

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

СЕВЕРО-КАВКАЗСКАЯ ГОСУДАРСТВЕННАЯ АКАДЕМИЯ



З.О. Коркмазова

Р.И. Селимсултанова

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

Учебно-методическое пособие для обучающихся
очной формы обучения направления подготовки
01.03.02 Прикладная математика и информатика

Черкесск
2025

УДК 517
ББК 22.161
К 66

Рассмотрено на заседании кафедры «Математика»
Протокол № 1 от «2» сентября 2024 г.
Рекомендовано к изданию редакционно-издательским советом СКГА.
Протокол № 27 от «07» ноября 2024 г.

Рецензенты: Токова А.А. – к. ф. м. н., доцент

К 66 Коркмазова, З. О. Математический анализ: учебно-методическое пособие для обучающихся очной формы обучения направления подготовки 01.03.02 Прикладная математика и информатика. / З.О. Коркмазова, Р.И. Селимсултанова. – Черкесск: БИЦ СКГА, 2025. – 144 с.

Учебно-методическое пособие составлено в соответствии с требованиями государственного образовательного стандарта высшего образования и рабочей программой дисциплины «Математический анализ» для обучающихся направления подготовки 01.03.02 Прикладная математика и информатика. Пособие содержит учебный материал, разобранные задачи с подробным решением, а так же задания расчетно-графических работ с вопросами к экзамену.

**УДК 517
ББК 22.161**

© Коркмазова З.О., Селимсултанова Р.И., 2025
© ФГБОУ ВО СКГА, 2025

СОДЕРЖАНИЕ

1 семестр	
Функция.....	4
Способы задания функции.....	5
Графическое изображение функции.....	7
О некоторых классах функции.....	8
Элементарные функции.....	9
Пределы и непрерывность функции.....	11
Непрерывность функции.....	16
Дифференциальное исчисление.....	20
Определение производной.....	20
Дифференциал и его приложения.....	22
Уравнение касательной и нормали к кривой $y = f(x)$	23
Возрастание и убывание.....	24
Исследование функций с помощью производной.....	26
2 семестр	
Интегральные исчисления функции одной переменной.....	28
Нахождение определенного и неопределенного интеграла.....	28
Вычисление площади плоской фигуры.....	32
Вычисление объема тела.....	34
Несобственные интегралы.....	34
Функции нескольких независимых переменных.....	36
Экстремум функции двух независимых переменных.....	37
Числовые ряды. Условия сходимости знакоположительных рядов.....	39
Степенные ряды.....	40
Приближенное вычисление определенных интегралов с помощью рядов.....	42
3 семестр	
Интегрирование функций нескольких переменных.....	44
Кратные и криволинейные интегралы.....	44
Двойной интеграл.....	44
Тройной интеграл.....	45
Геометрические и физические приложения кратных интегралов.....	47
Криволинейные и поверхностные интегралы.....	54
Геометрические и физические приложения криволинейных интегралов.....	57
Задания расчетно-графической работы за 1 семестр.....	62
Задания расчетно-графической работы за 2 семестр.....	90
Задания расчетно-графической работы за 3 семестр.....	124
Вопросы к экзамену.....	138
Список использованной литературы.....	141

1. ФУНКЦИЯ

Метод координат представляет собой один из наиболее универсальных математических методов и используется для решения самых разнообразных задач. В основе метода лежит понятие **системы координат** на прямой, плоскости и в пространстве.

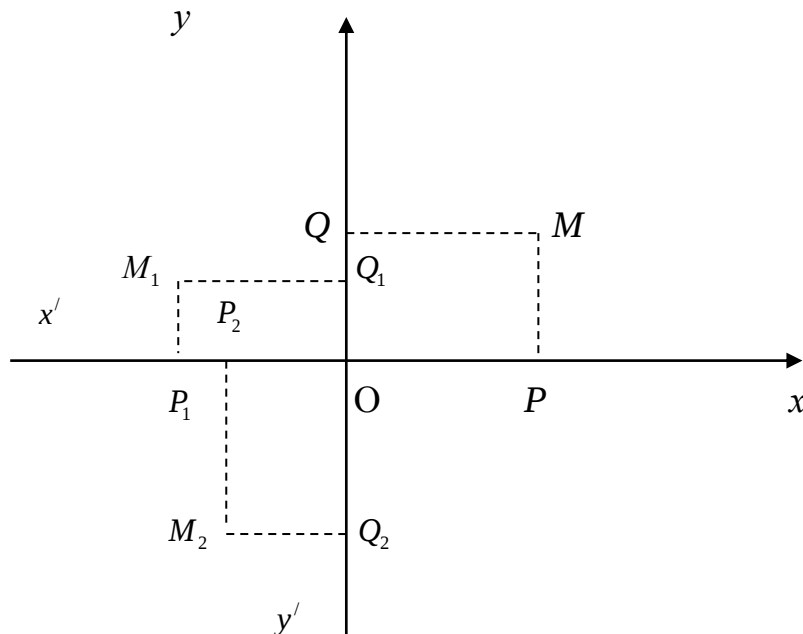


Рисунок 1 – Система координат

Две взаимно перпендикулярные прямые xx' и yy' образуют **прямоугольную (декартову) систему координат**. Прямые xx' и yy' называют **осями координат**, одна из них xx' (обычно изображается горизонтально) называется **осью абсцисс**, другая yy' – **осью ординат**; точка O их пересечения – **началом координат**. На каждой из осей выбирается по произвольному масштабу.

Взяв произвольную точку M на плоскости, в которой расположены оси, найдем ее проекции P и Q на координатной оси. Отрезок OP на оси абсцисс, также число x , измеряющие его в избранном масштабе, называется **абсциссой** точка M ; отрезок OQ на оси ординат, а также измеряющее его число y – **ординатой** точки M . Величины $x = OP$ и $y = OQ$ называются **прямоугольными координатами** (или просто **координатами**) точки M . Они считаются положительными или отрицательными в соответствии с заранее установленными направлениями положительных отрезков на каждой оси. Обычно на оси абсцисс положительные отрезки откладываются вправо, а на оси ординат – вверх от начала координат.

На рисунке 1 (масштабы на обеих осях одинаковы) точка M имеет абсциссу $x = 3$ и ординату $y = 2$ точка M_1 – абсциссу $x_1 = -2$, ординату $y_1 = 1$. Сокращено это записывается так: $M(3; 2)$; $M_1(-2; 1)$; $M_2(-1, 5; -3)$ и т.д.

Каждой точке плоскости соответствует одна пара чисел x ; y . Каждой паре действительных чисел x ; y соответствует одна точка M .

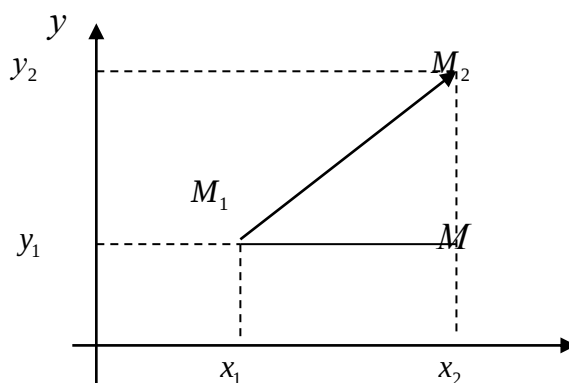


Рисунок 2

Каждой точке плоскости соответствует одна пара чисел x ; y . Каждой паре действительных чисел x ; y соответствует одна точка M .

В школе было доказано, что расстояние между двумя точками плоскости $M_1 (x_1; y_1)$ и $M_2 (x_2; y_2)$ вычисляется по формуле $M_1 M_2 = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$. Доказательство основано на применении теоремы Пифагора к прямоугольному треугольнику $MM_1 M_2$ (рисунок 2).

СПОСОБЫ ЗАДАНИЯ ФУНКЦИИ

1. Наиболее удобным для изучения свойства функции является **аналитический** способ задания (если он возможен). Этот способ заключается в том, что правило составления задается в виде аналитического выражения, или формулы, содержащей указания на те операции или действия, которые надо произвести с аргументом x , чтобы получить соответствующее значение $y = f(x)$ функции f . Например, если функция f определена формулой $f(x) = \frac{1}{x^3 - 1}$, то здесь указано правило: каждому значению $x \neq 1$ ставится в соответствие частное от деления единицы на разность между третьей степенью числа x и единицей.

Заметим, что правило, характеризующее одну и ту же функцию может задаваться разными формулами. Так, функции $f(x) = \cos x$ ($x \in [0; \frac{\pi}{2}]$) и $g(x) = \sqrt{1 - \sin^2 x}$ ($x \in [0; \frac{\pi}{2}]$) совпадают, так как правило, определяющее их, одно и то же хотя и выражено разными символами. В то же время функции $f(x) = \cos x$ ($x \in [0; \frac{\pi}{2}]$) и $h(x) = \cos x$ ($x \in [0; \pi]$) различны.

Часто рассматриваются функции, которые на разных частях множества своего существования задаются разными формулами.

Пример 1 Функция φ определена на промежутке $[0; 1]$ следующим образом: $\varphi(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } 0 \leq x < 1; \\ 1, & \text{если } x = 1 \end{cases}$

Пример 2 Функция g определена на промежутке $(-\infty; +\infty)$ следующим образом:

$$g(x) = \begin{cases} x^2 - 1, & \text{если } x \in (-\infty; -1) \cup (1; \infty); \\ 1 - x^2, & \text{если } x \in [-1; 1] \end{cases}$$

областью определения функция g разбита на две части: одна часть состоит из интервалов $(-\infty; -1)$ и $(+1; \infty)$, другая – из отрезка $[-1; 1]$. Формулы, определяющие функцию g , различные на каждой из этих частей.

Пример 3 Функция Дирихле:

$$D(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \text{ рационально} \\ 0, & \text{если } x \text{ иррационально} \end{cases}$$

Пример 4 Функция «СИГНУМ»**

$$\text{Sgn } x = \begin{cases} 1, & \text{если } x > 0; \\ 0, & \text{если } x = 0; \\ -1, & \text{если } x < 0 \end{cases}$$

2. Иногда бывает так, что нужную нам функцию не удастся задать с помощью формулы (или формул), содержащей известные нам символы. В этом случае правило, характеризующее функцию, описывается словами. Это **описательный способ** задания функции.

3. В естественных науках, технике и других областях человеческой деятельности зависимость между величинами часто устанавливается экспериментально или путем наблюдений. Эту зависимость удобно задавать таблицей, где просто составлены полученные из опыта данные. Это **табличный способ** задания функции. Этот способ заключается в том, имеется таблица, в которой даны значения аргумента и соответствующие им значения функции. Например, в таблице приведены результаты измерения силы звука самолета, (она обозначается V и измеряется в децибелах (дБ)) на различных расстояниях от точки взлета (расстояние обозначается, как обычно, через S и измеряется в километрах):

S	1	2,5	3	5,5	7	8,5	10	15	20	30
V	115	108	102	98	93	89	87	72	60	65

Заметим, что область определения функции, заданной таблицей, является «не сплошным» множеством (промежутком), а содержит лишь некоторое фиксированное число элементов.

4. В некоторых случаях функция задается **графиком**. Но не всякое множество может служить графиком функции.

О графическом способе задания функции и свойствах графиков функции мы расскажем в следующем параграфе.

ГРАФИЧЕСКОЕ ИЗОБРАЖЕНИЕ ФУНКЦИИ

Чтобы графически изобразить заданную функциональную зависимость, на оси абсцисс отмечаем ряд значений $x_1; x_2; x_3; \dots$ одной из переменных x (обычно аргументы) и строим ординаты $y_1; y_2; y_3; \dots$, представляющие соответствующие значения другой переменной y (функции), получим ряд точек $M_1(x_1; y_1); M_2(x_2; y_2); M_3(x_3; y_3); \dots$. Соединяя их на глаз плавной кривой линией, получим график данной функциональной зависимости.

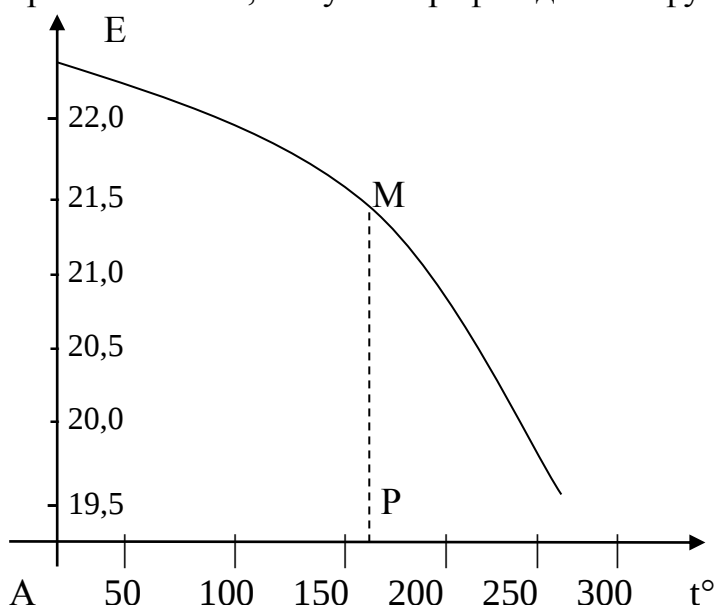


Рисунок 3 Графическое изображение функции

Преимуществом графического изображения в сравнении с табличным является его наглядность; недостатком – малая степень точности. Большое практическое значение имеет удачный выбор масштаба.

На рисунок 3 графически изображена функциональная зависимость между модулем упругости (модулем Юнга) кованого железа Y и температурой железа t . Масштаб абсцисс (t) и ординат (E) показаны числовыми промежутками. Начало координат и ось абсцисс на чертеже не показаны, чтобы не увеличивать без нужды размеры графика.

График рисунка 3 составлен на основании следующей таблицы:

$t^{\circ} \text{ C}$	0	50	100	150	200	250
$E \frac{m}{cm^2}$	21,5	21,4	21,2	20,9	20,5	19,9

По графику можно найти (приближенно) значение функции и для тех значений аргумента, которые в таблице не помещены. Например, пусть требуется найти значение t при $t^{\circ} = 170^{\circ} \text{ C}$. Отметив на оси абсцисс (или на прямой At , ей параллельной) абсциссу $t = AP = 170$ и поставив перпендикуляр PM , найдем ординату $E = PM = 20,745$, т.е. $M(170; 20,75)$.

Нахождение промежуточных значений функции по ее графику называется **графической интерполяцией**.

На практике всякий график строится «по точкам», т. е. от руки проводится плавная линия, соединяющая ряд последовательных точек $M_1; M_2; M_3; \dots$. При этом теоретически никогда не исключается возможность, что промежуточные точки, не нанесенные на график лежат очень далеко от проведенной плавной кривой. Ввиду этого теоретически следует определить график как **геометрическое место точек $M(x; y)$, координаты которых связаны данной функциональной зависимостью**.

О НЕКОТОРЫХ КЛАССАХ ФУНКЦИЙ

Рассмотрим функцию f , определенную на некотором промежутке X .

Если $f(x_1) \leq f(x_2)$ при $x_1 \leq x_2$ ($x_1; x_2 \in X$), то функция f называется **возрастающей**.

Если $f(x_1) \geq f(x_2)$ при $x_1 \leq x_2$ ($x_1; x_2 \in X$), то функция f называется **убывающей**.

Если $f(x_1) < f(x_2)$ при $x_1 < x_2$ ($x_1; x_2 \in X$), то функция f – **строго возрастающая**.

Если $f(x_1) > f(x_2)$ при $x_1 < x_2$ ($x_1; x_2 \in X$), то функция f – **строго убывающей**.

Возрастающая или убывающая функции называются **монотонными**, а строго возрастающая или строго убывающая – **строго монотонной**.

Пусть теперь функция f определена на некотором симметрическом промежутке X . (**Симметричным** называется любой из промежутков вида $(-a; a)$; $[a; a]$; $a > 0$; и $(-\infty; +\infty)$). Тогда, если для любого x и X $f(-x) = f(x)$, что функция f называется **четной**, если же $f(-x) = -f(x)$, то – **нечетной**. Если же не выполняется ни одно из этих условий, то функция называется **функцией общего вида** (или ни четной, ни не четной).

Нетрудно показать, что **график четной функции симметричен относительно оси ординат**, а **график нечетной функции симметричен относительно начала координат**.

Функция f , определенная на некотором множестве X , называется **ограниченной**, если существует число $L > 0$ такое, что $|f(x)| \leq L$ для любого $x \in X$.

Функция f , определенная на некотором множестве X , называется **периодической**, если существует такое число $T \neq 0$, то для любого $x \in X$: 1) $x+T \in X$; 2) $x-T \in X$; 3) $f(x+T) = f(x)$. Число T при этом называется **периодом** функции f .

Заметим, что если число T является периодом функции f , то и число $\pm T_n$ ($n \in \mathbb{N}$) также является ее периодом.

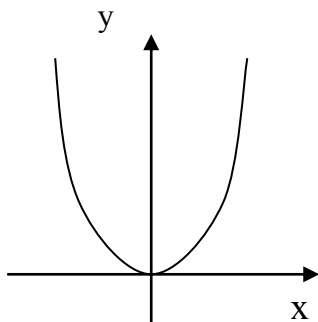


Рисунок 4

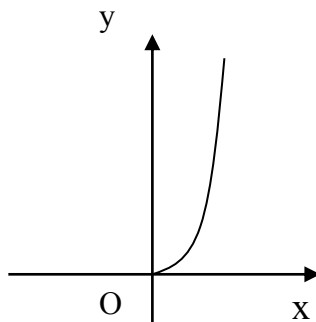


Рисунок 5

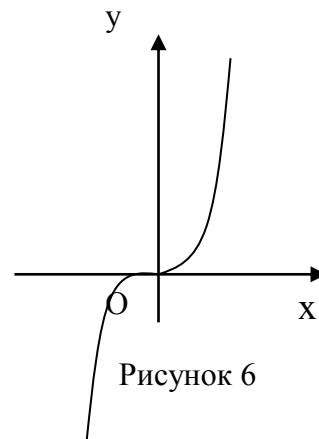


Рисунок 6

ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ ФУНКЦИИ

Кроме функций, перечисленных выше, изучаются еще тригонометрические функции синус, косинус, тангенс, котангенс, секанс и косеканс, причем последние четыре просто выражаются через синус и косинус: $\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$; $\operatorname{ctg} x = \frac{\cos x}{\sin x}$; $\sec x = \frac{1}{\cos x}$; $\operatorname{cosec} x = \frac{1}{\sin x}$

Функция называется **явной**, если она задана формулой, в которой правая часть не содержит зависимой переменной; например, функция $y = x^2 - 5x + 4$ – явная.

Функция y аргумента x называется **неявной**, если она задана уравнением $F(x; y) = 0$, не разрешенным относительно зависимой переменной. Например, функция y ($y \geq 0$), заданная уравнением $x^3 + y^2 - y \ln x + x \sin y = 0$ неявная, так как она не разрешима ни относительно x , ни относительно y .

Из основных функций новые функции могут быть получены двумя способами при помощи: а) алгебраических действий; б) операций образования сложной функции.

Пусть функция $y = f(u)$ есть функция от переменной U , определенной на множестве U с областью значений Y , а переменная U в свою очередь является функцией $U = \varphi(x)$ от переменной x , определенной на множестве X с областью значений U . Тогда заданная на множестве X функция $y = f(\varphi(x))$

называется **сложной** функцией (или **композицией** функций, суперпозицией функций, **функцией от функции**).

Например, $y = \log \sin x$ – сложная функция, так как ее можно представить в виде $y = \lg U$, где $U = \sin x$

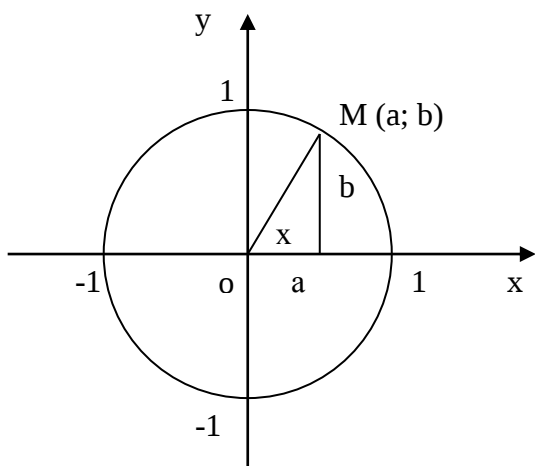


Рисунок 7

Определение. Функции, построенные из элементарных функций с помощью конечного числа алгебраических действий и конечного числа операций образования сложной функции, называется **элементарными**.

Например, функция $y = \frac{\sqrt{x} \cdot \sin^3 x}{\sqrt[5]{x+5} + 7^{3x-7}} + \sqrt{\ln^{3x}-1}$ является элементарной, так как здесь число операций сложения, вычитания, умножения, деления и возведения в степень, и образования сложной функции $\sin^3 x$; 7^{3x-7} ; $\sqrt{\ln^3 x - 1}$ конечно.

Примерами неэлементарных функций являются функции $y = |x|$; $y = [x]$ – целая часть x ; $y = \{x\}$ – дробная часть x и др.

Рассмотрим более подробно некоторые элементарные функции – тригонометрические. По определению $\sin x = a$; $\cos x = b$, где $(a; b)$ координаты точки M , которая лежит на окружности единичного радиуса с центром в начале координат (рисунок 7), а x – угол, образованный вектором $\overline{OM}$ и осью Ox .

Если точка M сделает полный оборот и придет в исходное положение, то угол x увеличится на $2\pi^*$. Но числа a и b в результате этой процедуры, не изменяются. Отсюда следует, что синус, косинус и другие тригонометрические функции будут **периодическими функциями с периодом $T = 2\pi$** , т.е. для них

$$\sin x = \sin (x+2\pi) + \dots + \sin (x+2\pi k); k \in \mathbb{Z};$$

$$\cos x = \cos (x+2\pi) + \cos (x+4\pi) + \dots + \cos (x+2\pi k); k \in \mathbb{Z}.$$

Периодичность – важнейшее специфическое свойство тригонометрических функций. Другие функции – степенная, показательная, логарифмическая – периодическими не являются. С помощью тригонометрических функций описываются самые разнообразные периодические процессы, происходящие в живой и не живой природе:

колебательные и вращательные движения, движение планет, биологический ритм и т.п.

Функции, как и числа, можно складывать, вычитать, умножать и делить. Например, если разделить одну линейную функцию на другую, то получим функцию, которая получила название **дробно-линейной** или **дробно-рациональной**. Например, $y = \frac{ax+b}{cx+d}$, ($cx+d \neq 0$; a ; b ; c и d – любые рациональные числа).

Если сложить несколько степенных функций вида $y = ax^n$, где $n \in \mathbb{N}$ или $n = 0$, то получим **многочлен**. Например, $y = ax^3 + bx^2 + cx + c$ – многочлен 3-й степени.

Аналогично получается многочлен любой степени n : $y = a_0x^4 + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \dots + a_{n-1}x + a_n$. Многочлены в математике играют важную роль, и не только в математике, но и в ее приложениях.

Карл Вейерштрасс – выдающийся математик XIX века, доказал, что любую непрерывную функцию можно приближать с любой степенью точности. В частности, приближенное значение функций находят по формулам:

$$e^x \approx 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{4!}x^4 + \dots + \frac{1}{n!}x^n + \dots$$

$$\sin x \approx x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \dots$$

$$\cos x \approx x - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \dots$$

$$(1+x)^m \approx 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{3!}x^3 + \dots + \frac{m(m-1)(m-2)\dots(m-n+1)}{n!}x^n + \dots$$

$$\ln(1+x)^m \approx x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots + (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} + \dots$$

Чем больше n (число слагаемых), тем выше точность, т.е. тем меньше приближенное значение отличается от ее истинного значения.

2. ПРЕДЕЛЫ И НЕПРЕРЫВНОСТЬ ФУНКЦИИ

Теперь остановимся на примерах вычисления пределов, когда теоремы о связи предела с алгебраическими операциями непосредственно применить нельзя.

Если ищется предел при $x \rightarrow x_0$ дроби, числитель и знаменатель которой многочлены, обращающиеся в нуль, то, используя теорему Безу, легко показать, что числитель и знаменатель делится без остатка на $x-x_0$, т.е. данную дробь всегда можно преобразовать тождественно, сократив на $x-x_0$ (здесь нет сокращения на нуль, так как $x \neq x_0$). Если и после сокращения на $x-x_0$ числитель и знаменатель обращается в нуль при $x \rightarrow x_0$, то надо проводить повторное сокращение на $x-x_0$ и т.д. Приведем соответствующие примеры.

Пример 5 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x + x^2 + x^3 - 3}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x^2 + 2x + 3)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} (x^2 + 2x + 3) = 1^2 + 2 \cdot 1 + 3 = 6.$

Пример 6

$$\lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^3 + 27}{x + 3} = \lim_{x \rightarrow -3} \frac{(x+3)(x^2 - 3x + 9)}{x + 3} = \lim_{x \rightarrow -3} (x^2 - 3x + 9) = (-3)^2 - 3 \cdot (-3) + 9 = 27.$$

Пример 7 Пусть m и n натуральные числа ($m \neq n$). Тогда имеем:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^m - 1}{x^n - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x^{m-1} + x^{m-2} + \dots + x + 1)}{(x-1)(x^{n-1} + x^{n-2} + \dots + x + 1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^{m-1} + x^{m-2} + \dots + x + 1}{x^{n-1} + x^{n-2} + \dots + x + 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\overbrace{1+1+\dots+1}^{m \text{ раз}}}{\underbrace{1+1+\dots+1}_{n \text{ раз}}} = \frac{m}{n}.$$

Прием, примененный в рассмотренных примерах позволяет вычислить и пределы некоторых выражений, у которых в числителе и знаменателе фигурируют тригонометрические функции или выражения.

Пример 8

$$\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin^2 x}{1 + \cos^3 x} = \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{1 - \cos^2 x}{1 + \cos^3 x} = \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{(1 + \cos x)(1 - \cos x)}{(1 + \cos x)(1 - \cos x + \cos^2 x)} = \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{1 - \cos x}{1 - \cos x + \cos^2 x} = \frac{2}{3}.$$

Пример 9 $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1 - \sin x}{\cos^2 x} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1 - \sin x}{1 - \sin^2 x} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1 - \sin x}{(1 - \sin x)(1 + \sin x)} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1}{1 + \sin x} = \frac{1}{2}.$

Пример 10 Найдем $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \frac{1 - 4\sin^2 x}{\cos 3x}.$

Решение: Проведем тождественные преобразования

$$1 - 4\sin^2 x = 4\left(\frac{1}{4} - \sin^2 x\right) = 4\left(\frac{1}{2} - \sin x\right) \cdot \left(\frac{1}{2} + \sin x\right);$$

$$\cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x = 4\cos x\left(\cos^2 x - \frac{3}{4}\right) = 4\cos x\left(\cos x - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \cdot \left(\cos x + \frac{\sqrt{3}}{2}\right).$$

отсюда, учитывая, что $\frac{1}{2} = \sin \frac{\pi}{6}$ и $\frac{\sqrt{3}}{2} = \cos \frac{\pi}{6}$, имеем:

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \frac{1 - 4\sin^2 x}{\cos 3x} = \frac{\left(\sin \frac{\pi}{6} - \sin x\right) \cdot \left(\sin \frac{\pi}{6} + \sin x\right)}{\cos x \left(\cos x - \cos \frac{\pi}{6}\right) \cdot \left(\cos x + \cos \frac{\pi}{6}\right)} = -\frac{1}{\cos x}.$$

Следовательно, искомый предел есть $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \frac{1 - 4\sin^2 x}{\cos 3x} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \left(-\frac{1}{\cos x}\right) = -\frac{2}{\sqrt{3}}.$

В связи с последним примером, заметим, что если выражение предел которого ищется содержит сумму или разность тригонометрических функций, то часто бывает полезным тождественно преобразовывать их в произведение по известным тригонометрическим формулам.

Рассмотрим теперь случай, когда ищется предел при $x \rightarrow \infty$ или $x \rightarrow -\infty$ дробь. Числитель и знаменатель которой есть многочлены. Для нахождения предела в этом случае можно тождественно преобразовать дробь так, чтобы

были применимы теоремы (1 – 5) из 3.3 п. 3⁰, или заменить предельный переход при $x \rightarrow \infty$ ($x \rightarrow -\infty$) предельным переходом при $\alpha \rightarrow 0$, получив, что $\alpha = \frac{1}{x}$.

Пример 11

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^3 + x^2 + 5}{3x^3 + x + 1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2 + \frac{1}{x} + \frac{5}{x^2}}{3 + \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^3}} = \frac{2}{3} \text{ или } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^3 + x^2 + 5}{3x^3 + x + 1} = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\frac{2}{\alpha^3} + \frac{1}{\alpha^2} - 5}{\frac{3}{\alpha^3} + \frac{1}{\alpha} - 1} = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{2 + \alpha + 5\alpha^3}{3 + \alpha - \alpha^3} = \frac{2}{3}.$$

Чтобы найти предел дроби, содержащей иррациональные выражения, необходимо тождественно преобразовать дробь, перенеся иррациональность из числителя в знаменатель или из знаменателя в числитель, и после этого сделать необходимые упрощения. Если же имеется предел выражения, содержащего иррациональность (но не являющегося дробью), то можно поступить аналогично, считая данное выражение дробью со знаменателем, равным единице.

Пример 12 Найдем $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x^2 + 3} - 3}{x - 2}$.

Решение: Проведем преобразования: $\frac{\sqrt{x^2 + 3} - 3}{x - 2} = \frac{(\sqrt{x^2 + 3} - 3) \cdot (\sqrt{x^2 + 3} + 3)}{(x - 2) \cdot (\sqrt{x^2 + 3} + 3)} =$

$$= \frac{x^2 - 4}{(x - 2) \cdot (\sqrt{x^2 + 3} + 3)} = \frac{x + 2}{\sqrt{x^2 + 3} + 3};$$

откуда $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x^2 + 3} - 3}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x + 2}{\sqrt{x^2 + 3} + 3} = \frac{2 + 2}{\sqrt{4 + 3} + 3} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}.$

Пример 13

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{3x + 7} - \sqrt{2x + 10}}{\sqrt{4x + 13} - \sqrt{x + 22}} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(\sqrt{3x + 7} - \sqrt{2x + 10}) \cdot (\sqrt{3x + 7} + \sqrt{2x + 10}) \cdot (\sqrt{4x + 13} + \sqrt{x + 22})}{(\sqrt{4x + 13} - \sqrt{x + 22}) \cdot (\sqrt{3x + 7} + \sqrt{2x + 10}) \cdot (\sqrt{4x + 13} + \sqrt{x + 22})} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x - 3) \cdot (\sqrt{4x + 13} + \sqrt{x + 22})}{3(x - 3)(\sqrt{3x + 7} + \sqrt{2x + 10})} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{4x + 13} + \sqrt{x + 22}}{3(\sqrt{3x + 7} + \sqrt{2x + 10})} = \frac{5}{12}.$$

Пример 14 Найдем $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x - 2} - \sqrt{x})$.

Решение: Представим данный предел в виде дроби:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x - 2} - \sqrt{x}) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{x - 2} - \sqrt{x})}{1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{x - 2} - \sqrt{x}) \cdot (\sqrt{x - 2} + \sqrt{x})}{\sqrt{x - 2} + \sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-2}{\sqrt{x - 2} + \sqrt{x}} = 0.$$

Пример 15 Найдем $\lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{1}{x - 2} - \frac{4}{x^2 - 4} \right)$.

Решение: Так как $\frac{1}{x - 2} - \frac{4}{x^2 - 4} = \frac{x - 2}{x^2 - 4} = \frac{1}{x + 2}$; искомый предел равен следующему $\lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{1}{x - 2} - \frac{4}{x^2 - 4} \right) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{x + 2} = \frac{1}{4}.$

Мы рассмотрим только два самых важных предела, которые называются *замечательными пределами*.

1 Первым замечательным пределом называется $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

(1)

Для доказательства формулы (1) рассмотрим круг радиуса R с центром в точке O (рисунок 8). Пусть OB – подвижный радиус, образующий угол x ($0 < x < \frac{\pi}{2}$) с осью Ox . Из геометрических соображений следует, что площадь

треугольника OAB меньше площади сектора AOB , которая в свою очередь меньше площади прямоугольного треугольника AOC , то есть
 $S_{\triangle OAB} < S_{\text{сек } AOB} < S_{\triangle AOC}$. Так как

$$S_{\triangle OAB} = \frac{1}{2} R \cdot R \cdot \sin x = \frac{1}{2} R^2 \sin x; S_{\text{сек } AOB} = \frac{1}{2} R^2 x; S_{\triangle AOC} = \frac{1}{2} AO \cdot OC = \frac{1}{2} AO \cdot (AO \cdot \operatorname{tg} x) = \frac{1}{2} R^2 \operatorname{tg} x,$$

то имеем $\frac{1}{2} R^2 \sin x < \frac{1}{2} R^2 x < \frac{1}{2} R^2 \operatorname{tg} x$, откуда, разделив части двойного

неравенства на $\frac{1}{2} R^2 \sin x > 0$, получим $1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x}$, или $\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1$.

Так как функции $\cos x$ и $\frac{\sin x}{x}$ четные, то полученные неравенства справедливы и при $-\frac{\pi}{2} < x < 0$. Переходя к пределу при $x \rightarrow 0$, получим

$$\lim_{x \rightarrow 0} 1 = 1, \lim_{x \rightarrow 0} \cos x = 1.$$

На основании признака существования предела промежуточной функции

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

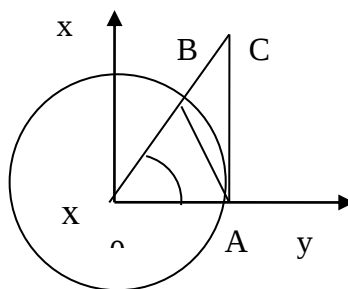


Рисунок 8

Пример 16 Найдём $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 6x}{4x} = 1$.

