & 8 \end{vmatrix} = 5\cdot 2\cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 10\cdot(4-2) = 20 \Rightarrow x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = 2.$$

$$\begin{array}{l} -2 \\ \Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 5 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -5 & 5 \\ 3 & -5 & 2 \end{vmatrix} = 1\cdot(-1)^2\cdot(-5)\cdot \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -5\cdot(2-5) = 15 \Rightarrow x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = 1{,}5. \end{array}$$

Проверка.

$0{,}5+2\cdot 2-3\cdot 1{,}5=0 \Leftrightarrow 0\equiv 0$

$2\cdot 0{,}5-2+4\cdot 1{,}5=5 \Leftrightarrow 5\equiv 5$

$3\cdot 0{,}5+2-1{,}5=2 \Leftrightarrow 2\equiv 2$

Ответ: $x_1 = 0{,}5$; $x_2 = 2$; $x_3 = 1{,}5$.

Пример. Решить квадратную СЛАУ $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 1 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 4 \\ x_1 - x_2 + 4x_3 = 3 \end{cases}$

Решение: $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -3 & 2 & -5 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 5 \end{vmatrix} = 1\cdot(-1)^4\cdot \begin{vmatrix} -3 & -5 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = 0.$

$$\Delta_1=\begin{vmatrix}1 & 2 & -3\\ 4 & 1 & 1\\ 3 & -1 & 4\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}7 & 2 & -5\\ 0 & 1 & 0\\ 7 & -1 & 5\end{vmatrix}=1\cdot(-1)^4\cdot\begin{vmatrix}-7 & -5\\ 7 & 5\end{vmatrix}=0.$$

$$\Delta_2=\begin{vmatrix}1 & 1 & -3\\ 2 & 4 & 1\\ 1 & 3 & 4\end{vmatrix}_{\substack{-2\\-1}}=\begin{vmatrix}1 & 1 & -3\\ 0 & 2 & 7\\ 0 & 2 & 7\end{vmatrix}=1\cdot(-1)^2\begin{vmatrix}2 & 7\\ 2 & 7\end{vmatrix}=0.$$

$$\Delta_3=\begin{vmatrix}1 & 2 & 1\\ 2 & 1 & 4\\ 1 & -1 & 3\end{vmatrix}_{\substack{-2\\-1}}=\begin{vmatrix}1 & 2 & 1\\ 0 & -3 & 2\\ 0 & -3 & 2\end{vmatrix}=1\cdot(-1)^2\cdot\begin{vmatrix}-3 & 2\\ -3 & 2\end{vmatrix}=0.$$

Так как $\Delta = \Delta_1 = \Delta_2 = \Delta_3 = 0$, то данная СЛАУ является совместной и неопределенной. Это значит, что в СЛАУ из 3-х уравнений с 3-мя неизвестными, по меньшей мере, одно уравнение представляет собой линейную комбинацию двух других, и, следовательно, эта СЛАУ эквивалентна СЛАУ из 2-х уравнений с 3-мя неизвестными. Поэтому она является неопределенной. Для любой неопределенной СЛАУ, когда число неизвестных превышает ранг основной матрицы ($n>r(A)$), часть неизвестных называют базисными (главными), а остальные – свободными. Базисными неизвестными называются те, коэффициенты при которых образуют базисный минор. Поскольку базисных миноров может быть несколько, то и вариантов выбора базисных неизвестных также может быть несколько.

В данном примере за базисные неизвестные можно взять любую пару из неизвестных x_1, x_2, x_3, коэффициенты при которых образуют базисный минор. Пусть, например, это будет пара из x_1и x_2, так как коэффициенты при них образуют базисный минор в двух первых уравнениях СЛАУ: $\Delta'=\begin{vmatrix}1 & 2\\ 2 & 1\end{vmatrix}=$ -3. В данном случае он будет главным определителем новой СЛАУ. Поскольку в определитель Δ' вошли только коэффициенты первых двух уравнений, то в новую СЛАУ 3-е уравнение входить не будет, так как оно является линейной комбинацией первых двух уравнений.

Оставшаяся неизвестная x_3 будет свободной. Зафиксируем ее и чтобы отличить от базисных неизвестных переобозначим: пусть $x_3 = c_3$. Теперь в обоих уравнениях новой СЛАУ перенесем c_3 в правую часть к свободным членам:

$$\begin{cases}x_1+2x_2=1+3c_3\\ 2x_1+x_2=4-c_3\end{cases}$$

Решим новую СЛАУ по формулам Крамера (4).

Главный определитель $\Delta'=-3$; первый побочный определитель $\Delta'_1=\begin{vmatrix}1+3c_3 & 2\\ 4-c_3 & 1\end{vmatrix}$ $=1+3c_3-2(4-c_3)=5c_3-7 \Rightarrow x_1=\dfrac{\Delta'_1}{\Delta'}=\dfrac{7-5c_3}{3}$;

второй побочный определитель $\Delta_2' = \begin{vmatrix} 1 & 1+3c_3 \\ 2 & 4-c_3 \end{vmatrix}$ = 4–c_3–2(1+3c_3)=2–7$c_3$$\Rightarrow$

$\Rightarrow x_2 = \dfrac{\Delta_2'}{\Delta'} = \dfrac{7c_3-2}{3}$. Ответ: $x_1 = \dfrac{7-5c_3}{3}$; $x_2 = \dfrac{7c_3-2}{3}$; $x_3 = c_3$, где c_3 = const.

Общее решение неопределенной СЛАУ – это множество всех ее частных решений.

Частное решение СЛАУ, получаемое из его общего решения при нулевых значениях свободных неизвестных, называется базисным решением этой СЛАУ. Так, в последнем примере базисным решением СЛАУ будет: x_1= 7/3, x_2 = –2/3, x_3 = 0.

4.4. Исследование СЛАУ. Теорема Кронекера-Капелли.

Пусть дана прямоугольная СЛАУ (4.1) из m уравнений с n неизвестными. Этой СЛАУ соответствует краткая запись в виде расширенной матрицы, которая состоит из матрицы коэффициентов A и матрицы–столбца свободных членов B, разделенных вертикальной разделительной чертой, то есть в виде (A|B). В ней каждая строка соответствует алгебраическому уравнению исходной СЛАУ.

$$(A|B)=\left\langle \begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array} \right\rangle \qquad (6)$$

Теорема Кронекера-Капелли (критерий совместности СЛАУ).

СЛАУ совместна тогда и только тогда, когда ранг матрицы коэффициентов равен рангу расширенной матрицы r(A) = r(A|B).

Доказательство.

1) **Необходимость**. Пусть СЛАУ (4.1) совместна. Запишем ее в виде суммы матриц-столбцов (4.3):

$$\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} \cdot x_1 + \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix} \cdot x_2 + \dots + \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix} \cdot x_n = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

Это означает, что если существует решение x_1= C_1, …, x_n= C_n, то столбец свободных членов является линейной комбинацией столбцов матрицы коэффициентов СЛАУ. Следовательно, ранг матрицы коэффициентов равен рангу расширенной матрицы: r(A) = r(A|B).

2) **Достаточность**. Пусть r(A) = r(A|B). Это означает, что для данной СЛАУ любой базисный минор матрицы коэффициентов A остается базисным и для расширенной матрицы A|B. Тогда по теореме о базисном миноре, столбец свободных членов расширенной матрицы A|B можно представить в виде линейной комбинации базисных столбцов матрицы A, то есть

существуют числа $\lambda_i (i=\overline{1,n})$, не все равные нулю, при которых выполняется равенство

$$\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} \cdot \lambda_1 + \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix} \cdot \lambda_2 + \ldots + \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \lambda_n = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \Rightarrow \lambda_1 = x_1; \ldots; \lambda_n = x_n$$

Следовательно, значения коэффициентов λ_i этой линейной комбинации и есть решение СЛАУ (1), то есть СЛАУ (1) является совместной при $r(A) = r(A|B)$.

Следствие 1. Если ранги матрицы коэффициентов и расширенной матрицы СЛАУ равны числу неизвестных ($r(A) = r(A|B) = n$), то такая СЛАУ имеет единственное решение (то есть СЛАУ является совместной и определенной).

Следствие 2. Если ранги матрицы коэффициентов и расширенной матрицы СЛАУ равны друг другу и меньше числа неизвестных ($r(A) = r(A|B) < n$), то такая СЛАУ имеет бесконечное множество решений (то есть СЛАУ является совместной и неопределенной).

Следствие 3. Если ранг матрицы коэффициентов меньше ранга расширенной матрицы $r(A)<r(A|B)$, то такая СЛАУ решений не имеет (то есть СЛАУ является несовместной).

Пример. Исследовать СЛАУ на совместность $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 3 \\ x_1 + x_2 - 3x_3 = -1 \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 = 1 \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 1 \end{cases}$

Решение. Запишем расширенную матрицу СЛАУ и элементарными преобразованиями над строками приведем ее к ступенчатому виду

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & -3 & -1 \\ 2 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & -3 & 1 \end{array}\right) \begin{matrix} \\ -1 \\ -2 \\ -1 \end{matrix} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -4 & -4 \\ 0 & -1 & -4 & -5 \\ 0 & 1 & -4 & -2 \end{array}\right) \begin{matrix} \\ \\ \\ 1 \end{matrix} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -4 & -5 \\ 0 & 0 & -8 & -7 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 8 & 7 \end{array}\right) \begin{matrix} \\ \\ \\ -8 \end{matrix} \sim$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right) \Rightarrow r(A) = 3;\ r(A|B) = 4 \Rightarrow r(A) < r(A|B) \Rightarrow \text{СЛАУ не совместна.}$$

Действительно, последней строке ступенчатой расширенной матрицы СЛАУ соответствует уравнение, которое не имеет решений ни при каких значениях неизвестных x_1, x_2, x_3: $0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 = -1$.

4.5.Метод Гаусса исключения неизвестных.

В отличие от матричного метода и формул Крамера метод Гаусса является универсальным, так как применим для решения и исследования на совместность не только квадратных, но любых СЛАУ. Суть метода: СЛАУ кратко записывается в виде расширенной матрицы, которая с помощью элементарных преобразований *над строками* приводится к ступенчатому виду. Этот процесс называется прямым ходом метода Гаусса. Тогда каждой строке ступенчатой расширенной матрицы соответствует уравнение ступенчатой СЛАУ.

Ступенчатая СЛАУ несовместна, если она содержит уравнение вида $0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + \ldots + 0 \cdot x_n = C$, (где $C \neq 0$), соответствующее строке $\langle 0 \;\; 0 \;\; \ldots \;\; 0 | C \rangle$ расширенной матрицы, так как такому уравнению соответствует невыполнимое равенство $0 = C$. Полностью нулевые строки $\langle 0 \;\; 0 \;\; \ldots \;\; 0 | 0 \rangle$ расширенной матрицы вычеркиваются, так как они соответствуют тождеству $0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + \ldots + 0 \cdot x_n \equiv 0$, которое выполняется при любых значениях неизвестных $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Решение совместной СЛАУ ступенчатого вида находят так: из последнего уравнения СЛАУ находят значение неизвестной x_n и подставляют в вышестоящее уравнение, чтобы найти значение неизвестной x_{n-1}. Далее, используя значения этих двух неизвестных, поднимаются на ступеньку выше и находят значение неизвестной x_{n-2} и так далее. Последним находят значение неизвестной x_1 из 1-го уравнения ступенчатой СЛАУ. Описанный процесс называется обратным ходом метода Гаусса.

Пример. Исследовать СЛАУ на совместность и решить методом Гаусса.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 3 \\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 7 \\ 3x_1 + x_2 + x_3 = 5 \\ 5x_1 - x_2 - x_3 = 3 \end{cases}$$

Решение. Запишем расширенную матрицу СЛАУ и элементарными преобразованиями над строками приведем ее к ступенчатому виду.

$$\left\langle \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 2 & 7 \\ 3 & 1 & 1 & 5 \\ 5 & -1 & -1 & 3 \end{array} \right\rangle \sim \left\langle \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & -2 & -4 \\ 0 & -6 & -6 & -12 \end{array} \right\rangle \sim \left\langle \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{array} \right\rangle \sim \left\langle \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right\rangle \sim$$

$$\left\langle \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right\rangle \Rightarrow$$

Число неизвестных $n = 3 = r(A) = r(A|B)$, то есть ранги матрицы коэффициентов и расширенной матрицы СЛАУ равны числу неизвестных. Тогда по теореме Кронекера-Капеллиданная СЛАУ совместная и определенная. Полученная ступенчатая расширенная матрица СЛАУ соответствует ступенчатой СЛАУ

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 3 \\ \quad x_2 \qquad = 1 \\ \qquad\quad x_3 = 1 \end{cases} \left| \begin{matrix} x_1 = 1 \\ x_2 = 1 \\ x_3 = 1 \end{matrix} \right\}$$

Ответ: $x_1 = x_2 = x_3 = 1$.

Пример Исследовать СЛАУ на совместность и решить методом Гаусса.

$$\begin{cases} 2x_1 - 2x_2 + x_4 + 3 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 - 3x_4 + 6 = 0 \\ 3x_1 + 4x_2 - x_3 + 2x_4 = 0 \\ x_1 + 3x_2 + x_3 - x_4 - 2 = 0 \end{cases}$$

Решение. Запишем расширенную матрицу СЛАУ и элементарными преобразованиями над строками приведем ее к ступенчатому виду.

$$\left\langle \begin{array}{cccc|c} 2 & -2 & 0 & 1 & -3 \\ 2 & 3 & 1 & -3 & -6 \\ 3 & 4 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & -1 & 2 \end{array} \right\rangle \sim \left\langle \begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 0 & -1 & -3 \\ 2 & 3 & 1 & -3 & -6 \\ 3 & 4 & -1 & 2 & 0 \end{array} \right\rangle \begin{array}{c} \\ -2 \\ -2 \\ -3 \end{array} \sim \left\langle \begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & -8 & -2 & 3 & -7 \\ 0 & -3 & -1 & -1 & -10 \\ 0 & -5 & -4 & 5 & -6 \end{array} \right\rangle \begin{array}{c} \\ -1 \\ (-1) \\ \\ \end{array} \sim$$

$$\left\langle \begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & -3 & 2 & -2 & -1 \\ 0 & 3 & 1 & 1 & 10 \\ 0 & -5 & -4 & 5 & -6 \end{array} \right\rangle \begin{array}{c} \\ \\ \\ 1 \end{array} \sim \left\langle \begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & -3 & 2 & -2 & -1 \\ 0 & 3 & 1 & 1 & 10 \\ 0 & -2 & -3 & 6 & 4 \end{array} \right\rangle \begin{array}{c} \\ -1 \\ 1 \\ \\ \end{array} \left\langle \begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 5 & -8 & -5 \\ 0 & 1 & -2 & 7 & 14 \\ 0 & -2 & -3 & 6 & 4 \end{array} \right\rangle \begin{array}{c} \\ \\ 1 \\ -2 \end{array} \sim$$

$$\left\langle \begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 5 & -8 & -5 \\ 0 & 0 & 3 & -1 & 9 \\ 0 & 0 & -13 & 22 & 14 \end{array} \right\rangle \begin{array}{c} \\ \\ \\ 4 \end{array} \sim \left\langle \begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 5 & -8 & -5 \\ 0 & 0 & 3 & -1 & 9 \\ 0 & 0 & -1 & 18 & 50 \end{array} \right\rangle \begin{array}{c} \\ \\ 3 \\ \\ \end{array} \sim \left\langle \begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 5 & -8 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 53 & 159 \\ 0 & 0 & -1 & 18 & 50 \end{array} \right\rangle \sim$$

$$\left\langle \begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 5 & -8 & -5 \\ 0 & 0 & -1 & 18 & 50 \\ 0 & 0 & 0 & 53 & 159 \end{array} \right\rangle \begin{array}{c} \\ \\ \\ \frac{1}{53} \end{array} \sim \left\langle \begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 5 & -8 & -5 \\ 0 & 0 & -1 & 18 & 50 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{array} \right\rangle \Rightarrow$$

Число неизвестных n=4=r(A)=r(A|B), то есть ранги матрицы коэффициентов и расширенной матрицы СЛАУ равны числу неизвестных. Тогда по теореме Кронекера-Капеллиданная СЛАУ совместная и определенная. Полученная ступенчатая расширенная матрица СЛАУ соответствует ступенчатой СЛАУ $\begin{cases} x_1 + 3x_2 + x_3 - x_4 = 2 \\ -x_2 + 5x_3 - 8x_4 = -5 \\ -x_3 + 18x_4 = 50 \\ x_4 = 3 \end{cases} \left| \begin{matrix} x_1 = -2 \\ x_2 = 1 \\ x_3 = 4 \\ x_4 = 3 \end{matrix} \right\}$

Проверка:

2·(-2)–2·1+3+3=0 ⇔ 0≡0

2·(-2)+3·1+4–3·3+6=0 ⇔ 0≡0
3·(-2)+4·1–4+2·3=0 ⇔ 0≡0
–2+3·1+4–3–2=0 ⇔ 0≡0
Ответ: $x_1= -2$; $x_2 = 1$; $x_3 = 4$; $x_4 = 3$.

Пример Исследовать СЛАУ на совместность и решить методом Гаусса.

$$\begin{cases} x_1 + 5x_2 + 4x_3 + 3x_4 = 1 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = 0 \\ 5x_1 + 3x_2 + 8x_3 + x_4 = 1 \end{cases}$$

Решение. Запишем расширенную матрицу СЛАУ и элементарными преобразованиями над строками приведем ее к ступенчатому виду.

$$\left\langle\begin{array}{cccc|c} 1 & 5 & 4 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 5 & 3 & 8 & 1 & 1 \end{array}\right\rangle \begin{array}{c} \\ -2 \\ -5 \end{array} \sim \left\langle\begin{array}{cccc|c} 1 & 5 & 4 & 3 & 1 \\ 0 & -11 & -6 & -7 & -2 \\ 0 & -22 & -12 & -14 & -4 \end{array}\right\rangle \sim \left\langle\begin{array}{cccc|c} 1 & 5 & 4 & 3 & 1 \\ 0 & 11 & 6 & 7 & 2 \\ 0 & 11 & 6 & 7 & 2 \end{array}\right\rangle \begin{array}{c} \\ \\ -1 \end{array} \sim \sim$$

$$\left\langle\begin{array}{cccc|c} 1 & 5 & 4 & 3 & 1 \\ 0 & 11 & 6 & 7 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & & 0 \end{array}\right\rangle \Rightarrow$$ Число неизвестных n=4>2=r(A)=r(A|B). По теореме Кронекера-Капеллиданная СЛАУ совместная и неопределенная. Полученная ступенчатая расширенная матрица СЛАУ соответствует ступенчатой СЛАУ

$$\begin{cases} x_1 + 5x_2 + 4x_3 + 3x_4 = 1 \\ \quad 11x_2 + 6x_3 + 7x_4 = 2 \end{cases}$$

В данной ступенчатой СЛАУ число неизвестных больше числа уравнений. Поэтому она является неопределенной. Для любой неопределенной СЛАУ, когда число неизвестных превышает ранг матрицы коэффициентов (n>r(A)), часть неизвестных называют базисными (главными), а остальные – свободными неизвестными. Число базисных неизвестных равно рангу матрицы коэффициентов. В качестве базисных неизвестных берут те, коэффициенты при которых образуют базисный минор. Поскольку базисных миноров может быть несколько, то и вариантов выбора базисных неизвестных может быть несколько.

В данном примере за базисные неизвестные можно взять любую пару из неизвестных x_1, x_2, x_3, x_4, коэффициенты при которых образуют базисный минор. Пусть, например, это будет пара x_1, x_2, так как коэффициенты при этих неизвестных образуют базисный минор $M_2 = \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 0 & 11 \end{vmatrix} = 11 \neq 0$, который берется из ступенчатой СЛАУ. Следовательно, остальные неизвестные x_3, x_4 являются свободными. Зафиксируем их и, чтобы отличить от базисных неизвестных, переобозначим: $x_3 = c_3$, $x_4 = c_4$. Затем перенесем их в правую часть соответствующих уравнений и выразим через них базисные неизвестные x_1и x_2:

$$\begin{cases} x_1 + 5x_2 = 1 - 4c_3 - 3c_4 \\ 11x_2 = 2 - 6c_3 - 7c_4 \end{cases} \left| \begin{array}{l} x_2 = \dfrac{1}{11}(2 - 6c_3 - 7c_4) \\ x_1 = 1 - 4c_3 - 3c_4 - \dfrac{5}{11}(2 - 6c_3 - 7c_4) = \dfrac{1}{11}(1 - 14c_3 + 2c_4) \end{array} \right.$$

Ответ: $x_1 = 1/11\cdot(1-14c_3+2c_4)$; $x_2 = 1/11\cdot(2-6c_3-7c_4)$; $x_3 = c_3$; $x_4 = c_4$, где c_3, c_4 –const.

4.6.Однородная СЛАУ.