Решение: Так как $\frac{\sin 6x}{4x} = \frac{3 \cdot \sin 6x}{3 \cdot 4x} = \frac{3 \sin 6x}{2 \cdot 6x}$, то $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 6x}{4x} = \frac{3}{2}, \frac{3}{2}$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 6x}{6x} = \frac{3}{2} \cdot 1 = \frac{3}{2}.$$

Пример 17 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2 \frac{x}{2}}{x^2} = \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin^2 \frac{x}{2}}{x^2} \right)^2 = \frac{1}{2} \cdot 1^2 = \frac{1}{2}.$

Пример 18

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - \sin x}{2x^3} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\sin x}{\cos x} - \sin x}{2x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x (1 - \cos x)}{2x^3 \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\cos x} \cdot \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{1 - \cos x}{2x^2} \right) = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\cos x} \cdot \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{\sin^2 \frac{x}{2}}{x^2} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\cos x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 \frac{x}{2}}{4 \cdot \frac{x^2}{2}} = 1 \cdot 1 \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

2 Вторым замечательным пределом называется $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x} \right)^x = e$ (2)

Чтобы доказать равенство (2), вспомним, прежде всего, что предел не зависит от выбора последовательности значений переменного, стремящегося к бесконечности. Составим эту последовательность из натуральных чисел 1; 2; 3; ... и найдем соответствующие функции

$$f(x) = \left(1 + \frac{1}{x} \right)^x : f(1) = \left(1 + \frac{1}{1} \right)^1 = 2; f(2) = \left(1 + \frac{1}{2} \right)^2 = \left(\frac{3}{2} \right)^2; f(3) = \left(1 + \frac{1}{3} \right)^3 = \left(\frac{4}{3} \right)^3; \dots; f(n) = \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n.$$

Теперь воспользуемся биномом Ньютона :

$$(a+b)^n = a^n + n \cdot a^{n-1}b + \frac{n(n-1)}{2!} a^{n-2}b^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!} a^{n-3}b^3 + \dots + \frac{n(n-2)(n-2) \dots 2}{(n-1)!} ab^{n-1} + b^n$$

Подставляя в выражение $f(n) = \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n$ вместо a единицу, а вместо b дробь $\frac{1}{n}$,

мы получим следующее:

$$\begin{aligned} f(n) &= 2 + \frac{1}{2!} \cdot \frac{n-1}{n} + \frac{1}{3!} \cdot \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-2}{n} + \frac{1}{4!} \cdot \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-2}{n} \cdot \frac{n-3}{n} + \dots + \frac{1}{(n-1)!} \cdot \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-2}{n} \cdot \dots \cdot \frac{2}{n} + \\ &+ \frac{1}{n!} \cdot \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-2}{n} \cdot \dots \cdot \frac{1}{n} \end{aligned}$$

(3)

Каждая из дробей $\frac{n-1}{n}; \frac{n-2}{n}; \frac{n-3}{n}; \dots$ меньше единицы. Поэтому, если в последней сумме эти дроби заменить единицами, то получим число, большее

$$f(n) : f(n) < 2 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n} \quad (4)$$

Вернемся теперь снова к сумме (3). В ней все слагаемые положительные, поэтому если часть последних слагаемых отбросить и оставить k первых слагаемых, то сумма уменьшится:

$$2 + \frac{1}{2!} \cdot \frac{n-1}{n} + \frac{1}{3!} \cdot \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-2}{n} + \dots + \frac{1}{k!} \cdot \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-2}{n} \cdot \dots \cdot \frac{n-k+1}{n} < f(n) \quad (6)$$

Устремим в этом неравенстве n к бесконечности. Так как каждая из дробей $\frac{n-1}{n}; \frac{n-2}{n}; \frac{n-3}{n}; \dots$ стремится при этом к единице, то в результате

получится такое неравенство: $2 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{k!} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} f(n)$. Из вышеуказанного вытекает, что k – число слагаемых слева – может быть любым, поэтому неравенство сохранится, если k устремить в бесконечность. Но тогда слева получится бесконечный ряд, то есть число e . Таким образом,

$$e \leq \lim_{n \rightarrow \infty} f(n) \quad (7)$$

Из неравенств (6) и (7) следует, что $\lim_{n \rightarrow \infty} f(n) = e$, что и требовалось доказать.

Число e (число Эйлера) играет весьма важную роль в математическом анализе. График функции $y=e^x$ получил название *экспоненты* (рисунке 9). Широко используются логарифмы по основанию e , называемые *натуральными*, которые обозначаются символом: $\log_e x = \ln x$.

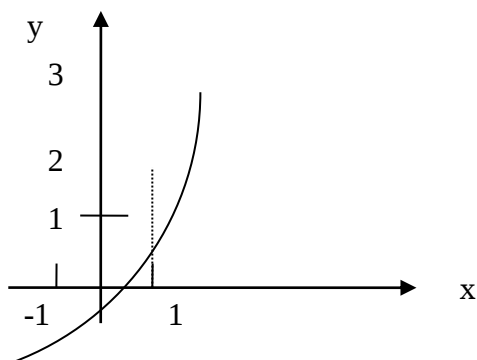


Рисунок 9

3 НЕПРЕРЫВНОСТЬ ФУНКЦИИ

1. ° Если аргумент функции получает приращение $\Delta x = x_2 - x_1$, что значение функции при новом значении аргумента равно $f(x + \Delta x) = y + \Delta y$. Отсюда приращение функции

$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$, т.е. приращение функции равно разности наращенного значения функции (при наращенном значении аргумента) и начального значения функции.

Приращение аргумента может быть не только положительным, но и отрицательным числом.

2. ° Определение непрерывности функции:

а) функция $y=f(x)$ непрерывна в точки $x=a$, если пределы слева и справа равны и равны значению в этой точке, т.е. $\lim_{x \rightarrow a-0} f(x) = \lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = f(a)$.

б) функция $y=f(x)$ непрерывна в точке $x=a$, если она определена в этой точке и если бесконечно малому приращению аргумента соответствует бесконечно малое приращение функции, т.е. $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta y = 0$ вблизи точки a .

3. ° Значения аргумента, которые не удовлетворяют условиям непрерывности, называют точками разрыва функции. При этом различают два рода разрыва функции. Если при $x \rightarrow a$ слева функция имеет конечный предел k_1 , а при $x \rightarrow a$ справа функция имеет конечный предел k_2 и $k_1 \neq k_2$, то говорят что функция при $x=a$ имеет разрыв первого рода.

Разность $|k_1 - k_2|$ определяет скачек функции в точке $x=a$. Значение функции при $x=a$ при этом может быть равно какому угодно числу k_3 .

Если $k_1 = k_2 \neq k_3$, то говорят, что функция имеет в точке a устранимый разрыв.

Если при $x \rightarrow a$ справа и слева предел функции не существует или равен бесконечности,

т.е. $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$, то говорят, что при $x=a$ функция имеет разрыв второго рода.

Решение типовых примеров.

№1 Вычислить четность (нечетность) функции: а) $f(x) = x - \operatorname{ctg}^3 x$; б) $y = x \cdot \frac{2^x + 1}{2^x - 1}$

Решение: а) $f(-x) = -x - \operatorname{ctg}^3(-x) = -x + \operatorname{ctg}^3 x = -(x - \operatorname{ctg}^3 x)$. Т.к. $f(-x) = -f(x)$, то данная функция нечетна.

б) $f(-X) = (-X) \cdot \frac{2^{-x} + 1}{2^{-x} - 1} = x \cdot \frac{2^x + 1}{2^x - 1}$ (после преобразования). Т.к. $f(-x) = f(x)$, то данная функция четная.

№2 Найти область определения функции: а) $y = \sqrt{x} - \lg(2x-3)$; б) $y = \arccos \frac{2x}{1+x^2}$.

Решение: а) Область определения x найдем из системы неравенств:

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ 2x - 3 > 0 \end{cases}$$

Откуда $x > \frac{3}{2}$ или $D(y) = \left(\frac{3}{2}; \infty\right)$.

б) Область определения найдем из неравенства $\left| \frac{2x}{1+x^2} \right| \leq 1$, откуда $-1 \leq \frac{2x}{1+x^2} \leq 1$. Т.к. при любом x $1+x^2 > 0$, то перейдем к равносильному неравенству $-1-x^2 \leq 1+x^2$, откуда

$$\begin{cases} 2x \geq -1-x^2 \\ 2x \leq 1+x^2 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} (1+x)^2 \geq 0 \\ (1-x)^2 \geq 0 \end{cases}$$

Очевидно, что полученные неравенства справедливы при любом X т.е. область определения функции $D(y)=(-\infty; \infty)$.

№ 3 Найти пределы:

а) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x^2 + 6x - 16}$; б) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{4-x} - \sqrt{4+x}}{3x}$; в) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x + \sin 4x}{6x}$; г) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^4 - 4x^2 + 1}{2 + 5x - 2x^4}$;
 д) $\lim_{x \rightarrow 1} (\frac{1}{x^2 - 1} - \frac{2}{x - 1})$; е) $\lim_{x \rightarrow \infty} (\frac{x+4}{x})^{5x}$; ж) $\lim_{x \rightarrow \infty} (\frac{x+2}{x+1})^{1+3x}$.

Решение:

а) Разложим на множители числитель и знаменатель т.к. здесь неопределенность вида $(\frac{0}{0})$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x^2 + 6x - 16} = (\frac{0}{0}) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x+2)}{(x-2)(x+8)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x+2}{x+8} = \frac{4}{10} = 0.4.$$

б) Умножим числитель и знаменатель на выражение, сопряженное числителю:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{4-x} - \sqrt{4+x}}{3x} = (\frac{0}{0}) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{4-x} - \sqrt{4+x})(\sqrt{4-x} + \sqrt{4+x})}{3x(\sqrt{4-x} + \sqrt{4+x})} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2x}{3x(\sqrt{4-x} + \sqrt{4+x})} = -\frac{2}{3}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{4-x} + \sqrt{4+x}} = -\frac{1}{6}$$

в) Применим первый замечательный предел, выполнив соответствующие преобразования:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x + \sin 4x}{6x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{6x} + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 4x}{6x} = \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{3x} + \frac{2}{3} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 4x}{4x} = \frac{7}{6}$$

г) Разделим числитель и знаменатель на x^4 т.к. здесь неопределенность вида $(\frac{\infty}{\infty})$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^4 - 4x^2 + 1}{2 + 5x - 2x^4} = (\frac{\infty}{\infty}) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3 - \frac{4}{x^2} + \frac{1}{x^4}}{\frac{2}{x^4} + \frac{5}{x^3} - 2} = -\frac{3}{2}, \text{ т.к. величины } \frac{2}{x^4}, \frac{1}{x^3}, \frac{1}{x^2} \text{ есть}$$

величины при $x \rightarrow \infty$ бесконечно малые.

д) приведем к общему знаменателю, т.к. здесь неопределенность вида $(\infty - \infty)$

$$\lim_{x \rightarrow 1} (\frac{1}{x^2 - 1} - \frac{2}{x - 1}) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - 2(x+1)}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-2x - 1}{x^2 - 1} = \infty \text{ при } x \rightarrow 1 \text{ знаменатель стремится к } 0$$

е) Разделим почленно на x и применим второй замечательный предел:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+4}{x} \right)^{5x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{4}{x} \right)^{5x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{4}{x} \right)^{\frac{x}{4}} \right]^{20} = e^{20} \text{ т.к. если сделать замену } x=4t,$$

$$\text{то при } x \rightarrow \infty, t \rightarrow \infty \text{ и } \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{4}{x} \right)^{\frac{x}{4}} \right]^{20} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{4}{t} \right)^t \right]^{20} = e^{20}$$

ж) Выделим целую часть и почленно разделим числитель на знаменатель

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+1}{x+1} \right)^{1+3x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+1+1}{x+1} \right)^{1+3x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x+1} \right)^{1+3x}$$

Сделаем замену $x+1=t$, тогда при $x \rightarrow \infty, t \rightarrow \infty$ и предел примет вид при $x=1-t$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{1}{t} \right)^t \right]^3 \lim_{t \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{t} \right)^{-2} = e^3 \text{ т.к. второй предел неопределенности не представляет и равен } 1$$

№ 4 Найти точки разрыва функций и определить их вид:

$$f(x) = \begin{cases} \sin 2x & \text{при } x \leq 0; \\ x^3 & \text{при } 0 < x \leq 2, \\ \frac{3x}{x-6} & \text{при } x > 2. \end{cases}$$

Решение:

Т.к. Данная функция не определена в точке $x=6$, то данная точка является «подозрительной» на разрыв. Вычислим односторонние пределы в этой точке $\lim_{x \rightarrow 6-0} \frac{3x}{x-6} = -\infty$; $\lim_{x \rightarrow 6+0} \frac{3x}{x-6} = +\infty$. Т.к. оба предела равны бесконечности, следовательно, точка $x=6$ является точкой разрыва второго ряда.

Также «подозрительными» на разрыв являются те точки, в которых изменяется аналитическое выражение функции, т.е. точки $x=0$ и $x=2$. Вычислим односторонние пределы в этих точках.

Для точки $x=0$ имеем: $\lim_{x \rightarrow 0} \sin 2x = 0$; $\lim_{x \rightarrow 0} x^3 = 0$, x_0 – точка непрерывности

Для точки $x=2$ имеем: $\lim_{x \rightarrow 2-0} x^3 = 8$; $\lim_{x \rightarrow 2+0} \frac{3x}{x-6} = -\frac{6}{4} = -\frac{3}{2}$

Односторонние пределы функции в точке $x=2$ существует, но не равны между собой. Следовательно, те точки являются точкой разрыва первого ряда.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПРОИЗВОДНОЙ

1.1 Дифференцируемость функции и производная. Производной функции $y = f(x)$ называется предел отношения приращения функции к приращению аргумента, когда приращение аргумента стремиться к нулю, т.е.

$$y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

В основу операции по нахождению производной (дифференцированию) функции кладется ее определение.

Пример 1. При равномерном движении пройденный путь пропорционален времени, т.е. $S(t) = Vt$, где V – постоянная величина (скорость). Если только движение прямолинейно, но не равномерно, то скорость в каждый момент времени равная. Скорость тела в момент времени t называют мгновенной скоростью в точке t и обозначается $V(t)$.

Предположим, что к моменту времени t тело прошло путь $S(t)$, а к моменту времени $t + \Delta t$ (Δt – малый промежуток времени) – путь $S(t + \Delta t)$, тогда за время Δt оно прошло путь $S(t + \Delta t) - S(t)$, и средняя скорость тела будет на этом участке ΔV . Пусть промежуток времени Δt уменьшается и стремится к нулю, т.е. $\Delta t \rightarrow 0$, тогда и путь, пройденный за это время, так же стремится к нулю, а средняя скорость $V_{\text{ср}}$ за промежуток времени Δt стремится к скорости тела в момент времени t . Используя определение предела, можно записать: $V(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{S(t + \Delta t) - S(t)}{\Delta t}$. Эта формула является строгим определением мгновенной скорости и одновременно дает способ для ее вычисления.

Отказавшись от физических терминологий, перейдем к стандартным обозначениям. Вместо «путь $S(t)$ » будем говорить «функция $f(x)$ », а вместо «скорость» – «производная функции $f(x)$ в точке x ».

Итак, по определению $f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$.

Это позволяет вывести свойства и установить формулы производной.

Необходимые навыки для этого приобретаются на примерах дифференцирования простейших функций.

1.2° Начальные формулы производной.

а) Основные свойства дифференцирования.

1) для $y = C$; $C' = 0$ ($C = \text{const}$); 2) для $y = x$; $y' = 1$; 3) для $y = U \pm V$; $y' = U' \pm V'$, где $U = U(x)$, $V = V(x)$; 4) $y = mu$; $y' = mu'$ ($m = \text{const}$); 5) $y = UV$; $y' = U'V + UV'$; 6) $y = \frac{U}{V}$; $y' = \frac{U'V - UV'}{V^2}$; $V \neq 0$.

б) Основные формулы дифференцирования

$$1) (x^n)' = n x^{n-1}; \quad 2) (\sqrt[n]{U})' = \frac{U'}{n \sqrt[n]{U^{n-1}}};$$

$$3) (U^n)' = n U^{n-1} \cdot U'; \quad 4) (\sqrt[n]{u})' = \frac{u'}{n \sqrt[n]{u^{n-1}}};$$

$$5) \left(\frac{U}{C}\right)' = \frac{1}{C} U' \quad (C = \text{const}) \quad \text{если } y = f(x); \text{ А } U = \varphi(x), \text{ то } y = f(\varphi(x)),$$

т.е. y – сложная функция от функции и $y' = f'(U) \times \varphi'(x)$

$$6) \left(\frac{C}{V}\right)' = -\frac{CV'}{V^2} \quad (C = \text{const})$$

1.3° Примеры

1) Используя определение производной, найти y' , если $y = x^2 + 8x + 5$.

$$\blacktriangle y + \Delta y = (x + \Delta x)^2 + 8(x + \Delta x) + 5; \quad \Delta y = ((x + \Delta x)^2 + 8(x + \Delta x) + 5) - (x^2 + 2\Delta x \times x + \Delta x^2 + 8x + 8\Delta x + 5 - x^2 - 8x - 5 = 2x\Delta x + 8\Delta x + \Delta x^2);$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2x\Delta x + \Delta x^2 + 8\Delta x}{\Delta x} = 2x + 8 + \Delta x; \quad \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (2x + 8 + \Delta x) = 2x + 8; \quad y' = 2x + 8$$

2) Найти производную сложной функции $y = \sqrt[4]{3 - x^2}$

$$\blacktriangle y = \sqrt[4]{3 - x^2} = (3 - x^2)^{\frac{1}{4}}; \quad y' = \frac{1}{4} (3 - x^2)^{-\frac{3}{4}} (3 - x^2)' = \frac{1}{4} (3 - x^2)^{-\frac{3}{4}} \times (-2x) = -\frac{x}{2\sqrt[4]{(3 - x^2)^3}}$$

1.4° Формулы производных от некоторых трансцендентных функций.

$$\begin{aligned} (\sin x)' &= \cos x; & (a^x)' &= a^x \ln a; & (\ln x)' &= \frac{1}{x} \\ (\sin U)' &= U' \cos U; & (e^x)' &= e^x; & (\ln U)' &= \frac{U'}{U}; \\ (\cos x)' &= -\sin x; & (e^U)' &= U' e^U; & (\log_a U)' &= \frac{U'}{U \ln a} \end{aligned}$$

$$(\cos U)' = U' \sin U; \quad (\log_a x)' = \frac{\log_a e}{x} = \frac{1}{x \ln a}$$

1.5° Примеры

1) Найти производные следующих функций: а) $y = \sqrt{\ln x - 1} + \ln(\sqrt{x} + 1)$;

$$\text{б) } y = 5^{x^3} \ln^2 x; \quad \text{в) } y = \frac{\sin^2 x}{\sqrt{\cos 2x}}.$$

$$\blacktriangle \text{ а) } y = \sqrt{\ln x - 1} + \ln(\sqrt{x} + 1); \quad y' = \frac{1}{2\sqrt{\ln x - 1}} \times (\ln x + 1)' + \frac{1}{\sqrt{x} + 1} (\sqrt{x} + 1)' =$$

$$\frac{1}{2\sqrt{\ln x + 1}} \times (\ln x + 1)' + \frac{1}{\sqrt{x} + 1} (\sqrt{x} + 1)' = \frac{1}{2\sqrt{\ln x + 1}} \times \frac{1}{x} + \frac{1}{\sqrt{x} + 1} \times \frac{1}{2\sqrt{x}} =$$

$$\frac{1}{2\sqrt{x}} \left(\frac{1}{\sqrt{x(\ln x + 1)}} + \frac{1}{\sqrt{x} + 1} \right);$$

б) $y = 5^{x^3} \ln^2 x$; $y' =$

$$(5^{x^3})' \ln^2 x + 5^{x^3} (\ln^2 x)' = [5^{x^3} \ln 5(x^3)'] \ln^2 x + 5^{x^3} [2 \ln x (\ln x)'] =$$

$$5^{x^3} \ln 5 \times 3x^2 \ln^2 x + 5^{x^3} \times 2 \ln x \times \frac{1}{x} = 5^{x^3} \ln x (3 \ln 5 x^2 \ln x + \frac{2}{x});$$

в) $y = \frac{\sin^2 x}{\sqrt{\cos 2x}}$; $y' = \frac{(\sin^2 x)' \times \sqrt{\cos 2x} - \sin^2 x (\sqrt{\cos 2x})'}{(\sqrt{\cos 2x})^2}$; учитывая, что

$$(\sin^2 x)' = 2 \sin x (\sin x)' = 2 \sin x \cos x = \sin 2x;$$

$$(\sqrt{\cos 2x})' = \frac{1}{2\sqrt{\cos 2x}} \times (\cos 2x)' = \frac{1}{2\sqrt{\cos 2x}} \times (-\sin 2x) \times (2x)' = -\frac{\sin 2x}{\sqrt{\cos 2x}}.$$

Получим после преобразования $y' = \frac{\sin 2x \times \cos^2 x}{\sqrt{\cos^3 2x}}.$

1.6° Дифференцирование неявной функции

Выше было рассмотрено дифференцирование явных функций, заданных в виде $y = f(x)$. Рассмотрим дифференцирование неявной функции, заданной уравнением $F(x; y) = 0$.

Для нахождения производной функции y , заданной неявно, нужно продифференцировать обе части уравнения, рассматривая y как функцию от x , а затем из полученного уравнения найти производную y' . Фактически этим методом мы пользовались при выводе производных $y = e^x$; $y = x^n$ и других.

Пример. Найти производную y' не решая уравнения $x^3 - x^2y - x^2y^2 + a = 0$ относительно y .

▲ Так как в правой части уравнения стоит нуль, а производная постоянной равна нулю, то имеем: $\frac{d}{dx}(x^3 - x^2y - x^2y^2 + a) = 0$; применяя почленное дифференцирование, находим: $(x^3 - x^2y - x^2y^2 + a)' = (x^3)' - (x^2y)' - (x^2y^2)' + (a)' = 3x^2 - 2xy - x^2y' - 2xy^2 - 4x^2y^3y' = 0$; Собирая в левой части члены, содержащие производную y' и перенося остальные члены в правую часть, имеем: $y'(x^2 + 4x^2y^3) = 3x^2 - 2xy - 2xy^4$;

$$y' = \frac{3x^2 - 2xy - 2xy^4}{x^2 + 4x^2y^3} = \frac{3x - 2y - 2y^4}{x - 4xy^3}.$$

2. ДИФФЕРЕНЦИАЛ И ЕГО ПРИЛОЖЕНИЯ

Для дифференциала функции $y = f(x)$ применяется формула $dy = f'(x)dx$ или $dy = y'dx$.

Дифференциал применяется для приближенного вычисления наращенного значения функции по следующей формуле: $f(x+\Delta x) \approx f(x) + df(x)$ или $f(x-\Delta x) \approx f(x) + f'(x)\Delta x$.

Примеры.

1. Найти дифференциал, функции $y = e^x(x+3)$.

▲ $dy = y'dx$; $dy = [e^{-x}([+3))]' dx$ ①. Найдем производную: $[e^{-x}(x+3)]' = (e^{-x})'(x+3) + e^{-x}(x+3)' = -e^{-x}(x+3) + e^{-x} = -e^{-x}(x+2)$.

Найденную производную подставим в равенство ① и получим: $dy = -e^{-x}(x+2)dx$.

2. Зная, что $\ln 99 = 4,59512$, найти без таблицы $\ln 100$, пользуясь дифференциалом логарифмической функции.

▲ Имеем $y = \ln x$, $dy = \frac{1}{x} \Delta x$, значит, $\ln(x+\Delta x) \approx \ln x + \frac{\Delta x}{x}$. В частности, при $\Delta x = 1$ формула дает: $\ln 100 = \ln(99+1) \approx 4,59512 + \frac{1}{99} \times 1 \approx 4,60522$. По таблице находим $\ln 100 = 4,60517$. Как видим, ошибка не значительна.

3. Вычислить $\sqrt{26}$.

▲ Имеем $y = \sqrt{x}$; $dy = \frac{1}{2\sqrt{x}} dx$. Пусть $x = 25$; $\Delta x = 1$, тогда по формуле $f(x+\Delta x) \approx$

$f(x) + f'(x)\Delta x$ имеем $\sqrt{26} = \sqrt{25+1} \approx \sqrt{25} + \frac{1}{2\sqrt{25}} \times 1 = 5 + \frac{1}{10} = 5,1$.

По таблицам квадратов находим $\sqrt{26} = 5,0990$, ошибка не значительна.

3 УРАВНЕНИЕ КАСАТЕЛЬНОЙ И НОРМАЛИ К КРИВОЙ $y = f(x)$

Уравнение касательной к кривой $y = f(x)$ в точке $(x_0; y_0)$ имеет вид:
 $y - y_0 = y'_0(x - x_0)$, где $y'_0 = f'(x_0)$, или $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$.

Уравнение нормали к кривой $y = f(x)$ в точке $(x_0; y_0)$ имеет вид:
 $y - y_0 = \frac{1}{y'_0}(x - x_0)$, или $(x - x_0) + y'_0(y - y_0) = 0$, или $y = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0) + y_0$.

Примеры.

1. Составить уравнение касательной и нормали к кривой $y = \ln(x-2)$ в точке $x_0 = 3$.

▲ Определим ординату этой точки. В уравнение кривой поставим вместо x число 3; $\ln(3-2) = \ln 1 = 0$; $y = 0$.

Далее найдем угловой коэффициент касательной в данной точке, для чего и найдем значение производной в точке $(3; 0)$: $y' = \frac{1}{x-2}$; $y'_0 = \frac{1}{3-2} = 1$.

Таким образом уравнение касательной имеет вид: $y - 0 = 1(x - 3)$ или $x - y - 3 = 0$.

Уравнение нормали: $y - 0 = -\frac{1}{1}(x - 3)$ или $x + y - 3 = 0$.

4 ВОЗРАСТАНИЕ И УБЫВАНИЕ

Признаком возрастания функции $y = f(x)$ в некотором промежутке (а; b) является положительное значение ее производной для всех значений x в этом промежутке, т.е. $f'(x) > 0$.

Аналогично, признаком убывания функции $y = f(x)$ служит значение производной во всех точках рассматриваемого промежутка, т.е. $f'(x) < 0$.

Другое важное приложение производной – задача о нахождении наибольших и наименьших (экстремальных) значений. Оно основано на следующем простом факте:

Если функция принимает в некоторой точке экстремальное значение, и производная в этой точке существует, то она (т.е. производная) равна нулю.

Пример. В тюрьме города Дрюкова собрались строить железную камеру для содержания особо опасных преступников. Какое наименьшее количество железа нужно для этой цели. Если по санитарным условиям высота камеры должна быть не менее 2,5 м, а ее площадь не менее 6 м²?

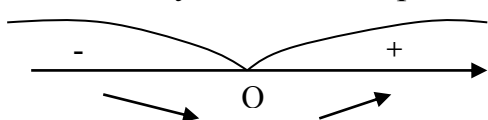
▲ Количество железа пропорционально площади поверхности камеры, которая, как и обыкновенная комната, имеет вид прямоугольного параллелепипеда. Обозначим длину камеры через x , а ширину – через y . Тогда пол и потолок имеют площадь xy каждый, две боковые стенки по $2,5x$, две другие по $2,5y$. Общая площадь получается $S = 2xy + 5x + 5y$. При этом, согласно санитарным нормам, $xy = 6$. Отсюда выразим y и подставим в выражение для $S = 2 \times 6 + (5x + \frac{5 \times 6}{x}) = 12 + 5(x + \frac{6}{x})$.

Итак, мы учли все данные, но величину x еще можно выразить произвольно, т.е. она является **переменной величиной**. Ее нужно выбрать так, чтобы значение S получилось наименьшим. Согласно теорем для минимизации функции $S(x)$ следует приравнять нулю производную $S'(x)$. Пользуясь правилами вычисления

производных, находим: $S' = 0 + 5(x' + (\frac{6}{x})') = 5(1 - \frac{6}{x^2})$. Из уравнения $1 - \frac{6}{x^2} = 0$ находим, что $x = \sqrt{6}$. При этом значении x площадь будет наименьшей. Она равна: $S = 12 + 10\sqrt{6} \approx 36,5$ (м²).

Пример Исследовать на возрастание и убывание функцию $y = x^2 + 2$.

▲ Найдем производную функции: $y' = 2x$. Определим корни производной (положив $f'(x) = 0$), $2x = 0$; $x = 0$. Разобьем область существования функции (в данном случае на два промежутка) $(-\infty; 0)$ и $(0; +\infty)$. В первом промежутке



при всех значениях $x < 0$ $f'(x) < 0$, т.е. функция убывает. Во втором промежутке – при всех

значениях $x > f'(x) > 0$, т.е. функция возрастает.

Есть и другие, не менее важные, приложения производной. Например, в геометрии часто используется тот факт, что производная от функции $y = f(x)$ в точке $x = a$, равна тангенсу угла наклона касательной к графику функции $f(x)$ в точке $x = a$; $y' = \operatorname{tg} \alpha$.

Пример. Применяя формулы и правила дифференцирования, найти производную функции $y = x\sqrt{x}(3\ln x - 2)$.

▲ Перепишем заданную функцию в виде $y = x^{\frac{3}{2}}(3\ln x - 2)$. Тогда:

$$y' = \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}(3\ln x - 2) + x^{\frac{3}{2}} \cdot \frac{3}{x} = \frac{9}{2}x^{\frac{1}{2}}\ln x - 3x^{\frac{1}{2}} + 3x^{\frac{1}{2}} = \frac{9}{2}\sqrt{x}\ln x.$$

Пример. Логарифмируя предварительно данную функцию:

$$y = \frac{x^2\sqrt{x+1}}{(x-1)^3 \cdot \sqrt[5]{5x-1}}, \text{ найти ее производную.}$$

▲ Логарифмируем функцию $\ln y = 2\ln x + \frac{1}{2}\ln(x+1) - 3\ln(x-1) - \frac{1}{5}\ln(5x-1)$.

Дифференцируем по x левую и правую части, получим

$$\frac{y'}{y} = \frac{2}{x} + \frac{1}{2(x+1)} - \frac{3}{x-1} - \frac{5}{(5x-1)5}, \text{ отсюда получим:}$$

$$y' = \frac{x^2\sqrt{x+1}}{(x-1)^3 \cdot \sqrt[5]{5x-1}} \cdot \left(\frac{2}{x} + \frac{1}{2(x+1)} - \frac{3}{x-1} - \frac{1}{5x-1} \right).$$

Пример. Найти производную y' неявной функции $x^3 - x^2y - x^2y^4 + a = 0$, не решая уравнения относительно y .

▲ Так как в правой части стоит нуль, а производная постоянной равна 0, то имеем: $\frac{d}{dx}(x^3 - x^2y - x^2y^4 + a) = 0$; применяя почленное дифференцирование,

находим: $3x^2 - 2xy - x^2y' - 2xy^4 - 4x^2y^3y' = 0$; собирая в левой части уравнения члены, содержащие производную y' и перенося остальные члены в правую часть, имеем $y'(x^2 - 4x^2y^3) = 3x^2 - 2xy - 2xy^4$, отсюда:

$$y' = \frac{3x^2 - 2xy - 2xy^4}{x^2 - 4x^2y^3} = \frac{x(3x - 2y - 2y^4)}{x^2(1 - 4y^3)} = \frac{3x - 2y - 2y^4}{x(1 - 4y^3)}.$$

Пример. Найти $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^n}{e^x}$, если n – целое положительное число.

▲ В данном случае имеем неопределенность $\frac{\infty}{\infty}$. Применим правило Лопиталя – Бернулли n раз:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^n}{e^x} = \frac{\infty}{\infty} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{n \cdot x^{n-1}}{e^x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{n(n-1) \cdot e^{n-2}}{e^x} = \dots = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{n(n-1)(n-2) \dots 1}{e^x} = 0.$$

Пример 3. Найти

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x}{x \sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{\sin x + \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\sin x}{\cos x + \cos x - x \sin x} = 0.$$

5 ИССЛЕДОВАНИЕ ФУНКЦИЙ С ПОМОЩЬЮ ПРОИЗВОДНОЙ

Уравнение касательной к кривой $y = f(x)$ в точке $(x_0; y_0)$ имеет вид $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$, уравнение нормали к кривой $y = f(x_0) - \frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0)$.

Под исследованием функции понимают изучение их изменений в зависимости от аргумента. На основании исследования функции строят ее график, предварительно изображая характерные точки.

Исследование функции и построение ее графика можно проводить по следующей схеме:

1. Найти область определения функции, ее точки разрыва.
2. Изучить изменение функции при стремлении аргумента к концам промежутка ОДЗ.
3. Найти точки экстремумов, промежутки возрастания и убывания.
4. Вычислить значения экстремумов, построить соответствующие точки.
5. Определить промежутки выпуклости и вогнутости графика, найти точки перегиба.
6. Найти точки пересечения графика с координатными осями.
7. Найти асимптоты графика функции.

Порядок исследования иногда целесообразно выбирать исходя из конкретных особенностей данной функции.

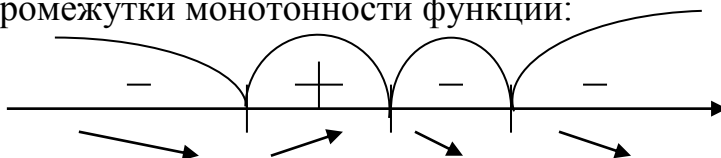
Пример. Построить график функции $y = -\frac{x^3}{(x+1)^2}$. Написать уравнение касательной и нормали в точке $x_0=1$.

▲ 1) Область определения: $(-\infty; -1) \cup (-1; \infty)$. Функция общего вида. Находим предельное значение функции $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x^3}{(x+1)^2} = \infty$; $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-x^3}{(x+1)^2} = -\infty$; $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{-x^3}{(x+1)^2} = \infty$. График функции имеет одну вертикальную асимптоту $x=-1$. Наклонные асимптоты ищем по формулам $k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-x^3}{(x+1)^2 x} = -1$; $b = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - kx) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(-\frac{x^3}{(x+1)^2} + x \right) = 2$. Уравнение наклонной асимптоты $y=-x+2$. График функции пересекает координатные оси в точке $(0;0)$. [если $x=0$, то $y=0$].