В однородной СЛАУ столбец свободных членов равен нулю. Эта СЛАУ имеет вид

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases} \qquad (7)$$

В однородной СЛАУ нулевой столбец не меняется при элементарных преобразованиях над строками расширенной матрицы. Поэтому в ней ранг матрицы коэффициентов всегда равен рангу расширенной матрицы: $r(A) = r(A|B)$. Тогда, по теореме Кронекера-Капелли любая однородная СЛАУ всегда совместна и, согласно ее виду (4.8), всегда имеет нулевое (тривиальное) решение: $x_1 = \ldots = x_n = 0$. Если при этом ранг матрицы коэффициентов равен числу неизвестных ($r(A) = n$), то для однородной СЛАУ нулевое решение является единственно возможным.

Теорема. Для того, чтобы однородная СЛАУ имела *ненулевые* решения, необходимо и достаточно, чтобы ранг ее матрицы коэффициентов был меньше числа неизвестных ($r(A) < n$).

Доказательство.

1) Необходимость. Предположим обратное, то есть, что $r(A) = n$, где n – число неизвестных. Тогда порядок базисного минора M_n будет равен n, так как $r(M_n) = r(A) = n$. Следовательно, по формулам Крамера однородная СЛАУ будет иметь единственное решение – нулевое: $x_i = \dfrac{\Delta_i}{\Delta} = 0$, где $\Delta_i = 0$, а $\Delta \neq 0$. Таким образом, при r(A) = nоднородная СЛАУ ненулевых решений не имеет.

2) Достаточность. Пусть $r(A) < n$, тогда по следствию 2 теоремы Кронекера-Капелли однородная СЛАУ будет совместной и неопределенной, то есть она будет иметь бесконечное множество решений, в том числе и ненулевых.

Теорема. Для того, чтобы квадратная однородная СЛАУ имела ненулевые решения, необходимо и достаточно, чтобы ее главный определитель равнялся нулю ($\Delta = 0$).

Доказательство.

1) Необходимость. По вышеприведенной теореме, если однородная СЛАУ имеет ненулевые решения, то ранг ее матрицы коэффициентов должен быть меньше числа неизвестных ($r(A) < n$). Следовательно, главный определитель квадратной однородной СЛАУ должен быть равен нулю (Δ = 0).

2) Достаточность. Если главный определитель квадратной однородной СЛАУ равен нулю ($\Delta = 0$), то ранг ее матрицы коэффициентов будет меньше числа неизвестных ($r(A) < n$). Поэтому такая СЛАУ имеет бесконечное множество ненулевых решений.

Пример. Найти ненулевые решения однородной СЛАУ.

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 4x_3 + 5x_4 = 0 \\ 3x_1 - x_2 - 3x_3 + 5x_4 = 0 \\ x_1 + 3x_2 - 11x_3 - 5x_4 = 0 \end{cases}$$

Решение. Запишем расширенную матрицу СЛАУ и элементарными преобразованиями над строками приведем ее к ступенчатому виду.

$$\left\langle \begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 4 & 5 & 0 \\ 3 & -1 & -3 & 5 & 0 \\ 1 & 3 & -11 & -5 & 0 \end{array} \right\rangle \begin{array}{c} \\ {\scriptstyle -3} \\ {\scriptstyle -1} \end{array} \sim \left\langle \begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 4 & 5 & 0 \\ 0 & 5 & -15 & -10 & 0 \\ 0 & 5 & -15 & -10 & 0 \end{array} \right\rangle \begin{array}{c} \\ \\ {\scriptstyle -1} \end{array} \sim \left\langle \begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 4 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right\rangle = B$$

Число неизвестных $n = 4 > 2 = r(A) = r(A_B)$, тогда по теореме 1 однородная СЛАУ помимо нулевого решения имеет и ненулевые решения. Найдем их. Полученной ступенчатой расширенной матрице B соответствует ступенчатая СЛАУ $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 4x_3 + 5x_4 = 0 \\ \quad x_2 - 3x_3 - 2x_4 = 0 \end{cases}$

Чтобы решить ее, в качестве базисных можно взять неизвестные x_1 и x_2, так как коэффициенты при них образуют один из базисных миноров $M_2 = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$. Следовательно, остальные неизвестные – свободные.

Переобозначим их: $x_3 = c_3$, $x_4 = c_4$ и перенесем в правую часть соответствующих уравнений.

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 = -4c_3 - 5c_4 \\ \quad x_2 = 3c_3 + 2c_4 \end{cases} \left| \begin{array}{l} x_2 = 3c_3 + 2c_4 \\ x_1 = -4c_3 - 5c_4 + 2x_2 = -4c_3 - 5c_4 + 6c_3 + 4c_4 = 2c_3 - c_4 \end{array} \right.$$

Ответ: $x_1 = 2c_3 - c_4$; $x_2 = 3c_3 + 2c_4$; $x_3 = c_3$; $x_4 = c_4$, где c_3, c_4 – const.

Типовые расчеты(ТР)
по теме: «Линейная алгебра».

1) Пользуясь свойствами определителей, доказать тождество.
2) Вычислить A^T; $A \cdot A^T$ и $|A|$.
3) Решить квадратную СЛАУ:
а) с помощью обратной матрицы;
б) по формулам Крамера.
4) Выполнить действия над матрицами.
5) Найти значения λ, для которых существует обратная матрица A^{-1}.
6) Найти ранг $r(A)$ матрицы А.
7(а, б) Исследовать СЛАУ на совместность и решить методом Гаусса.
8) Найти ненулевые решения однородной СЛАУ.

Вариант 1.

1) $\begin{vmatrix} \sin 2\alpha & a & \sin\alpha\cos\alpha \\ \sin 2\beta & b & \sin\beta\cos\beta \\ \sin 2\gamma & c & \sin\gamma\cos\gamma \end{vmatrix} = 0$

2) $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & -3 & 8 \\ 1 & 3 & -4 & 5 \\ 5 & 1 & -2 & 7 \end{pmatrix}$

3) $\begin{cases} -x-2y+3z=4 \\ 3x-4y-2z=5 \\ -2x-3y+z=2 \end{cases}$

4) $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & -3 & 2 \end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$; $A^2 - B^{-1}\cdot A=?$

5) $A=\begin{pmatrix} 2 & (1-\lambda) & 3 \\ -\lambda & 1 & (\lambda-3) \\ 3 & 2 & 5 \end{pmatrix}$

6) $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \\ 4 & 0 & 3 \\ 5 & 0 & 2 \end{pmatrix}$; $r(A)=?$

7(а) $\begin{cases} 2x_1+3x_2+3x_3+x_4=1 \\ 3x_1-4x_2+5x_3+6x_4=6 \\ 5x_1+8x_2-3x_3-7x_4=1 \\ 7x_1-2x_2-4x_3+3x_4=2 \end{cases}$

7(б) $\begin{cases} 6x_1+2x_2-3x_3-3x_4=-2 \\ 4x_1+3x_2-2x_3-5x_4=-1 \\ 3x_1+x_2+x_3+3x_4=1 \\ 2x_1-x_2-x_3+2x_4=-1 \end{cases}$

8) $\begin{cases} x_1+3x_2-7x_3-12x_4=0 \\ 2x_1+6x_2-3x_3-8x_4=0 \\ 3x_1+9x_2+x_3-4x_4=0 \end{cases}$

Вариант 2.

1) $\begin{vmatrix} 2+3a & 2 & a \\ 2+3b & 4 & b \\ 2+3c & 6 & c \end{vmatrix} = 4\cdot\begin{vmatrix} 1 & 1 & a \\ 1 & 2 & b \\ 1 & 3 & c \end{vmatrix}$

2) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & -1 \\ 3 & 1 & -3 & 2 \\ -1 & 5 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

3) $\begin{cases} x-4y-2z=1 \\ 3x+y+5z=1 \\ -2x+3y+3z=2 \end{cases}$

4) $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & -3 & 2 \end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$; $(A \cdot B)^{-1} + B \cdot A^{-1}=?$

5) $A=\begin{pmatrix} (\lambda-2) & 2 & (\lambda+2) \\ (2-\lambda) & -2 & 2 \\ (\lambda-2) & 1 & 1 \end{pmatrix}$

6) $A=\begin{pmatrix} 0 & 2 & -4 \\ -1 & -4 & 5 \\ 3 & 1 & 7 \\ 0 & 3 & -6 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$; $r(A)=?$

7(а) $\begin{cases} 3x_1+4x_2-5x_3-3x_4=-1 \\ 5x_1-2x_2+x_3-7x_4=1 \\ -2x_1+3x_2-4x_3+2x_4=-1 \\ 2x_1-6x_2+3x_3-7x_4=2 \end{cases}$

7(б) $\begin{cases} x_1-5x_2+6x_3+5x_4=-2 \\ 3x_1+4x_2-2x_3-x_4=1 \\ 3x_1-2x_2+4x_3+4x_4=-1 \\ 2x_1+3x_2-2x_3-x_4=1 \end{cases}$

8) $\begin{cases} x_1-8x_2+6x_3-2x_4=0 \\ 2x_1+3x_2-4x_3-2x_4=0 \\ 3x_1-5x_2+2x_3-4x_4=0 \end{cases}$

Вариант 3.

1) $\begin{vmatrix} 2a+\sin\alpha & a & \sin\alpha \\ 2b+\sin\beta & b & \sin\beta \\ 2c+\sin\gamma & c & \sin\gamma \end{vmatrix} = 0$

2) $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 5 \\ 2 & 1 & 1 & -1 \\ 2 & -3 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & -4 & 2 \end{pmatrix}$

3) $\begin{cases} 2x-3y-3z=1 \\ 3x+4y+2z=-1 \\ x-2y-2z=1 \end{cases}$

4) A=$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & -3 & 2 \end{pmatrix}$; B=$\begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$; $A\cdot B^{-1} + 2B\cdot A$=?

5) A=$\begin{pmatrix} (\lambda-2) & 1 & 1 \\ 1 & (\lambda-2) & 0 \\ 1 & 0 & (\lambda-2) \end{pmatrix}$

6) A=$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 3 & 5 \\ 4 & -2 & -3 & 2 & -3 \\ -2 & 3 & 4 & 1 & 8 \end{pmatrix}$; r(A)=?

7(а) $\begin{cases} -3x_1+4x_2-2x_3+3x_4=-2 \\ 2x_1-3x_2+4x_3-2x_4=-1 \\ 4x_1-5x_2-2x_3-7x_4=4 \\ 5x_1+3x_2+x_3+x_4=2 \end{cases}$

7(б) $\begin{cases} x_1+5x_2+6x_3-4x_4=2 \\ 2x_1-3x_2-2x_3+3x_4=-1 \\ 3x_1+2x_2+4x_3-x_4=1 \\ 3x_1-3x_2+x_3+3x_4=1 \end{cases}$

8) $\begin{cases} x_1-8x_2+10x_3-3x_4=0 \\ 2x_1-3x_2+4x_3-2x_4=0 \\ 3x_1+2x_2-2x_3-x_4=0 \end{cases}$

Вариант 4.

1) $\begin{vmatrix} 2 & \cos^2\alpha & a \\ 2 & \cos^2\beta & b \\ 2 & \cos^2\gamma & c \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} \sin^2\alpha & \cos^2\alpha & a \\ \sin^2\beta & \cos^2\beta & b \\ \sin^2\gamma & \cos^2\gamma & c \end{vmatrix}$

2) A = $\begin{pmatrix} 2 & -2 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & -1 & -1 \\ 3 & -3 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & -4 & 5 \end{pmatrix}$

3) $\begin{cases} 3x-2y-2z=1 \\ 4x+3y+2z=5 \\ x+4y+3z=3 \end{cases}$

4) A=$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & -3 & 2 \end{pmatrix}$; B=$\begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$; $A^{-1}\cdot B - A\cdot B^{-1}$=?

5) A=$\begin{pmatrix} 1 & \lambda & \lambda \\ -1 & \lambda & 5 \\ 1 & (\lambda+1) & 2 \end{pmatrix}$

6) A= $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 5 & 6 \\ 1 & 1 & -3 & 5 \\ 1 & -3 & 1 & 5 \end{pmatrix}$; r(A)=?

7(а) $\begin{cases} 3x_1 - 4x_2 - 5x_3 + 3x_4 = -1 \\ 4x_1 - 3x_2 - x_3 + 3x_4 = 1 \\ -2x_1 - 5x_2 + x_3 - 6x_4 = 2 \\ 2x_1 - x_2 - 3x_3 + 3x_4 = -1 \end{cases}$

7(б) $\begin{cases} x_1 + 5x_2 - 6x_3 + 4x_4 = -2 \\ 3x_1 - 2x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 1 \\ 3x_1 + 2x_2 - 4x_3 + x_4 = -1 \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 1 \end{cases}$

8) $\begin{cases} x_1 - 8x_2 - 6x_3 - 2x_4 = 0 \\ 2x_1 - 3x_2 - 4x_3 + 2x_4 = 0 \\ 3x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 6x_4 = 0 \end{cases}$

Вариант 5.

1) $\begin{vmatrix} 2\sin^2\alpha & 2\cos^2\alpha & \cos 2\alpha \\ 2\sin^2\beta & 2\cos^2\beta & \cos 2\beta \\ 2\sin^2\gamma & 2\cos^2\gamma & \cos 2\gamma \end{vmatrix} = 0$

2) A = $\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & 3 \\ -3 & -1 & 0 & 4 \\ 3 & -1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

3) $\begin{cases} 3x - 2y - 3z = 1 \\ x + 2y - 3z = 1 \\ 2x - y - z = 2 \end{cases}$

4) A=$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & -3 & 2 \end{pmatrix}$; B=$\begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$; $A^2 - B^{-1} \cdot A$=?

5) A=$\begin{pmatrix} 1 & (\lambda-5) & 3 \\ 1 & \lambda & 1 \\ \lambda & 1 & \lambda \end{pmatrix}$

6) A=$\begin{pmatrix} 0 & 2 & -2 & 6 \\ 2 & 3 & -4 & 9 \\ -4 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$; r(A)=?

7(а) $\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 - 4x_4 = -1 \\ 2x_1 - 3x_2 - 2x_3 + 4x_4 = 1 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 + 5x_4 = 1 \\ 3x_1 - x_2 - 2x_3 + x_4 = -1 \end{cases}$

7(б) $\begin{cases} 2x_1 - 5x_2 - 8x_3 + 8x_4 = 1 \\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 - 4x_4 = -1 \\ 2x_1 - x_2 - 3x_3 + 2x_4 = -1 \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 = 1 \end{cases}$

8) $\begin{cases} x_1 - 8x_2 - x_3 + 5x_4 = 0 \\ 2x_1 - 3x_2 - 2x_3 + 2x_4 = 0 \\ 3x_1 + 2x_2 - 3x_3 - x_4 = 0 \end{cases}$

Вариант 6.

1) $\begin{vmatrix} 0 & -c & -b \\ c & 0 & -a \\ b & a & 0 \end{vmatrix} = 0$

2) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 3 \\ 2 & 0 & 3 & 3 \\ 3 & 4 & 1 & -2 \\ 3 & 2 & -2 & 2 \end{pmatrix}$

3) $\begin{cases} 2x + 2y + 3z = 1 \\ 2x - y - 3z = 1 \\ x + 2y + 4z = 1 \end{cases}$

4) $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & -3 & 2 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$; $A^2 - B \cdot A^{-1} = ?$

5) $A = \begin{pmatrix} (\lambda - 2) & 1 & 2 \\ 3 & \lambda & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

6) $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -2 & 1 \\ 2 & 9 & 5 & 2 & 3 \\ 2 & 7 & 7 & 6 & 1 \end{pmatrix}$; $r(A) = ?$

7(а) $\begin{cases} 3x_1 + 5x_2 - 6x_3 - 7x_4 = 3 \\ -4x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 5x_4 = 4 \\ 2x_1 - 4x_2 + x_3 - 4x_4 = -1 \\ 2x_1 + 2x_2 + 5x_3 + 6x_4 = -1 \end{cases}$

7(б) $\begin{cases} 2x_1 - 9x_2 + 8x_3 - 9x_4 = 1 \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 1 \\ 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 + 3x_4 = 1 \\ 3x_1 - 4x_2 + 2x_3 - 2x_4 = -1 \end{cases}$

8) $\begin{cases} x_1 - 3x_2 + 4x_3 + x_4 = 0 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0 \\ 3x_1 + x_2 - 2x_3 - 3x_4 = 0 \end{cases}$

Вариант 7.

1) $\begin{vmatrix} a & \sin^2\alpha & 2\cos 2\alpha \\ b & \sin^2\beta & 2\cos 2\beta \\ c & \sin^2\gamma & 2\cos 2\gamma \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} a & \sin^2\alpha & \cos^2\alpha \\ b & \sin^2\beta & \cos^2\beta \\ c & \sin^2\gamma & \cos^2\gamma \end{vmatrix}$

2) $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 & 3 \\ -2 & 1 & -3 & 3 \\ 3 & -4 & 2 & 1 \\ 4 & -1 & 0 & -3 \end{pmatrix}$

3) $\begin{cases} 2x - 2y - z = 1 \\ x + y + 2z = -1 \\ 3x - 2y - 2z = -1 \end{cases}$

4) $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & -3 & 2 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$; $A \cdot B^{-1} + B \cdot A = ?$

5) $A = \begin{pmatrix} \lambda & -2 & 2 \\ \lambda & 3 & \lambda \\ 2 & 1 & (1-\lambda) \end{pmatrix}$

6) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 3 & 2 & -3 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; $r(A) = ?$

7(а) $\begin{cases} 3x_1 + x_2 - 2x_3 - 4x_4 = 1 \\ 2x_1 + 3x_2 - 3x_3 + 2x_4 = -1 \\ 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 - 3x_4 = -1 \\ 3x_1 - 2x_2 + 5x_3 - x_4 = -1 \end{cases}$

7(б) $\begin{cases} 2x_1 - 7x_2 + 5x_3 - 6x_4 = 3 \\ 3x_1 - 2x_2 + 2x_3 - 2x_4 = 1 \\ 4x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_4 = -1 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4 = 1 \end{cases}$

8) $\begin{cases} x_1 + 5x_2 - 4x_3 + 2x_4 = 0 \\ 2x_1 + 4x_2 - 3x_3 + 2x_4 = 0 \\ 3x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 2x_4 = 0 \end{cases}$

Вариант 8.

1) $\begin{vmatrix} 2(1+a) & a & d \\ 2(1+b) & b & d \\ 2(1+c) & c & d \end{vmatrix} = 0$

2) $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & -1 & 3 \\ 3 & 1 & -2 & 2 \\ 3 & -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

3) $\begin{cases} 2x - 3y + 2z = 2 \\ 3x + 2y - 2z = 1 \\ x + 3y - 2z = 1 \end{cases}$

4) $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & -3 & 2 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$; $B \cdot A^{-1} - A \cdot B^{-1} = ?$

5) $A = \begin{pmatrix} 1 & \lambda & -1 \\ 2 & (\lambda - 2) & (3 - \lambda) \\ 1 & \lambda & 4 \end{pmatrix}$

6) $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -4 \\ -1 & 2 & 3 \\ 4 & 4 & -8 \\ 3 & 6 & -5 \end{pmatrix}$; $r(A) = ?$

7(а) $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 - 3x_3 + 2x_4 = 1 \\ 3x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 3x_4 = 1 \\ 5x_1 - 3x_2 - x_3 - x_4 = -1 \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 - 4x_4 = -1 \end{cases}$

7(б) $\begin{cases} 2x_1 + 9x_2 - 6x_3 - 5x_4 = 3 \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 + 3x_4 = -1 \\ 2x_1 + 3x_2 - 2x_3 - x_4 = 1 \\ 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 + 4x_4 = -1 \end{cases}$

8) $\begin{cases} x_1 - 4x_2 - 7x_3 + x_4 = 0 \\ 2x_1 - 3x_2 - 3x_3 + 2x_4 = 0 \\ 3x_1 - 2x_2 + x_3 + 3x_4 = 0 \end{cases}$

Вариант 9.

1) $\begin{vmatrix} a & d & a+\lambda d \\ b & d & b+\lambda d \\ c & d & c+\lambda d \end{vmatrix} = 0$

2) $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & -3 \\ 3 & -4 & 3 & 3 \\ 3 & 2 & 6 & -2 \end{pmatrix}$

3) $\begin{cases} 2x+3y-2z=1 \\ 3x-y-2z=-1 \\ x+2y-z=1 \end{cases}$

4) A=$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & -3 & 2 \end{pmatrix}$; B=$\begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$; $2(A\cdot B)^{-1}-A\cdot B = ?$

5) A=$\begin{pmatrix} \lambda & 2 & 2 \\ 2 & \lambda & 1 \\ 1 & -\lambda & 1 \end{pmatrix}$

6) A=$\begin{pmatrix} -1 & 3 & 2 & 2 & 5 \\ 2 & 1 & -4 & 3 & -3 \\ -2 & -6 & 4 & -8 & -2 \end{pmatrix}$; r(A)=?

7(а) $\begin{cases} 2x_1+3x_2+x_3+2x_4=1 \\ 3x_1-2x_2+2x_3-2x_4=1 \\ 5x_1-4x_2+3x_3-2x_4=-1 \\ 4x_1+3x_2-x_3-2x_4=-1 \end{cases}$

7(б) $\begin{cases} 2x_1+9x_2-10x_3+7x_4=-1 \\ 2x_1+3x_2-3x_3+2x_4=-1 \\ 2x_1-3x_2+4x_3-3x_4=-1 \\ 3x_1+x_2-2x_3-4x_4=1 \end{cases}$

8) $\begin{cases} x_1+6x_2-4x_3-4x_4=0 \\ 2x_1+2x_2-x_3-3x_4=0 \\ 3x_1-2x_2+2x_3-2x_4=0 \end{cases}$

Вариант 10.