2) Находим первую производную: $y' = -\frac{x^2(x+3)}{(x+1)^3}$. Из уравнений $y' = 0, y' = \infty$ получим точки «подозрительные» на экстремум:

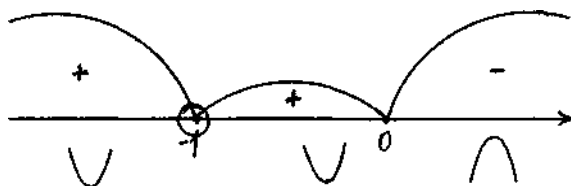
$$\frac{-x^2(x+3)}{(x+1)^3} = 0; x_1 = 0; x_2 = -3; \frac{-(x+3)x^2}{(x+1)^3} = \infty \text{ при } x_3 = -1. \text{ Исследуем эти точки,}$$

т. е. находим промежутки монотонности функции:

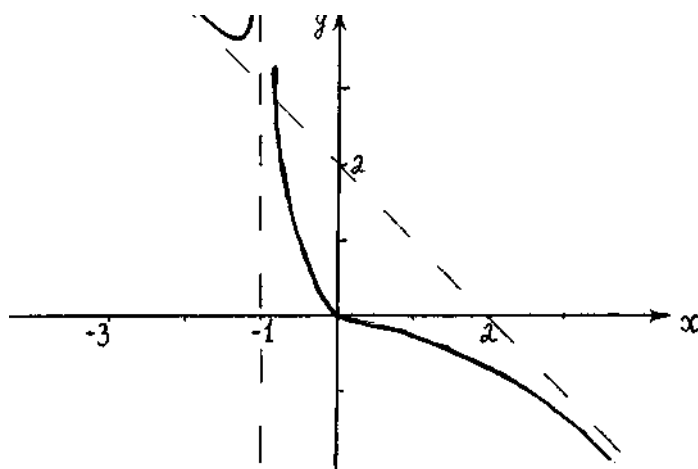


На промежутках $(-\infty; -3) \cup (-1; 0) \cup (0; \infty)$ - функция убывающая (производная на них отрицательна). На $(-3; -1)$ - возрастает (производная на нем положительна). В точке $x=-3$, $y_{\min} = 4,75$; в точке $x=-1$ функция не определена; при $x=0$; $y=0$.

3) Вторая производная $y'' = -\frac{6x}{(x+1)^4}$ обращается в бесконечность при $x=-1$ и $y'' = 0$ при $-\frac{6x}{(x+1)^4} = 0; x = 0$, которая является единственной точкой перегиба на $(-\infty; -1)$ - график вогнутый, на $(-1; 0)$ - график вогнутый, на $(0; \infty)$ - график выпуклый, точка $(0; 0)$ - точка перегиба.



Учитывая полученные результаты, строим график функции $y = -\frac{x^3}{(x+1)^2}$.



Напишем уравнение касательной в точке $x_0=1$: $f(1) = -\frac{1}{4}$; $f'(1) = -1$; $y = -\frac{1}{4} - (x-1)$; $4x + 4y - 3 = 0$. Напишем уравнение нормали в точке $x_0=1$: $y = -\frac{1}{4} + (x-1)$; $4x - 4y - 5 = 0$.

II семестр

1. Интегральное исчисление

1. Интегральные исчисления функции одной переменной

1.1 Нахождение неопределенного интеграла

Неопределенным интегралом от функции $f(x)$ называется выражение вида $\int f(x)dx = F(x) + c$, если $F'(x) = f(x)$. Функция $F(x)$ называется первообразной для заданной функции $f(x)$.

При интегрировании наиболее часто используются следующие методы:

1) Если $\int f(x)dx = F(x) + C$, то $\int f(ax)dx = \frac{1}{a}F(ax) + C$;

$$\int f(x+b)dx = F(x+b) + C,$$

где a и b некоторые постоянные.

2) Подведение под знак дифференциала: $\int f(\varphi(x))\varphi'(x)dx = \int f(\varphi(x))d(\varphi(x))$,
где $\varphi'(x)dx = d(\varphi(x))$

3) Формула интегрирования по частям: $\int UdV = UV - \int VdU$,

где $U=f(x)$ и $V=f(x)$ непрерывно дифференцируемые функции от x . С помощью этой формулы нахождение интеграла $\int UdV$ сводится к отысканию другого интеграла $\int VdU$. Ее применение целесообразно в тех случаях, когда последний интеграл либо проще исходного, либо ему подобен. При этом за U берется такая функция, которая при дифференцировании упрощается, а за dV – та часть подынтегрального выражения, интеграл от которого известен или может быть найден.

Пример 1. Найти интеграл $Y = \int e^x \sin x dx$.

▲ Пусть $U=e^x$; $dV=\sin x dx$; тогда $dU=e^x dx$; $V = \int \sin x dx = -\cos x$.

Следовательно $Y = -e^x \cos x + \int e^x \cos x dx$. Проинтегрируем по частям $\int e^x \cos x dx$:

пусть $U=e^x$, $dV=\cos x dx$, откуда $dU = e^x dx$; $V = \sin x$, получаем $Y = -e^x \cos x + (e^x \sin x - Y)$, т.е. $Y = -e^x \cos x + e^x \sin x - Y$. Применяя дважды операцию интегрирования по частям, мы в правой части снова получим исходный интеграл. Таким образом, приходим к уравнению с неизвестным интегралом Y . Из этого уравнения находим

$$2Y = -e^x \cos x + e^x \sin x \text{ т.е. } Y = \frac{e^x}{2} (\sin x + \cos x) + C$$

Пример 2. Найти интеграл $Y = \int \arctg x dx$;

▲ Пусть $U=\arctg x$; $dV=dx$; тогда $dU = \frac{dx}{1+x^2}$; $V = \int dx = x$.

$$\int \operatorname{arctg} x dx = x \operatorname{arctg} x - \int \frac{x dx}{1+x^2} = x \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} \ln |1+x^2| + C$$

Следовательно,

4)

Интегрирование методом замены

переменной (способ подстановки) является одним из эффективных приемов интегрирования. Замена переменной в неопределенном интеграле производится с помощью подстановок двух видов:

а) $x = \varphi(t)$, где $\varphi(t)$ – монотонная, непрерывно дифференцируемая функция новой переменной t . Формула замены переменной в этом случае имеет вид:

$$\int f(x) dx = \int f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt = \int f(t) du$$

б) $u = \varphi(x)$, где u – новая переменная. Формула замены переменной при такой подстановке:

$$\int f(x) dx = \int f(\varphi(x)) \varphi'(x) dx = \int f(u) du$$

$$\int \frac{\sin \sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x^2}} dx.$$

Пример 3. Найти интеграл

▲ Произведем подстановку $t = \sqrt[3]{x}$, т.е. $x = t^3$. Эта подстановка приведет к тому, что под знаком синуса окажется переменная интегрирования, а не корень из нее. Найдем дифференциал $dx = 3t^2 dt$. Отсюда получаем

$$\int \frac{\sin \sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x^2}} dx = \int \frac{3t^2 \sin t}{t^2} dt = 3 \int \sin t dt = -\cos t + C$$

Ответ должен быть выражен через старую переменную x . Подставляя в

результат интегрирования $t = \sqrt[3]{x}$, получим

$$\int \frac{\sin \sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x^2}} dx = -3 \cos \sqrt[3]{x} + C$$

Пример 4. Найти интеграл

$$\int \frac{(2 \ln x + 3)^3 dx}{x}.$$

▲ Перепишем данный интеграл в виде $\int (2 \ln x + 3)^3 \frac{1}{x} dx$. Т.к.

производная выражения $2 \ln x + 3$ равна $\frac{2}{x}$, а второй множитель $\frac{1}{x}$ отличается от этой производной только постоянным коэффициентом 2, то нужно применить подстановку $2 \ln x + 3 = t$.

$$\frac{dx}{x} = dt; \frac{dx}{x} = \frac{1}{2} dt.$$

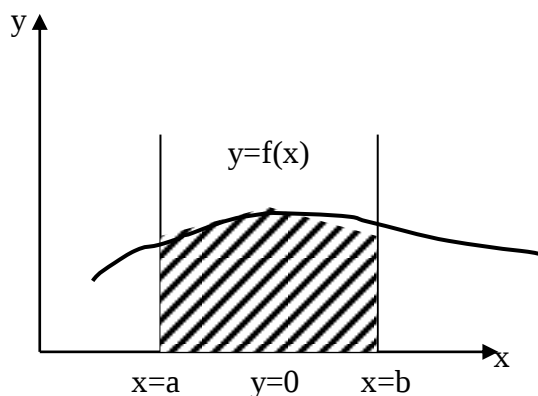
Тогда $2 \ln x + 3 = t$. Следовательно,

$$\int (2 \ln x + 3)^3 \frac{dx}{x} = \int t^3 \frac{1}{2} dt = \frac{1}{2} \int t^3 dt = \frac{1}{8} t^4 + C = \frac{1}{8} (2 \ln x + 3)^4 + C$$

Определенным интегралом от функции $f(x)$ на отрезке $[a; b]$ (или в пределах от a до b) называется предел интегральной суммы при условии, что длина наибольшего из элементарных отрезков ($\max \Delta x_k$) стремится к нулю:

$Y = \int_a^b f(x) dx$; числа a и b соответственно называются нижним и верхним пределами интегрирования.

Если $f(x) > 0$ на $[a; b]$, то определенный интеграл $\int_a^b f(x) dx$ геометрически представляет собой площадь криволинейной трапеции- фигуры, ограниченной линиями $y=f(x)$; $x=a$; $x=b$; $y=0$. См. рис.



Правила вычисления определенного интеграла.

1) Формула Ньютона-Лейбница: $\int_a^b f(x) dx = F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a)$; где $F(x)$ - первообразная для $f(x)$, т.е. $F'(x) = f(x)$.

2) Интегрирование по частям: $\int_a^b U dV = UV \Big|_a^b - \int_a^b V dU$, где $U=U(x)$; $V=V(x)$ - непрерывно дифференцируемые функции на отрезке $[a; b]$.

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt,$$

3) Замена переменной : где $x=\varphi(t)$ - функция непрерывна вместе со своей производной $\varphi'(t)$ на отрезке $\alpha \leq t \leq \beta$, $a = \varphi(\alpha)$; $b = \varphi(\beta)$.

$f\varphi(t)$ - функция, непрерывная на $[\alpha; \beta]$.

Пример 5. Вычислить по формуле Ньютона-Лейбница $\int_{\pi/6}^{\pi/4} \frac{dx}{\cos^2 x}$

$$\blacktriangle \int_{\pi/6}^{\pi/4} \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x \Big|_{\pi/6}^{\pi/4} = \operatorname{tg} \frac{\pi}{4} - \operatorname{tg} \frac{\pi}{6} = 1 - \frac{\sqrt{3}}{3}$$

Пример 6. Вычислить интеграл $\int_0^{2\pi} x \sin \frac{x}{2} dx$.

$\blacktriangle$ Интегрируя по частям, находим

$$\int_0^{2\pi} x \sin \frac{x}{2} dx = -2 \int_0^{2\pi} x d(\cos \frac{x}{2}) = -2x \cos \frac{x}{2} \Big|_0^{2\pi} + 2 \int_0^{2\pi} \cos \frac{x}{2} dx =$$

$$= -2x \cos \frac{x}{2} \Big|_0^{2\pi} + 4 \sin \frac{x}{2} \Big|_0^{2\pi} = 4\pi$$

Пример 7. Вычислить интеграл $\int_0^3 x^2 \sin x dx$.

▲ Дважды интегрируя по частям, получаем

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi/2} x^2 \sin x dx &= - \int_0^{\pi/2} x^2 d(\cos x) = -x^2 \cos x \Big|_0^{\pi/2} + \int_0^{\pi/2} 2x \cos x dx = \\ &= 2 \int_0^{\pi/2} x d(\sin x) = 2x \sin x \Big|_0^{\pi/2} - 2 \int_0^{\pi/2} \sin x dx = \pi + 2 \cos x \Big|_0^{\pi/2} = \pi - 2 \end{aligned}$$

Пример 8. Вычислить $\int_1^e \frac{\ln^2 x}{x} dx$

▲ Пусть $\ln x = t$, тогда $\frac{dx}{x} = dt$. Если $x = 1$, то $t = 0$, если $x = e$, то $t = 1$.
Следовательно $\int_1^e \frac{\ln^2 x}{x} dx = \int_0^1 t^2 dt = \frac{1}{3} t^3 \Big|_0^1 = \frac{1}{3} (1^3 - 0^3) = \frac{1}{3}$

Пример 9. Вычислить $\int_{\sqrt{2}}^2 x^2 \sqrt{8 - 2x^2} dx$

▲ Введем новую переменную по формуле $x = 2 \sin t$. Поскольку $dx = 2 \cos t dt$, $t = \arcsin \frac{x}{2}$, $t_1 = \pi/4$ при $x = \sqrt{2}$, $t_2 = \pi/2$ при $x = 2$, то

$$\begin{aligned} \int_{\sqrt{2}}^2 x^2 \sqrt{8 - 2x^2} dx &= \int_{\pi/4}^{\pi/2} (2 \sin t)^2 \sqrt{8 - 2(2 \sin t)^2} \cdot 2 \cos t dt = \\ &= \int_{\pi/4}^{\pi/2} 4 \sin^2 t \sqrt{8 - 8 \sin^2 t} \cdot 2 \cos t dt = \int_{\pi/4}^{\pi/2} 16 \sqrt{2} \sin^2 t \cos^2 t dt = \int_{\pi/4}^{\pi/2} 4 \sqrt{2} \sin^2 2t dt = \\ &= 2\sqrt{2} \int_{\pi/4}^{\pi/2} (1 - \cos 4t) dt = 2\sqrt{2} \left(t - \frac{\sin 4t}{4} \right) \Big|_{\pi/4}^{\pi/2} = \frac{\sqrt{2}\pi}{2} \end{aligned}$$

1. 2 Вычисление площади плоской фигуры

Площадь криволинейной трапеции, ограниченной кривой $y=f(x)$ [$f(x) \geq 0$], прямыми $x = a$, $x = b$ и отрезком $[a; b]$ оси Ox , вычисляется по формуле

$$S = \int_a^b f(x) dx$$

Площадь фигуры, ограниченной кривыми $y = f_1(x)$ и $y = f_2(x)$ [$f_1(x) \leq f_2(x)$] и прямыми $x = a$ и $x = b$, находится по формуле

$$S = \int_a^b [f_2(x) - f_1(x)] dx.$$

Если кривая задана параметрическими уравнениями $x = x(t)$; $y = y(t)$, то площадь криволинейной трапеции, ограниченной этой кривой, $x = a$, $x = b$ и отрезком $[a; b]$ оси Ox , выражается формулой

$$S = \int_{t_1}^{t_2} y(t)x'(t)dt,$$

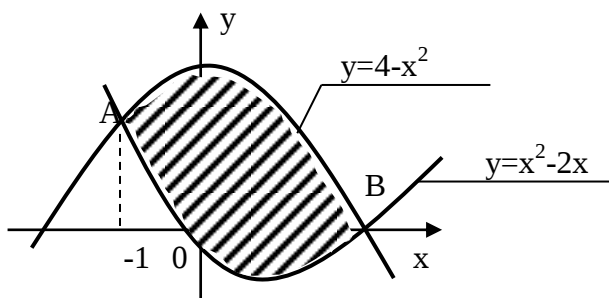
где t_1 и t_2 определяются из уравнений $a = x(t_1)$; $b = x(t_2)$ [$y(t) \geq 0$] при $t_1 \leq t \leq t_2$.

Пример 10. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями $y = 4 - x^2$; $y = x^2 - 2x$.

▲ Выполним рисунок. Координаты точек пересечения кривых $y = 4 - x^2$ и $y = x^2 - 2x$ найдем из системы уравнений:

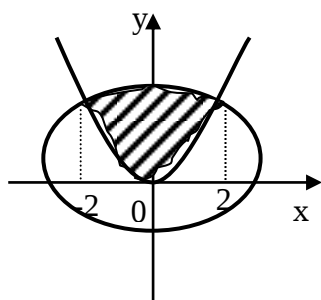
$$\begin{cases} y = 4 - x^2 \\ y = x^2 - 2x \end{cases} \Rightarrow A(-1; 3); B(2; 0)$$

Из рисунка видно, что искомая площадь – это площадь фигуры, заключенная между кривыми; при этом на отрезке $[-1; 2]$ $f_2(x) = 4 - x^2 \geq f_1(x) = x^2 - 2x$.



$$\begin{aligned} S &= \int_{-1}^2 (4 - x^2 - (x^2 - 2x)) dx = \int_{-1}^2 (4 - 2x^2 + 2x) dx = 4x \Big|_{-1}^2 - \frac{2}{3} x^3 \Big|_{-1}^2 + x^2 \Big|_{-1}^2 = \\ &= 4(2 + 1) - \frac{2}{3}(2^3 + 1^3) + 2^2 - 1 = 9 \text{ (кв.ед.)} \end{aligned}$$

Пример 11. вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $x^2 + 4y^2 = 8$ и $x^2 - 4y = 0$.



▲ Данная фигура ограничена сверху дугой эллипса $x^2 + 4y^2 = 8$, снизу – дугой параболы $x^2 = 4y$.

Решая систему уравнений

$$\begin{cases} x^2 + 4y^2 = 8 \\ x^2 - 4y = 0 \end{cases}, \text{ находим } x_1 = -2, x_2 = 2 - \text{ абсциссы}$$

точек пересечения заданных линий. Следовательно, а

$$= -2, b = 2. \text{ Каждое уравнение разрешает относительно } y: \begin{cases} y_1 = \frac{x^2}{4} \\ y_2 = \frac{\sqrt{8 - x^2}}{2} \end{cases}.$$

Таким образом, искомая площадь равна:

$$S = \int_{-2}^2 \left(\frac{\sqrt{8-x^2}}{2} - \frac{x^2}{4} \right) dx = \frac{1}{2} \int_{-2}^2 \sqrt{8-x^2} dx - \frac{1}{4} \int_{-2}^2 x^2 dx$$

. Для вычисления

первого интеграла применим подстановку $x = 2\sqrt{2} \sin t dt$, тогда

$$dx = 2\sqrt{2} \cos t dt \quad \alpha = -\pi/4, \beta = \pi/4$$

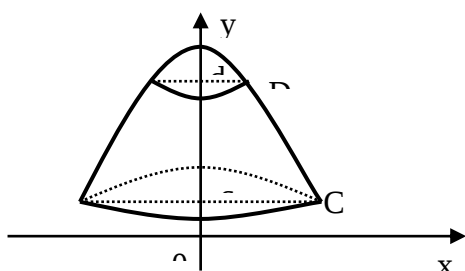
$$= 2 \int_{-\pi/4}^{\pi/4} (1 - \cos 2t) dt = 2 \left(t + \frac{1}{2} \sin 2t \right) \Big|_{-\pi/4}^{\pi/4} = \pi + 2$$

$$S_1 = \frac{1}{2} \int_{-2}^2 \sqrt{8-x^2} dx = \frac{1}{2} \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \sqrt{8-8\sin^2 t} 2\sqrt{2} dt =$$

$$S_2 = \frac{1}{2} \int_{-2}^2 x^2 dx = \frac{1}{4} \frac{x^3}{3} \Big|_{-2}^2 = \frac{4}{3}$$

Поскольку , то $S = S_1 - S_2 = \pi + 2 - \frac{4}{3} = \pi + \frac{2}{3}$ (кв.ед).

1.3 Вычисление объема тела



Объем тела, полученного вращением вокруг оси ОУ криволинейной трапеции CcdD (см. рис.), где CD - дуга кривой $x = f(y)$, определяется по формуле:

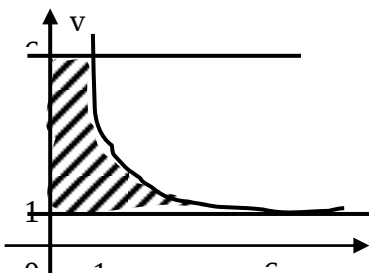
$$V_x = \pi \int_a^b f^2(x) dx \quad \text{или} \quad V_y = \pi \int_c^d \varphi^2(y) dy$$

Пример 12. Найти объём тела, полученного вращением вокруг оси ОУ криволинейной трапеции, ограниченной параболой $x^2 = 4y$, прямой $y = 4$ и осью ОУ.

▲ Замечая, что пределы интегрирования $c=0$; $d=4$, находим:

$$V = \pi \int_0^4 x^2 dy = \pi \int_0^4 4y dy = 2\pi y^2 \Big|_0^4 = 32\pi \text{ (куб.ед.)}$$

Пример 13. Найти объём тела, полученного вращением вокруг оси ОУ криволинейной трапеции, ограниченной гиперболой $xy = 6$, прямыми $y = 1$; $y = 6$ и осью ОУ.



▲ Из уравнения кривой $xy = 6$ находим $x =$

$\frac{6}{y}, x^2 = \frac{36}{y^2}$. Принимая во внимание, что $c = 1$, $d = 6$, по формуле получаем

$$v = \pi \int_1^6 \frac{36}{y^2} dy = 36\pi \int_1^6 \frac{dy}{y^2} = -\frac{36\pi}{y} \Big|_1^6 = -36\pi \left(\frac{1}{6} - 1 \right) = 30\pi (\text{куб.ед.}).$$

1. 4 Несобственные интегралы

Несобственными интегралами называются:

- 1) интегралы с бесконечными пределами;
- 2) интегралы от неограниченных функций.

Несобственный интеграл от функции $f(x)$ в пределах от a до $+\infty$ определяется равенством

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx = \lim_{a \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) dx$$

Если этот предел существует и конечен, то несобственный интеграл называется *сходящимся*; если же предел не существует или равен бесконечности – *расходится*. Аналогично

$$\int_{-\infty}^b f(x) dx = \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^b f(x) dx$$

и

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \lim_{\substack{a \rightarrow -\infty \\ b \rightarrow +\infty}} \int_a^b f(x) dx$$

Если функция $f(x)$ имеет бесконечный разрыв в точке C отрезка $[a; b]$ и непрерывна при $a \leq x < c$ и $c < x \leq b$, то по определению полагают

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \int_a^{c-\alpha} f(x) dx + \lim_{\beta \rightarrow 0} \int_{c+\beta}^b f(x) dx$$

Несобственный интеграл $\int_a^b f(x) dx$, где $f(c) = \infty$, $a < c < b$, называется

сходящимся, если существует оба предела в правой части равенства, и *расходящимся*, если не существует хотя бы один из них.

Пример 14. Вычислить $\int_e^{\infty} \frac{dx}{x \ln x}$

▲ Это несобственный интеграл с бесконечным верхним пределом интегрирования. По формуле (10) имеем:

$$\int_e^{\infty} \frac{dx}{x \ln x} = \lim_{b \rightarrow \infty} (\ln |\ln x|) \Big|_e^b = \lim_{b \rightarrow \infty} \ln |\ln b| - 0 = \infty, \text{ интеграл расходится.}$$

Пример 15. Вычислить $\int_0^{\pi/4} \frac{dx}{\sin^2 x}$.

▲ Интеграл является несобственным интегралом неограниченной функции $f(x) = 1/\sin^2 x$, которая терпит бесконечный разрыв в нижнем пределе при $x = 0$. Согласно формуле (13) получаем

$$\int_0^{\pi/4} \frac{dx}{\sin^2 x} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\varepsilon}^{\pi/4} \frac{dx}{\sin^2 x} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (tg x) \Big|_{\varepsilon}^{\pi/4} = 1 - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} tg \varepsilon = 1. \text{ Этот несобственный интеграл сходится.}$$

Пример 16. Вычислить $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x}}$.

$$\blacktriangle \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x}} = \lim_{b \rightarrow 1-0} \int_0^b \frac{dx}{\sqrt{1-x}} = - \lim_{b \rightarrow 1-0} 2\sqrt{1-x} \Big|_0^b = - \lim_{b \rightarrow 1-0} 2(\sqrt{1-b} - 1) = 2$$

Пример 17. Вычислить $\int_{-1}^1 \frac{dx}{x^2}$

▲ Т.к. внутри отрезка интегрирования существует точка $x = 0$, где подынтегральная функция разрывна, то интеграл нужно представить как сумму двух слагаемых:

$$\int_{-1}^1 \frac{dx}{x^2} = \lim_{\varepsilon_1 \rightarrow -0} \int_{-1}^{\varepsilon_1} \frac{dx}{x^2} + \lim_{\varepsilon_2 \rightarrow +0} \int_{\varepsilon_2}^1 \frac{dx}{x^2}$$

Вычислим каждый предел отдельно:

$$\lim_{\varepsilon_1 \rightarrow -0} \int_{-1}^{\varepsilon_1} \frac{dx}{x^2} = - \lim_{\varepsilon_1 \rightarrow -0} \frac{1}{x} \Big|_{-1}^{\varepsilon_1} = \lim_{\varepsilon_1 \rightarrow -0} \left(\frac{1}{\varepsilon_1} - \frac{1}{-1} \right) = \infty, \text{ следовательно на участке } [-1; 0]$$

интеграл расходится.

$$\lim_{\varepsilon_2 \rightarrow +0} \int_{\varepsilon_2}^1 \frac{dx}{x^2} = \lim_{\varepsilon_2 \rightarrow +0} \left(1 - \frac{1}{\varepsilon_2} \right) = \infty - \text{ на участке } [0; 1] \text{ интеграл расходится.}$$

Поэтому на всем отрезке $[-1; 1]$ данный интеграл расходится.

2. Функции нескольких переменных

2.1 Функции нескольких независимых переменных

Пусть имеется n переменных величин, и каждому набору их значений $(x_1; x_2; \dots; x_n)$ из некоторого множества X соответствует одно вполне определенное значение переменной величины Z . Тогда говорят, что задана функция нескольких переменных $Z=f(x_1; x_2; \dots; x_n)$. Переменные $x_1; x_2; \dots; x_n$ называются независимыми переменными. Если $u=f(x; y; z)$ есть функция нескольких переменных, то могут существовать производные функции по x , по y , по z , которые называются частными производными и обозначаются $\frac{\partial u}{\partial x}; \frac{\partial u}{\partial y}; \frac{\partial u}{\partial z}$ или $U'_x; U'_y; U'_z$.

Пример 18. Найти частные производные функции $U = x^2 - 3xy - 4y^2 - x + 2y + 1$.

▲ Рассмотрим y как постоянную величину, тогда $\frac{\partial u}{\partial x} = 2x - 3y - 1$; рассмотрим x

как постоянную величину, тогда $\frac{\partial u}{\partial y} = -3x - 8y + 2$.

Производной функции $Z=f(x; y)$ в точке $M(x; y)$ в направлении вектора

$\bar{\ell} = \overline{MM_1}$ называется предел $\frac{\partial z}{\partial l} = \lim_{|MM_1| \rightarrow 0} \frac{f(M_1) - f(M)}{|MM_1|} = \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{\Delta z}{\rho}$, где

$\rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$. Если функция дифференцируема, то производная в данном

направлении вычисляется по формуле $\frac{\partial z}{\partial l} = \frac{\partial z}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial z}{\partial y} \sin \alpha$, где α - угол

образованный вектором $\bar{\ell}$ с осью OX . В случае функции трех переменных $U = f(x; y; z)$ производная в данном направлении вычисляется по формуле

$\frac{\partial u}{\partial l} = \frac{\partial u}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial u}{\partial y} \cos \rho + \frac{\partial u}{\partial z} \cos \gamma$, где $\cos \alpha; \cos \rho; \cos \gamma$ направляющие косинусы

вектора $\bar{\ell}$. Градиентом функции $U=f(x; y; z)$ $[\text{grad } u]$ по направлению вектора $\bar{\ell}(m; n; p)$ является $\frac{du}{d\ell}$, т. е.

$$\text{grad } u = \frac{\partial u}{\partial x} \bar{i} + \frac{\partial u}{\partial y} \bar{j} + \frac{\partial u}{\partial z} \bar{k}; \frac{du}{d\ell} = \frac{\partial u}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial u}{\partial y} \cos \rho + \frac{\partial u}{\partial z} \cos \gamma;$$
$$\cos \alpha = \frac{m}{\sqrt{m^2 + n^2 + p^2}}; \cos \rho = \frac{n}{\sqrt{m^2 + n^2 + p^2}}; \cos \gamma = \frac{p}{\sqrt{m^2 + n^2 + p^2}}.$$

Пример 19. Найти $\text{grad } u$; $|\text{grad } u|$ и производную по направлению $\frac{du}{d\ell}$ в точке $A(1; 1; 1)$; $\bar{\ell}(1; \sqrt{2}; -1)$ для функции $U = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

$$\text{grad } u = \frac{\partial u}{\partial x} \bar{i} + \frac{\partial u}{\partial y} \bar{j} + \frac{\partial u}{\partial z} \bar{k}; \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}; \frac{\partial u}{\partial x}(A) = \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{\substack{x=1 \\ y=1 \\ z=1}} = \frac{1}{\sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2}} = \frac{1}{\sqrt{3}};$$

▲

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}; \frac{\partial u}{\partial y}(A) = \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{\substack{x=1 \\ y=1 \\ z=1}} = \frac{1}{\sqrt{3}}; \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}; \frac{\partial u}{\partial z}(A) = \frac{\partial u}{\partial z} \Big|_{\substack{x=1 \\ y=1 \\ z=1}} = \frac{1}{\sqrt{3}};$$

$$\text{grad } u = \frac{1}{\sqrt{3}} \bar{i} + \frac{1}{\sqrt{3}} \bar{j} + \frac{1}{\sqrt{3}} \bar{k}; |\text{grad } u| = \sqrt{\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2} = \frac{1}{2};$$

$$\frac{du}{d\ell} = \frac{\partial u}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial u}{\partial y} \cos \rho + \frac{\partial u}{\partial z} \cos \gamma;$$

$$\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{1^2 + (\sqrt{2})^2 + 1^2}} = \frac{1}{2}; \cos \rho = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{1^2 + (\sqrt{2})^2 + 1^2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}; \cos \gamma = \frac{-1}{\sqrt{1^2 + (\sqrt{2})^2 + 1^2}} = -\frac{1}{2};$$

$$\frac{du}{d\ell} = \frac{1}{\sqrt{3}} * \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{3}} * \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{\sqrt{3}} * \left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{6}}{6};$$

2.2 Экстремум функции двух независимых переменных

Функция $z=f(x;y)$ имеет максимум (минимум) в точке $M_0(x_0;y_0)$, если значение функции в этой точке больше (меньше), чем ее значение в любой другой точке $M(x;y)$ некоторой окрестности точки M_0 .

Максимум или минимум функции называется ее экстремумом. Точка M_0 , в которой функция имеет экстремум, называется точкой экстремума.

Если дифференцируемая функция $z=f(x;y)$ достигает экстремума в точке $M_0(x_0;y_0)$, то ее частные производные первого порядка в этой точке равны нулю:

$\frac{\partial f(x_0;y_0)}{\partial x} = 0; \frac{\partial f(x_0;y_0)}{\partial y} = 0$ (необходимые условия). Точки, в которых частные производные равны нулю, называются стационарными. Не всякая стационарная точка является точкой экстремума.

Пусть $M_0(x_0;y_0)$ – стационарная точка функции $z=f(x;y)$. Обозначим

$$A = \frac{\partial^2 f(x_0;y_0)}{\partial x^2}; B = \frac{\partial^2 f(x_0;y_0)}{\partial x \partial y}; C = \frac{\partial^2 f(x_0;y_0)}{\partial y^2} \quad \text{и составим дискриминант}$$

$\Delta = AC - B^2$. Тогда: 1) если $\Delta > 0$, то функция имеет в точке M_0 экстремум, а именно максимум при $A < 0$ (или $C < 0$) и минимум при $A > 0$ (или $C > 0$);

2) если $\Delta < 0$, то в точке M_0 экстремума нет (достаточные условия наличия или отсутствия экстремума).

3) если $\Delta = 0$, то требуется дальнейшее исследование (сомнительный случай).

Пример 20. Найти экстремум функции $z = x^2 + xy + y^2 - 3x - 6y$.

▲ Находим частные производные первого порядка

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x + y - 3; \frac{\partial z}{\partial y} = x + 2y - 6.$$

Воспользовавшись необходимыми условиями экстремума, находим

стационарные точки: $\begin{cases} 2x + y - 3 = 0, \\ x + 2y - 6 = 0, \end{cases} \begin{cases} x = 0, \\ y = 3. \end{cases} M(0;3).$

Находим значения частных производных второго порядка в точке М:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 2; \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 2; \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 1, \text{ и составим дискриминант}$$

$$\Delta = AC - B^2 = 2 * 2 - 1 = 3 > 0; A > 0.$$

Следовательно, в точке М(0;3) заданная функция имеет минимум. Значение функции в этой точке $Z_{\min} = -9$.

Пример 21. Найти экстремум функции $z = \frac{1}{2}xy + (47 - x - y)\left(\frac{x}{3} + \frac{y}{4}\right)$.

▲ Находим частные производные первого порядка:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{1}{12}y - \frac{2}{3}x + \frac{47}{3}; \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{1}{2}y - \frac{1}{12}x + \frac{47}{4}.$$

Воспользовавшись необходимыми условиями экстремума, находим стационарные точки:

$$\begin{cases} -\frac{1}{12}y - \frac{2}{3}x + \frac{47}{3} = 0, \\ -\frac{1}{2}y - \frac{1}{12}x + \frac{47}{4} = 0; \end{cases} \begin{cases} 8x + y = 188, \\ x + 6y = 141; \end{cases} \begin{cases} x = 21, \\ y = 20. \end{cases} M(21;20).$$

Найдем значение вторых производных в точке М:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -\frac{2}{3}; \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -\frac{1}{2}; \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -\frac{1}{12}.$$

Тогда $\Delta = AC - B^2 = \left(-\frac{2}{3}\right)\left(-\frac{1}{2}\right) - \left(-\frac{1}{12}\right)^2 = \frac{1}{3} - \frac{1}{144} > 0$. Т. к. $A < 0$, то в точке

М(21;20) функция имеет максимум: $Z_{\max} = 282$

3. Числовые ряды

3.1 Условия сходимости знакоположительных рядов

Пусть $U_1, U_2, U_3, \dots, U_n, \dots$, где $U_n = f(x)$ – бесконечная числовая последовательность. Выражение $U_1 + U_2 + U_3 + \dots + U_n + \dots$ – называется числовым рядом, а числа $U_1, U_2, U_3, \dots, U_n$ – членами числового ряда. Ряд

часто записывают в виде $\sum_{n=1}^{\infty} U_n$.

Ряд $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{n} + \dots$ называется *гармоническим рядом*, расходится.

а) Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} U_n$ сходится, то $\lim_{n \rightarrow \infty} U_n = 0$ - **необходимый признак сходимости**. Т.е., если $\lim_{n \rightarrow \infty} U_n \neq 0$, то ряд расходится.