1) $\begin{vmatrix} a+\lambda & a & 1 \\ b+2\lambda & b & 2 \\ c+3\lambda & c & 3 \end{vmatrix} = 0$

2) $A = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & -2 & 0 & 3 \\ 2 & 3 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$

3) $\begin{cases} 3x - 2y + 3z = 2 \\ x + 3y - 2z = -1 \\ 2x - y + z = -1 \end{cases}$

4) $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & -3 & 2 \end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$; $2B^{-1}\cdot A + B\cdot A=?$

5) $A=\begin{pmatrix} (1-\lambda) & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & (1+\lambda) \end{pmatrix}$

6) $A=\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 2 & 1 \\ -2 & 5 & 4 & 7 & 9 \\ 2 & -3 & -4 & -5 & -7 \\ -1 & 2 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$; $r(A)=?$

7(а) $\begin{cases} 3x_1 - 4x_2 + 2x_3 - 2x_4 = -1 \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 1 \\ 3x_1 + x_2 - 3x_3 + x_4 = 1 \\ 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 + 3x_4 = 1 \end{cases}$

7(б) $\begin{cases} x_1 + 9x_2 - 7x_3 - 3x_4 = 3 \\ 2x_1 - 4x_2 + x_3 - 4x_4 = -1 \\ 3x_1 + 5x_2 - 6x_3 - 7x_4 = 3 \\ 2x_1 + 2x_2 + 5x_3 + 6x_4 = -1 \end{cases}$

8) $\begin{cases} x_1 + x_2 + 5x_3 + 5x_4 = 0 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 0 \\ 3x_1 - 3x_2 + x_3 - x_4 = 0 \end{cases}$

Вариант 11.

1) $\begin{vmatrix} 2+\cos 2\alpha & \cos^2\alpha & 1 \\ 2+\cos 2\beta & \cos^2\beta & 1 \\ 2+\cos 2\gamma & \cos^2\gamma & 1 \end{vmatrix}=0$

2) $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 & 2 \\ -1 & 4 & -2 & 1 \\ 3 & 2 & 3 & 3 \\ 0 & -1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$

3) $\begin{cases} 3x+2y+2z=1 \\ x-3y-2z=1 \\ 2x+4y+3z=1 \end{cases}$

4) A=$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & -3 & 2 \end{pmatrix}$; B=$\begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$; $2(B\cdot A)^{-1}+B\cdot A$=?

5) A=$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \lambda \\ 3 & 1 & 2\lambda \\ \lambda & 3 & 1 \end{pmatrix}$

6) A=$\begin{pmatrix} -1 & 5 & 2 & 6 & 3 \\ 3 & 2 & -6 & -1 & 8 \\ 4 & 1 & -8 & -3 & 9 \end{pmatrix}$; r(A)=?

7(а) $\begin{cases} 2x_1+3x_2+2x_3-4x_4=-1 \\ 3x_1-3x_2-2x_3-x_4=1 \\ 3x_1+2x_2-x_3+2x_4=1 \\ 2x_1-x_2-3x_3+2x_4=-1 \end{cases}$

7(б) $\begin{cases} 2x_1-7x_2-7x_3+3x_4=1 \\ 2x_1-3x_2-2x_3+4x_4=1 \\ 2x_1+x_2+3x_3+5x_4=1 \\ 3x_1+4x_2-2x_3-4x_4=-1 \end{cases}$

8) $\begin{cases} x_1-5x_2-3x_3+3x_4=0 \\ 2x_1-x_2-2x_3+2x_4=0 \\ 3x_1+3x_2-x_3+x_4=0 \end{cases}$

Вариант 12.

1) $\begin{vmatrix} 2+\cos 2\alpha & \sin^2\alpha & 3 \\ 2+\cos 2\beta & \sin^2\beta & 3 \\ 2+\cos 2\gamma & \sin^2\gamma & 3 \end{vmatrix}=0$

2) $A=\begin{pmatrix} 2 & 3 & -3 & 4 \\ 3 & 1 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 0 & -3 \end{pmatrix}$

3) $\begin{cases} 3x+4y-3z=-2 \\ x+3y+z=-1 \\ 2x+2y-3z=-1 \end{cases}$

4) A=$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & -3 & 2 \end{pmatrix}$; B=$\begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$; $A\cdot B^{-1}+2(B\cdot A)^{-1}$=?

5) A=$\begin{pmatrix} 3 & \lambda & 4 \\ 2 & -\lambda & 3 \\ (\lambda-1) & 1 & 1 \end{pmatrix}$

6) A= $\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 2 & 5 \\ -2 & 2 & 4 & 4 & -2 \\ 2 & -4 & -4 & -6 & -8 \\ -1 & 5 & 2 & 6 & 3 \end{pmatrix}$; r(A)=?

7(а) $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 + 2x_4 = -1 \\ 3x_1 - 2x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 1 \\ 3x_1 + 2x_2 - 4x_3 + x_4 = -1 \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 1 \end{cases}$

7(б) $\begin{cases} x_1 - 9x_2 - 4x_3 - 3x_4 = 1 \\ -2x_1 - 5x_2 + x_3 - 6x_4 = 2 \\ 4x_1 - 3x_2 - x_3 + 3x_4 = 1 \\ 3x_1 - 4x_2 - 5x_3 + 3x_4 = -1 \end{cases}$

8) $\begin{cases} x_1 + 5x_2 + 9x_3 - 4x_4 = 0 \\ 2x_1 + x_2 + 4x_3 - 3x_4 = 0 \\ 3x_1 - 3x_2 - x_3 - 2x_4 = 0 \end{cases}$

Вариант 13.

1) $\begin{vmatrix} \cos 2\alpha & \cos^2\alpha & \sin^2\alpha \\ \cos 2\beta & \cos^2\beta & \sin^2\beta \\ \cos 2\gamma & \cos^2\gamma & \sin^2\gamma \end{vmatrix} = 0$

2) A = $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 4 \\ 2 & 3 & 3 & 2 \\ 3 & -1 & 7 & 3 \\ 2 & 2 & 5 & 6 \end{pmatrix}$

3) $\begin{cases} 2x - 3y + 3z = -1 \\ 3x - y + 4z = 1 \\ x + 3y - z = -1 \end{cases}$

4) A=$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & -3 & 2 \end{pmatrix}$; B=$\begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$; $B^{-1}\cdot A + B\cdot A^{-1}$=?

5) A=$\begin{pmatrix} (\lambda-1) & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ \lambda & 1 & (\lambda-1) \end{pmatrix}$

6) A= $\begin{pmatrix} -1 & 5 & 3 & 6 & 2 \\ 1 & 3 & -3 & 2 & 6 \\ 3 & 0 & -9 & -3 & 9 \\ 2 & 2 & -6 & 0 & 8 \end{pmatrix}$; r(A)=?

7(а) $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 - 2x_3 + 3x_4 = -1 \\ 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 - x_4 = 1 \\ 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 + x_4 = -1 \\ 3x_1 - 3x_2 + x_3 + 3x_4 = 1 \end{cases}$

7(б) $\begin{cases} 2x_1 - 2x_2 - 6x_3 - 5x_4 = 5 \\ 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 - 2x_4 = -1 \\ 4x_1 - 5x_2 - 2x_3 - 7x_4 = 4 \\ 5x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 = 2 \end{cases}$

8) $\begin{cases} x_1 - 4x_2 + 6x_3 + x_4 = 0 \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 0 \\ 3x_1 - 2x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 0 \end{cases}$

Вариант 14.

1) $\begin{vmatrix} 2+\cos 2\alpha & \sin^2\alpha & \cos^2\alpha \\ 2+\cos 2\beta & \sin^2\beta & \cos^2\beta \\ 2+\cos 2\gamma & \sin^2\gamma & \cos^2\gamma \end{vmatrix}$ =0

2) A = $\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & 2 \\ -3 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 3 & -5 \\ 2 & 4 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

3) $\begin{cases} 3x + y + 3z = -1 \\ x - 3y + 3z = -1 \\ 2x - y + 2z = 1 \end{cases}$

4) A= $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & -3 & 2 \end{pmatrix}$; B= $\begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$; $B \cdot A^{-1} + B \cdot A$=?

5) A= $\begin{pmatrix} 1 & (2-\lambda) & 2 \\ 2 & \lambda & 1 \\ (2-\lambda) & 1 & 2 \end{pmatrix}$

6) A= $\begin{pmatrix} -1 & 5 & 2 & 6 & 3 \\ 2 & 3 & -4 & 1 & 7 \\ 3 & -3 & -6 & -6 & 3 \\ -3 & -2 & 6 & 1 & -8 \end{pmatrix}$; r(A)=?

7(а) $\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 - x_4 = 1 \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 + 3x_4 = -1 \\ 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 + 4x_4 = -1 \\ 2x_1 + 3x_2 - 2x_3 - x_4 = 1 \end{cases}$

7(б) $\begin{cases} x_1 + 7x_2 - 9x_3 - x_4 = -2 \\ 3x_1 + 4x_2 - 5x_3 - 3x_4 = -1 \\ -2x_1 + 3x_2 - 4x_3 + 2x_4 = -1 \\ 5x_1 - 2x_2 + x_3 - 7x_4 = 1 \end{cases}$

8) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 6x_3 + 3x_4 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 = 0 \\ 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 - x_4 = 0 \end{cases}$

Вариант 15.

1) $\begin{vmatrix} 2a + \cos 2\alpha & a & \cos^2\alpha - \sin^2\alpha \\ 2b + \cos 2\beta & b & \cos^2\beta - \sin^2\beta \\ 2c + \cos 2\gamma & c & \cos^2\gamma - \sin^2\gamma \end{vmatrix} = 0$

2) $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 3 & 2 \\ -2 & 4 & 0 & 5 \\ 3 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

3) $\begin{cases} 3x + 2y - 3z = 2 \\ 2x + y - z = -1 \\ x - 2y + z = 0 \end{cases}$

4) A=$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & -3 & 2 \end{pmatrix}$; B=$\begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$; $A^{-1}\cdot B + B^{-1}\cdot A$=?

5) A=$\begin{pmatrix} 2 & (1-\lambda) & -1 \\ 1 & 2 & (\lambda-2) \\ 4 & 3 & (\lambda-1) \end{pmatrix}$

6) A= $\begin{pmatrix} 2 & 3 & -4 & 1 & -7 \\ 1 & 4 & -2 & 1 & -6 \\ -3 & -1 & 6 & 2 & 7 \\ -2 & 2 & 4 & 4 & 2 \end{pmatrix}$; r(A)=?