б) **Первый признак сравнения**: пусть даны два ряда $\sum_{n=1}^{\infty} U_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} V_n$, причем каждый член первого ряда не превосходит соответствующего члена второго ряда, т.е. $U_n \leq V_n$ ($n = 1, 2, 3, \dots$), тогда, если сходится второй ряд, то сходится и первый ряд, если расходится первый ряд, то расходится и второй.

в) **Второй признак сравнения**: если существует конечный и отличный от нуля предел $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{U_n}{V_n} = k$, то оба ряда $\sum_{n=1}^{\infty} U_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} V_n$ одновременно сходятся или расходятся.

г) **Признак Коши** Если для ряда $\sum_{n=1}^{\infty} U_n$ существует $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{U_n} = c$, то этот ряд сходится при $c < 1$ и расходится при $c > 1$. При $c = 1$ вопрос о сходимости остается открытым.

д) **Признак Даламбера** Если для ряда $\sum_{n=1}^{\infty} U_n$ существует предел $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{U_{n+1}}{U_n} = D$, то этот ряд сходится при $D < 1$ и расходится при $D > 1$. При $D = 1$ вопрос о сходимости остаётся открытым.

е) **Интегральный признак**. Если $f(x)$ при $x \geq 1$ - непрерывная, положительная и монотонно убывающая функция, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$, где $u_n = f(n)$ сходится или расходится в зависимости от того, сходится или расходится $\int_n^{\infty} f(x) dx$ ($n \geq 1$).

Пример 22. Исследовать сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n + 1}$

▲ Члены данного ряда меньше соответствующих членов ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$, т.е. ряда $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots$. Но последний ряд сходится как бесконечно убывающая геометрическая прогрессия. Следовательно, сходиться и данный ряд.

Пример Исследовать сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2}$.

▲ Применим признак Коши:

$$U_n = \frac{1}{2^n} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2}; \quad \sqrt[n]{U_n} = \sqrt[n]{\frac{1}{2^n} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2}} = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

$$c = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{U_n} = \frac{1}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \frac{1}{2} e. \text{ Т.к. } c > 1, \text{ то ряд расходится.}$$

Пример23. Исследовать сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{10^n}{n!}$.

▲ Применим признак Даламбера: $U_n = \frac{10^n}{n!}$; $U_{n+1} = \frac{10^{n+1}}{(n+1)!}$

$$\frac{U_{n+1}}{U_n} = \frac{10^{n+1} * n!}{(n+1)! * 10^n} = \frac{10}{n+1}; D = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{10}{n+1} = 0; D < 1 - \text{ряд сходится.}$$

Пример24 Исследовать сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1) \ln(n+1)}$.

▲ Применим интегральный признак: $U_n = \frac{1}{(n+1) \ln(n+1)}$;

$$f(x) = \frac{1}{(x+1) \ln(x+1)}$$

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{(x+1) \ln(x+1)} = \int \frac{\frac{d}{x+1}}{\ln(x+1)} = \ln \ln(x+1) \Big|_1^{\infty} = \infty.$$

Интеграл расходится, поэтому расходится и данный ряд.

4. 1 Степенные ряды

Функциональный ряд вида:

$$a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + \dots + a_n(x-a)^n + \dots,$$

где $a; a_0; a_1 \dots a_n$ - действительные числа, называется **степенным**.

Теорема Абеля. Если степенной ряд сходится при $x = x_0$, то он сходится (и при том абсолютно) при всяком значении x , удовлетворяющих неравенству $|x-a| < |x_0-a|$.

Для всякого степенного ряда существует интервал сходимости $|x-a| < R$ или $a-R < x < a+R$ с центром в точке a , внутри которого степенной ряд сходится абсолютно и вне его расходится. На концах интервала сходимости в точках $x = a \pm R$ различные степенные ряды ведут себя по разному.

Число R - половина длины интервала сходимости - называется **радиусом сходимости степенного ряда**.

Для отыскания интервала сходимости и радиуса сходимости пользуются следующими способами:

а) Если среди коэффициентов $a_1; a_2 \dots; a_n$ нет равных нулю, т.е. ряд, содержащий все целые положительные степени разности $x-a$, то $R = \lim \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = 1$, если предел существует.

б) Если исходный ряд имеет вид

$$a_0 + a_1(x-a)^p + a_2(x-a)^{2p} + \dots + a_n(x-a)^{np} + \dots,$$

где p - некоторое целое положительное число: 2; 3; 4; ... ,то

$$R = \sqrt[p]{\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|}.$$

в) Если среди коэффициентов ряда есть равные нулю и последовательность оставшихся в ряде показателей степеней разности $x-a$

$$R = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}}.$$

любая, то радиус

г) Во всех случаях интервал сходимости можно находить, применяя непосредственно признак Даламбера или признак Коши к ряду, соответствующему из абсолютных величин членов исходного ряда.

Пример25. Исследовать сходимость степенного ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} x^n$.

▲ Здесь $a_n = \frac{1}{n}$, $a_{n+1} = \frac{1}{n+1}$. Найдем радиус сходимости ряда:

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n} = 1.$$

Следовательно, ряд сходится для значений x , удовлетворяющих неравенству $-1 < x < 1$.

Исследуем сходимость ряда на концах промежутка. Если $x=1$, то получим гармонический ряд $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots$, который расходится. Если $x=-1$, то получим ряд $-1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \dots$.

По условиям признака Лейбница этот ряд сходится. Область сходимости - $1 \leq R < 1$.

Пример 26. Исследовать сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} (x-2)^n$.

▲ Здесь $a^n = \frac{1}{n^2}$; $a^{n+1} = \frac{1}{(n+1)^2}$. Имеем $R = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^2}{n^2} = 1$. Следовательно, ряд сходится, если $-1 < x - 2 < 1$, т.е. $1 < x < 3$

Исследуем сходимость на концах промежутка. Если $x = 3$, то получим ряд $1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots$. Этот ряд сходится, т.к. ряд $1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \frac{1}{4^p} + \dots$ сходится при $p > 1$ на основании интегрального признака. Если $x = 1$, то получим ряд $-1 + \frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} - \dots$. Этот ряд сходится и причём абсолютно, т.к. сходится ряд из абсолютных величин его членов.

Итак, данный степенной ряд сходится при $1 \leq x \leq 3$.

Пример27. Исследовать сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^{n(n+1)}}{n^n}$.

▲ Применим признак Коши, полагая $U_n = \frac{(x-1)^{n(n+1)}}{n^n}$. Тогда

$$\sqrt[n]{|u_n|} = \frac{|x-1|^{n+1}}{n} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|U_n|} = \begin{cases} 0 \text{ при } |x-1| \leq 1 \\ \infty \text{ при } |x-1| > 1 \end{cases}$$

Таким образом ряд сходится, если $|x-1| \leq 1$. т.е. в промежутке $0 \leq x \leq 2$

Пример 28. Исследовать сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{\frac{n(n-1)}{2}}}{n!}$

▲ Применяем признак Даламбера, полагая, что $U_n = \frac{x^{\frac{n(n-1)}{2}}}{n!}$; $U_{n+1} = \frac{x^{\frac{n(n+1)}{2}}}{(n+1)!}$

Тогда $\left| \frac{U_{n+1}}{U_n} \right| = \frac{|x|^n}{n+1}$; $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{U_{n+1}}{U_n} \right| = \begin{cases} 0 \text{ при } |x| \leq 1 \\ \infty \text{ при } |x| > 1 \end{cases}$

Итак ряд сходится, если $|x| \leq 1$ т.е. на отрезке $-1 \leq x \leq 1$

4.2 Приближенное вычисление определенных интегралов с помощью рядов

Пример29 Вычислить приближенно с точностью до 0,0001 $\int_0^1 \sqrt{x} e^{-x} dx$

▲ «Точное» интегрирование здесь невозможно, т.к. интеграл «неберущийся». В разложении $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots$, заменим x на $(-x)$ получим:

$$e^{-x} = 1 - x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{(-1)^n x^n}{n!} + \dots$$

Умножая почленно полученный ряд на $\sqrt{x}$, получим $\sqrt{x} e^{-x} = x^{1/2} e^{-x} = x^{1/2} - x^{3/2} + \dots + \frac{(-1)^n x^{n+1/2}}{n!} + \dots$

Почленно интегрируем полученную сумму

$$\begin{aligned} \int_0^1 \sqrt{x} e^{-x} dx &= \int_0^1 x^{1/2} dx - \int_0^1 x^{3/2} dx + \dots + \int_0^1 \frac{(-1)^n x^{n+1/2}}{n!} dx + \dots = \frac{2}{3} x^{3/2} \Big|_0^1 - \frac{2}{5} x^{5/2} \Big|_0^1 + \\ &+ \dots + \frac{1}{n + \frac{2}{3}} \frac{x^{n+3/2}}{n!} \Big|_0^1 = \frac{2}{3} - \frac{2}{5} + \dots + \frac{(-1)^n 2}{(2n+3)n!} = \end{aligned}$$

$$= 0.66667 - 0.40000 + 0.14286 - 0.03704 + 0.00758 - 0.00128 + 0.00018 - \dots \approx 0.3790$$

Пример 30. Вычислить $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1 - \cos x}{x^2} dx$ с точностью до 00001.

▲ Заменяя в подынтегральном выражении $\cos x$ его разложением в степенной ряд, получим:

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1 - \cos x}{x^2} dx &= \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1 - 1 + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} - \dots}{x^2} dx = \int_0^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2!} - \frac{x^2}{4!} + \frac{x^4}{6!} - \dots \right) dx = \\ &= \left[\frac{1}{2!} x - \frac{x^3}{3 \cdot 4!} + \frac{x^5}{5 \cdot 6!} - \dots \right]_0^{\frac{1}{2}} \approx 0.25 - 0.0017 = 0.2483. \end{aligned}$$

III семестр Интегрирование функций нескольких переменных

5 Кратные и криволинейные интегралы

5.1 Двойной интеграл

Рассмотрим в плоскости Oxy замкнутую область D , ограниченную линией L . Разобьем эту область какими-нибудь линиями на n частей $\Delta S_1, \Delta S_2, \dots, \Delta S_n$, а соответствующие наибольшие расстояния между точками в каждой из этих частей обозначим $d_1, d_2, \dots, d_n$. Выберем в каждой части ΔS_i точку P_i .

Пусть в области D задана функция $z = f(x, y)$. Обозначим через $f(P_1), f(P_2), \dots, f(P_n)$ значения этой функции в выбранных точках и составим сумму произведений вида $f(P_i) \Delta S_i$:

$$V_n = \sum_{i=1}^n f(P_i) \Delta S_i, \quad (1)$$

называемую интегральной суммой для функции $f(x, y)$ в области D .

Если существует один и тот же предел интегральных сумм (1) при $n \rightarrow \infty$ и $\max d_i \rightarrow 0$, не зависящий ни от способа разбиения области D на части, ни от выбора точек P_i в них, то он называется двойным интегралом от функции $f(x, y)$ по области D и обозначается

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \lim_{\max d_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(P_i) \Delta S_i. \quad (2)$$

Вычисление двойного интеграла по области D , ограниченной линиями

$y = \varphi_1(x), y = \varphi_2(x)$ ($\varphi_1(x) \leq \varphi_2(x)$), $x = a, x = b$ ($a < b$), где $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$

непрерывны на $[a, b]$ (рис. 2) сводится к последовательному вычислению двух определенных интегралов, или так называемого двукратного интеграла:

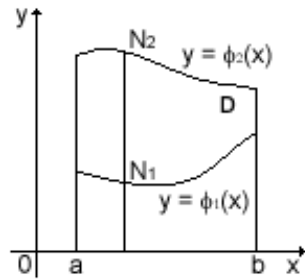


Рисунок 2

$$\int_a^b \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy \right) dx = \int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy. \quad (3)$$

5.2 Тройной интеграл

Понятие тройного интеграла вводится по аналогии с двойным интегралом.

Пусть в пространстве задана некоторая область V , ограниченная замкнутой поверхностью S . Зададим в этой замкнутой области непрерывную функцию $f(x, y, z)$. Затем разобьем область V на произвольные части Δv_i , считая объем каждой части равным Δv_i , и составим интегральную сумму вида

$$\sum_V f(P_i) \Delta v_i, \quad (4)$$

Предел при $\rho \rightarrow 0$ интегральных сумм (11), не зависящий от способа разбиения области V и выбора точек P_i в каждой подобласти этой области, называется тройным интегралом от функции $f(x, y, z)$ по области V :

$$\iiint_V f(x, y, z) dx dy dz = \lim_{\rho \rightarrow 0} \sum_V f(P_i) \Delta v_i. \quad (5)$$

Тройной интеграл от функции $f(x, y, z)$ по области V равен трехкратному интегралу по той же области:

$$\iiint_V f(x, y, z) dv = \int_a^b \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} \left(\int_{\chi(x, y)}^{\psi(x, y)} f(x, y, z) dz \right) dy \right) dx \quad (6)$$

Кратные интегралы в криволинейных координатах

Введем на плоскости криволинейные координаты, называемые полярными. Выберем точку O (полнос) и выходящий из нее луч (полярную ось).

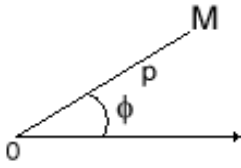


Рисунок 2

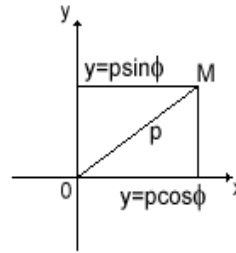


Рисунок 3

Координатами точки М (рис. 3) будут длина отрезка МО – полярный радиус ρ и угол φ между МО и полярной осью: $M(\rho, \varphi)$. Отметим, что для всех точек плоскости, кроме полюса, $\rho > 0$, а полярный угол φ будем считать положительным при измерении его в направлении против часовой стрелки и отрицательным – при измерении в противоположном направлении.

Связь между полярными и декартовыми координатами точки М можно задать, если совместить начало декартовой системы координат с полюсом, а положительную полуось Ох – с полярной осью (рис. 4).

Тогда $x = \rho \cos \varphi$, $y = \rho \sin \varphi$. Отсюда $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$, $\operatorname{tg} \varphi = \frac{y}{x}$.

Зададим в области D, ограниченной кривыми $\rho = \Phi_1(\varphi)$ и $\rho = \Phi_2(\varphi)$, где $\varphi_1 < \varphi < \varphi_2$, непрерывную функцию $z = f(\varphi, \rho)$ (рис. 5).

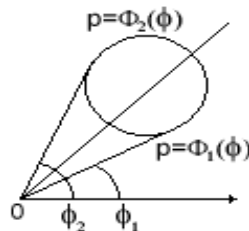


Рисунок 5

Тогда

$$\iint_D f(\rho, \varphi) d\rho d\varphi = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \left(\int_{\Phi_1(\varphi)}^{\Phi_2(\varphi)} f(\rho, \varphi) \rho d\rho \right) d\varphi.$$

В трехмерном пространстве вводятся цилиндрические и сферические координаты.

Цилиндрические координаты точки $P(\rho, \varphi, z)$ – это полярные координаты ρ , φ проекции этой точки на плоскость Оху и аппликата данной точки z (рис.6).

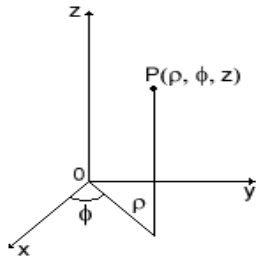


Рисунок 5

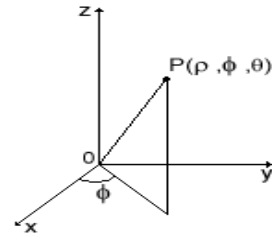


Рисунок 6

Формулы перехода от цилиндрических координат к декартовым можно задать следующим образом:

$$x = \rho \cos \varphi, y = \rho \sin \varphi, z = z.$$

В сферических координатах положение точки в пространстве определяется линейной координатой r – расстоянием от точки до начала декартовой системы координат (или полюса сферической системы), φ – полярным углом между положительной полуосью Ox и проекцией точки на плоскость Oxy , и θ – углом между положительной полуосью оси Oz и отрезком OP (рис.6). При этом

$$r \geq 0, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi, \quad 0 \leq \theta \leq \pi.$$

Зададим формулы перехода от сферических координат к декартовым:

$$x = r \sin \theta \cos \varphi, y = r \sin \theta \sin \varphi, z = r \cos \theta. \quad (9)$$

Тогда формулы перехода к цилиндрическим или сферическим координатам в тройном интеграле будут выглядеть так:

$$\begin{aligned} \iiint_V f(x, y, z) dx dy dz &= \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} d\varphi \int_{\rho_1(\varphi)}^{\rho_2(\varphi)} \rho d\rho \int_{z_1(\rho, \varphi)}^{z_2(\rho, \varphi)} F_1(\rho, \varphi, z) dz = \\ &= \int_{\theta_1}^{\theta_2} \sin \theta d\theta \int_{\varphi_1(\theta)}^{\varphi_2(\theta)} d\varphi \int_{r_1(\varphi, \theta)}^{r_2(\varphi, \theta)} F_2(r, \varphi, \theta) r^2 dr \end{aligned}$$

где F_1 и F_2 – функции, полученные при подстановке в функцию f вместо x, y, z их выражений через цилиндрические (8) или сферические (9) координаты.

5.3 Геометрические и физические приложения кратных интегралов

1) Площадь плоской области S :

$$S = \iint_S dx dy.$$

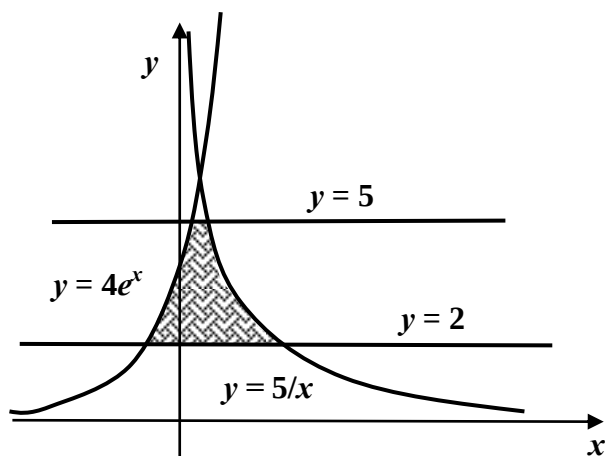
Пример

Найти площадь фигуры D , ограниченной линиями

$$y = \frac{5}{x}, y = 4e^x,$$

$$y = 2, y = 5.$$

Решение.



Эту площадь удобно вычислять, считая y внешней переменной.
Тогда границы области задаются уравнениями

$$x = \frac{5}{y}, \quad x = \ln \frac{y}{4},$$

и

$$S = \int_2^5 dy \int_{\ln \frac{y}{4}}^{\frac{5}{y}} dx = \int_2^5 \left(x \Big|_{\ln \frac{y}{4}}^{\frac{5}{y}} \right) dy = \int_2^5 \left(\frac{5}{y} - \ln \frac{y}{4} \right) dy = 5 \ln y \Big|_2^5 - I_2,$$

где

$$I_2 = \int_2^5 \ln \frac{y}{4} dy$$

вычисляется с помощью интегрирования по частям:

$$u = \ln \frac{y}{4}, \quad du = \frac{1}{y} dy, \quad dv = dy, \quad v = y,$$

$$I_2 = y \ln \frac{y}{4} \Big|_2^5 - \int_2^5 dy = 5 \ln \frac{5}{4} - 2 \ln \frac{1}{2} - 3 = 5 \ln 5 - 8 \ln 2 - 3.$$

Следовательно,

$$S = 5 \ln 5 - 5 \ln 2 - 5 \ln 5 + 8 \ln 2 + 3 = 5 \ln 2 + 3.$$

2) Объем цилиндрида, то есть тела, ограниченного частью поверхности $S: z = f(x, y)$, ограниченной контуром L , проекцией D этой поверхности на плоскость Oxy и отрезками, параллельными оси Oz и соединяющими каждую точку контура L с соответствующей точкой плоскости Oxy :

$$V_{\text{цил}} = \iint_D f(x, y) dx dy.$$

3) Площадь части криволинейной поверхности S , заданной уравнением $z = f(x, y)$, ограниченной контуром L :

$$S = \iint_D \sqrt{1 + f_x'^2 + f_y'^2} dx dy,$$

где D – проекция S на плоскость Oxy .

4) Момент инерции относительно начала координат О материальной плоской фигуры D:

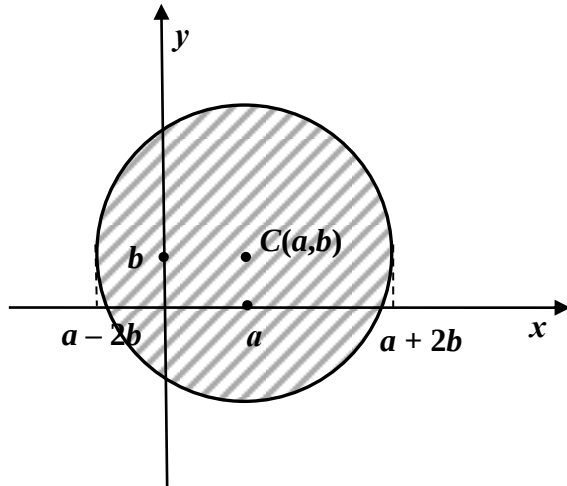
$$I_0 = \iint_D \gamma(x^2 + y^2) dx dy.$$

Пример

Найти момент инерции однородной круглой пластинки $(x - a)^2 + (y - b)^2 < 4b^2$ относительно начала координат.

Решение.

В силу однородности пластинки положим ее плотность $\gamma(x, y) = 1$.



Центр круга расположен в точке C(a, b), а его радиус равен 2b.

Уравнения границ пластинки имеют вид

$$y = b \pm \sqrt{4b^2 - (x - a)^2}.$$

$$\begin{aligned} I_0 &= \iint_D \gamma(x^2 + y^2) dx dy = \int_{a-2b}^{a+2b} dx \int_{b-\sqrt{4b^2-(x-a)^2}}^{b+\sqrt{4b^2-(x-a)^2}} (x^2 + y^2) dy = \\ &= \int_{a-2b}^{a+2b} dx \left(x^2 y + \frac{y^3}{3} \right) \Big|_{b-\sqrt{4b^2-(x-a)^2}}^{b+\sqrt{4b^2-(x-a)^2}} = \int_{a-2b}^{a+2b} x^2 \left(b + \sqrt{4b^2 - (x-a)^2} - b + \sqrt{4b^2 - (x-a)^2} \right) dx + \\ &\quad + \frac{1}{3} \int_{a-2b}^{a+2b} \left(\left(b + \sqrt{4b^2 - (x-a)^2} \right)^3 - \left(b - \sqrt{4b^2 - (x-a)^2} \right)^3 \right) dx = I_1 + I_2. \end{aligned}$$

Вычислим каждый из полученных интегралов отдельно.

Для вычисления интеграла I_1 сделаем замену:

$$x - a = 2b \sin t,$$

$$x = a + 2b \cos t, dx = 2b \cos t dt,$$

при $x = a - 2b$

$$t = -\frac{\pi}{2},$$

при $x = a + 2b$

$$t = \frac{\pi}{2}.$$

$$\begin{aligned}
I_1 &= 2 \int_{a-2b}^{a+2b} x^2 \sqrt{4b^2 - (x-a)^2} dx = 2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (a + 2b \sin t)^2 4b^2 \cos^2 t dt = \\
&= 8a^2b^2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t dt + 32ab^3 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t \sin t dt + 32b^4 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t \cos^2 t dt = \\
&= 4a^2b^2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (1 + \cos 2t) dt - 32ab^3 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t d \cos t + 8b^4 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 2t dt = \\
&= 4\pi a^2b^2 - 0 + 4b^4 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos 4t) dt = 4\pi a^2b^2 + 4\pi b^4;
\end{aligned}$$

Для вычисления интеграла I_2 преобразуем подынтегральную функцию по формуле разности кубов:

$$\begin{aligned}
&\left(b + \sqrt{4b^2 - (x-a)^2}\right)^3 - \left(b - \sqrt{4b^2 - (x-a)^2}\right)^3 = \\
&= 2\sqrt{4b^2 - (x-a)^2} (7b^2 - (x-a)^2).
\end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{aligned}
I_2 &= \frac{2}{3} \int_{a-2b}^{a+2b} \sqrt{4b^2 - (x-a)^2} (7b^2 - (x-a)^2) dx = \frac{2}{3} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 4b^2 \cos^2 t (7b^2 - 4b^2 \sin^2 t) dt = \\
&= \frac{56}{3} b^4 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t dt - \frac{32}{3} b^4 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t \cos^2 t dt = \frac{28}{3} \pi b^4 - \frac{4}{3} \pi b^4 = 8\pi b^4.
\end{aligned}$$

Следовательно, $I_0 = I_1 + I_2 = 4\pi b^2 (a^2 + 3b^2)$.

Моменты инерции фигуры D относительно осей Oх и Oу:

$$I_{xx} = \iint_D y^2 dx dy, \quad I_{yy} = \iint_D x^2 dx dy$$

5) Масса плоской фигуры D переменной поверхностной плотности $\gamma = \gamma(x, y)$:

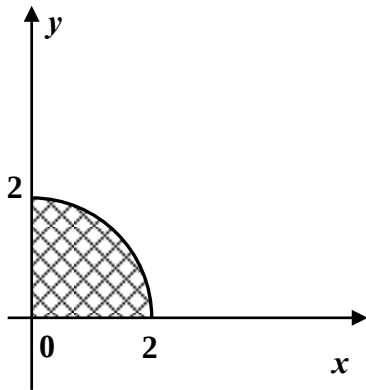
$$M = \iint_D \gamma(x, y) dx dy.$$

Пример

Найти массу пластинки D плотности $\gamma = ux^3$, если

$$D: \begin{cases} x^2 + y^2 \leq 4 \\ x \geq 0, y \geq 0. \end{cases}$$

Решение.



$$M = \iint_D \gamma(x, y) dx dy = \int_0^2 dx \int_0^{\sqrt{4-x^2}} y x^3 dy = \int_0^2 x^3 dx \cdot \frac{y^2}{2} \bigg|_0^{\sqrt{4-x^2}} =$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^2 x^3 (4 - x^2) dx = \frac{1}{2} \left(x^4 - \frac{x^6}{6} \right) \bigg|_0^2 = \frac{8}{3}.$$

Координаты центра масс плоской фигуры переменной поверхностной плотности $\gamma = \gamma(x, y)$:

$$x_c = \frac{\iint_D \gamma(x, y) x dx dy}{\iint_D \gamma(x, y) dx dy} = \frac{M_y}{M}, \quad y_c = \frac{\iint_D \gamma(x, y) y dx dy}{\iint_D \gamma(x, y) dx dy} = \frac{M_x}{M}$$

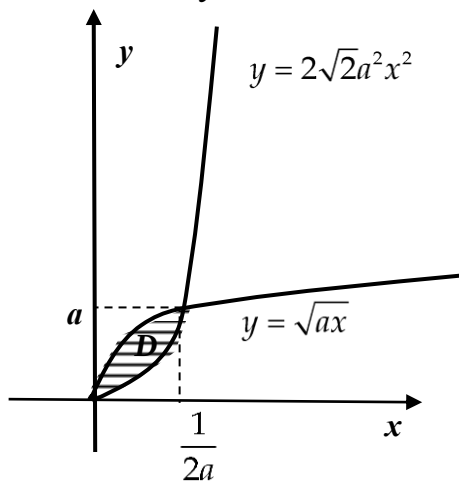
Пример

Найти центр тяжести однородной пластины D , ограниченной кривыми $y^2 = ax$ и

$$y = 2\sqrt{2}a^2x^2.$$

Решение.

Так как пластина однородна, т.е. ее плотность постоянна, то можно принять ее за единицу.



$$x_c = \frac{M_y}{M} = \frac{\iint_D x dx dy}{\iint_D dx dy}, \quad y_c = \frac{M_x}{M} = \frac{\iint_D y dx dy}{\iint_D dx dy}.$$

Тогда

Найдем массу пластины, а для этого определим абсциссу точки пересечения ограничивающих ее линий:

$$\sqrt{ax} = 2\sqrt{2}a^2x^2, \quad ax = 8a^4x^4, \quad ax(8a^3x^3 - 1) = 0, \quad x = 0, x = \frac{1}{2a}.$$

$$M = \int_0^{\frac{1}{2a}} dx \int_{2\sqrt{2}a^2x^2}^{\sqrt{ax}} dy = \int_0^{\frac{1}{2a}} (\sqrt{ax} - 2\sqrt{2}a^2x^2) dx = \left(\frac{2\sqrt{a}}{3} x^{\frac{3}{2}} - \frac{2\sqrt{2}}{3} a^2 x^3 \right) \Bigg|_0^{\frac{1}{2a}} = \frac{\sqrt{2}}{12a};$$

$$M_y = \int_0^{\frac{1}{2a}} x dx \int_{2\sqrt{2}a^2x^2}^{\sqrt{ax}} dy = \int_0^{\frac{1}{2a}} \left(\sqrt{ax}^{\frac{3}{2}} - 2\sqrt{2}a^2x^3 \right) dx = \left(\frac{2\sqrt{a}}{5} x^{\frac{5}{2}} - \frac{\sqrt{2}}{2} a^2 x^4 \right) \Bigg|_0^{\frac{1}{2a}} = \frac{3\sqrt{2}}{160a^2};$$

$$x_c = \frac{3\sqrt{2}}{160a^2} : \frac{\sqrt{2}}{12a} = \frac{9}{40a}.$$

Соответственно

$$M_x = \int_0^{\frac{1}{2a}} dx \int_{2\sqrt{2}a^2x^2}^{\sqrt{ax}} y dy = \int_0^{\frac{1}{2a}} \left(\frac{ax}{2} - 4a^4x^4 \right) dx = \left(\frac{a}{4} x^2 - \frac{4a^4}{5} x^5 \right) \Bigg|_0^{\frac{1}{2a}} = \frac{3}{80a},$$

$$y_c = \frac{3}{80a} : \frac{\sqrt{2}}{12a} = \frac{9\sqrt{2}}{40}.$$

6) Объем тела V:

$$V = \iiint_V dx dy dz.$$

Пример

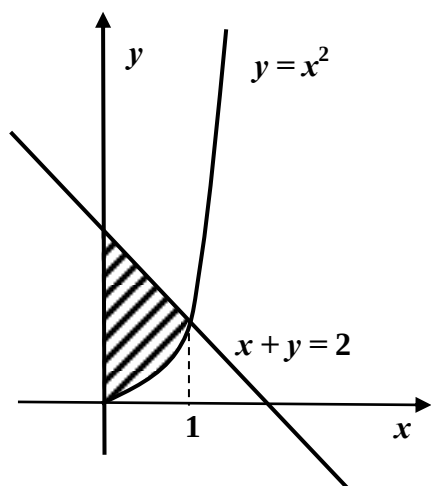
Найти объем тела V, ограниченного поверхностями $x + y = 2, x = \sqrt{y},$

$$z = \frac{9x}{5}, z = 0.$$

Решение.

Найдем проекцию тела на плоскость Оху (при этом заметим, что плоскость

$$z = \frac{9x}{5} \text{ проектируется на эту плоскость в виде прямой } x = 0):$$



Определим абсциссу точки пересечения кривых $y = x^2$ и $x + y = 2$:
 $x^2 = 2 - x$, $x^2 + x - 2 = 0$, $x_1 = 1$, $x_2 = -2 < 0$ – посторонний корень. Тогда, используя формулу, получаем:

$$V = \iiint_V dx dy dz = \int_0^1 dx \int_{x^2}^{2-x} dy \int_0^{\frac{9x}{5}} dz = \frac{9}{5} \int_0^1 x dx \int_{x^2}^{2-x} dy =$$

$$= \frac{9}{5} \int_0^1 x(2 - x - x^2) dx = \frac{9}{5} \left(x^2 - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} \right) \Big|_0^1 = \frac{9}{5} \cdot \frac{5}{12} = \frac{3}{4}.$$

7) Масса тела V плотности $\gamma = \gamma(x, y, z)$:

$$M = \iiint_V \gamma(x, y, z) dx dy dz.$$

8) Моменты инерции тела V относительно координатных осей и начала координат:

$$I_{xx} = \iiint_V (y^2 + z^2) \gamma(x, y, z) dx dy dz,$$

$$I_{yy} = \iiint_V (x^2 + z^2) \gamma(x, y, z) dx dy dz,$$

$$I_{zz} = \iiint_V (x^2 + y^2) \gamma(x, y, z) dx dy dz,$$

$$I_0 = \iiint_V (x^2 + y^2 + z^2) \gamma(x, y, z) dx dy dz,$$

где $\gamma(x, y, z)$ – плотность вещества.

Статические моменты тела относительно координатных плоскостей Oyz , Oxz , Oxy :

$$M_{yz} = \iiint_V x \gamma(x, y, z) dx dy dz,$$

$$M_{xz} = \iiint_V y \gamma(x, y, z) dx dy dz,$$

$$M_{xy} = \iiint_V z \gamma(x, y, z) dx dy dz.$$

9) Координаты центра масс тела:

$$x_c = \frac{\iiint_V x\gamma(x, y, z)dx dy dz}{\iiint_V \gamma(x, y, z)dx dy dz} = \frac{M_{yz}}{M},$$

$$y_c = \frac{\iiint_V y\gamma(x, y, z)dx dy dz}{\iiint_V \gamma(x, y, z)dx dy dz} = \frac{M_{xz}}{M},$$

$$z_c = \frac{\iiint_V z\gamma(x, y, z)dx dy dz}{\iiint_V \gamma(x, y, z)dx dy dz} = \frac{M_{xy}}{M}.$$

5.4 Криволинейные и поверхностные интегралы

Рассмотрим на плоскости или в пространстве кривую L и функцию f , определенную в каждой точке этой кривой. Разобьем кривую на части Δs_i длиной Δs_i и выберем на каждой из частей точку M_i . Назовем d длину наибольшего отрезка кривой: $d = \max_{1 \leq i \leq n} \Delta s_i$.

Криволинейным интегралом первого рода от функции f по кривой L называется предел интегральной суммы $\sum_{i=1}^n f(M_i)\Delta s_i$, не зависящий ни от способа разбиения кривой на отрезки, ни от выбора точек M_i :

$$\int_L f(M)ds = \int_L f(x, y, z)ds = \lim_{d \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(M_i)\Delta s_i$$

Если кривую L можно задать параметрически:

$$x = \varphi(t), y = \psi(t), z = \chi(t), t_0 \leq t \leq T,$$

то способ вычисления криволинейного интеграла первого рода задается формулой

$$\int_L f(M)ds = \int_{t_0}^T f(\varphi(t), \psi(t), \chi(t))\sqrt{(\varphi'(t))^2 + (\psi'(t))^2 + (\chi'(t))^2} dt.$$

В частности, если кривая L задана на плоскости явным образом: $y = \varphi(x)$, где $x_1 \leq x \leq x_2$, формула (40) преобразуется к виду:

$$\int_L f(M)ds = \int_{x_1}^{x_2} f(x, \varphi(x))\sqrt{1 + (\varphi'(x))^2} dx.$$

Теперь умножим значение функции в точке M_i не на длину i -го отрезка, а на проекцию этого отрезка, скажем, на ось Ox , то есть на разность $x_i - x_{i-1} = \Delta x_i$. Если существует конечный предел при $d \rightarrow 0$ интегральной суммы

$\sum_{i=1}^n f(M_i)\Delta x_i$, не зависящий от способа разбиения кривой на отрезки и выбора

точек M_i , то он называется криволинейным интегралом второго рода от функции $f(M)$ по кривой L и обозначается

$$\int_L f(M)dx = \int_{(AB)} f(x, y, z)dx = \lim_{d \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(M_i)\Delta x_i.$$

Подобным образом можно определить и криволинейные интегралы 2-го рода вида

$$\int_{(AB)} f(x, y, z)dy, \quad \int_{(AB)} f(x, y, z)dz.$$

Если вдоль кривой L определены функции $P(M)=P(x, y, z)$, $Q(M) = Q(x, y, z)$, $R(M) = R(x, y, z)$, которые можно считать компонентами некоторого вектора $\vec{F} = \{P, Q, R\}$, и существуют интегралы

$$\int_{(AB)} P(x, y, z)dx, \quad \int_{(AB)} Q(x, y, z)dy, \quad \int_{(AB)} R(x, y, z)dz,$$

тогда их сумму называют криволинейным интегралом второго рода (общего вида) и полагают

$$\int_{(AB)} Pdx + Qdy + Rdz = \int_{(AB)} P(x, y, z)dx + \int_{(AB)} Q(x, y, z)dy + \int_{(AB)} R(x, y, z)dz.$$

Если кривая L задана параметрическими уравнениями

$$x = \varphi(t), y = \psi(t), z = \chi(t), \alpha \leq t \leq \beta,$$

где φ, ψ, χ – непрерывно дифференцируемые функции, то

$$\int_{(AB)} f(x, y, z)dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t), \psi(t), \chi(t))\varphi'(t)dt.$$

Связь между двойным интегралом и криволинейным интегралом 2-го рода задается формулой Грина:

$$\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = \oint_L Pdx + Qdy,$$

где L – замкнутый контур, а D – область, ограниченная этим контуром.

Необходимыми и достаточными условиями независимости криволинейного интеграла

$$\int_{(MN)} Pdx + Qdy + Rdz$$

от пути интегрирования являются:

$$\frac{\partial R}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial z}, \quad \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x}, \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}.$$

При выполнении условий выражение $Pdx + Qdy + Rdz$ является полным дифференциалом некоторой функции u . Это позволяет свести вычисление криволинейного интеграла к определению разности значений u в конечной и начальной точках контура интегрирования, так как

$$\int_{(MN)} Pdx + Qdy + Rdz = \int_{(MN)} du = u(N) - u(M).$$

При этом функцию и можно найти по формуле

$$u = \int_{x_0}^x P(x, y, z)dx + \int_{y_0}^y Q(x_0, y, z)dy + \int_{z_0}^z R(x_0, y_0, z)dz + C,$$

где (x_0, y_0, z_0) – точка из области D , а C – произвольная постоянная.

Рассмотрим некоторую поверхность S , ограниченную контуром L , и разобьем ее на части $S_1, S_2, \dots, S_n$ (при этом площадь каждой части тоже обозначим S_n). Пусть в каждой точке этой поверхности задано значение функции $f(x, y, z)$. Выберем в каждой части S_i точку $M_i(x_i, y_i, z_i)$ и составим интегральную сумму

$$\sigma = \sum_{i=1}^n f(M_i)S_i = \sum_{i=1}^n f(x_i, y_i, z_i)S_i$$

Если существует конечный предел при $\rho \rightarrow 0$ этой интегральной суммы, не зависящий от способа разбиения поверхности на части и выбора точек M_i , то он называется поверхностным интегралом первого рода от функции $f(M) = f(x, y, z)$ по поверхности S и обозначается

$$\iint_S f(M)dS = \iint_S f(x, y, z)dS = \lim_{\rho \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(M_i)S_i$$

Если поверхность S задается явным образом, то есть уравнением вида $z = \varphi(x, y)$, вычисление поверхностного интеграла 1-го рода сводится к вычислению двойного интеграла:

$$\iint_S f(x, y, z)dS = \iint_{\Omega} f(x, y, \varphi(x, y))\sqrt{1 + (\varphi'_x(x, y))^2 + (\varphi'_y(x, y))^2}dxdy,$$

где Ω – проекция поверхности S на плоскость Oxy .

Разобьем поверхность S на части $S_1, S_2, \dots, S_n$, выберем в каждой части S_i точку $M_i(x_i, y_i, z_i)$, и умножим $f(M_i)$ на площадь D_i проекции части S_i на плоскость Oxy . Если существует конечный предел суммы

$$\sigma = \sum_{i=1}^n f(M_i)D_i = \sum_{i=1}^n f(x_i, y_i, z_i)D_i,$$

не зависящий от способа разбиения поверхности и выбора точек на ней, то он называется поверхностным интегралом второго рода от функции $f(M)$ по выбранной стороне поверхности S и обозначается

$$\iint_S f(M)dxdy = \iint_S f(x, y, z)dxdy.$$

Подобным образом можно проектировать части поверхности на координатные плоскости Oxz и Oyz . Получим два других поверхностных интеграла 2-го рода:

$$\iint_S f(x, y, z)dxdz$$

и

$$\iint_S f(x, y, z) dydz$$

Рассмотрев сумму таких интегралов по одной и той же поверхности соответственно от функций $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$, $R(x, y, z)$, получим поверхностный интеграл второго рода общего вида:

$$\iint_S P(x, y, z) dx dy + Q(x, y, z) dx dz + R(x, y, z) dy dz.$$

Если D , D' и D'' - проекции поверхности S на координатные плоскости Oxy , Oxz и Oyz , то

$$\begin{aligned} & \iint_S P(x, y, z) dx dy + Q(x, y, z) dx dz + R(x, y, z) dy dz = \\ & = \pm \iint_D P(x, y, z(x, y)) dx dy \pm \iint_{D'} Q(x, y(x, z), z) dx dz \pm \\ & \pm \iint_{D''} R(x(y, z), y, z) dy dz. \end{aligned}$$

Связь между тройным интегралом по трехмерной области V и поверхностным интегралом 2-го рода по замкнутой поверхности S , ограничивающей тело V , задается формулой Гаусса-Остроградского:

$$\iiint_V \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dx dy dz = \iint_{S^+} P dy dz + Q dx dz + R dx dy,$$

где запись « S^+ » означает, что интеграл, стоящий справа, вычисляется по внешней стороне поверхности S .

Формула Стокса устанавливает связь между поверхностным интегралом 1-го рода по поверхности σ и криволинейным интегралом 2-го рода по ограничивающему ее контуру λ с учетом ориентации поверхности:

$$\begin{aligned} \oint_{\lambda} P dx + Q dy + R dz = & \iint_{\sigma} \left[\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) \cos(\vec{n}, x) + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) \cos(\vec{n}, y) + \right. \\ & \left. + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \cos(\vec{n}, z) \right] d\sigma = \iint_{\sigma} \begin{vmatrix} \cos(\vec{n}, x) & \cos(\vec{n}, y) & \cos(\vec{n}, z) \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} d\sigma. \end{aligned}$$

5.5 Геометрические и физические приложения криволинейных интегралов

1) Длина кривой.

Если подынтегральная функция $f(x, y, z) \equiv 1$, то из определения криволинейного интеграла 1-го рода получаем, что в этом случае он равен длине кривой, по которой ведется интегрирование:

$$l = \int_l ds.$$

2) Масса кривой.

Считая, что подынтегральная функция $\gamma(x, y, z)$ определяет плотность каждой точки кривой, найдем массу кривой по формуле

$$M = \int_l \gamma(x, y, z) ds.$$

Пример

Найти массу кривой с линейной плотностью

$$\gamma = \frac{\rho}{2},$$

заданной в полярных координатах уравнением $\rho = 4\varphi$, где

$$-\frac{\pi}{3} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{3}.$$

Решение.

Используем формулу (40) с учетом того, что кривая задана в полярных координатах:

$$\begin{aligned} M &= \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \gamma(\rho(\varphi), \varphi) \sqrt{\rho^2 + (\rho')^2} d\varphi = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}} \frac{4\varphi}{2} \cdot 4\sqrt{\varphi^2 + 1} d\varphi = \\ &= 4 \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}} \sqrt{\varphi^2 + 1} d(\varphi^2 + 1) = \frac{8}{3} (\varphi^2 + 1)^{\frac{3}{2}} \bigg|_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}} = \frac{8}{81} \left((4\pi^2 + 9)^{\frac{3}{2}} - (\pi^2 + 9)^{\frac{3}{2}} \right). \end{aligned}$$

3) Моменты кривой l:

$$M_x = \int_l y\gamma(x, y) ds, M_y = \int_l x\gamma(x, y, z) ds$$

- статические моменты плоской кривой l относительно осей Oх и Oу;

$$I_0 = \int_l (x^2 + y^2 + z^2) ds$$

- момент инерции пространственной кривой относительно начала координат;

$$I_x = \int_l (y^2 + z^2) ds, I_y = \int_l (x^2 + z^2) ds, I_z = \int_l (x^2 + y^2) ds$$

- моменты инерции кривой относительно координатных осей.

4) Координаты центра масс кривой вычисляются по формулам

$$x_c = \frac{\int_l x\gamma(x, y, z) ds}{M}, y_c = \frac{\int_l y\gamma(x, y, z) ds}{M}, z_c = \frac{\int_l z\gamma(x, y, z) ds}{M}.$$

5) Работа силы $\vec{F} = \{P, Q, R\}$, действующей на точку, движущуюся по кривой (AB):

Пример

Вычислить работу векторного поля

$\vec{F} = \{x^2y^3, y^2z^3, xyz\}$ вдоль отрезка прямой от точки $A(-2;-3;1)$ до точки $B(1;4;2)$.

Решение.

Найдем канонические и параметрические уравнения прямой AB :

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{y-y_1}{y_2-y_1} = \frac{z-z_1}{z_2-z_1} = t \Rightarrow \frac{x+2}{3} = \frac{y+3}{7} = \frac{z-1}{1} = t,$$

$$\begin{cases} x = 3t - 2, & dx = 3dt; \\ y = 7t - 3, & dy = 7dt; \\ z = t + 1, & dz = dt. \end{cases} \quad (t(A) = 0, \quad t(B) = 1)$$

$$A = \int_{(AB)} F_x dx + F_y dy + F_z dz = \int_{(AB)} x^2 y^3 dx + y^2 z^3 dy + xyz dz =$$

$$= \int_0^1 (3(3t-2)^2 (7t-3)^3 + 7(7t-3)^2 (t+1)^3 + (3t-2)(7t-3)(t+1)) dt =$$

$$\int_0^1 (9604t^5 - 6056t^4 + 25305t^3 - 8177t^2 + 993t - 261) dt =$$

$$= \left(\frac{9604t^6}{6} - \frac{6056t^5}{5} + \frac{25305t^4}{4} - \frac{8177t^3}{3} + \frac{993t^2}{2} - 261t \right) \Big|_0^1 = 4225,55.$$

6) Площадь криволинейной поверхности, уравнение которой

$z = f(x, y)$, можно найти в виде:

$$S = \iint_S dS = \iint_{\Omega} \sqrt{1 + f_x'^2 + f_y'^2} dx dy \quad (\Omega - \text{проекция } S \text{ на плоскость } Oxy).$$

7) Масса поверхности

$$M = \iint_S \gamma(x, y, z) dS.$$

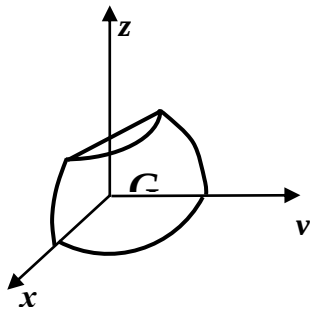
Пример

Найти массу поверхности

$$G: \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 16 \\ y \geq 0 \\ 0 \leq z \leq 3 \end{cases}$$

с поверхностной плотностью $\gamma = 2z^2 + 3$.

Решение.



На рассматриваемой поверхности

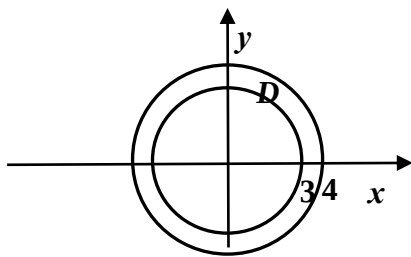
$$z = \sqrt{16 - x^2 - y^2},$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{x}{\sqrt{16 - x^2 - y^2}}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{y}{\sqrt{16 - x^2 - y^2}}.$$

Тогда

$$dS = \sqrt{1 + \frac{x^2}{16 - x^2 - y^2} + \frac{y^2}{16 - x^2 - y^2}} dx dy = \frac{4}{\sqrt{16 - x^2 - y^2}} dx dy.$$

Проекцией D этой поверхности на координатную плоскость Oxy является полукольцо с границами в виде дуг концентрических окружностей радиусов 3 и 4.



Применяя формулу и переходя к полярным координатам, получим:

$$M = 4 \iint_D \frac{2(16 - x^2 - y^2) + 3}{\sqrt{16 - x^2 - y^2}} dx dy = 4 \int_0^\pi d\varphi \int_3^4 \frac{2(16 - \rho^2) + 3}{\sqrt{16 - \rho^2}} \rho d\rho =$$

$$= 4\pi \left(-\frac{1}{2} \right) \int_7^0 \frac{2t + 3}{\sqrt{t}} dt = 2\pi \int_0^7 \left(2t^{\frac{1}{2}} + 3t^{-\frac{1}{2}} \right) dt = 2\pi \left(\frac{4}{3} t^{\frac{3}{2}} + 6t^{\frac{1}{2}} \right) \Big|_0^7 =$$

$$= 2\pi \left(\frac{28}{3} \sqrt{7} + 6\sqrt{7} \right) = \frac{92\sqrt{7}}{3} \pi.$$

8) Моменты поверхности:

$$M_{xy} = \iint_S z \gamma(x, y, z) dS, M_{xz} = \iint_S y \gamma dS, M_{yz} = \iint_S x \gamma dS \quad -$$

статические моменты поверхности относительно координатных плоскостей Oxy, Oxz, Oyz;

$$I_x = \iint_S (y^2 + z^2) \gamma(x, y, z) dS, I_y = \iint_S (x^2 + z^2) \gamma dS, I_z = \iint_S (x^2 + y^2) \gamma dS$$

моменты инерции поверхности относительно координатных осей;

$$I_{xy} = \iint_S z^2 \gamma(x, y, z) dS, I_{xz} = \iint_S y^2 \gamma dS, I_{yz} = \iint_S x^2 \gamma dS$$

моменты инерции поверхности относительно координатных плоскостей;

$$I_0 = \iint_S (x^2 + y^2 + z^2) \gamma(x, y, z) dS \quad \text{момент инерции поверхности относительно}$$

начала координат

Координаты центра масс поверхности: $x_c = \frac{M_{yz}}{M}, y_c = \frac{M_{xz}}{M}, z_c = \frac{M_{xy}}{M}.$

Формулировка задания и его объем

Расчетно графическая работа за первый семестр

В расчётно-графической работе №1 обучающемуся предлагается решить 18 задач по вариантам, включающим соответствующие задания. Каждая задача содержит по 30 вариантов. Обучающийся должен выполнить задачи только своего варианта. Номер варианта совпадает с номером обучающегося в журнале академической группы. Если номер обучающегося превышает количество представленных вариантов, следует использовать правило циклического выбора: после последнего номера вариант отсчитывается сначала.

Общие требования к оформлению:

Работа выполняется от руки в тонкой тетради в клеточку на 12 или 18 листов.

На обложке тетради аккуратно указываются: название работы «Расчётно-графическая работа №1», ФИО обучающегося полностью, номер группы, номер варианта;

Каждое задание следует начинать с нового абзаца, указывая: номер задачи в соответствии с вариантом, полную формулировку задачи и подробное решение с обоснованием каждого этапа. Решения должны быть разборчивыми, с соблюдением аккуратности и логической последовательности. Все необходимые обозначения, пояснения и вычисления должны быть приведены. Нарушения в оформлении (неразборчивый почерк, отсутствие необходимых данных, неряшливость) могут повлиять на оценку работы.

Задания.

1. Доказать, что $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ (указать $N(\varepsilon)$).

1.1. $a_n = \frac{3n-2}{2n-1}, \quad a = \frac{3}{2}.$

1.3. $a_n = \frac{7n+4}{2n+1}, \quad a = \frac{7}{2}.$

1.5. $a_n = \frac{7n-1}{n+1}, \quad a = 7.$

1.7. $a_n = \frac{9-n^3}{1+2n^3}, \quad a = -\frac{1}{2}.$

1.9. $a_n = \frac{1-2n^2}{2+4n^2}, \quad a = -\frac{1}{2}.$

1.11. $a_n = \frac{n+1}{1-2n}, \quad a = -\frac{1}{2}.$

1.13. $a_n = \frac{1-2n^2}{n^2+3}, \quad a = -2.$

1.15. $a_n = \frac{n}{3n-1}, \quad a = \frac{1}{3}.$

1.17. $a_n = \frac{4+2n}{1-3n}, \quad a = -\frac{2}{3}.$

1.19. $a_n = \frac{3-n^2}{1+2n^2}, \quad a = -\frac{1}{2}.$

1.21. $a_n = \frac{3n-1}{5n+1}, \quad a = \frac{3}{5}.$

1.23. $a_n = \frac{1-2n^2}{2+4n^2}, \quad a = -\frac{1}{2}.$

1.25. $a_n = \frac{2-2n}{3+4n}, \quad a = -\frac{1}{2}.$

1.27. $a_n = \frac{1+3n}{6-n}, \quad a = -3.$

1.29. $a_n = \frac{3n^2+2}{4n^2-1}, \quad a = \frac{3}{4}.$

1.2. $a_n = \frac{4n-1}{2n+1}, \quad a = 2.$

1.4. $a_n = \frac{2n-5}{3n+1}, \quad a = \frac{2}{3}.$

1.6. $a_n = \frac{4n^2+1}{3n^2+2}, \quad a = \frac{4}{3}.$

1.8. $a_n = \frac{4n-3}{2n+1}, \quad a = 2.$

1.10. $a_n = -\frac{5n}{n+1}, \quad a = -5.$

1.12. $a_n = \frac{2n+1}{3n-5}, \quad a = \frac{2}{3}.$

1.14. $a_n = \frac{3n^2}{2-n^2}, \quad a = -3.$

1.16. $a_n = \frac{3n^3}{n^3-1}, \quad a = 3.$

1.18. $a_n = \frac{5n+15}{6-n}, \quad a = -5.$

1.20. $a_n = \frac{2n-1}{2-3n}, \quad a = -\frac{2}{3}.$

1.22. $a_n = \frac{4n-3}{2n+1}, \quad a = 2.$

1.24. $a_n = \frac{5n+1}{10n-3}, \quad a = \frac{1}{2}.$

1.26. $a_n = \frac{23-4n}{2-n}, \quad a = 4.$

1.28. $a_n = \frac{2n+3}{n+5}, \quad a = 2.$

1.30. $a_n = \frac{2-3n^2}{4+5n^2}, \quad a = -\frac{3}{5}.$

2. Вычислить пределы числовых последовательностей.

$$2.1. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(3-n)^2 + (3+n)^2}{(3-n)^2 - (3+n)^2}.$$

$$2.3. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(3-n)^4 - (2-n)^4}{(1-n)^3 - (1+n)^3}.$$

$$2.5. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(6-n)^2 - (6+n)^2}{(6+n)^2 - (1-n)^2}.$$

$$2.7. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(1+2n)^3 - 8n^3}{(1+2n)^2 + 4n^2}.$$

$$2.9. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(3-n)^3}{(n+1)^2 - (n+1)^3}.$$

$$2.11. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2(n+1)^3 - (n-2)^3}{n^2 + 2n - 3}.$$

$$2.13. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+3)^3 + (n+4)^3}{(n+3)^4 - (n+4)^4}.$$

$$2.15. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{8n^3 - 2n}{(n+1)^4 - (n-1)^4}.$$

$$2.17. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n-3)^3 - (n+5)^3}{(3n-1)^3 + (2n+3)^3}.$$

$$2.19. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n+1)^3 + (3n+2)^3}{(2n+3)^3 - (n-7)^3}.$$

$$2.21. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n+1)^3 - (2n+3)^3}{(2n+1)^2 + (2n+3)^2}.$$

$$2.23. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+2)^4 - (n-2)^4}{(n+5)^2 + (n-5)^2}.$$

$$2.25. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^3 - (n-1)^3}{(n+1)^2 - (n-1)^2}.$$

$$2.2. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(3-n)^4 - (2-n)^4}{(1-n)^4 - (1+n)^4}.$$

$$2.4. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(1-n)^4 - (1+n)^4}{(1+n)^3 - (1-n)^3}.$$

$$2.6. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^3 - (n+1)^2}{(n-1)^3 - (n+1)^3}.$$

$$2.8. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(3-4n)^2}{(n-3)^3 - (n+3)^3}.$$

$$2.10. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^2 + (n-1)^2 - (n+2)^3}{(4-n)^3}.$$

$$2.12. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^3 + (n+2)^3}{(n+4)^3 + (n+5)^3}.$$

$$2.14. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^4 - (n-1)^4}{(n+1)^3 + (n-1)^3}.$$

$$2.16. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+6)^3 - (n+1)^3}{(2n+3)^2 + (n+4)^2}.$$

$$2.18. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+10)^2 + (3n+1)^2}{(n+6)^3 - (n+1)^3}.$$

$$2.20. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+7)^3 - (n+2)^3}{(3n+2)^2 + (4n+1)^2}.$$

$$2.22. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3 - (n-1)^3}{(n+1)^4 - n^4}.$$

$$2.24. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^4 - (n-1)^4}{(n+1)^3 + (n-1)^3}.$$

$$2.26. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^3 - (n-1)^3}{(n+1)^2 + (n-1)^2}.$$

$$2.27. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+2)^3 + (n-2)^3}{n^4 + 2n^2 - 1}.$$

$$2.28. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^3 + (n-1)^3}{n^3 - 3n}.$$

$$2.29. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^3 + (n-1)^3}{n^3 + 1}.$$

$$2.30. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+2)^2 - (n-2)^2}{(n+3)^2}.$$

$$2.31. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n+1)^2 - (n+1)^2}{n^2 + n + 1}.$$

3. Вычислить пределы числовых последовательностей.

$$3.1. \lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\sqrt{n^2 + 1} + \sqrt{n^2 - 1} \right).$$

$$3.2. \lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\sqrt{n(n-2)} - \sqrt{n^2 - 3} \right).$$

$$3.3. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(n - \sqrt[3]{n^3 - 5} \right) n \sqrt{n}.$$

$$3.4. \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\sqrt{(n^2 + 1)(n^2 - 4)} - \sqrt{n^4 - 9} \right]$$

$$3.5. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^5 - 8} - n \sqrt{n(n^2 + 5)}}{\sqrt{n}}.$$

$$3.6. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt{n^2 - 3n + 2} - n \right).$$

$$3.7. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(n + \sqrt[3]{4 - n^3} \right).$$

$$3.8. \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\sqrt{n(n+2)} - \sqrt{n^2 - 2n + 3} \right].$$

$$3.9. \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\sqrt{(n+2)(n+1)} - \sqrt{(n-1)(n+3)} \right].$$

$$3.10. \lim_{n \rightarrow \infty} n^2 \left(\sqrt{n(n^4 - 1)} - \sqrt{n^5 - 8} \right).$$

$$3.11. \lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\sqrt[3]{5 + 8n^3} - 2n \right).$$

$$3.12. \lim_{n \rightarrow \infty} n^2 \left(\sqrt[3]{5 + n^3} - \sqrt[3]{3 + n^3} \right).$$

$$3.13. \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\sqrt[3]{(n+2)^2} - \sqrt[3]{(n-3)^2} \right].$$

$$3.14. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{(n+1)^3} - \sqrt{n(n-1)(n-3)}}{\sqrt{n}}.$$

- 3.15. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt{n^2 + 3n - 2} - \sqrt{n^2 - 3} \right).$
- 3.16. $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} \left(\sqrt{n+2} - \sqrt{n-3} \right).$
- 3.17. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n(n^5 + 9)} - \sqrt{(n^4 - 1)(n^2 + 5)}}{n}.$
- 3.18. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt{n(n+5)} - n \right).$
- 3.19. $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n^3 + 8} \left(\sqrt{n^3 + 2} - \sqrt{n^3 - 1} \right).$
- 3.20. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{(n^3 + 1)(n^2 + 3)} - \sqrt{n(n^4 + 2)}}{2\sqrt{n}}.$
- 3.21. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\sqrt{(n^2 + 1)(n^2 + 2)} - \sqrt{(n^2 - 1)(n^2 - 2)} \right].$
- 3.22. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{(n^5 + 1)(n^2 - 1)} - n\sqrt{n(n^4 + 1)}}{n}.$
- 3.23. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{(n^4 + 1)(n^2 - 1)} - \sqrt{n^6 - 1}}{n}.$
- 3.24. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left[n - \sqrt{n(n-1)} \right].$
- 3.25. $\lim_{n \rightarrow \infty} n^3 \left(\sqrt[3]{n^2(n^6 + 4)} - \sqrt[3]{(n^8 - 1)} \right).$
- 3.26. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left[n\sqrt{n} - \sqrt{n(n+1)(n+2)} \right].$
- 3.27. $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[3]{n} \left(\sqrt[3]{n^2} - \sqrt[3]{n(n-1)} \right).$
- 3.28. $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n+2} \left(\sqrt{n+3} - \sqrt{n-4} \right).$
- 3.29. $\lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\sqrt{n^4 + 3} - \sqrt{n^4 - 2} \right).$
- 3.30. $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n(n+1)(n+2)} \left(\sqrt{n^3 - 3} - \sqrt{n^3 - 2} \right).$
- 3.31. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{(n^2 + 5)(n^4 + 2)} - \sqrt{n^6 - 3n^3 + 5}}{n}.$

4. Вычислить пределы числовых последовательностей.

$$4.1. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \frac{3}{n^2} + \dots + \frac{n-1}{n^2} \right).$$

$$4.2. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n+1)! + (2n+2)!}{(2n+3)!}.$$

$$4.3. \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{1+3+5+7+\dots+(2n-1)}{n+1} - \frac{2n+1}{2} \right].$$

$$4.4. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{n+1} + 3^{n+1}}{2^n + 3^n}.$$

$$4.5. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+2+3+\dots+n}{\sqrt{9n^4+1}}.$$

$$4.6. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+3+5+\dots+(2n-1)}{1+2+3+\dots+n}.$$

$$4.7. \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{1+3+5+7+\dots+(2n-1)}{n+3} - n \right].$$

$$4.8. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+4+7+\dots+(3n-2)}{\sqrt{5n^4+n+1}}.$$

$$4.9. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+4)! - (n+2)!}{(n+3)!}.$$

$$4.10. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(3n-1)! + (3n+1)!}{(3n)!(n-1)}.$$

$$4.11. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n - 5^{n+1}}{2^{n+1} + 5^{n+2}}.$$

$$4.12. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{3^n}}{1 + \frac{1}{5} + \frac{1}{5^2} + \dots + \frac{1}{5^n}}.$$

$$4.13. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1-3+5-7+9-11+\dots+(4n-3)-(4n-1)}{\sqrt{n^2+1}+\sqrt{n^2+n+1}}.$$

$$4.14. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1-2+3-4+\dots+(2n-1)-2n}{\sqrt{9n^4+1}}.$$

$$4.15. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{n^3+5}-\sqrt{3n^4+2}}{1+3+5+\dots+(2n-1)}.$$

$$4.16. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^n-2^n}{3^{n-1}+2^n}.$$

$$4.17. \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{n+2}{1+2+3+\dots+n} - \frac{2}{3} \right].$$

$$4.18. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{5}{6} + \frac{13}{36} + \dots + \frac{3^n+2^n}{6^n} \right).$$

$$4.19. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2-5+4-7+\dots+2n-(2n+3)}{n+3}.$$

$$4.20. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n+1)!+(2n+2)!}{(2n+3)!-(2n+2)!}.$$

$$4.21. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+2+\dots+n}{n-n^2+3}.$$

$$4.22. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2+\sqrt{n}-1}{2+7+12+\dots+(5n-3)}.$$

$$4.23. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3}{4} + \frac{5}{16} + \frac{9}{64} + \dots + \frac{1+2^n}{4^n} \right).$$

$$4.24. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2+4+6+\dots+2n}{1+3+5+\dots+(2n-1)}.$$

$$4.25. \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{1+5+9+13+\dots+(4n-3)}{n+1} - \frac{4n+1}{2} \right].$$

$$4.26. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1-2+3-4+\dots-2n}{\sqrt[3]{n^3+2n+2}}.$$

$$4.27. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n + 7^n}{2^n - 7^{n-1}}.$$

$$4.28. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n! + (n+2)!}{(n-1)! + (n+2)!}.$$

$$4.29. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3+6+9+\dots+3n}{n^2+4}.$$

$$4.30. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{7}{10} + \frac{29}{100} + \dots + \frac{2^n + 5^n}{10^n} \right).$$

$$4.31. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2+4+\dots+2n}{n+3} - n \right).$$

5. Вычислить пределы числовых последовательностей.

$$5.1. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+1}{n-1} \right)^n.$$

$$5.2. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n+3}{2n+1} \right)^{n+1}.$$

$$5.3. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^2-1}{n^2} \right)^{n^4}.$$

$$5.4. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n-1}{n+3} \right)^{n+2}.$$

$$5.5. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n^2+2}{2n^2+1} \right)^{n^2}.$$

$$5.6. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3n^2-6n+7}{3n^2+20n-1} \right)^{-n+1}.$$

$$5.7. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^2-3n+6}{n^2+5n+1} \right)^{n/2}.$$

$$5.8. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n-10}{n+1} \right)^{3n+1}.$$

$$5.9. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{6n-7}{6n+4} \right)^{3n+2}.$$

$$5.10. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3n^2+4n-1}{3n^2+2n+7} \right)^{2n+5}.$$

$$5.11. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^2+n+1}{n^2+n-1} \right)^{-n^2}.$$

$$5.12. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n^2+5n+7}{2n^2+5n+3} \right)^n.$$

$$5.13. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n-1}{n+1} \right)^{n^2}.$$

$$5.14. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{5n^2+3n-1}{5n^2+3n+3} \right)^{n^2}.$$

$$5.15. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3n+1}{3n-1} \right)^{2n+3}.$$

$$5.16. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n^2+7n-1}{2n^2+3n-1} \right)^{-n^2}.$$

$$5.17. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+3}{n+5} \right)^{n+4}.$$

$$5.18. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^3+1}{n^3-1} \right)^{2n-n^3}.$$

$$5.19. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n^2+21n-7}{2n^2+18n+9} \right)^{2n+1}.$$

$$5.20. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{10n-3}{10n-1} \right)^{5n}.$$

$$5.21. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3n^2-5n}{3n^2-5n+7} \right)^{n+1}.$$

$$5.22. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+3}{n+1} \right)^{-n^2}.$$

$$5.23. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^2-6n+5}{n^2-5n+5} \right)^{3n+2}.$$

$$5.24. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+4}{n+2} \right)^n.$$

$$5.25. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{7n^2+18n-15}{7n^2+11n+15} \right)^{n+2}.$$

$$5.26. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n-1}{2n+1} \right)^{n+1}.$$

$$5.27. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^3+n+1}{n^3+2} \right)^{2n^2}.$$

$$5.28. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{13n+3}{13n-10} \right)^{n-3}.$$

$$5.29. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n^2+2n+3}{2n^2+2n+1} \right)^{3n^2-7}.$$

$$5.30. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+5}{n-7} \right)^{n/6+1}.$$

$$5.31. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{4n^2+4n-1}{4n^2+2n+3} \right)^{1-2n}.$$