7(а) $\begin{cases} 3x_1 + 5x_2 + 3x_3 - 3x_4 = 1 \\ 2x_1 - x_2 - x_3 + 2x_4 = -1 \\ 3x_1 + x_2 + x_3 + 3x_4 = 1 \\ 4x_1 + 3x_2 - 2x_3 - 5x_4 = -1 \end{cases}$

7(б) $\begin{cases} 3x_1-4x_2+5x_3+6x_4=6 \\ 5x_1+8x_2-3x_3-7x_4=1 \\ 7x_1-2x_2-4x_3+3x_4=2 \\ 4x_1+2x_2-9x_3-3x_4=-4 \end{cases}$

8) $\begin{cases} x_1-6x_2-4x_3+6x_4=0 \\ 2x_1-x_2-x_3+x_4=0 \\ 3x_1+4x_2+2x_3-4x_4=0 \end{cases}$

Вариант 16.

1) $\begin{vmatrix} 2\sin 2\alpha & a & 3\sin\alpha\cos\alpha \\ 2\sin 2\beta & b & 3\sin\beta\cos\beta \\ 2\sin 2\gamma & c & 3\sin\gamma\cos\gamma \end{vmatrix}=0$

2) $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 3 \\ 3 & -2 & 3 & -5 \\ 4 & 3 & 2 & -7 \\ 5 & 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$

3) $\begin{cases} -2x+3y+4z=3 \\ -x+3y-2z=-4 \\ 3x-y+5z=3 \end{cases}$

4) A=$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & -3 & 2 \end{pmatrix}$; B=$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$; $A\cdot B-B^{-1}\cdot A^{-1}=?$

5) A=$\begin{pmatrix} 1 & (2+\lambda) & 3 \\ 2 & 3 & (\lambda-2) \\ 3 & \lambda & 1 \end{pmatrix}$

6) A=$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 3 & 1 \\ 5 & 3 & 6 & 2 \end{pmatrix}$; r(A)=?

7(а) $\begin{cases} 2x_1+6x_2-3x_3-8x_4=1 \\ 3x_1+9x_2+x_3-4x_4=-1 \\ 5x_1-6x_2-3x_3+2x_4=6 \\ 4x_1-8x_2-x_3+7x_4=4 \end{cases}$

7(б) $\begin{cases} 5x_1+3x_2+x_3-3x_4=-3 \\ 3x_1+4x_2+2x_3-4x_4=-1 \\ 4x_1+3x_2+3x_3+2x_4=1 \\ 2x_1-x_2-x_3+x_4=-2 \end{cases}$

8) $\begin{cases} x_1+10x_2+x_3-4x_4=0 \\ 2x_1+3x_2+3x_3+x_4=0 \\ 3x_1-4x_2+5x_3+6x_4=0 \end{cases}$

Вариант 17.

1) $\begin{vmatrix} 1+3a & 3 & 2a \\ 1+3b & 6 & 2b \\ 1+3c & 9 & 2c \end{vmatrix} = 6\cdot\begin{vmatrix} 1 & 1 & a \\ 1 & 2 & b \\ 1 & 3 & c \end{vmatrix}$

2) $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 6 & -2 \\ -3 & -1 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 2 & -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$

3) $\begin{cases} 2x+5y-z=1 \\ 3x-2y+3z=1 \\ -x-3y+2z=2 \end{cases}$

4) $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & -3 & 2 \end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$; $(B\cdot A)^{-1} + A\cdot B^{-1}=?$

5) $A=\begin{pmatrix} (1-\lambda) & 2 & 3 \\ 1 & \lambda & (1-\lambda) \\ (\lambda-1) & 2 & 3 \end{pmatrix}$

6) $A=\begin{pmatrix} 4 & -2 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 4 & 5 \\ 4 & 2 & 6 & 8 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$; $r(A)=?$

7(а) $\begin{cases} 2x_1+3x_2-4x_3-2x_4=-1 \\ -3x_1-4x_2+5x_3+2x_4=2 \\ 3x_1-5x_2+2x_3-4x_4=-2 \\ -4x_1+x_2+2x_3+5x_4=2 \end{cases}$

7(б) $\begin{cases} x_1-6x_2-x_3+2x_4=-2 \\ 3x_1-3x_2+x_3+3x_4=-1 \\ 2x_1+3x_2+2x_3+x_4=1 \\ 3x_1+4x_2-2x_3-x_4=1 \end{cases}$

8) $\begin{cases} x_1+7x_2-9x_3-x_4=0 \\ 3x_1+4x_2-5x_3-3x_4=0 \\ 2x_1-3x_2+4x_3-2x_4=0 \end{cases}$

Вариант 18.

1) $\begin{vmatrix} 2+3a & a & d \\ 2+3b & b & d \\ 2+3c & c & d \end{vmatrix} = 0$

2) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 2 & -3 \\ 3 & 1 & -2 & 2 \\ 2 & -2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$

3) $\begin{cases} 3x+2y+4z=-1 \\ 2x-3y-3z=1 \\ x+y+3z=2 \end{cases}$

4) A=$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & -3 & 2 \end{pmatrix}$; B=$\begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$; $B^{-1}\cdot A + 2A\cdot B$=?

5) A=$\begin{pmatrix} (\lambda-1) & 1 & 2 \\ (1-\lambda) & 2 & (1-\lambda) \\ (\lambda-1) & 1 & (\lambda-1) \end{pmatrix}$

6) A=$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 & 5 & 3 \\ -6 & 7 & 2 & -1 & 7 \\ -7 & 5 & 6 & -6 & 4 \end{pmatrix}$; r(A)=?

7(а) $\begin{cases} 2x_1-3x_2+4x_3-2x_4=-1 \\ 3x_1+2x_2-2x_3-x_4=2 \\ 3x_1-4x_2+5x_3-3x_4=-1 \\ -2x_1+3x_2+x_3+5x_4=-1 \end{cases}$

7(б) $\begin{cases} x_1-2x_2-3x_3+4x_4=2 \\ 3x_1+3x_2+x_3-x_4=-1 \\ 4x_1+x_2-2x_3+3x_4=1 \\ 2x_1-3x_2+2x_3+2x_4=1 \end{cases}$

8) $\begin{cases} x_1-2x_2+6x_3-x_4=0 \\ 2x_1-3x_2+4x_3-2x_4=0 \\ 3x_1-4x_2+2x_3-3x_4=0 \end{cases}$

Вариант 19.

1) $\begin{vmatrix} 3 & 2\cos^2\alpha & a \\ 3 & 2\cos^2\beta & b \\ 3 & 2\cos^2\gamma & c \end{vmatrix} = 6\begin{vmatrix} \sin^2\alpha & \cos^2\alpha & a \\ \sin^2\beta & \cos^2\beta & b \\ \sin^2\gamma & \cos^2\gamma & c \end{vmatrix}$

2) $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & 2 \\ -3 & 1 & 2 & -2 \\ 4 & 2 & -3 & 3 \\ 5 & -4 & 2 & 5 \end{pmatrix}$

3) $\begin{cases} 3x + 4y - 2z = 3 \\ 2x - y + z = 1 \\ 4x - 3y + 2z = 3 \end{cases}$

4) $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & -3 & 2 \end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$; $A^{-1}\cdot B + B\cdot A=?$

5) $A=\begin{pmatrix} 1 & (1-\lambda) & 3 \\ 2 & (1+\lambda) & \lambda \\ 3 & (\lambda+1) & 2 \end{pmatrix}$

6) $A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 6 \\ 3 & 2 & 4 & -1 \\ 3 & 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$; $r(A)=?$

7(а) $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 + 3x_4 = 1 \\ -3x_1 - 2x_2 + 2x_3 - 6x_4 = 1 \\ 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 3x_4 = -2 \\ 2x_1 - 3x_2 - 4x_3 + 2x_4 = -1 \end{cases}$

7(б) $\begin{cases} 2x_1 - 9x_2 - 6x_3 - 3x_4 = -1 \\ 2x_1 + x_2 + 4x_3 - 3x_4 = -1 \\ 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 - x_4 = 1 \\ 2x_1 - 4x_2 - x_3 - 3x_4 = -1 \end{cases}$

8) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + 3x_4 = 0 \\ 2x_1 - x_2 - 3x_3 + 3x_4 = 0 \\ 3x_1 - 4x_2 - 5x_3 + 3x_4 = 0 \end{cases}$

Вариант 20.

1) $\begin{vmatrix} \sin^2\alpha & 2\cos^2\alpha & \cos 2\alpha \\ \sin^2\beta & 2\cos^2\beta & \cos 2\beta \\ \sin^2\gamma & 2\cos^2\gamma & \cos 2\gamma \end{vmatrix} = 0$

2) $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 & -2 \\ 2 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

3) $\begin{cases} 2x + y - 3z = 1 \\ 3x - 2y + 2z = 1 \\ x - y + 3z = 2 \end{cases}$

4) A=$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & -3 & 2 \end{pmatrix}$; B=$\begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$; $(A\cdot B)^{-1} + A\cdot B$=?

5) A=$\begin{pmatrix} (\lambda-1) & 1 & (1-\lambda) \\ 2 & 4 & 1 \\ (1+\lambda) & 2 & 2 \end{pmatrix}$

6) A=$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 2 \\ 3 & 4 & 5 & 8 \\ 4 & 2 & 2 & 6 \end{pmatrix}$; r(A)=?

7(а) $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - 3x_3 - x_4 = 1 \\ 2x_1 - 3x_2 - 2x_3 + 2x_4 = -1 \\ 3x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 = -1 \\ 4x_1 - 3x_2 - 3x_3 + 5x_4 = 1 \end{cases}$

7(б) $\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + x_3 - 2x_4 = 1 \\ 3x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 = -1 \\ 3x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 4x_4 = -1 \\ 4x_1 - x_2 - 3x_3 + 2x_4 = 1 \end{cases}$

8) $\begin{cases} x_1 - 5x_2 - 2x_3 + 7x_4 = 0 \\ 2x_1 - 3x_2 - 2x_3 + 4x_4 = 0 \\ 3x_1 - x_2 - 2x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$

Вариант 21.

1) $\begin{vmatrix} b & a & 0 \\ c & 0 & -a \\ 0 & -c & -b \end{vmatrix} = 0$

2) A = $\begin{pmatrix} -3 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & -2 & 0 & 5 \\ 2 & 3 & -3 & 2 \\ -4 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

3) $\begin{cases} 2x - y + 5z = 1 \\ x + 3y - 4z = 1 \\ 2x + y + z = 1 \end{cases}$

4) A=$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & -3 & 2 \end{pmatrix}$; B=$\begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$; $B\cdot A^{-1} - B\cdot A$=?

5) A=$\begin{pmatrix} (\lambda-1) & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 3 \\ (2-\lambda) & 2 & \lambda \end{pmatrix}$

6) A=$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 & 3 \\ 3 & 4 & 2 & 7 \\ 4 & 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}$; r(A)=?

7(а) $\begin{cases} 4x_1+3x_2-x_3-3x_4=1 \\ 3x_1-2x_2+3x_3-x_4=-1 \\ 3x_1+x_2-2x_3-3x_4=-1 \\ 2x_1-x_2+x_3-x_4=-1 \end{cases}$

7(б) $\begin{cases} 2x_1+5x_2-9x_3+6x_4=-3 \\ 2x_1+2x_2-3x_3+4x_4=-1 \\ 2x_1-x_2+3x_3+2x_4=1 \\ 3x_1-3x_2+x_3-x_4=-1 \end{cases}$

8) $\begin{cases} x_1-13x_2+8x_3-x_4=0 \\ 2x_1-4x_2+x_3-4x_4=0 \\ 3x_1+5x_2-6x_3-7x_4=0 \end{cases}$

Вариант 22.

1) $\begin{vmatrix} a & \cos^2\alpha & 2\cos 2\alpha \\ b & \cos^2\beta & 2\cos 2\beta \\ c & \cos^2\gamma & 2\cos 2\gamma \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2a & \sin^2\alpha & \cos^2\alpha \\ 2b & \sin^2\beta & \cos^2\beta \\ 2c & \sin^2\gamma & \cos^2\gamma \end{vmatrix}$

2) A = $\begin{pmatrix} 2 & 2 & -3 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & -3 & 3 & 1 \\ 5 & 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$

3) $\begin{cases} 3x+2y-2z=1 \\ x+2y-2z=-1 \\ 2x-y+3z=1 \end{cases}$

4) A=$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & -3 & 2 \end{pmatrix}$; B=$\begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$; $A\cdot B^{-1} + (A\cdot B)^{-1}$=?

5) A=$\begin{pmatrix} 1 & 2 & (3-\lambda) \\ \lambda & \lambda & (\lambda-1) \\ -3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

6) A=$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ -2 & 4 & -1 \\ -5 & 5 & -3 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$; r(A)=?

7(а) $\begin{cases} 2x_1+4x_2-3x_3+2x_4=1 \\ 3x_1+3x_2-2x_3+2x_4=-1 \\ 4x_1-x_2+2x_3-3x_4=-1 \\ 3x_1-x_2+3x_3-x_4=-1 \end{cases}$

7(б) $\begin{cases} 2x_1+4x_2-3x_3-x_4=-3 \\ 2x_1+3x_2-2x_3-2x_4=-1 \\ 2x_1+2x_2-x_3-3x_4=1 \\ 3x_1-2x_2+2x_3-2x_4=1 \end{cases}$

8) $\begin{cases} x_1-4x_2+3x_3-5x_4=0 \\ 2x_1-3x_2+4x_3-3x_4=0 \\ 3x_1-2x_2+5x_3-x_4=0 \end{cases}$

Вариант 23.

1) $\begin{vmatrix} a+d & a & a \\ b+d & b & a \\ c+d & c & a \end{vmatrix}=0$

2) A = $\begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 & 4 \\ 2 & 3 & -2 & 3 \\ -2 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & -3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

3) $\begin{cases} 2x-3y+2z=2 \\ 3x+2y-2z=1 \\ x+3y-2z=1 \end{cases}$

4) A=$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & -3 & 2 \end{pmatrix}$; B=$\begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$; $B\cdot A^{-1}-A\cdot B^{-1}$=?

5) A=$\begin{pmatrix} 1 & (\lambda-1) & 3 \\ 1 & (\lambda-2) & (1-\lambda) \\ 2 & (\lambda-3) & 2 \end{pmatrix}$

6) A=$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 3 & -1 & 1 \\ -2 & 4 & 6 \\ 5 & 3 & -5 \end{pmatrix}$; r(A)=?

$$7(а)\ \begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + x_3 + 3x_4 = 1 \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 - 3x_4 = 1 \\ 3x_1 - 3x_2 - 2x_3 + 2x_4 = 1 \\ 2x_1 - 3x_2 - 3x_3 + 2x_4 = 1 \end{cases}$$

$$7(б)\ \begin{cases} 2x_1 - 4x_2 + x_3 + 2x_4 = -3 \\ 3x_1 - 3x_2 + x_3 + 3x_4 = -1 \\ 4x_1 - 2x_2 + x_3 + 4x_4 = 1 \\ 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 - x_4 = 1 \end{cases}$$

$$8)\ \begin{cases} x_1 - 7x_2 - 8x_3 + 6x_4 = 0 \\ 2x_1 - 3x_2 - 3x_3 + 2x_4 = 0 \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 - 2x_4 = 0 \end{cases}$$

Вариант 24.

$$1)\ \begin{vmatrix} a & 1 & a+\lambda d \\ b & 1 & b+\lambda d \\ c & 1 & c+\lambda d \end{vmatrix} = 0$$

$$2)\ A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & -1 & 3 \\ 4 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$3)\ \begin{cases} 3x - 2y + z = 1 \\ 2x - 2y + 3z = 1 \\ 3x - y - 2z = 1 \end{cases}$$

$$4)\ A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & -3 & 2 \end{pmatrix};\ B = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix};\ \ 2A\cdot B^{-1} + A^{-1}\cdot B = ?$$

$$5)\ A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 3 \\ \lambda & 2 & (\lambda - 1) \\ (1+\lambda) & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$6)\ A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -4 & 1 & 2 \\ 1 & 4 & -2 & 3 & 1 \\ -4 & -2 & 8 & 2 & -4 \end{pmatrix};\ r(A) = ?$$

$$7(а)\ \begin{cases} 3x_1 + 4x_2 - 3x_3 - 4x_4 = -1 \\ 2x_1 + 3x_2 - 2x_3 - 2x_4 = -1 \\ 2x_1 + 2x_2 - x_3 - 3x_4 = 1 \\ 3x_1 - 2x_2 + 2x_3 - 2x_4 = 1 \end{cases}$$

7(б) $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 4x_3 + x_4 = -1 \\ 3x_1 - x_2 + 3x_3 - x_4 = -1 \\ 4x_1 - x_2 + 2x_3 - 3x_4 = -1 \\ 2x_1 + 4x_2 - 3x_3 + 2x_4 = 1 \end{cases}$

8) $\begin{cases} x_1 - 5x_2 + x_3 - 4x_4 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4 = 0 \\ 3x_1 - 2x_2 + 2x_3 - 2x_4 = 0 \end{cases}$

Вариант 25.

1) $\begin{vmatrix} 1+2a & a & 1 \\ 2+2b & b & 2 \\ 3+2c & c & 3 \end{vmatrix} = 0$

2) $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -3 & 3 \\ 3 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 2 & -2 \\ 4 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

3) $\begin{cases} 3x - 2y - 2z = 1 \\ x + 3y + 2z = 1 \\ 2x + 3y + z = -1 \end{cases}$

4) $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & -3 & 2 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$; $2B^{-1}\cdot A + B\cdot A^{-1}$=?

5) $A = \begin{pmatrix} (1-\lambda) & 2 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & (\lambda-1) \end{pmatrix}$

6) $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -4 & 1 & 7 \\ -1 & 4 & 2 & 5 & 2 \\ 1 & -5 & -2 & -6 & -3 \\ 3 & -1 & -6 & -4 & 5 \end{pmatrix}$; r(A)=?

7(а) $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - 4x_3 + 2x_4 = 1 \\ 2x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 4x_4 = -1 \\ 3x_1 - 3x_2 + x_3 - x_4 = -1 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 1 \end{cases}$

7(б) $\begin{cases} x_1 - 3x_2 + 4x_3 + x_4 = 1 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = -1 \\ 3x_1 + x_2 - 2x_3 - 3x_4 = -1 \\ 4x_1 + 3x_2 - x_3 - 3x_4 = 1 \end{cases}$

8) $\begin{cases} x_1+5x_2-5x_3+5x_4=0 \\ 2x_1+3x_2-4x_3+3x_4=0 \\ 3x_1+x_2-3x_3+x_4=0 \end{cases}$

Вариант 26.

1) $\begin{vmatrix} 1+\cos 2\alpha & \cos^2\alpha & 1 \\ 1+\cos 2\beta & \cos^2\beta & 1 \\ 1+\cos 2\gamma & \cos^2\gamma & 1 \end{vmatrix}=0$

2) $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 4 \\ -3 & 3 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & -3 \\ 2 & -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

3) $\begin{cases} 3x-2y-4z=1 \\ x-3y-4z=2 \\ 2x+3y+3z=-1 \end{cases}$

4) $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & -3 & 2 \end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$; $(B\cdot A)^{-1}-2A\cdot B=?$

5) $A=\begin{pmatrix} \lambda & 3 & 2 \\ 1 & 1 & (3-\lambda) \\ 2 & 1 & \lambda \end{pmatrix}$

6) $A=\begin{pmatrix} 2 & -3 & -4 & -5 & -1 \\ -2 & 4 & 4 & 6 & 0 \\ -3 & 2 & -6 & 5 & -8 \end{pmatrix}$; $r(A)=?$

7(а) $\begin{cases} 3x_1+3x_2-x_3+x_4=-1 \\ 2x_1-x_2-2x_3+2x_4=1 \\ 3x_1+2x_2-3x_3+4x_4=-1 \\ 4x_1-x_2-3x_3+2x_4=1 \end{cases}$

7(б) $\begin{cases} x_1-8x_2-x_3+5x_4=-3 \\ 3x_1+2x_2-3x_3-x_4=1 \\ 2x_1-3x_2-2x_3+2x_4=-1 \\ 3x_1+x_2+x_3+2x_4=-1 \end{cases}$

8) $\begin{cases} x_1+9x_2+6x_3-7x_4=0 \\ 2x_1+3x_2+2x_3-4x_4=0 \\ 3x_1-3x_2-2x_3-x_4=0 \end{cases}$

Вариант 27.