6. Доказать (найти $\delta(\varepsilon)$), что:

$$6.1. \lim_{x \rightarrow -3} \frac{2x^2+5x-3}{x+3} = -7.$$

$$6.2. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{5x^2-4x-1}{x-1} = 6.$$

$$6.3. \lim_{x \rightarrow -2} \frac{3x^2+5x-2}{x+2} = -7.$$

$$6.4. \lim_{x \rightarrow 3} \frac{4x^2-14x+6}{x-3} = 10.$$

$$6.5. \lim_{x \rightarrow -1/2} \frac{6x^2+x-1}{x+1/2} = -5.$$

$$6.6. \lim_{x \rightarrow 1/2} \frac{6x^2-x-1}{x-1/2} = 5.$$

$$6.7. \lim_{x \rightarrow -1/3} \frac{9x^2-1}{x+1/3} = -6.$$

$$6.8. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{3x^2-5x-2}{x-2} = 7.$$

$$6.9. \lim_{x \rightarrow -1/3} \frac{3x^2-2x-1}{x+1/3} = -4.$$

$$6.10. \lim_{x \rightarrow -1} \frac{7x^2+8x+1}{x+1} = -6.$$

$$6.11. \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 4x + 3}{x - 3} = 2.$$

$$6.13. \lim_{x \rightarrow 1/3} \frac{6x^2 - 5x + 1}{x - 1/3} = -1.$$

$$6.15. \lim_{x \rightarrow -7/2} \frac{2x^2 + 13x + 21}{2x + 7} = -\frac{1}{2}.$$

$$6.17. \lim_{x \rightarrow 1/3} \frac{6x^2 + x - 1}{x - 1/3} = 5.$$

$$6.19. \lim_{x \rightarrow 11} \frac{2x^2 - 21x - 11}{x - 11} = 23.$$

$$6.21. \lim_{x \rightarrow -7} \frac{2x^2 + 15x + 7}{x + 7} = -13.$$

$$6.23. \lim_{x \rightarrow -1/3} \frac{6x^2 - x - 1}{3x + 1} = -\frac{5}{3}.$$

$$6.25. \lim_{x \rightarrow 8} \frac{3x^2 - 40x + 128}{x - 8} = 8.$$

$$6.27. \lim_{x \rightarrow 1/2} \frac{2x^2 - 5x + 2}{x - 1/2} = -3.$$

$$6.29. \lim_{x \rightarrow 1/3} \frac{3x^2 + 17x - 6}{x - 1/3} = 19.$$

$$6.31. \lim_{x \rightarrow 1/3} \frac{15x^2 - 2x - 1}{x - 1/3} = 8.$$

$$6.12. \lim_{x \rightarrow 1/2} \frac{2x^2 + 3x - 2}{x - 1/2} = 5.$$

$$6.14. \lim_{x \rightarrow -7/5} \frac{10x^2 + 9x - 7}{x + 7/5} = -19.$$

$$6.16. \lim_{x \rightarrow 5/2} \frac{2x^2 - 9x + 10}{2x - 5} = \frac{1}{2}.$$

$$6.18. \lim_{x \rightarrow -1/2} \frac{6x^2 - 75x - 39}{x + 1/2} = -81.$$

$$6.20. \lim_{x \rightarrow 5} \frac{5x^2 - 24x - 5}{x - 5} = 26.$$

$$6.22. \lim_{x \rightarrow -4} \frac{2x^2 + 6x - 8}{x + 4} = -10.$$

$$6.24. \lim_{x \rightarrow -5} \frac{x^2 + 2x - 15}{x + 5} = -8.$$

$$6.26. \lim_{x \rightarrow 10} \frac{5x^2 - 51x + 10}{x - 10} = 49.$$

$$6.28. \lim_{x \rightarrow -6} \frac{3x^2 + 17x - 6}{x + 6} = -19.$$

$$6.30. \lim_{x \rightarrow -1/5} \frac{15x^2 - 2x - 1}{x + 1/5} = -8.$$

7. Вычислить пределы функций.

$$7.1. \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x^3 - 2x - 1)(x + 1)}{x^4 + 4x^2 - 5}.$$

$$7.3. \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x^2 + 3x + 2)^2}{x^3 + 2x^2 - x - 2}.$$

$$7.5. \lim_{x \rightarrow -3} \frac{(x^2 + 2x - 3)^2}{x^3 + 4x^2 + 3x}.$$

$$7.2. \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 - 3x - 2}{x + x^2}.$$

$$7.4. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(2x^2 - x - 1)^2}{x^3 + 2x^2 - x - 2}.$$

$$7.6. \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x^3 - 2x - 1)^2}{x^4 + 2x + 1}.$$

$$7.7. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^3 - (1+3x)}{x+x^5}.$$

$$7.9. \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 - 3x - 2}{x^2 - x - 2}.$$

$$7.11. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 3x + 2}{x^3 - x^2 - x + 1}.$$

$$7.13. \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 + 4x^2 + 5x + 2}{x^3 - 3x - 2}.$$

$$7.15. \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^3 + 5x^2 + 8x + 4}{x^3 + 3x^2 - 4}.$$

$$7.17. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 6x^2 + 12x - 8}{x^3 - 3x^2 + 4}.$$

$$7.19. \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 - 3x - 2}{(x^2 - x - 2)^2}.$$

$$7.21. \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 - 3x - 2}{x^2 + 2x + 1}.$$

$$7.23. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^4 - 1}{2x^4 - x^2 - 1}.$$

$$7.25. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2 - x - 1}{x^3 + 2x^2 - x - 2}.$$

$$7.27. \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 - 2x - 1}{x^4 + 2x + 1}.$$

$$7.29. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{2x^2 - x - 1}.$$

$$7.31. \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^3 - 4x^2 - 3x + 18}{x^3 - 5x^2 + 3x + 9}.$$

$$7.8. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 2x + 1}{2x^2 - x - 1}.$$

$$7.10. \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 + 5x^2 + 7x + 3}{x^3 + 4x^2 + 5x + 2}.$$

$$7.12. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 + x^2 - 5x + 3}{x^3 - x^2 - x + 1}.$$

$$7.14. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^4 - 1}{2x^4 - x^2 - 1}.$$

$$7.16. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 5x^2 + 8x - 4}{x^3 - 3x^2 + 4}.$$

$$7.18. \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^3 + 5x^2 + 8x + 4}{x^3 + 7x^2 + 16x + 12}.$$

$$7.20. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 3x - 2}{x - 2}.$$

$$7.22. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 2x + 1}{x^3 - x^2 - x + 1}.$$

$$7.24. \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 + 3x + 2}{x^3 + 2x^2 - x - 2}.$$

$$7.26. \lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^2 + 2x - 3}{x^3 + 4x^2 + 3x}.$$

$$7.28. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^3 - (1+3x)}{x^2 + x^5}.$$

$$7.30. \lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^3 + 7x^2 + 15x + 9}{x^3 + 8x^2 + 21x + 18}.$$

8. Вычислить пределы функций.

$$8.1. \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{1+2x} - 3}{\sqrt{x} - 2}.$$

$$8.3. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt[3]{x^2-1}}.$$

$$8.2. \lim_{x \rightarrow -8} \frac{\sqrt{1-x} - 3}{2 + \sqrt[3]{x}}.$$

$$8.4. \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x+13} - 2\sqrt{x+1}}{x^2 - 9}.$$

$$8.5 \lim_{x \rightarrow -2} \frac{\sqrt[3]{x-6} + 2}{x^3 + 8}.$$

$$8.7 \lim_{x \rightarrow 8} \frac{\sqrt{9+2x} - 5}{\sqrt[3]{x} - 2}.$$

$$8.9 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{8+3x+x^2} - 2}{x+x^2}.$$

$$8.11 \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x} - 1}{\sqrt{1+x} - \sqrt{2x}}.$$

$$8.13 \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt[3]{4x} - 2}{\sqrt{2+x} - \sqrt{2x}}.$$

$$8.15 \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt[3]{9x} - 3}{\sqrt{3+x} - \sqrt{2x}}.$$

$$8.17 \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt[3]{16x} - 4}{\sqrt{4+x} - \sqrt{2x}}.$$

$$8.19 \lim_{x \rightarrow 1/2} \frac{\sqrt[3]{x/4} - 1/2}{\sqrt{1/2+x} - \sqrt{2x}}.$$

$$8.21 \lim_{x \rightarrow 1/4} \frac{\sqrt[3]{x/16} - 1/4}{\sqrt{1/4+x} - \sqrt{2x}}.$$

$$8.23 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{27+x} - \sqrt[3]{27-x}}{\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[5]{x}}.$$

$$8.25 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1-2x+3x^2} - (1+x)}{\sqrt[3]{x}}.$$

$$8.27 \lim_{x \rightarrow 16} \frac{\sqrt[4]{x} - 2}{\sqrt[3]{(\sqrt{x} - 4)^2}}.$$

$$8.29 \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x} - 2}{\sqrt[3]{x^2} - 16}.$$

$$8.31 \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x+13} - 2\sqrt{x+1}}{\sqrt[3]{x^2} - 9}.$$

$$8.6 \lim_{x \rightarrow 16} \frac{\sqrt[4]{x} - 2}{\sqrt{x} - 4}.$$

$$8.8 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1-2x+x^2} - (1+x)}{x}.$$

$$8.10 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{27+x} - \sqrt[3]{27-x}}{x + 2\sqrt[3]{x^4}}.$$

$$8.12 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{\sqrt[3]{1+x} - \sqrt[3]{1-x}}.$$

$$8.14 \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x} - 1}{x^2 - 1}.$$

$$8.16 \lim_{x \rightarrow -2} \frac{\sqrt[3]{x-6} + 2}{x+2}.$$

$$8.18 \lim_{x \rightarrow 8} \frac{\sqrt{9+2x} - 5}{\sqrt[3]{x^2} - 4}.$$

$$8.20 \lim_{x \rightarrow 1/3} \frac{\sqrt[3]{x/9} - 1/3}{\sqrt{1/3+x} - \sqrt{2x}}.$$

$$8.22 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{\sqrt[7]{x}}.$$

$$8.24 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{8+3x-x^2} - 2}{\sqrt[3]{x^2} + x^3}.$$

$$8.26 \lim_{x \rightarrow 8} \frac{\sqrt{9+2x} - 5}{\sqrt[3]{x} - 2}.$$

$$8.28 \lim_{x \rightarrow -2} \frac{\sqrt[3]{x-6} + 2}{\sqrt[3]{x^3} + 8}.$$

$$8.30 \lim_{x \rightarrow -8} \frac{10-x-6\sqrt{1-x}}{2+\sqrt[3]{x}}.$$

Дифференцирование:

Задача 1. Найти дифференциал dy .

1.1. $y = x \arcsin(1/x) + \ln|x + \sqrt{x^2 - 1}|, \quad x > 0.$

1.2. $y = \operatorname{tg}\left(2 \arccos \sqrt{1 - 2x^2}\right), \quad x > 0.$

1.3. $y = \sqrt{1 + 2x} - \ln|x + \sqrt{1 + 2x}|.$

1.4. $y = x^2 \operatorname{arctg} \sqrt{x^2 - 1} - \sqrt{x^2 - 1}.$

1.5. $y = \arccos\left(1/\sqrt{1 + 2x^2}\right), \quad x > 0.$

1.6. $y = x \ln|x + \sqrt{x^2 + 3}| - \sqrt{x^2 + 3}.$

1.7. $y = \operatorname{arctg}(\operatorname{sh} x) + (\operatorname{sh} x) \operatorname{lnch} x.$

1.8. $y = \arccos\left((x^2 - 1)/(x^2 \sqrt{2})\right).$

1.9. $y = \ln\left(\cos^2 x + \sqrt{1 + \cos^4 x}\right).$

1.10. $y = \ln\left(x + \sqrt{1 + x^2}\right) - \sqrt{1 + x^2} \operatorname{arctg} x.$

1.11. $y = \frac{\ln|x|}{1 + x^2} - \frac{1}{2} \ln \frac{x^2}{1 + x^2}$

1.12. $y = \ln\left(e^x + \sqrt{e^{2x} - 1}\right) + \operatorname{arcsine}^x.$

1.13. $y = x\sqrt{4 - x^2} + a \arcsin(x/2).$

1.14. $y = \operatorname{Intg}(x/2) - x/\sin x.$

1.15. $y = 2x + \ln|\sin x + 2 \cos x|.$

1.16. $y = \sqrt{\operatorname{ctg} x} - \sqrt{\operatorname{tg}^3 x}/3.$

1.17. $y = \ln \left| \frac{x + \sqrt{x^2 + 1}}{2x} \right|.$

1.18. $y = \sqrt[3]{\frac{x + 2}{x - 2}}.$

1.19. $y = \operatorname{arctg} \frac{x^2 - 1}{x}.$

$$1.20. y = \ln|x^2 - 1| - \frac{1}{x^2 - 1}.$$

$$1.21. y = \operatorname{arctg}\left(\operatorname{tg}\frac{x}{2} + 1\right).$$

$$1.22. y = \ln|2x + 2\sqrt{x^2 + x + 1}|.$$

$$1.23. y = \ln|\cos\sqrt{x}| + \sqrt{x} \operatorname{tg}\sqrt{x}.$$

$$1.24. y = e^x (\cos 2x + 2\sin 2x).$$

$$1.25. y = x(\sin \ln x - \cos \ln x).$$

$$1.26. y = \left(\sqrt{x-1} - \frac{1}{2}\right)e^{2\sqrt{x-1}}.$$

$$1.27. y = \cos x \cdot \operatorname{Intg} x - \operatorname{Intg} \frac{x}{2}.$$

$$1.28. y = \sqrt{3+x^2} - x \ln|x + \sqrt{3+x^2}|.$$

$$1.29. y = \sqrt{x} - (1+x) \operatorname{arctg}\sqrt{x}.$$

$$1.30. y = x \operatorname{arctg} x - \ln\sqrt{1+x^2}.$$

$$1.31. y = x\sqrt{x^2-1} + \ln|x + \sqrt{x^2-1}|.$$

Задача 2. Вычислить приближенно с помощью дифференциала.

$$2.1. y = \sqrt[3]{x}, \quad x = 7,76.$$

$$2.2. y = \sqrt[3]{x^3 + 7x}, \quad x = 1,012.$$

$$2.3. y = \left(x + \sqrt{5-x^2}\right)/2, \quad x = 0,98.$$

$$2.4. y = \sqrt[3]{x}, \quad x = 27,54.$$

$$2.5. y = \arcsin x, \quad x = 0,08.$$

$$2.6. y = \sqrt[3]{x^2 + 2x + 5}, \quad x = 0,97.$$

$$2.7. y = \sqrt[3]{x}, \quad x = 26,46.$$

$$2.8. y = \sqrt{x^2 + x + 3}, \quad x = 1,97.$$

$$2.9. y = x^{11}, \quad x = 1,021.$$

$$2.10. y = \sqrt[3]{x}, \quad x = 1,21.$$

$$2.11. y = x^{21}, \quad x = 0,998.$$

$$2.12. y = \sqrt[3]{x^2}, \quad x = 1,03.$$

$$2.13. y = x^6, \quad x = 2,01.$$

$$2.14. y = \sqrt[3]{x}, \quad x = 8,24.$$

$$2.15. y = x^7, \quad x = 1,996.$$

$$2.16. y = \sqrt[3]{x}, \quad x = 7,64.$$

$$2.17. y = \sqrt{4x-1}, \quad x = 2,56.$$

$$2.18. y = 1/\sqrt{2x^2 + x + 1}, \quad x = 1,016.$$

$$2.19. y = \sqrt[3]{x}, \quad x = 8,36.$$

$$2.20. y = 1/\sqrt{x}, \quad x = 4,16.$$

$$2.21. y = x^7, \quad x = 2,002.$$

$$2.22. y = \sqrt{4x-3}, \quad x = 1,78.$$

$$2.23. y = \sqrt{x^3}, \quad x = 0,98.$$

$$2.24. y = x^5, \quad x = 2,997.$$

$$2.25. y = \sqrt[5]{x^2}, \quad x = 1,03.$$

$$2.26. y = x^4, \quad x = 3,998.$$

$$2.27. y = \sqrt{1+x+\sin x}, \quad x = 0,01.$$

$$2.28. y = \sqrt[3]{3x+\cos x}, \quad x = 0,01.$$

$$2.29. y = \sqrt[4]{2x-\sin(\pi x/2)}, \quad x = 1,02.$$

$$2.30. y = \sqrt{x^2+5}, \quad x = 1,97.$$

$$2.31. y = 1/\sqrt{2x+1}, \quad x = 1,58.$$

Задача 3. Найти производную.

$$3.1. y = \frac{2(3x^3 + 4x^2 - x - 2)}{15\sqrt{1+x}}.$$

$$3.2. y = \frac{(2x^2 - 1)\sqrt{1+x^2}}{3x^3}.$$

$$3.3. y = \frac{x^4 - 8x^2}{2(x^2 - 4)}.$$

$$3.5. y = \frac{(1 + x^8)\sqrt{1 + x^8}}{12x^{12}}.$$

$$3.7. y = \frac{(x^2 - 6)\sqrt{(4 + x^2)^3}}{120x^5}.$$

$$3.9. y = \frac{4 + 3x^3}{x^3\sqrt{(2 + x^3)^2}}.$$

$$3.11. y = \frac{x^6 + x^3 - 2}{\sqrt{1 - x^3}}.$$

$$3.13. y = \frac{1 + x^2}{2\sqrt{1 + 2x^2}}.$$

$$3.15. y = \frac{\sqrt{(1 + x^2)^3}}{3x^3}.$$

$$3.17. y = \frac{\sqrt{2x + 3}(x - 2)}{x^2}.$$

$$3.19. y = \frac{(2x^2 + 3)\sqrt{x^2 - 3}}{9x^3}.$$

$$3.21. y = \frac{(2x + 1)\sqrt{x^2 - x}}{x^2}.$$

$$3.23. y = \frac{1}{(x + 2)\sqrt{x^2 + 4x + 5}}.$$

$$3.25. y = 3 \cdot \sqrt[3]{\frac{(x + 1)}{(x - 1)^2}}.$$

$$3.27. y = \frac{x\sqrt{x + 1}}{x^2 + x + 1}.$$

$$3.4. y = \frac{2x^2 - x - 1}{3\sqrt{2 + 4x}}.$$

$$3.6. y = \frac{x^2}{2\sqrt{1 - 3x^4}}.$$

$$3.8. y = \frac{(x^2 - 8)\sqrt{x^2 - 8}}{6x^3}.$$

$$3.10. y = \sqrt[3]{\frac{(1 + x^{3/4})^2}{x^{3/2}}}.$$

$$3.12. y = \frac{(x^2 - 2)\sqrt{4 + x^2}}{24x^3}.$$

$$3.14. y = \frac{\sqrt{x - 1}(3x + 2)}{4x^2}.$$

$$3.16. y = \frac{x^6 + 8x^3 - 128}{\sqrt{8 - x^3}}.$$

$$3.18. y = (1 - x^2)^5 \sqrt{x^3 + \frac{1}{x}}.$$

$$3.20. y = \frac{x - 1}{(x^2 + 5)\sqrt{x^2 + 5}}.$$

$$3.22. y = 2\sqrt{\frac{1 - \sqrt{x}}{1 + \sqrt{x}}}.$$

$$3.24. y = 3\frac{\sqrt[3]{x^2 + x + 1}}{x + 1}.$$

$$3.26. y = \frac{x + 7}{6\sqrt{x^2 + 2x + 7}}.$$

$$3.28. y = \frac{x^2 + 2}{2\sqrt{1 - x^4}}.$$

$$3.29. y = \frac{(x+3)\sqrt{2x-1}}{2x+7}.$$

$$3.30. y = \frac{3x + \sqrt{x}}{\sqrt{x^2 + 2}}.$$

$$3.31. y = \frac{3x^6 + 4x^4 - x^2 - 2}{15\sqrt{1+x^2}}.$$

Задача 4. Найти производную.

$$4.1. y = \sin \sqrt{3} + \frac{1}{3} \frac{\sin^2 3x}{\cos 6x}.$$

$$4.2. y = \cos \ln 2 - \frac{1}{3} \frac{\cos^2 3x}{\sin 6x}.$$

$$4.3. y = \operatorname{tg} \lg \frac{1}{3} + \frac{1}{4} \frac{\sin^2 4x}{\cos 8x}.$$

$$4.4. y = \operatorname{ctg} \sqrt[3]{5} - \frac{1}{8} \frac{\cos^2 4x}{\sin 8x}.$$

$$4.5. y = \frac{\cos \sin 5 \cdot \sin^2 2x}{2 \cos 4x}.$$

$$4.6. y = \frac{\sin \cos 3 \cdot \cos^2 2x}{4 \sin 4x}.$$

$$4.7. y = \frac{\cos \ln 7 \cdot \sin^2 7x}{7 \cos 14x}.$$

$$4.8. y = \cos(\operatorname{ctg} 2) - \frac{1}{16} \frac{\cos^2 8x}{\sin 16x}.$$

$$4.9. y = \operatorname{ctg}(\cos 2) + \frac{1}{6} \frac{\sin^2 6x}{\cos 12x}.$$

$$4.10. y = \sqrt[3]{\operatorname{ctg} 2} - \frac{1}{20} \frac{\cos^2 10x}{\sin 20x}.$$

$$4.11. y = \frac{1}{3} \cos\left(\operatorname{tg} \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{10} \frac{\sin^2 10x}{\cos 20x}.$$

$$4.12. y = \ln \sin \frac{1}{2} - \frac{1}{24} \frac{\cos^2 12x}{\sin 24x}.$$

$$4.13. y = 8 \sin(\operatorname{ctg} 3) + \frac{1}{5} \frac{\sin^2 5x}{\cos 10x}.$$

$$4.14. y = \frac{\cos(\operatorname{ctg} 3) \cdot \cos^2 14x}{28 \sin 28x}.$$

$$4.15. y = \frac{\cos\left(\operatorname{tg}\frac{1}{3}\right) \cdot \sin^2 15x}{15 \cos 30x}.$$

$$4.16. y = \frac{\sin\left(\operatorname{tg}\frac{1}{7}\right) \cdot \cos^2 16x}{32 \sin 32x}.$$

$$4.17. y = \frac{\operatorname{ctg}\left(\sin\frac{1}{3}\right) \cdot \sin^2 17x}{17 \cos 34x}.$$

$$4.18. y = \frac{\sqrt[5]{\operatorname{ctg} 2} \cdot \cos^2 18x}{36 \sin 36x}.$$

$$4.19. y = \frac{\operatorname{tg}(\ln 2) \cdot \sin^2 19x}{19 \cos 38x}.$$

$$4.20. y = \operatorname{ctg}(\cos 5) - \frac{1}{40} \frac{\cos^2 20x}{\sin 40x}.$$

$$4.21. y = \sqrt{\operatorname{tg} 4} + \frac{\sin^2 21x}{21 \cos 42x}.$$

$$4.22. y = \cos(\ln 13) - \frac{1}{44} \frac{\cos^2 22x}{\sin 44x}.$$

$$4.23. y = \ln \cos \frac{1}{3} + \frac{\sin^2 23x}{23 \cos 46x}.$$

$$4.24. y = \operatorname{ctg}\left(\sin \frac{1}{13}\right) - \frac{1}{48} \frac{\cos^2 24x}{\sin 48x}.$$

$$4.25. y = \sin \ln 2 + \frac{\sin^2 25x}{25 \cos 50x}.$$

$$4.26. y = \sqrt[3]{\cos \sqrt{2}} - \frac{1}{52} \frac{\cos^2 26x}{\sin 52x}.$$

$$4.27. y = \sqrt[7]{\operatorname{tg}(\cos 2)} + \frac{\sin^2 27x}{27 \cos 54x}.$$

$$4.28. y = \sin \sqrt[3]{\operatorname{tg} 2} - \frac{\cos^2 28x}{56 \sin 56x}.$$

$$4.29. y = \cos^2 \sin 3 + \frac{\sin^2 29x}{29 \cos 58x}.$$

$$4.30. y = \sin^3 \cos 2 - \frac{\cos^2 30x}{60 \sin 60x}.$$

$$4.31. y = \operatorname{tg} \sqrt{\cos(1/3)} + \frac{\sin^2 31x}{31 \cos 62x}.$$

Задача 5. Найти производную.

$$5.1. y = \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{tg} x - \operatorname{ctg} x}{\sqrt{2}}.$$

$$5.2. y = \arcsin \frac{\sqrt{x} - 2}{\sqrt{5x}}.$$

$$5.3. y = \frac{2x-1}{4} \sqrt{2+x-x^2} + \frac{9}{8} \arcsin \frac{2x-1}{3}.$$

$$5.4. y = \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{1+x^2} - 1}{x}.$$

$$5.5. y = \arccos \frac{x^2 - 4}{\sqrt{x^4 + 16}}.$$

$$5.6. y = \sqrt{\frac{2}{3}} \operatorname{arctg} \frac{3x-1}{\sqrt{6x}}.$$

$$5.7. y = \frac{1}{4} \ln \frac{x-1}{x+1} - \frac{1}{2} \operatorname{arctg} x.$$

$$5.8. y = \frac{1}{2} (x-4) \sqrt{8x-x^2-7} - 9 \arccos \sqrt{\frac{x-1}{6}}.$$

$$5.9. y = \frac{(1+x) \operatorname{arctg} \sqrt{x}}{x^2} + \frac{1}{3x\sqrt{x}}.$$

$$5.10. y = \frac{x^3}{3} \arccos x - \frac{2+x^2}{9} \sqrt{1-x^2}.$$

$$5.11. y = \frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{1+x}{2x} \operatorname{arctg} \sqrt{x}.$$

$$5.12. y = \frac{3+x}{2} \sqrt{x(2-x)} + 3 \arccos \sqrt{\frac{x}{2}}.$$

$$5.13. y = \frac{4+x^4}{x^3} \operatorname{arctg} \frac{x^2}{2} + \frac{4}{x}.$$

$$5.14. y = \arcsin \sqrt{\frac{x}{x+1}} + \operatorname{arctg} \sqrt{x}.$$

$$5.15. y = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{x^2} - 1} - \frac{\arccos x}{2x^2}.$$

$$5.16. y = 6 \arcsin \frac{\sqrt{x}}{2} - \frac{6+x}{2} \sqrt{x(4-x)}.$$

$$5.17. y = \frac{x-3}{2} \sqrt{6x-x^2-8} + \arcsin \sqrt{\frac{x}{2}-1}.$$

$$5.18. y = \frac{(1+x) \operatorname{arctg} \sqrt{x} - \sqrt{x}}{x}.$$

$$5.19. y = \frac{2\sqrt{1-x} \arcsin \sqrt{x}}{x} + \frac{2}{\sqrt{x}}.$$

$$5.20. y = \frac{2x-5}{4} \sqrt{5x-4-x^2} + \frac{9}{4} \arcsin \sqrt{\frac{x-1}{3}}.$$

$$5.21. y = \operatorname{arctg} x + \frac{5}{6} \ln \frac{x^2+1}{x^2+4}.$$

$$5.22. y = \arcsin \frac{x-2}{(x-1)\sqrt{2}}.$$

$$5.23. y = \sqrt{1-x^2} - x \arcsin \sqrt{1-x^2}.$$

$$5.24. y = \sqrt{x} + \frac{1}{3} \operatorname{arctg} \sqrt{x} + \frac{8}{3} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{x}}{2}.$$

$$5.25. y = \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{1-x}}{1-\sqrt{x}}.$$

$$5.26. y = (2x^2 + 6x + 5) \operatorname{arctg} \frac{x+1}{x+2} - x.$$

$$5.27. y = \frac{x}{2\sqrt{1-4x^2}} \arcsin 2x + \frac{1}{8} \ln(1-4x^2).$$

$$5.28. y = \left(2x^2 - x + \frac{1}{2} \right) \operatorname{arctg} \frac{x^2-1}{x\sqrt{3}} - \frac{x^3}{2\sqrt{3}} - \frac{\sqrt{3}}{2} x.$$

$$5.29. y = (x + 2\sqrt{x} + 2) \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+2} - \sqrt{x}.$$

$$5.30. y = \sqrt{1+2x-x^2} \arcsin \frac{x\sqrt{2}}{1+x} - \sqrt{2} \ln(1+x).$$

$$5.31. y = \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{tg}(x/2)+1}{2}.$$

Задача 6. Найти производную.

$$6.1. y = (\operatorname{arctg} x)^{(1/2)\ln(\operatorname{arctg} x)}.$$

$$6.2. y = (\sin \sqrt{x})^{\ln(\sin \sqrt{x})}.$$

$$6.3. y = (\sin x)^{5e^x}.$$

$$6.4. y = (\arcsin x)^{e^x}.$$

$$6.5. y = (\ln x)^{3^x}.$$

$$6.6. y = x^{\arcsin x}.$$

$$6.7. y = (\operatorname{ctg} 3x)^{2e^x}.$$

$$6.8. y = x^{e^{\operatorname{tg} x}}.$$

$$6.9. y = (\operatorname{tg} x)^{4e^x}.$$

$$6.10. y = (\cos 5x)^{e^x}.$$

$$6.11. y = (x \sin x)^{8 \ln(x \sin x)}.$$

$$6.12. y = (x-5)^{\operatorname{ch} x}.$$

$$6.13. y = (x^3 + 4)^{\operatorname{tg} x}.$$

$$6.14. y = x^{\sin x^3}.$$

$$6.15. y = (x^2 - 1)^{\operatorname{sh} x}.$$

$$6.16. y = (x^4 + 5)^{\operatorname{ctg} x}.$$

$$6.17. y = (\sin x)^{5x/2}.$$

$$6.18. y = (x^2 + 1)^{\cos x}.$$

$$6.19. y = 19^{x^{19}} x^{19}.$$

$$6.20. y = x^{3^x} \cdot 2^x.$$

$$6.21. y = (\sin \sqrt{x})^{e^{1/x}}.$$

$$6.22. y = x^{e^{\operatorname{ctg} x}}.$$

$$6.23. y = x^{e^{\cos x}}.$$

$$6.24. y = x^{2^x} \cdot 5^x.$$

$$6.25. y = x^{e^{\sin x}}.$$

$$6.26. y = (\operatorname{tg} x)^{\ln(\operatorname{tg} x)/4}.$$

$$6.27. y = x^{e^{\operatorname{arctg} x}}.$$

$$6.28. y = (x^8 + 1)^{\operatorname{th} x}.$$

$$6.29. y = x^{29^x} \cdot 29^x.$$

$$6.30. y = (\cos 2x)^{\ln(\cos 2x)/4}.$$

$$6.31. y = x^{e^x} x^9.$$

Задача 7. Найти производную.

$$7.1. y = \frac{1}{24} (x^2 + 8) \sqrt{x^2 - 4} + \frac{x^2}{16} \arcsin \frac{2}{x}, \quad x > 0.$$

$$7.2. y = \frac{4x+1}{16x^2+8x+3} + \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{4x+1}{\sqrt{2}}.$$

$$7.3. y = 2x - \ln(1 + \sqrt{1 - e^{4x}}) - e^{-2x} \arcsin(e^{2x}).$$

$$7.4. y = \sqrt{9x^2 - 12x + 5} \operatorname{arctg}(3x - 2) - \ln(3x - 2 + \sqrt{9x^2 - 12x + 5}).$$

$$7.5. y = \frac{2}{x-1} \sqrt{2x-x^2} + \ln \frac{1 + \sqrt{2x-x^2}}{x-1}.$$

$$7.6. y = \frac{x^2}{81} \arcsin \frac{3}{x} + \frac{1}{81} (x^2 + 18) \sqrt{x^2 - 9}, \quad x > 0.$$

$$7.7. y = \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{3x-1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{3} \cdot \frac{3x-1}{3x^2-2x+1}.$$

$$7.8. y = 3x - \ln(1 + \sqrt{1 - e^{6x}}) - e^{-3x} \arcsin(e^{3x}).$$

$$7.9. y = \ln(4x - 1 + \sqrt{16x^2 - 8x + 2}) - \sqrt{16x^2 - 8x + 2} \operatorname{arctg}(4x - 1).$$

$$7.10. y = \ln \frac{1 + 2\sqrt{-x-x^2}}{2x+1} + \frac{4}{2x+1} \sqrt{-x-x^2}.$$

$$7.11. y = (2x+3)^4 \cdot \arcsin \frac{1}{2x+3} + \frac{2}{3} (4x^2 + 12x + 11) \sqrt{x^2 + 3x + 2}, \quad 2x+3 > 0.$$

$$7.12. y = \frac{x+2}{x^2+4x+6} + \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{x+2}{\sqrt{2}}.$$

$$7.13. y = 5x - \ln(1 + \sqrt{1 - e^{10x}}) - e^{-5x} \arcsin(e^{5x}).$$

$$7.14. y = \sqrt{x^2 - 8x + 17} \operatorname{arctg}(x - 4) - \ln(x - 4 + \sqrt{x^2 - 8x + 17}).$$

$$7.15. y = \ln \frac{1 + \sqrt{-3 + 4x - x^2}}{2-x} + \frac{2}{2-x} \sqrt{-3 + 4x - x^2}.$$

$$7.16. y = (3x^2 - 4x + 2) \sqrt{9x^2 - 12x + 3} + (3x - 2)^4 \arcsin \frac{1}{3x-2}, \quad 3x-2 > 0.$$

$$7.17. y = \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{x-1}{\sqrt{2}} + \frac{x-1}{x^2-2x+3}.$$

$$7.18. y = \ln(e^{5x} + \sqrt{e^{10x} - 1}) + \arcsin(e^{-5x}).$$

$$7.19. y = \ln(2x - 3 + \sqrt{4x^2 - 12x + 10}) - \sqrt{4x^2 - 12x + 10} \operatorname{arctg}(2x - 3).$$

$$7.20. y = \ln \frac{1 + \sqrt{-3 - 4x - x^2}}{-x-2} - \frac{2}{x+2} \sqrt{-3 - 4x - x^2}.$$

$$7.21. y = \frac{2}{3}(4x^2 - 4x + 3)\sqrt{x^2 - x} + (2x - 1)^4 \arcsin \frac{1}{2x - 1}, \quad 2x - 1 > 0.$$

$$7.22. y = \frac{2x - 1}{4x^2 - 4x + 3} + \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{2x - 1}{\sqrt{2}}.$$

$$7.23. y = \arcsin(e^{-4x}) + \ln(e^{4x} + \sqrt{e^{8x} - 1}).$$

$$7.24. y = \ln(5x + \sqrt{25x^2 + 1}) - \sqrt{25x^2 + 1} \operatorname{arctg} 5x.$$

$$7.25. y = \frac{2}{3x - 2} \sqrt{-3 + 12x - 9x^2} + \ln \frac{1 + \sqrt{-3 + 12x - 9x^2}}{3x - 2}.$$

$$7.26. y = (3x + 1)^4 \arcsin \frac{1}{3x + 1} + (3x^2 + 2x + 1)\sqrt{9x^2 + 6x}, \quad 3x + 1 > 0.$$

$$7.27. y = \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{2x + 1}{\sqrt{2}} + \frac{2x + 1}{4x^2 + 4x + 3}.$$

$$7.28. y = \ln(e^{3x} + \sqrt{e^{6x} - 1}) + \arcsin(e^{-3x}).$$

$$7.29. y = \sqrt{49x^2 + 1} \operatorname{arctg} 7x - \ln(7x + \sqrt{49x^2 + 1}).$$

$$7.30. y = \frac{1}{x} \sqrt{1 - 4x^2} + \ln \frac{1 + \sqrt{1 - 4x^2}}{2x}.$$

$$7.31. y = \arcsin(e^{-2x}) + \ln(e^{2x} + \sqrt{e^{4x} - 1}).$$

Задача 8. Найти производную.

$$8.1. y = \frac{x \arcsin x}{\sqrt{1 - x^2}} + \ln \sqrt{1 - x^2}.$$

$$8.2. y = 4 \ln \frac{x}{1 + \sqrt{1 - 4x^2}} - \frac{\sqrt{1 - 4x^2}}{x^2}.$$

$$8.3. y = x(2x^2 + 5)\sqrt{x^2 + 1} + 3 \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}).$$

$$8.4. y = x^3 \arcsin x + \frac{x^2 + 2}{3} \sqrt{1 - x^2}.$$

$$8.5. y = 3 \arcsin \frac{3}{4x + 1} + 2\sqrt{4x^2 + 2x - 2}, \quad 4x + 1 > 0.$$

$$8.6. y = \sqrt{1 + x^2} \operatorname{arctg} x - \ln(x + \sqrt{1 + x^2}).$$

$$8.7. y = 2 \arcsin \frac{2}{3x+4} + \sqrt{9x^2 + 24x + 12}, \quad 3x+4 > 0.$$

$$8.8. y = x(2x^2 + 1)\sqrt{x^2 + 1} - \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}).$$

$$8.9. y = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) - \frac{\sqrt{1+x^2}}{x}.$$

$$8.10. y = \sqrt{1-3x-2x^2} + \frac{3}{2\sqrt{2}} \arcsin \frac{4x+3}{\sqrt{17}}.$$

$$8.11. y = \sqrt{(4+x)(1+x)} + 3 \ln(\sqrt{4+x} + \sqrt{1+x}).$$

$$8.12. y = \ln \frac{\sqrt{x^2 - x + 1}}{x} + \sqrt{3} \operatorname{arctg} \frac{2x-1}{\sqrt{3}}.$$

$$8.13. y = \frac{1}{12} \ln \frac{x^4 - x^2 + 1}{(x^2 + 1)^2} - \frac{1}{2\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{3}}{2x^2 - 1}.$$

$$8.14. y = 4 \arcsin \frac{4}{2x+3} + \sqrt{4x^2 + 12x - 7}, \quad 2x+3 > 0.$$

$$8.15. y = 2 \arcsin \frac{2}{3x+1} + \sqrt{9x^2 + 6x - 3}, \quad 3x+1 > 0.$$

$$8.16. y = (2+3x)\sqrt{x-1} - \frac{3}{2} \operatorname{arctg} \sqrt{x-1}.$$

$$8.17. y = \frac{1}{3}(x-2)\sqrt{x+1} + \ln(\sqrt{x+1} + 1).$$

$$8.18. y = \sqrt{x^2 + 1} - \frac{1}{2} \ln \frac{\sqrt{x^2 + 1} - x}{\sqrt{x^2 + 1} + 1}.$$

$$8.19. y = \ln \sqrt[3]{\frac{x-1}{x+1}} - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{x^2 - 1} \right) \operatorname{arctg} x.$$

$$8.20. y = x \ln(\sqrt{1-x} + \sqrt{1+x}) + \frac{1}{2}(\arcsin x - x).$$

$$8.21. y = \operatorname{arctg} \sqrt{x^2 - 1} - \frac{\ln x}{\sqrt{x^2 - 1}}.$$

$$8.22. y = 3 \arcsin \frac{3}{x+2} + \sqrt{x^2 + 4x - 5}.$$

$$8.23. y = \sqrt{(3-x)(2+x)} + 5 \arcsin \sqrt{\frac{x+2}{5}}.$$

$$8.24. y = x(\arcsin x)^2 + 2\sqrt{1-x^2} \arcsin x - 2x.$$

$$8.25. y = \frac{\sqrt{1-x^2}}{x} + \arcsin x.$$

$$8.26. y = x^2 \arccos x - \frac{x^2 + 2}{3} \sqrt{1-x^2}.$$

$$8.27. y = \frac{\sqrt{x^2 + 2}}{x^2} - \frac{1}{\sqrt{2}} \ln \frac{\sqrt{2} + \sqrt{x^2 + 2}}{x}.$$

$$8.28. y = \frac{x}{4}(10 - x^2)\sqrt{4 - x^2} + 6 \arcsin \frac{x}{2}.$$

$$8.29. y = \arcsin \frac{1}{2x+3} + 2\sqrt{x^2 + 3x + 2}, \quad 2x+3 > 0.$$

$$8.30. y = x \arcsin \sqrt{\frac{x}{x+1}} - \sqrt{x} + \operatorname{arctg} \sqrt{x}.$$

$$8.31. y = \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{1}{2} \ln \frac{1-x}{1+x}.$$

Графики

Задача 1. Провести полное исследование функций и построить их графики.

$$1.1. y = \frac{x^3 + 4}{x^2}$$

$$1.2. y = \frac{x^2 - x + 1}{x - 1}$$

$$1.3. y = \frac{2}{x^2 + 2x}$$

$$1.4. y = \frac{3 + x^2}{12x}$$

$$1.5. y = \frac{9 + x^2}{x^2 - 3x + 3}$$

$$1.6. y = \frac{x - 1}{4 - x^3}$$

$$1.7. y = \frac{x^2}{x^2 - 4x + 1}$$

$$1.8. y = \frac{x - 4}{2x^3 + 1}$$

$$1.9. y = \frac{(x - 1)^2}{x^2}$$

$$1.10. y = \frac{(x - 1)^2}{x^2}$$

$$\begin{aligned}
1.11. y &= \frac{x^2}{(x-1)^2} \\
1.12. y &= \left(1 + \frac{1}{x}\right)^2 \\
1.13. y &= \frac{12 - 3x^2}{x^2 + 12} \\
1.14. y &= \frac{9 + 6x - 3x^2}{x^2 - 2x + 13} \\
1.15. y &= -\frac{8x}{x^2 + 4} \\
1.16. y &= \left(\frac{x-1}{x+1}\right)^2 \\
1.17. y &= \frac{3x^4 + 1}{x^3} \\
1.18. y &= \frac{4x}{(x+1)^2} \\
1.19. y &= \frac{8(x-1)}{(x+1)^2} \\
1.20. y &= \frac{1 - 2x^3}{x^2} \\
1.21. y &= \frac{4}{x^2 + 2x - 3} \\
1.22. y &= \frac{3 + 2x - x^2}{x^2 + 2x - 7} \\
1.23. y &= \frac{1}{x^2 + 2x - 3} \\
1.24. y &= \frac{1}{x^4 - 1} \\
1.25. y &= -\left(\frac{x}{x+2}\right)^2 \\
1.26. y &= \frac{x^3 - 32}{x^2} \\
1.27. y &= \frac{4(x+1)^2}{x^2 + 2x + 4} \\
1.28. y &= \frac{3x - 2}{x^3} \\
1.29. y &= \frac{x^2 - 6x + 9}{(x-1)^2} \\
1.30. y &= \frac{x^3 - 27x + 54}{x^3} \\
1.31. y &= \frac{x^3 - 4}{x^2}
\end{aligned}$$

Задача 2. Провести полное исследование функций и построить их графики.

$$2.1. y = (2x + 3)e^{-2(x+1)}.$$

$$2.2. y = \frac{e^{2(x+1)}}{2(x+1)}.$$

$$2.3. y = 3\ln \frac{x}{x-3} - 1.$$

$$2.4. y = (3-x)e^{x-2}.$$

$$2.5. y = \frac{e^{2-x}}{2-x}.$$

$$2.6. y = \ln \frac{x}{x+2} + 1.$$

$$2.7. y = (x-2)e^{3-x}.$$

$$2.8. y = \frac{e^{2(x-1)}}{2(x-1)}.$$

$$2.9. y = 3 - 3\ln \frac{x}{x+4}.$$

$$2.10. y = -(2x+1)e^{2(x+1)}.$$

$$2.11. y = \frac{e^{2(x+2)}}{2(x+2)}.$$

$$2.12. y = \ln \frac{x}{x-2} - 2.$$

$$2.13. y = (2x+5)e^{-2(x+2)}.$$

$$2.14. y = \frac{e^{3-x}}{3-x}.$$

$$2.15. y = 2\ln \frac{x}{x+1} - 1.$$

$$2.16. y = (4-x)e^{x-3}.$$

$$2.17. y = -\frac{e^{-2(x+2)}}{2(x+2)}.$$

$$2.18. y = 2\ln \frac{x+3}{x} - 3.$$

$$2.19. y = (2x-1)e^{2(1-x)}.$$

$$2.20. y = -\frac{e^{-(x+2)}}{x+2}.$$

$$2.21. y = 2\ln \frac{x}{x-4} - 3.$$

$$2.22. y = -(x+1)e^{x+2}.$$

$$2.23. y = \frac{e^{x+3}}{x+3}.$$

$$2.24. y = \ln \frac{x}{x+5} - 1.$$

$$2.25. y = -(2x+3)e^{2(x+2)}.$$

$$2.26. y = -\frac{e^{-2(x-1)}}{2(x-1)}.$$

$$2.27. y = \ln \frac{x-5}{x} + 2.$$

$$2.28. y = (x+4)e^{-(x+3)}.$$

$$2.29. y = \frac{e^{x-3}}{x-3}.$$

$$2.30. y = \ln \frac{x+6}{x} - 1.$$

$$2.31. y = 2\ln \frac{x-1}{x} + 1.$$

Расчетно графическая работа за второй семестр

В расчётно-графической работе №2 обучающемуся предлагается решить 20 задач по вариантам, включающим соответствующие задания. Всего предусмотрено 20 задач, каждое из которых содержит по 30-33 вариантам. В задачах 21-2.6 необходимо решать по своему варианту задания а), б), и в)

Обучающийся выполняет решение задач по варианту, номер которого совпадает с номером обучающегося в журнале академической группы. Если номер обучающегося превышает количество представленных вариантов, следует использовать правило циклического выбора: после последнего номера вариант отсчитывается сначала.

Общие требования к оформлению:

Работа выполняется от руки в тонкой тетради в клеточку на 12 или 18 листов.

На обложке тетради аккуратно указываются: название работы «Расчётно-графическая работа №2», ФИО обучающегося полностью, номер группы, номер варианта;

Каждое задание следует начинать с нового абзаца, указывая: номер задачи в соответствии с вариантом, полную формулировку задачи и подробное решение с обоснованием каждого этапа. Решения должны быть разборчивыми, с соблюдением аккуратности и логической последовательности. Все необходимые обозначения, пояснения и вычисления должны быть приведены. Нарушения в оформлении (неразборчивый почерк, отсутствие необходимых данных, неряшливость) могут повлиять на оценку работы.

Задачи для расчетно-графической работы для второго семестра

Задача 1.1 Найти неопределенный интеграл, результат проверить дифференцированием

№	$\int f(x) dx$
1	$\int \left(\frac{3x^2}{\sqrt{x}} - 6e^{2x-5} + \frac{1}{4x^2-9} \right) dx$
2	$\int \left(-4x^3 + \frac{1}{\cos^2(3x+1)} - \frac{6}{9x^2+1} \right) dx$
3	$\int \left(\frac{3 \cdot 2^x - 2 \cdot 3^x}{2^x} - 4\sqrt{2x+1} + \frac{1}{\sqrt{1+4x^2}} \right) dx$
4	$\int \left(\frac{3}{\sqrt{9x^2+1}} + \sin(7x-3) - 4^{2x} \right) dx$
5	$\int \left(5x\sqrt{x} - 3\cos(6x-1) + \frac{1}{8+2x^2} \right) dx$
6	$\int \left(\frac{3x^2 + \sqrt{x}}{x} + \frac{1}{\sqrt{x^2+7}} - 2\sin(4x+2) \right) dx$
7	$\int \left(\frac{9x^3}{\sqrt{x}} - \frac{2}{\sqrt{4-x^2}} + \frac{3}{2}e^{3x+5} \right) dx$
8	$\int \left(\frac{3}{x^2-9} + 5\cos\frac{x}{3} - 3^{2x-3} \right) dx$
9	$\int \left(\frac{x^2-5}{x} + \frac{9}{\sin^2(3x-1)} - \frac{1}{x^2+4} \right) dx$

10	$\int \left(\frac{7x^6 - 2}{x^2} + 4e^{2x-7} + \frac{1}{9x^2 - 4} \right) dx$
11	$\int \left(7x^4 - 25 \cos(5x + 2) + \frac{3}{\sqrt{9x^2 + 4}} \right) dx$
12	$\int \left(\frac{1}{\cos^2(3x - 7)} + \frac{4}{x^3} + \frac{1}{\sqrt{4 - 9x^2}} \right) dx$
13	$\int \left(\frac{4}{\sqrt{16x^2 - 9}} - \frac{5x^2 + 2x\sqrt{x}}{x^3} + 3 \cdot 7^{3x-1} \right) dx$
14	$\int \left(\frac{14}{\cos^2(7x + 1)} - \frac{x^2 - 3x}{x\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{9 - x^2}} \right) dx$
15	$\int \left(\frac{5x - 3x^6}{x^3} + 4 \sin(2x - 3) + \frac{1}{4x^2 + 9} \right) dx$
16	$\int \left(\frac{9^x - 6^x}{3^x} - \frac{3}{6x + 2} + \frac{1}{4 - x^2} \right) dx$
17	$\int \left(4^{3x} - \frac{8}{\sqrt{16x^2 - 9}} + \frac{6}{\sin^2(3x + 2)} \right) dx$
18	$\int \left(9\sqrt[4]{x^3} + 4 \cos(2x - 1) - \frac{2}{x^2 + 16} \right) dx$
19	$\int \left(\frac{3x^2\sqrt{x} - 1}{4\sqrt{x}} + 6 \cdot 2^{3x} - \frac{9}{3x - 4} \right) dx$
20	$\int \left(\frac{5x^9 - 2}{\sqrt{x}} - 2 \sin\left(\frac{x}{7} + 1\right) + \frac{3}{\sqrt{x^2 - 4}} \right) dx$
21	$\int \left(\frac{4}{\sqrt{9x^2 + 4}} + 3 \sin(2x - 4) + \frac{2^x + 3^x}{6^x} \right) dx$

22	$\int \left(\frac{2\sqrt[5]{x^2} + x^3}{x^2} - \frac{3}{9x^2 + 1} + \frac{5}{\sin^2(3x - 4)} \right) dx$
23	$\int \left(\sqrt[3]{8x^7} + \frac{4}{2x - 1} - \frac{8}{16x^2 - 9} \right) dx$
24	$\int \left(\frac{4x^5 + 3x^2\sqrt[3]{x}}{x} + 3 \cdot 5^{2x+3} - \frac{4}{\sqrt{4 - 9x^2}} \right) dx$
25	$\int \left(3\sqrt[4]{x^3} - \frac{1}{\cos^2(2x - 7)} + \frac{6}{4x^2 + 25} \right) dx$
26	$\int \left(2 \cdot e^{x/5} - 3\sqrt{6x - 2} + \frac{x^3 - x\sqrt[6]{x}}{x} \right) dx$
27	$\int \left(\frac{1}{\sqrt{2x + 3}} + \frac{6}{4 - 9x^2} + \frac{5}{e^{3x-4}} \right) dx$
28	$\int \left(6\sqrt[7]{x^3} + \frac{2}{\cos^2(x/7)} - \frac{5}{\sqrt{1 - 4x^2}} \right) dx$
29	$\int \left(\frac{9x^3}{\sqrt{x}} - 3\sin(3x + 7) + \frac{4}{16x^2 + 9} \right) dx$
30	$\int \left(4x\sqrt[3]{x} - \frac{3}{\cos^2(6x - 1)} + \frac{1}{\sqrt{16 + x^2}} \right) dx$
31	$\int \left(\frac{4}{\sqrt{4 + 9x^2}} - \frac{2}{\sin^2 2x - 5} - \frac{x^5 - \sqrt[7]{x^4} + 3x^3}{x^4} \right) dx$
32	$\int \left(\frac{3}{16 - 25x^2} + 2\cos \frac{x - 1}{3} - 4\frac{5^x - 2^x}{10^x} \right) dx$

Задача 1.2. Найти неопределенный интеграл

№	$\int f(x) dx$
1	$\int \frac{3 \operatorname{tg}^2 x + 7 \sin x - 5}{\cos^2 x} dx$
2	$\int \frac{\arcsin x + 2x - 4}{\sqrt{1 - x^2}} dx$
3	$\int \frac{5 + \operatorname{arctg}^2 x - 4x}{1 + x^2} dx$
4	$\int \frac{3 - 2x + \arccos x}{\sqrt{1 - x^2}} dx$
5	$\int \frac{5 \operatorname{ctg}^4 x - 2 \cos x + 8}{\sin^2 x} dx$
6	$\int \frac{4 + 3x^2 \sqrt{x} - 2 \ln x}{x} dx$
7	$\int e^x \left(\frac{3}{e^{2x} + 1} - 5 + \cos(e^x) \right) dx$
8	$\int \frac{5 - x^2 + e^{\sqrt{x}} - 4 \sin(\sqrt{x})}{\sqrt{x}} dx$
9	$\int \frac{6x^7 - 2 \cos(1/x) + 4}{x^2} dx$
10	$\int \frac{7 \operatorname{arctg} x + 3x - 4}{x^2 + 1} dx$

11	$\int \frac{5 - x + 4 \arccos x}{\sqrt{1 - x^2}} dx$
12	$\int \frac{\operatorname{ctg} 2x + 1 - \cos 2x}{\sin^2 2x} dx$
13	$\int \frac{\ln^2 x + 3 - 5\sqrt{\ln x}}{x\sqrt{\ln x}} dx$
14	$\int \frac{4 \operatorname{arctg}^3 x + 6x - 1}{1 + x^2} dx$
15	$\int \frac{3x - 7 + 2 \arcsin^2 x}{\sqrt{1 - x^2}} dx$
16	$\int \frac{5 - 3\sqrt{\operatorname{tg} x} + \sin x}{\cos^2 x} dx$
17	$\int \left(\frac{2}{\sqrt{e^{2x} - 4}} - \frac{1}{\cos^2(e^x)} + 4 \right) e^x dx$
18	$\int \frac{7x^2 + 3x^5\sqrt{x} - 2\ln^3 x}{x} dx$
19	$\int \frac{4 \operatorname{ctg}^3 3x - 6 + \cos 3x}{\sin^2 3x} dx$
20	$\int \frac{x\sqrt{x} - 3x^6 + 3\sqrt{x} - 2 \operatorname{tg}(\sqrt{x})}{\sqrt{x}} dx$
21	$\int \frac{2x - 5^{(1/x)} - 2}{x^2} dx$

22	$\int \frac{3 \ln^3 x + 3\sqrt[3]{x} - 2}{x} dx$
23	$\int \frac{2^{\operatorname{tg} x} - 3 \sin x + 4}{\cos^2 x} dx$
24	$\int \frac{\sqrt{x^3} + 4x^4 - 2 \sin(\sqrt{x})}{\sqrt{x}} dx$
25	$\int \sin x \left(e^{\cos x} + 1 + \frac{5}{\cos^2 x} \right) dx$
26	$\int e^x \left(\frac{3}{e^x + 1} - e^{-3x} + 2 \right) dx$
27	$\int \frac{3x + 2\sqrt[3]{\operatorname{arctg}^2 x} - 7}{1 + x^2} dx$
28	$\int \frac{\sin(1/x) + 4\sqrt[3]{x} - 6x^2}{x^2} dx$
29	$\int \frac{e^{\arcsin x} - 3x + 8}{\sqrt{1 - x^2}} dx$
30	$\int \frac{5x^4 \sqrt{x} - 3x^3 + 2^{1/x^3}}{x^4} dx$
31	$\int \frac{3x - 5}{\sqrt{1 - x^2}} + \frac{4}{\sqrt{\arccos x \cdot (1 - x^2)}} dx$
32	$\int \frac{5x^2 - 2 \sin(1/x^2) - 3x^9 + 4^{1/x^2}}{x^3} dx$

Задача 1.3. Найти неопределенный интеграл

№	$\int f(x) dx$	№	$\int f(x) dx$
1	$\int \frac{x+1}{x-2} dx$	17	$\int \frac{3-x}{x+2} dx$
2	$\int \frac{x^2}{x^2-9} dx$	18	$\int \frac{2x^2+2}{x^2+9} dx$
3	$\int \frac{2x}{x+4} dx$	19	$\int \frac{4x}{x-5} dx$
4	$\int \frac{4x^2}{x^2+4} dx$	20	$\int \frac{9x^2}{x^2-16} dx$
5	$\int \frac{x+4}{x-4} dx$	21	$\int \frac{2x+5}{x-1} dx$
6	$\int \frac{x^2+1}{x^2-1} dx$	22	$\int \frac{x^2-9}{x^2+9} dx$
7	$\int \frac{7x}{x+7} dx$	23	$\int \frac{6x}{x+3} dx$
8	$\int \frac{3x^2}{9+x^2} dx$	24	$\int \frac{8x^2}{x^2+16} dx$
9	$\int \frac{4x}{x+5} dx$	25	$\int \frac{x-8}{x-10} dx$
10	$\int \frac{7x^2}{x^2-9} dx$	26	$\int \frac{5x^2}{9x^2-1} dx$

11	$\int \frac{5x}{x-10} dx$	27	$\int \frac{x}{x+6} dx$
12	$\int \frac{3x^2}{x^2-4} dx$	28	$\int \frac{5x^2}{x^2+9} dx$
13	$\int \frac{2x-3}{x+4} dx$	29	$\int \frac{3x-2}{x-2} dx$
14	$\int \frac{x^2+10}{x^2+25} dx$	30	$\int \frac{x^2+1}{x^2+4} dx$
15	$\int \frac{1-4x}{x+5} dx$	31	$\int \frac{2-6x}{x-5} dx$
16	$\int \frac{x^2+1}{x^2-36} dx$	32	$\int \frac{x^2}{x^2-25} dx$

Задача 1.4. Найти неопределенный интеграл

№	$\int f(x) dx$	№	$\int f(x) dx$
1	$\int \frac{5x+7}{x^2+x-2} dx$	17	$\int \frac{6x+8}{x^2+5x-6} dx$
2	$\int \frac{6}{(2x+1)(x-1)} dx$	18	$\int \frac{29-3x}{x^2-3x-10} dx$
3	$\int \frac{7x+1}{x^2+x-6} dx$	19	$\int \frac{x-4}{x^2-4x-12} dx$
4	$\int \frac{5}{(2x-1)(x+2)} dx$	20	$\int \frac{x-13}{x^2+4x-21} dx$

5	$\int \frac{3x + 19}{x^2 + x - 12} dx$	21	$\int \frac{5x - 31}{x^2 - 12x + 35} dx$
6	$\int \frac{4}{(3x + 1)(x - 1)} dx$	22	$\int \frac{6}{(2x + 5)(x - 4)} dx$
7	$\int \frac{x + 7}{x^2 - x - 2} dx$	23	$\int \frac{x - 5}{x^2 - 5x + 6} dx$
8	$\int \frac{5}{(x + 1)(3x - 2)} dx$	24	$\int \frac{4}{(3x + 1)(x - 3)} dx$
9	$\int \frac{x + 23}{x^2 + x - 20} dx$	25	$\int \frac{3x - 12}{x^2 + 2x - 8} dx$
10	$\int \frac{11}{(x - 4)(2x + 3)} dx$	26	$\int \frac{7x - 7}{x^2 - 3x - 10} dx$
11	$\int \frac{4x - 3}{x^2 + x - 6} dx$	27	$\int \frac{x + 7}{x^2 + 5x + 4} dx$
12	$\int \frac{x + 17}{x^2 - x - 12} dx$	28	$\int \frac{1}{(x + 3)(3x - 1)} dx$
13	$\int \frac{3x - 1}{x^2 + 3x - 10} dx$	29	$\int \frac{3 - 3x}{x^2 + x + 20} dx$
14	$\int \frac{6}{(x - 4)(2x - 3)} dx$	30	$\int \frac{x + 23}{x^2 + 4x - 5} dx$
15	$\int \frac{x + 7}{x^2 + 8x + 15} dx$	31	$\int \frac{2x + 6}{x^2 - 6x + 5} dx$
16	$\int \frac{6 - x}{x^2 - 7x + 12} dx$	32	$\int \frac{9}{(x + 5)(3x + 2)} dx$

Задача 1.5. Найти неопределенный интеграл

№	$\int f(x) dx$	№	$\int f(x) dx$
1	$\int \frac{5x+1}{x^2(x-2)} dx$	17	$\int \frac{x+15}{(x-1)(x+3)^2} dx$
2	$\int \frac{x+1}{(x^2+1)(x-6)} dx$	18	$\int \frac{2x+9}{(x^2+9)(x-1)} dx$
3	$\int \frac{2x-3}{(x+1)^2(x-2)} dx$	19	$\int \frac{x-9}{x(x-3)^2} dx$
4	$\int \frac{2x+3}{(x^2+4)(x-1)} dx$	20	$\int \frac{3x+7}{(x^2+9)(x+1)} dx$
5	$\int \frac{5}{x(x-1)^2} dx$	21	$\int \frac{2x+3}{(x-1)(x+2)^2} dx$
6	$\int \frac{3x-1}{(x^2+1)(x-2)} dx$	22	$\int \frac{3x+1}{(x^2+1)(x-1)} dx$
7	$\int \frac{x^2+7x+8}{x(x+2)^2} dx$	23	$\int \frac{7x-4}{(x-1)^2(x+2)} dx$
8	$\int \frac{4x+5}{(x^2+4)(x+1)} dx$	24	$\int \frac{2x+9}{(x^2+4)(x-2)} dx$
9	$\int \frac{7x-13}{(x+1)(x-2)^2} dx$	25	$\int \frac{x+3}{(x+1)^2(x-3)} dx$
10	$\int \frac{3x+7}{(x^2+4)(x-1)} dx$	26	$\int \frac{7}{(x^2+4)(x+2)} dx$

11	$\int \frac{3x^2 + 4x + 5}{(x-2)(x+3)^2} dx$	27	$\int \frac{2x+5}{(x-4)^2(x+1)} dx$
12	$\int \frac{3x-2}{x(x^2+16)} dx$	28	$\int \frac{7}{(x^2+9)(x-4)} dx$
13	$\int \frac{2x+1}{(x+5)(x-3)^2} dx$	29	$\int \frac{4x}{(x+7)^2(x-1)} dx$
14	$\int \frac{3x-5}{(x^2+9)(x+4)} dx$	30	$\int \frac{6}{(x^2+16)(x-5)} dx$
15	$\int \frac{2x+7}{(x-5)^2(x-1)} dx$	31	$\int \frac{3x+9}{x(x-5)^2} dx$
16	$\int \frac{x-4}{x(x^2+16)} dx$	32	$\int \frac{7}{(x^2+4)(x+6)} dx$

Задача 1.6. Найти неопределенный интеграл

№	$\int f(x) dx$	№	$\int f(x) dx$
1	$\int \frac{x+1}{x^2+10x+29} dx$	17	$\int \frac{x-4}{x^2-4x+29} dx$
2	$\int \frac{x+2}{\sqrt{x^2-8x+20}} dx$	18	$\int \frac{x+3}{\sqrt{x^2-6x+34}} dx$
3	$\int \frac{x-2}{x^2+6x+18} dx$	19	$\int \frac{x+1}{x^2+8x+25} dx$
4	$\int \frac{x+1}{\sqrt{x^2-4x+13}} dx$	20	$\int \frac{x+4}{\sqrt{x^2-10x+41}} dx$

5	$\int \frac{x-3}{x^2+2x+17}dx$	21	$\int \frac{x-2}{x^2-6x+18}dx$
6	$\int \frac{x+2}{\sqrt{x^2-12x+37}}dx$	22	$\int \frac{x+3}{\sqrt{x^2-14x+53}}dx$
7	$\int \frac{x-1}{x^2+4x+13}dx$	23	$\int \frac{x-3}{x^2+10x+34}dx$
8	$\int \frac{x-2}{\sqrt{x^2+14x+48}}dx$	24	$\int \frac{x-6}{\sqrt{x^2+4x+68}}dx$
9	$\int \frac{x+2}{x^2-6x+10}dx$	25	$\int \frac{x-1}{x^2-8x+65}dx$
10	$\int \frac{x+3}{\sqrt{x^2-10x+24}}dx$	26	$\int \frac{x-5}{\sqrt{x^2-2x+17}}dx$
11	$\int \frac{3x+1}{x^2-4x+20}dx$	27	$\int \frac{5x-2}{x^2+8x+20}dx$
12	$\int \frac{x+5}{\sqrt{x^2-6x+25}}dx$	28	$\int \frac{x+3}{\sqrt{x^2-8x+32}}dx$
13	$\int \frac{2x-3}{x^2+14x+58}dx$	29	$\int \frac{x}{x^2-10x+29}dx$
14	$\int \frac{2x+6}{\sqrt{x^2+4x+53}}dx$	30	$\int \frac{x-7}{\sqrt{x^2-6x+34}}dx$
15	$\int \frac{2x+4}{x^2-8x+25}dx$	31	$\int \frac{3x-1}{x^2+10x+34}dx$
16	$\int \frac{2x+3}{\sqrt{x^2-2x+50}}dx$	32	$\int \frac{7x+1}{\sqrt{x^2-6x+48}}dx$

Задача 1.7 Найти неопределенный интеграл

№	$\int f(x) dx$	№	$\int f(x) dx$
1	$\int (x + 5) \cos 3x dx$	17	$\int (x + 6) e^{7x} dx$
2	$\int \sin (2x + 1) \cdot x dx$	18	$\int (5x + 2) \cdot 2^{3x} dx$
3	$\int e^{2x+3} \cdot x dx$	19	$\int (6x - 3) \cos 2x dx$
4	$\int (x + 2) \cdot 3^{2x} dx$	20	$\int (4x + 1) \sin 2x dx$
5	$\int (3x - 1) \cos 4x dx$	21	$\int e^{3x} \cdot (5x + 2) dx$
6	$\int (x + 2) \sin 6x dx$	22	$\int 4^x \cdot (3x - 2) dx$
7	$\int (4x + 1) e^{2x} dx$	23	$\int \cos 5x \cdot (x + 7) dx$
8	$\int (2x + 1) 4^x dx$	24	$\int (2x + 1) \sin 7x dx$
9	$\int (x - 4) \cos 5x dx$	25	$\int (x - 3) e^{5x} dx$
10	$\int (3x + 2) \sin x dx$	26	$\int 4^{3x-2} \cdot x dx$

11	$\int e^{3x-4} \cdot x dx$	27	$\int (2x + 3) \sin 4x dx$
12	$\int 5x \cdot 2^{3x+1} dx$	28	$\int (4x - 1) \cos 3x dx$
13	$\int (2x + 5) \cos 2x dx$	29	$\int e^{x/2} \cdot (4x - 7) dx$
14	$\int (9x - 10) \sin (x/3) dx$	30	$\int e^x \cdot (3x + 2) dx$
15	$\int (2x + 8) e^{x-5} dx$	31	$\int \cos 7x \cdot (2x - 6) dx$
16	$\int (2x - 6) \sin 4x dx$	32	$\int (3x - 4) 5^{x/3} dx$

Задача 1.8 Найти неопределенный интеграл

№	$\int f(x) dx$	№	$\int f(x) dx$
1	$\int \operatorname{arctg} 2x dx$	17	$\int \arcsin (2x - 3) dx$
2	$\int x^2 \ln x dx$	18	$\int (x + 3) \ln x dx$
3	$\int \arcsin (3x + 1) dx$	19	$\int \arccos 3x dx$
4	$\int \sqrt{x} \ln x dx$	20	$\int \ln (2x + 1) dx$

5	$\int \arccos 4x dx$	21	$\int x \cdot \operatorname{arctg} x dx$
6	$\int \frac{\ln x}{x^2} dx$	22	$\int \operatorname{arcctg} (4x - 1) dx$
7	$\int \operatorname{arcctg} \frac{x}{2} dx$	23	$\int x \ln 5x dx$
8	$\int \frac{\ln x}{\sqrt{x}} dx$	24	$\int \arccos (x/5) dx$
9	$\int \operatorname{arctg} 3x dx$	25	$\int x^3 \cdot \ln x dx$
10	$\int \ln (x^2 + 1) dx$	26	$\int \operatorname{arctg} (x/3) dx$
11	$\int \frac{\ln x}{x^3} dx$	27	$\int \frac{\ln x}{x - 3} dx$
12	$\int \operatorname{arctg} (2x - 4) dx$	28	$\int \operatorname{arcctg} (x + 2) dx$
13	$\int \ln (3x + 2) dx$	29	$\int \frac{\ln x}{\sqrt[3]{x}} dx$
14	$\int \arccos (3x + 5) dx$	30	$\int \arcsin (3x - 5) dx$
15	$\int \frac{\ln x}{2x + 1} dx$	31	$\int (x + 1) \cdot \operatorname{arctg} x dx$
16	$\int \operatorname{arcctg} \frac{x}{7} dx$	32	$\int \frac{\ln x}{(x - 1)^2} dx$

Задача 1.9 Найти неопределенный интеграл

№	$\int f(x) dx$	№	$\int f(x) dx$
1	$\int \sin^2 3x dx$	17	$\int \cos^2 3x dx$
2	$\int \operatorname{tg}^2 2x dx$	18	$\int \sin^2 4x dx$
3	$\int \cos^3 4x dx$	19	$\int \operatorname{tg}^2 3x dx$
4	$\int \sin 2x \cos 3x dx$	20	$\int \cos^3 5x dx$
5	$\int \sin^2 x \cos^3 x dx$	21	$\int \sin 4x \sin 5x dx$
6	$\int \frac{\cos^3 x}{\sin^2 x} dx$	22	$\int \sin^3 x \cos^2 x dx$
7	$\int \frac{\sin^3 x}{\cos^7 x} dx$	23	$\int \frac{\sin^3 x}{\cos^2 x} dx$
8	$\int \sin 2x \cos 6x dx$	24	$\int \operatorname{tg}^3 2x dx$
9	$\int \frac{\sin^3 x}{\sqrt{\cos x}} dx$	25	$\int \cos^2 7x dx$
10	$\int \operatorname{tg}^3 x dx$	26	$\int \sqrt{\sin x} \cos^3 x dx$
11	$\int \operatorname{ctg}^2 3x dx$	27	$\int \cos^5 x dx$
12	$\int \cos^2 5x dx$	28	$\int \operatorname{ctg}^3 x dx$
13	$\int \sin 7x \cos 8x dx$	29	$\int \sin^3 5x dx$
14	$\int \sin^2 7x dx$	30	$\int \cos^3 4x dx$

15	$\int \frac{\sin^3 2x}{\cos^2 2x} dx$	31	$\int \frac{\cos^3 x}{\sqrt[3]{\sin^2 x}} dx$
16	$\int \operatorname{ctg}^2 3x dx$	32	$\int \cos^4 x dx$

Задача 1.10. Вычислить неопределенный интеграл, используя тригонометрические подстановки.