1) $\begin{vmatrix} 1-\cos 2\alpha & \sin^2\alpha & 1 \\ 1-\cos 2\beta & \sin^2\beta & 1 \\ 1-\cos 2\gamma & \sin^2\gamma & 1 \end{vmatrix}=0$

2) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -4 & 0 \\ 3 & -3 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 & -5 \end{pmatrix}$

3) $\begin{cases} 3x+2y+3z=1 \\ 2x+3y-z=1 \\ x-y+3z=-1 \end{cases}$

4) A=$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & -3 & 2 \end{pmatrix}$; B=$\begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$; $B^{-1}\cdot A + (A\cdot B)^{-1}=?$

5) A=$\begin{pmatrix} (\lambda-1) & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & (\lambda+1) \end{pmatrix}$

6) A=$\begin{pmatrix} -1 & 5 & 2 & 6 & -3 \\ 2 & -3 & -4 & -5 & -1 \\ -3 & 2 & 6 & 5 & 4 \\ 3 & -1 & -6 & -4 & -5 \end{pmatrix}$; r(A)=?

7(а) $\begin{cases} 3x_1-3x_2-x_3-2x_4=1 \\ 2x_1+x_2+4x_3-3x_4=-1 \\ 3x_1+2x_2+2x_3-x_4=1 \\ 2x_1-4x_2-x_3-3x_4=-1 \end{cases}$

7(б) $\begin{cases} 2x_1+6x_2+6x_3+x_4=-1 \\ 3x_1+2x_2-2x_3+6x_4=-1 \\ 4x_1+3x_2+2x_3+3x_4=-2 \\ 2x_1-3x_2-4x_3+2x_4=-1 \end{cases}$

8) $\begin{cases} x_1+4x_2-4x_3+3x_4=0 \\ 2x_1+3x_2-4x_3+2x_4=0 \\ 3x_1+2x_2-4x_3+x_4=0 \end{cases}$

Вариант 28.

1) $\begin{vmatrix} 2 & \cos^2\alpha & \sin^2\alpha \\ 2 & \cos^2\beta & \sin^2\beta \\ 2 & \cos^2\gamma & \sin^2\gamma \end{vmatrix} = 0$

2) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 3 \\ 4 & 2 & -1 & 2 \\ -3 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$

3) $\begin{cases} 2x + 3y + z = -1 \\ 3x + 3y - z = -1 \\ x + 2y + 3z = 1 \end{cases}$

4) A=$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & -3 & 2 \end{pmatrix}$; B=$\begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$; $A^{-1} \cdot B + A \cdot B^{-1}$=?

5) A=$\begin{pmatrix} (\lambda-1) & 2 & 3 \\ \lambda & 3 & 2\lambda \\ (\lambda-1) & 1 & 2 \end{pmatrix}$

6) A=$\begin{pmatrix} 2 & 3 & -6 & 1 & 3 \\ -1 & 5 & 3 & 6 & 2 \\ 2 & 2 & -6 & 0 & 4 \\ 1 & 4 & -3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$; r(A)=?

7(а) $\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 - 2x_3 + 3x_4 = -1 \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 1 \\ 3x_1 + 3x_2 + x_3 - x_4 = -1 \\ 4x_1 + x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 1 \end{cases}$

7(б) $\begin{cases} x_1 - x_2 + 6x_3 + 2x_4 = -2 \\ 3x_1 - 4x_2 + 5x_3 - 3x_4 = -1 \\ 2x_1 - 3x_2 - x_3 - 5x_4 = 1 \\ 3x_1 + 2x_2 - 2x_3 - x_4 = 2 \end{cases}$

8) $\begin{cases} x_1 + 9x_2 - 9x_3 - x_4 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 + x_4 = 0 \\ 3x_1 - 3x_2 + x_3 + 3x_4 = 0 \end{cases}$

Вариант 29.

1) $\begin{vmatrix} 2-\cos 2\alpha & \sin^2\alpha & \cos^2\alpha \\ 2-\cos 2\beta & \sin^2\beta & \cos^2\beta \\ 2-\cos 2\gamma & \sin^2\gamma & \cos^2\gamma \end{vmatrix}$=0

2) $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 3 \\ -2 & 3 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 4 & -3 \\ 3 & 2 & -2 & 2 \end{pmatrix}$

3) $\begin{cases} 3x - 4y - 2z = 1 \\ 2x - 3y - 3z = -2 \\ x + 2y + 3z = 1 \end{cases}$

4) A=$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & -3 & 2 \end{pmatrix}$; B=$\begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$; $B^{-1} \cdot A - (B \cdot A)^{-1}$=?

5) A=$\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 2 \\ 2 & \lambda & (3-\lambda) \\ \lambda & 2 & 1 \end{pmatrix}$

6) A=$\begin{pmatrix} 3 & 2 & -6 & 1 & -8 \\ -1 & 5 & 2 & -6 & -3 \\ 2 & 3 & -4 & -1 & -7 \\ -2 & -3 & 4 & 1 & 7 \end{pmatrix}$; r(A)=?

7(a) $\begin{cases} 3x_1 - 3x_2 + x_3 + 3x_4 = -1 \\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 = 1 \\ 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 - x_4 = 1 \\ 4x_1 - 2x_2 + x_3 + 4x_4 = 1 \end{cases}$

7(б) $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 - 6x_2 - x_3 + 2x_4 = -2 \\ 3x_1 - 3x_2 + x_3 + 3x_4 = -1 \\ 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 - x_4 = 1 \end{cases}$

8) $\begin{cases} x_1 + 8x_2 - 8x_3 - 6x_4 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 - 2x_3 - x_4 = 0 \\ 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 + 4x_4 = 0 \end{cases}$

Вариант 30.

1) $\begin{vmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{vmatrix} = 0$

2) $A = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 & -2 \\ -2 & 3 & 2 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & -3 \end{pmatrix}$

3) $\begin{cases} x+3y+2z=-1 \\ 3x-y+z=2 \\ 2x+3y+3z=1 \end{cases}$

4) A= $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & -3 & 2 \end{pmatrix}$; B= $\begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$; $(B\cdot A)^{-1} - B\cdot A^{-1}$=?

5) A= $\begin{pmatrix} (\lambda-2) & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 2 \\ 3 & (1-\lambda) & 1 \end{pmatrix}$

6) A= $\begin{pmatrix} -1 & 7 & 2 & 9 & 8 \\ 1 & -3 & -2 & -5 & -4 \\ -2 & -4 & 4 & 0 & -2 \\ 3 & 5 & -6 & -1 & 2 \end{pmatrix}$; r(A)=?

7(а) $\begin{cases} 3x_1+4x_2+2x_3-4x_4=-1 \\ 2x_1-x_2-x_3+x_4=-2 \\ 4x_1+3x_2+3x_3+2x_4=1 \\ 3x_1-2x_2-2x_3+3x_4=-2 \end{cases}$

7(б) $\begin{cases} x_1+3x_2+4x_3+4x_4=-1 \\ 2x_1+6x_2-3x_3-8x_4=1 \\ 3x_1+9x_2+x_3-4x_4=-1 \\ 5x_1-6x_2-3x_3+2x_4=6 \end{cases}$

8) $\begin{cases} x_1-7x_2-5x_3+7x_4=0 \\ 2x_1-x_2-x_3+2x_4=0 \\ 3x_1+5x_2+3x_3-3x_4=0 \end{cases}$

Список рекомендуемой литературы

Основная литература

1. Высшая математика. Том 1. Линейная алгебра. Векторная алгебра. Аналитическая геометрия [Электронный ресурс]: учебник/ А.П. Господариков [и др.]. — Электрон. текстовые данные. — СПб.: Санкт-Петербургский горный университет, 2015. — 105 с. — 978-5-94211-710-8. — Режим доступа: http://www.iprbookshop.ru/71687.html

2.Ивлева А.М. Линейная алгебра. Аналитическая геометрия [Электронный ресурс] : учебное пособие / А.М. Ивлева, П.И. Прилуцкая, И.Д. Черных. — Электрон. текстовые данные. — Новосибирск: Новосибирский государственный технический университет, 2014. — 180 с. — 978-5-7782-2409-4. — Режим доступа: http://www.iprbookshop.ru/45380.html

3.Чеголин, А.П. Линейная алгебра и аналитическая геометрия [Электронный ресурс]: учебное пособие/ А.П. Чеголин. — Электрон. текстовые данные. — Ростов-на-Дону: Южный федеральный университет, 2015. — 149 с. — 978-5-9275-1728-2. — Режим доступа: http://www.iprbookshop.ru/68568.html

Дополнительная литература

1. Векторная алгебра, аналитическая геометрия и элементы линейной алгебры [Электронный ресурс]: варианты расчетного задания/. — Электрон. текстовые данные. — М.: Московский государственный строительный университет, ЭБС АСВ, 2014. — 63 с. — 2227-8397. — Режим доступа: http://www.iprbookshop.ru/23720.html

2. Канатников, А.Н. Аналитическая геометрия [Текст]: учеб. пособие/ А.Н. Канатников, А.П. Крищенко. - М.: Академия, 2009.- 208 с.

3. Крючков, А.И. Сборник заданий по алгебре [Текст]: учеб. пособие/ Н.И. Крючков, В.В. Крючкова.- М.: Академия, 2007.- 192 с.

4. Кузютин, В.Ф. Геометрия [Текст]: учеб. пособие/ В.Ф. Кузютин, Н.А. Зенкевич, В.В. Еремеев. - СПб.: Лань, 2003.- 416 с.

5. Курош, А.Г. Курс высшей алгебры. [Текст]: учеб. пособие/ Курош А.Г. - СПб.: Лань, 2006.- 432 с.

6. Линейная алгебра и аналитическая геометрия [Электронный ресурс]: методические указания, решение типовых задач и варианты заданий для студентов 1-го курса МГСУ, обучающихся по направлениям подготовки 080100 «Экономика», 080200 «Менеджмент», 230100 «Информатика и вычислительная техника»/. — Электрон. текстовые данные. — М.: Московский государственный строительный университет, Ай Пи Эр Медиа, ЭБС АСВ, 2014. — 83 с. — 978-5-7264-0887-3. — Режим доступа: http://www.iprbookshop.ru/25511.html

7.Шерстов, С.В. Аналитическая геометрия и линейная алгебра. Матрицы и системы уравнений [Электронный ресурс]: учебно-методическое пособие/ С.В. Шерстов. — Электрон. текстовые данные. — М.: Издательский Дом МИСиС, 2015. — 17 с. — 978-5-87623-970-9. — Режим доступа: http://www.iprbookshop.ru/64171.html

ТИКОВА Зарема Заурбиевна

АЛГЕБРА И ГЕОМЕТРИЯ

Учебно-методическое пособие для обучающихся
I курса обучающихся по направлению подготовки
09.03.04 «Программная инженерия»

Корректор Чагова О.Х.
Редактор Чагова О.Х.

Сдано в набор 24.09.2024 г.
Формат 60х84/16
Бумага офсетная.
Печать офсетная.
Усл. печ. л.3,95
Заказ № 4997
Тираж 100 экз.

Оригинал-макет подготовлен
в Библиотечно-издательском центре СКГА
369000, г. Черкесск, ул. Ставропольская, 36