№	$\int f(x) dx$	№	$\int f(x) dx$
1	$\int \sqrt{9 - x^2} dx$	17	$\int \frac{x^2}{\sqrt{4 - x^2}} dx$
2	$\int \frac{\sqrt{x^2 - 4}}{x^3} dx$	18	$\int \frac{dx}{(x^2 - 9)\sqrt{x^2 - 9}}$
3	$\int \frac{x^5}{\sqrt{16 - x^2}} dx$	19	$\int x^3 \sqrt{49 - x^2} dx$
4	$\int \frac{dx}{(25 + x^2)\sqrt{25 + x^2}}$	20	$\int \frac{\sqrt{x^2 - 64}}{x^4} dx$
5	$\int \frac{x^2}{\sqrt{9 - x^2}} dx$	21	$\int \frac{x^2}{\sqrt{25 - x^2}} dx$
6	$\int \frac{dx}{\sqrt{(x^2 - 4)^3}}$	22	$\int \frac{dx}{(16 + x^2)\sqrt{16 + x^2}}$
7	$\int \frac{x^5}{\sqrt{9 - x^2}} dx$	23	$\int \frac{x^5}{\sqrt{4 - x^2}} dx$
8	$\int \frac{\sqrt{x^2 - 9}}{x^4} dx$	24	$\int \frac{\sqrt{x^2 - 25}}{x^3} dx$
9	$\int \frac{dx}{\sqrt{(x^2 - 49)^3}}$	25	$\int \sqrt{49 - x^2} dx$
10	$\int \frac{dx}{\sqrt{(x^2 + 16)^3}}$	26	$\int \frac{x^2}{\sqrt{64 - x^2}} dx$

11	$\int \frac{x^3}{\sqrt{4-x^2}} dx$	27	$\int x^3 \sqrt{16-x^2} dx$
12	$\int \frac{dx}{\sqrt{(x^2-64)^3}}$	28	$\int \frac{dx}{(16-x^2)\sqrt{16-x^2}}$
13	$\int \frac{\sqrt{4-x^2}}{x^2} dx$	29	$\int \frac{\sqrt{16-x^2}}{x} dx$
14	$\int x^3 \sqrt{9-x^2} dx$	30	$\int x^3 \sqrt{25-x^2} dx$
15	$\int \frac{dx}{\sqrt{(4-x^2)^3}}$	31	$\int \frac{\sqrt{49-x^2}}{x^4} dx$
16	$\int \frac{dx}{\sqrt{(x^2-16)^3}}$	32	$\int \frac{dx}{\sqrt{(25+x^2)^3}}$

Задача 1.11. Вычислить неопределенный интеграл, используя универсальную тригонометрическую подстановку.

№	$\int f(x) dx$	№	$\int f(x) dx$
1	$\int \frac{1}{1+4\sin x} dx$	17	$\int \frac{1}{5-2\sin x+4\cos x} dx$
2	$\int \frac{1}{8-4\sin x+7\cos x} dx$	18	$\int \frac{1}{1+\cos^2 x} dx$
3	$\int \frac{1}{\sin^3 x} dx$	19	$\int \frac{1}{\cos 2x - \sin 2x} dx$
4	$\int \frac{1}{2+3\cos x} dx$	20	$\int \frac{1}{4\sin x+3\cos x+5} dx$
5	$\int \frac{1}{2\sin x+3\cos x+5} dx$	21	$\int \frac{1}{5+3\cos x} dx$
6	$\int \frac{1}{1+\sin^2 x} dx$	22	$\int \frac{2}{3-2\sin x+4\cos x} dx$

7	$\int \frac{3}{5 - 3 \cos x} dx$	23	$\int \frac{5}{1 - \sin x} dx$
8	$\int \frac{1}{4 + 2 \sin x + 3 \cos x} dx$	24	$\int \frac{3}{4 + 4 \sin x + 5 \cos x} dx$
9	$\int \frac{1}{\sin x(1 + \cos x)} dx$	25	$\int \frac{2}{2 \sin x - \cos x - 1} dx$
10	$\int \frac{1}{1 - 3 \sin x} dx$	26	$\int \frac{3}{4 \cos x - 3 \sin x - 5} dx$
11	$\int \frac{3}{5 - 3 \sin x + 2 \cos x} dx$	27	$\int \frac{\sin x}{1 + \sin x} dx$
12	$\int \frac{4}{\cos x + \sin x} dx$	28	$\int \frac{26}{5 + 2 \sin x + 3 \cos x} dx$
13	$\int \frac{2}{1 - \sin x + 2 \cos x} dx$	29	$\int \frac{7}{4 \cos x - 1} dx$
14	$\int \frac{6}{1 + 5 \sin^2 x} dx$	30	$\int \frac{1}{3 - 2 \sin x + 2 \cos x} dx$
15	$\int \frac{3}{3 \sin x + 2 \cos x} dx$	31	$\int \frac{4 \sin x}{\sin x + \cos x} dx$
16	$\int \frac{3}{4 - 5 \sin x - 3 \cos x} dx$	32	$\int \frac{11}{6 + 4 \cos x + 3 \sin x} dx$

Задача 1.12. Вычислить неопределенный интеграл, используя универсальную тригонометрическую подстановку.

№	$\int_a^b f(x) dx$	№	$\int_a^b f(x) dx$
1	$\int_0^1 x \cdot e^{-x} dx$	17	$\int_1^e \frac{\ln^2 x}{x} dx$
2	$\int_0^{\pi/2} x \sin x dx$	18	$\int_0^1 \arcsin x dx$

3	$\int_{\pi/4}^{\pi/3} \frac{x}{\sin^2 x} dx$	19	$\int_{\pi/6}^{\pi/4} x \cos 2x dx$
4	$\int_0^{\pi} x^2 \sin x dx$	20	$\int_1^{\sqrt[3]{e}} x^2 \ln x dx$
5	$\int_1^2 x \ln x dx$	21	$\int_0^{1/2} e^{2x} x dx$
6	$\int_0^e \ln(x+1) dx$	22	$\int_{\pi/6}^{\pi/3} 2x \cdot \cos 3x dx$
7	$\int_{-1/3}^{1/3} e^{-3x} \cdot x dx$	23	$\int_1^4 \frac{\ln x}{\sqrt{x}} dx$
8	$\int_0^2 \frac{x^2}{e^{2x}} dx$	24	$\int_{-1}^1 \arccos x dx$
9	$\int_0^{\pi/4} \operatorname{arctg} x dx$	25	$\int_0^1 x \cdot 2^x dx$
10	$\int_4^9 \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1} dx$	26	$\int_{\ln 2}^{\ln 5} \frac{e^x}{(e^x+1)} dx$
11	$\int_1^e \ln^2 x dx$	27	$\int_0^{1/2} \arccos 2x dx$
12	$\int_0^{\pi/2} \sin 3x \cdot \cos 5x dx$	28	$\int_0^1 e^x \cdot (x+1) dx$

13	$\int_1^e \frac{\ln x}{x} dx$	29	$\int_0^{2\pi} \cos^2 4x dx$
14	$\int_0^1 \frac{e^x}{\sqrt{e^{2x} + 1}} dx$	30	$\int_{-2}^2 \frac{x^2}{x^2 + 4} dx$
15	$\int_0^{\pi/4} \sin^3 x dx$	31	$\int_e^{e^2} \frac{1}{x \ln x} dx$
16	$\int_0^1 \frac{x^3}{x^4 + 1} dx$	32	$\int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{x}{\sin^2 x} dx$

Задача 1.13. Вычислить определенный интеграл.

№	$\int_a^b f(x) dx$	№	$\int_a^b f(x) dx$
1	$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{dx}{1 + \cos x}$	17	$\int_0^{\pi/2} \frac{\sin x}{1 + \cos x} dx$
2	$\int_{-3}^{-2} \frac{dx}{x^2 + 4x + 5}$	18	$\int_0^{\pi/2} x \sin x dx$
3	$\int_0^{\pi/2} \cos^5 x \sin 2x dx$	19	$\int_{-3}^{-2} \frac{3 dx}{x^2 - 8x + 16}$
4	$\int_{-2}^{-1} \frac{dx}{(10 + 3x)^3}$	20	$\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{1 + \sin x}$

5	$\int_1^e \frac{dx}{x\sqrt{1-(\ln x)^2}}$	21	$\int_0^{\pi/4} \frac{x}{\cos^2 x} dx$
6	$\int_1^e \frac{1+\ln x}{x} dx$	22	$\int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{x^2-4x+8}}$
7	$\int_1^2 \frac{e^{1/x}}{x^2} dx$	23	$\int_{\pi/4}^{\pi/2} \cos^2 x dx$
8	$\int_0^2 \frac{x}{1+x^4} dx$	24	$\int_{-3}^{-1} \frac{dx}{x^2+6x+13}$
9	$\int_0^1 \frac{e^x}{1+e^{2x}} dx$	25	$\int_{\pi/4}^{\pi/3} \frac{\sin x}{\cos^2 x} dx$
10	$\int_3^4 \frac{3}{(2-x)^2} dx$	26	$\int_0^1 \frac{\sqrt{x}}{1+x} dx$
11	$\int_0^{1/2} \frac{\arcsin^2 x}{\sqrt{1-x^2}} dx$	27	$\int_{-1/2}^0 \frac{\arccos x}{\sqrt{1-x^2}} dx$
12	$\int_1^2 \frac{4dx}{(x+1)(x-3)}$	28	$\int_0^{\pi/2} \frac{\sin x dx}{1+\cos^2 x}$
13	$\int_1^e \frac{dx}{x\sqrt{1-(\ln x)^2}}$	29	$\int_0^{\pi/12} \sin 4x \sin^2 x dx$
14	$\int_0^1 4^x \cdot x dx$	30	$\int_0^{\pi/2} (x-1) \cdot \cos 2x dx$

15	$\int_0^2 \frac{x^4}{1+x^4} dx$	31	$\int_0^{\pi/4} \frac{dx}{\cos x}$
16	$\int_1^2 \frac{dx}{x^2 - 4x + 5}$	32	$\int_0^4 \frac{3x - 9}{x^2 - 4x - 5} dx$

Задача 1.14. Вычислить несобственный интеграл или установить, что он расходится

№	$\int_a^b f(x) dx$	№	$\int_a^b f(x) dx$
1	$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + 9}$	17	$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x(1 + \ln^2 x)}$
2	$\int_0^{+\infty} x \cdot e^{-3x} dx$	18	$\int_0^1 \frac{\cos \sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx$
3	$\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x \ln^2 x}$	19	$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2) \operatorname{arctg}^2 x}$
4	$\int_1^e \frac{dx}{x \sqrt{\ln x}}$	20	$\int_0^{+\infty} \frac{e^x dx}{1 + e^{2x}}$
5	$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x} \sqrt{1-x}}$	21	$\int_2^{+\infty} \frac{x dx}{x^2 - 1}$
6	$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1 + 4x^2}$	22	$\int_0^2 \frac{x dx}{\sqrt{1-x^4}}$

7	$\int_0^{+\infty} x \cdot e^{-x^2} dx$	23	$\int_1^{+\infty} \frac{e^{1/x}}{x^2} dx$
8	$\int_0^1 \frac{x dx}{\sqrt{1-x^2}}$	24	$\int_1^{+\infty} \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx$
9	$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + 2x + 2}$	25	$\int_1^{+\infty} \frac{x^3 + 1}{x^4} dx$
10	$\int_1^{+\infty} \frac{3dx}{x^2 - x - 2}$	26	$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg}^3 x}{x^2 + 1} dx$
11	$\int_3^{+\infty} \frac{x dx}{4 - x^2}$	27	$\int_{-\infty}^0 \frac{dx}{x^2 - 6x + 10}$
12	$\int_0^{+\infty} \frac{x + 2}{e^x} dx$	28	$\int_0^1 \frac{\ln^3 x}{x} dx$
13	$\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{\operatorname{arctg} x}}{1 + x^2} dx$	29	$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x(1 + \ln x)}$
14	$\int_0^1 \ln x$	30	$\int_1^{+\infty} \frac{\sqrt[3]{x} + 5}{x^3} dx$
15	$\int_5^{+\infty} \frac{3dx}{x^2 + 3x - 4}$	31	$\int_0^{+\infty} \frac{x + 1}{e^x} dx$
16	$\int_1^{+\infty} \frac{x^2}{1 + x^6} dx$	32	$\int_0^1 \frac{x^3}{1 - x^8} dx$

2.1. Найдите сумму данного ряда (если он сходится) либо докажите расходимость этого ряда.

1.1. а) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n^2-1}{n^2+1} \right)^{3n};$

б) $\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{arctg}^n \frac{\pi}{6};$

1.2. а) $\frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \dots + \frac{1}{(2n+1)(2n+3)} + \dots;$

б) $\sum_{n=1}^{\infty} \ln \left(\frac{n-1}{n+9} \right)^n;$

1.3. а) $\sum_{n=1}^{\infty} \cos \frac{n^2-1}{n^3-3n+5};$

б) $-\frac{1}{\pi} + \frac{1}{\pi^2} - \frac{1}{\pi^3} + \dots;$

1.4. а) $\sum_{n=1}^{\infty} \arccos^n \frac{\sqrt{3}}{2};$

б) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n^2-1}{2n^2+4} \right)^{3n-1};$

1.5. а) $\sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{2n-3}{4+5n};$

б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n^2-3n+1}{5-7n+10n^2};$

1.6. а) $\frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{(n+2)(n+3)} + \dots;$

б) $\sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{n^3+1}{4n^2-3} \right)^{2n};$

1.7. а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n+5}{2^n-1};$

б) $\arccos \frac{\sqrt{2}}{2} - \left(\arccos \frac{\sqrt{2}}{2} \right)^2 + \left(\arccos \frac{\sqrt{2}}{2} \right)^3 - \dots;$

1.8. а) $\frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \frac{1}{16} - \frac{1}{25} + \frac{1}{64} - \frac{1}{125} + \dots;$

б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n^2-2}{(3n+1)^2};$

1.9. а) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{5}{(\sqrt{5}-\sqrt{2})^n};$

б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n+1)!}{(2n-1)!};$

1.10. а) $\sum_{n=3}^{\infty} \left(\arcsin \frac{1}{2} \right)^n;$

б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+9)(n+10)};$

1.11. а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{7^n+3^n}{21^n};$

б) $\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{arctg} \frac{(n+1)^2}{(3n-1)};$

1.12. а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{7}{n^2+13n+42};$

б) $\sum_{n=1}^{\infty} n \cdot \ln \frac{n+1}{n-1};$

- 1.13. a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\pi^n - 1}{4^n}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} |\cos n^2|$;
- 1.14. a) $\sum_{n=5}^{\infty} \frac{1}{1-4n^2}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \ln \left(1 - \cos \frac{1}{3^n} \right)$;
- 1.15. a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{3n^2 - 2n + 1}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n - 3^n}{12^n}$;
- 1.16. a) $10^2 - 10^3 + 10^4 - \dots$; б) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+5)(2n+7)}$;
- 1.17. a) $\sum_{n=1}^{\infty} (\log_3 2)^n$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+3}{n+6} \right)^{n^2}$;
- 1.18. a) $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{3}+2} \right)^n$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\operatorname{arccotg} \frac{1}{2} + \operatorname{arctg} 2 \right)^n$;
- 1.19. a) $\sum_{n=0}^{\infty} (5^{n+1} - 5^{1-n})$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{15}{(3n+2)(3n+5)}$;
- 1.20. a) $-\frac{1}{7} + \frac{1}{7} - \frac{1}{7} + \frac{1}{7} - \dots$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} (\lg 15)^{-3n}$;
- 1.21. a) $\frac{2}{(\sqrt{3}-2)^2} + \frac{2}{(\sqrt{3}-2)^3} + \frac{2}{(\sqrt{3}-2)^4} + \dots$; б) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{4n^2-1}$;
- 1.22. a) $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1+\sqrt{5}}{3^n}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+2}{n+1} \right)^{4n-1}$;
- 1.23. a) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n^2-3}{2n^2+1} \right)^{n^2}$; б) $\left(\arcsin \frac{\sqrt{2}}{2} \right)^2 - \left(\arcsin \frac{\sqrt{2}}{2} \right)^3 + \left(\arcsin \frac{\sqrt{2}}{2} \right)^4 - \dots$;
- 1.24. a) $\frac{1}{1 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 7} + \dots + \frac{1}{(3n-2)(3n+1)} + \dots$; б) $\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{n+3}{n+5}$;
- 1.25. a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{4n^2+4n-3}$; б) $-\frac{1}{e} + \frac{1}{e^2} - \frac{1}{e^3} + \dots$;
- 1.26. a) $\frac{1}{27} - \frac{1}{81} + \frac{1}{243} - \dots$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\arcsin \frac{1}{2} + \arccos \frac{1}{2} \right)^n$;
- 1.27. a) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2^n + 2^{3n}}{6^n}$; б) $\frac{1}{20} - \frac{1}{20} + \frac{1}{20} - \frac{1}{20} + \dots$;
- 1.28. a) $\sum_{n=3}^{\infty} (\ln 3)^{2n}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{6}{4n^2-9}$;

$$1.29. \text{ a) } -1, 1 + (1, 1)^2 - (1, 1)^3 + \dots;$$

$$\text{б) } \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2 + n - 2};$$

$$1.30. \text{ a) } 2 - 2 + 2 - 2 + \dots;$$

$$\text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n - 5^n}{10^n}.$$

Задание 2.2 Исследуйте сходимость числового ряда, применив для этого подходящий признак сходимости.

$$2.1. \text{ a) } \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln n}{n};$$

$$\text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot \sin^2 \left(\frac{\pi}{n^2 \cdot \sqrt{n}} \right); \text{ в) } \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3n+1}{n^2+8} \right)^{2n};$$

$$2.2. \text{ a) } \sum_{n=1}^{\infty} n^2 \cdot \arcsin^2 \frac{1}{n^2};$$

$$\text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{(n+1)^n}; \quad \text{в) } \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{4n^2 + 3n - 1}{6n^2 - n + 2} \right)^n;$$

$$2.3. \text{ a) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{8^n}{n!};$$

$$\text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1) \ln^2(n+1)}; \text{ в) } \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot \left(\sqrt{1 + \frac{1}{n^2}} - 1 \right);$$

$$2.4. \text{ a) } \sum_{n=1}^{\infty} \arctg \frac{\pi}{n^3};$$

$$\text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n+1}{9n-4} \right)^{n^2}; \quad \text{в) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{(2n+2)!!};$$

$$2.5. \text{ a) } \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(n+1)!}{4^{n+1}};$$

$$\text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{\sqrt{n}}; \quad \text{в) } \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+4}{3n^2-2} \right)^{4n};$$

$$2.6. \text{ a) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{5^n};$$

$$\text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1} \cdot \left(e^{\frac{n}{n^2+1}} - 1 \right); \text{ в) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{7^{3n}};$$

$$2.7. \text{ a) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \cdot \sin \frac{n}{n^2+1};$$

$$\text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3n-2}{8n+4} \right)^{n^2}; \text{ в) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1) \ln(n+1)};$$

$$2.8. \text{ a) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \ln(2n)};$$

$$\text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot \arctg \frac{3n+4}{n^3+8}; \quad \text{в) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)!(3n)!}{(2n+1)!};$$

$$2.9. \text{ a) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n+2};$$

$$\text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+2}{10n} \right)^{2n}; \quad \text{в) } \sum_{n=3}^{\infty} \frac{\ln(n-2)}{(n-2)^2};$$

$$2.10. \text{ a) } \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n}{4n+3} \right)^n; \quad \text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n^5+1) \cdot 5^{2n}}{(n+3)!}; \quad \text{в) } \sum_{n=1}^{\infty} (4n-1) \cdot \left(1 - \cos \frac{5n}{n^2+4} \right);$$

$$2.11. \text{ a) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n}{(4n)!}; \quad \text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{n}} \cdot \arcsin \frac{n+4}{n^3+5}; \quad \text{в) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1) \ln(2n+1)};$$

$$\begin{aligned}
2.12. \text{ a) } & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)\ln^2(2n+1)}; \text{ б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{7n-1}{n^3} \cdot \ln\left(\frac{n^2+1}{n^2}\right); \text{ в) } \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+4}{n^2+3n-1}\right)^{n^2}; \\
2.13. \text{ a) } & \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt[3]{n} \cdot \operatorname{arctg} \frac{1}{n}; \text{ б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{2n}}{(\ln n)^n}; \text{ в) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n+2)!!}; \\
2.14. \text{ a) } & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n}{3^n(n+1)}; \text{ б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n \cdot n!}{(3n+1)!}; \text{ в) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(3n-1)\ln(2n)}; \\
2.15. \text{ a) } & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(3n-1)\ln^3(3n-1)}; \text{ б) } \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n^2} \cdot 5^n; \text{ в) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+4}{n+1} \operatorname{tg} \frac{\pi}{n^3}; \\
2.16. \text{ a) } & \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{4n}\right)^{3n}; \text{ б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3n\sqrt{\ln(n+1)}}; \text{ в) } \sum_{n=1}^{\infty} n\sqrt{n} \cdot \left(e^{\frac{n+2}{n^5+1}} - 1\right); \\
2.17. \text{ a) } & \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{tg} \frac{n-1}{n^3-1}; \text{ б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 4 \cdot 7 \cdot \dots \cdot (3n-2)}{3^{n+1}}; \text{ в) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^{n+5}}{(n+2)^n}; \\
2.18. \text{ a) } & \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n+2}{3n+3}\right)^n; \text{ б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(\ln(n+1))}{(n+1)\ln(n+1)}; \text{ в) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+2)!}{n^3 \cdot 2^{2n+1}}; \\
2.19. \text{ a) } & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n}{(n+3)!}; \text{ б) } \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n+4}{7n-3}\right)^{3n} \cdot (n^2+1)^5; \text{ в) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\pi}{n^2+1} \operatorname{arctg} \frac{n^2+1}{n^3}; \\
2.20. \text{ a) } & \sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{\pi}{5n+1}; \text{ б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^2}; \text{ в) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\ln n)^n}{(n^2+3n+1)^{2n}}; \\
2.21. \text{ a) } & \sum_{n=4}^{\infty} \frac{1}{n \ln^2\left(\frac{n}{2}\right)}; \text{ б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n+4}{n^2+5} \cdot \sin \frac{4n-2}{n^2}; \text{ в) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+4n+8}{(3n-1)!}; \\
2.22. \text{ a) } & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{7^n(n+6)}; \text{ б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{((2n-1)!)^2}; \text{ в) } \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n+1}{(n^2-1) \cdot \sqrt[3]{\ln^2 n}}; \\
2.23. \text{ a) } & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n \cdot (n+2)!}{n^5}; \text{ б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \cdot \left(\sqrt{1 + \frac{2n+1}{n^3+1}} - 1\right); \text{ в) } \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{arctg}^{3n} \frac{\pi}{\sqrt{n}}; \\
2.24. \text{ a) } & \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{arctg}^2 \frac{1}{n+1}; \text{ б) } \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{4n^2+4n-8}{7n^2+7}\right)^{2n}; \text{ в) } \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n^2+3}{(n^3+1) \cdot \sqrt[4]{\ln n}}; \\
2.25. \text{ a) } & \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n+1}{4n^2+1}\right)^{2n}; \text{ б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5 \cdot 8 \cdot 11 \cdot \dots \cdot (3n+2)}{7 \cdot 13 \cdot 19 \cdot \dots \cdot (6n+1)}; \text{ в) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n^2} \cdot \left(1 - \cos \frac{1}{\sqrt{n}}\right);
\end{aligned}$$

$$\begin{array}{lll}
2.26. \text{ а) } \sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{(n-1)\sqrt{\ln(n-1)}}; & \text{ б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)^4}{(\ln(n+1))^n}; & \text{ в) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5 \cdot 9 \cdot 13 \cdot \dots \cdot (4n+1)}{3 \cdot 8 \cdot 13 \cdot \dots \cdot (5n-2)}; \\
2.27. \text{ а) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n}{4n!}; & \text{ б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{\sqrt[3]{n^2}}; & \text{ в) } \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{tg}^2 \frac{\pi}{\sqrt[6]{n}}; \\
2.28. \text{ а) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(2n+3)!}; & \text{ б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{\sqrt{n+2}} \cdot \ln \left(\frac{5n+6}{5n+1} \right); & \text{ в) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{n-2}}{(n+4)^{2n}}; \\
2.29. \text{ а) } \sum_{n=1}^{\infty} \arcsin \frac{1}{3^n}; & \text{ б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{(3n^2+4)\ln(n+2)}; & \text{ в) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 6 \cdot 11 \cdot \dots \cdot (5n-4)}{(n+1)!}; \\
2.30. \text{ а) } \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{2n} \right)^{4n}; & \text{ б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \left(\arcsin \frac{\pi}{\sqrt[3]{n+1}} \right)^3; & \text{ в) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln \sqrt{n}}{n^2}
\end{array}$$

Задание 2.3 Исследуйте сходимость знакочередующегося ряда

$$\begin{array}{ll}
3.1. \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{(n^2+1)\ln n}; & 3.2. \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\frac{n}{3} \ln^2(n+9)}; \\
3.3. \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n\sqrt{\ln(3n+1)}}; & 3.4. \sum_{n=5}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(n-2)\ln(n-3)}; \\
3.5. \sum_{n=3}^{\infty} \frac{(-1)^n (2n+1)}{\left(\frac{3n^2}{2} + 2 \right) \ln \left(\frac{n}{2} \right)}; & 3.6. \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n n^2}{(n^3+1)\ln n}; \\
3.7. \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n-3)\ln(3n+1)}; & 3.8. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(3n+4)\ln^3(5n+2)}; \\
3.9. \sum_{n=5}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(n-2)\sqrt{\ln(n-3)}}; & 3.10. \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n (3n-1)}{(n^2-2)\ln(2n)}; \\
3.11. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+3)\ln^2(n\sqrt{7}+2)}; & 3.12. \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n \cdot \ln^7(6n+1)}; \\
3.13. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n\sqrt{3}+1)\ln^4(n\sqrt{5}+1)}; & 3.14. \sum_{n=5}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n-2)\sqrt[3]{\ln(n-2)}}; \\
3.15. \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} n^4}{(n^5-1)\ln n^2}; & 3.16. \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} (n+1)^2}{(2n^2+3)\ln n^n};
\end{array}$$

$$3.17. \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(7n+1)\sqrt[5]{\ln^2(n-2)}};$$

$$3.19. \sum_{n=3}^{\infty} \frac{(-1)^n(5n+1)}{(n^2-7)\ln\left(\frac{n}{2}\right)};$$

$$3.21. \sum_{n=3}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n \ln(n-1)^{10}};$$

$$3.23. \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n(5n-11)}{(3n^2+1)\ln\sqrt[13]{n}};$$

$$3.25. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(3+2n)\ln^{1/6}(n+1)};$$

$$3.27. \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}\sqrt{n}}{2n\sqrt{\ln(3n-1)^n}};$$

$$3.29. \sum_{n=4}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}(2n-1)^3}{(5n^2+10)^2 \ln(n-2)};$$

$$3.18. \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}n^2}{(5n+1)^3 \ln\sqrt[3]{n}};$$

$$3.20. \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n\sqrt[5]{\ln(3n-1)}};$$

$$3.22. \sum_{n=5}^{\infty} \frac{(-1)^n(n^2-1)}{n^3 \sqrt{\ln(5n-3)}};$$

$$3.24. \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}(n+1)^2}{(n^3+1)\ln n};$$

$$3.26. \sum_{n=3}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(5-3n)\ln^7(4n-7)};$$

$$3.28. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\left(\frac{n}{3}-1\right)\sqrt{\ln(n+7)}};$$

$$3.30. \sum_{n=5}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n-3)\sqrt[7]{\ln^2(n-3)}}.$$

Задание 2.4. Найдите интервал и область сходимости степенного ряда. Укажите, какими свойствами обладает сумма этого ряда в интервале сходимости.

$$4.1. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot n\sqrt{n}}{(2+n) \cdot 3^n} (x-1)^n;$$

$$4.3. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-3)^{2n}}{2n^2 + 4n + 2};$$

$$4.5. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot (x+3)^n}{(n+3) \cdot 5^n};$$

$$4.7. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot \sqrt{n}}{4n+7} (x-2)^{3n};$$

$$4.9. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot n^4}{(n\sqrt{n}+6)^2 \cdot 9^n} (x+6)^{2n+1};$$

$$4.2. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+2)^n}{(n+1)!};$$

$$4.4. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4n-1}{(3n^2+2) \cdot 6^n} (x+1)^{2n+1};$$

$$4.6. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n}{n^2+1} (x-4)^{2n-1};$$

$$4.8. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+5)^{2n}}{(n+5) \cdot 7^{2n+3}};$$

$$4.10. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n+8)}{n^2-n+1} (x+4)^n;$$

$$4.11. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (n+5)}{(n^2 - 4n + 6) \cdot 9^n} (x-6)^n;$$

$$4.12. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^4 + 3n^2 + 1}{(n+4)^2} (x-5)^{2n-1};$$

$$4.13. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(5n^2 - 4) \cdot 8^n} (x-8)^n;$$

$$4.14. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5n^2 - 1}{n^3 + 2} (x+7)^{2n-1};$$

$$4.15. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-7)^n}{5^n \cdot n \ln n};$$

$$4.16. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 + 3}{n^5 + 8n + 1} (x+9)^n;$$

$$4.17. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n\sqrt{n} + 4} (x-9)^n;$$

$$4.18. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(3\sqrt{n} - 2) \cdot 7^n} (x+8)^{2n};$$

$$4.19. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+1)^{3n}}{4^n};$$

$$4.20. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n^3 + 4} (x-2)^{2n+1};$$

$$4.21. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot (x-4)^{3n}}{3^n + 6n};$$

$$4.22. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+5)^{2n}}{(n+5)!};$$

$$4.23. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot (3n+7)}{n^2 + 3} (x-3)^n;$$

$$4.24. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{16^{n+1}}{n^4 - 7n + 1} (x+2)^{2n-1};$$

$$4.25. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot (x-1)^n}{(\sqrt{n} + 2)^2};$$

$$4.26. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\sqrt{n}}{(n^2 + 8) \cdot 2^n} (x-5)^n;$$

$$4.27. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+5}{n^2 + 1} (x-7)^n;$$

$$4.28. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3 + n}{8^n} (x+6)^n;$$

$$4.29. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+3)^{2n+1}}{2^{n+1}};$$

$$4.30. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+4)^n}{(n+2)!}.$$

Задание 2.5. Пользуясь признаком Вейерштрасса, докажите равномерную сходимость данного ряда на указанном промежутке. Обоснуйте, обладает ли сумма ряда свойством непрерывности на этом промежутке.

$$5.1. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{x^{2n} + n}, x \in \mathbf{R};$$

$$5.2. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(x+n)^2}, x \in [0; +\infty);$$

$$5.3. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos^2(2nx)}{5^{n+2}}, x \in \mathbf{R};$$

$$5.4. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)^4 \cdot (3x)^{2n}}{n^2 + n - 8}, x \in \left[-\frac{1}{5}; \frac{1}{5}\right];$$

$$5.5. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{(x-5)^{3n}}, x \in (-\infty; -3];$$

$$5.6. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{x + 2^n}, x \in [0; +\infty);$$

$$\begin{aligned}
5.7. \quad & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{(x+1)^{2n}}, \quad x \in [1; +\infty); \\
5.9. \quad & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{arctg}(nx)}{n\sqrt{n}}, \quad x \in \mathbf{R}; \\
5.11. \quad & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x^2 + 4^n}, \quad x \in [0; +\infty); \\
5.13. \quad & \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{x^3 + n}{n^2}, \quad x \in [1; 4]; \\
5.15. \quad & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n \cdot \cos^2(\pi nx)}{n^2 + 1}, \quad x \in [-1; 1]; \\
5.17. \quad & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{3n}}{2n+1}, \quad x \in \left[-\frac{1}{3}; \frac{1}{3}\right]; \\
5.19. \quad & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\arcsin(nx^2)}{n^3}, \quad x \in \mathbf{R}; \\
5.21. \quad & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{x^4 + n^4}, \quad x \in \mathbf{R}; \\
5.23. \quad & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{(n+2) \cdot \ln^4(n+2)}, \quad x \in [-1; 1]; \\
5.25. \quad & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-4)^n}{3^n}, \quad x \in [2; 5]; \\
5.27. \quad & \sum_{n=1}^{\infty} x^n \cdot \arcsin \frac{n^2}{3^{2n}}, \quad x \in [-8; 8]; \\
5.29. \quad & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^3(nx)}{(n+1)!}, \quad x \in \mathbf{R}; \\
5.8. \quad & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+3}}{(x^2 + n^2)^2}, \quad x \in \mathbf{R}; \\
5.10. \quad & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n-1}}{n \cdot \ln^2 n}, \quad x \in [-1; 1]; \\
5.12. \quad & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+2)^n}{4^{2n+1}}, \quad x \in [-12; 12]; \\
5.14. \quad & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+5)^n}{7^n}, \quad x \in [-11; -4]; \\
5.16. \quad & \sum_{n=1}^{\infty} (x-7)^n \operatorname{arctg} \frac{1}{4^n}, \quad x \in [4; 10]; \\
5.18. \quad & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot x^n}{n^2 \cdot 6^n}, \quad x \in [-6; 6]; \\
5.20. \quad & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 \sin(nx)}{3^{n+1}}, \quad x \in \mathbf{R}; \\
5.22. \quad & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n}{(x+4)^{2n}}, \quad x \in [-1; +\infty); \\
5.24. \quad & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+3)^3}{n^4 + 7} \cdot (x-2)^n, \quad x \in \left[1; \frac{5}{2}\right]; \\
5.26. \quad & \sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1}, \quad x \in \left[-\frac{1}{4}; \frac{1}{4}\right]; \\
5.28. \quad & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+2)^2}{n^3 + 4} \cdot x^n, \quad x \in \left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right]; \\
5.30. \quad & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n \cdot (x-4)^n}, \quad x \in [5; +\infty).
\end{aligned}$$

Задание 2.6. Найдите область сходимости и сумму степенного ряда.

$$6.1. \text{ а) } \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n+5};$$

$$\text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot 3n^2 \cdot x^n;$$

$$6.2. \text{ а) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{n};$$

$$\text{б) } \sum_{n=2}^{\infty} (n^2 + n - 2) \cdot x^{n-2};$$

$$6.3. \text{ a) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n+2}}{2n+1};$$

$$6.4. \text{ a) } \sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^{n+4}}{n-1};$$

$$6.5. \text{ a) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n-1}}{2n+1};$$

$$6.6. \text{ a) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n+3}}{4n^2 + 8n + 3};$$

$$6.7. \text{ a) } \sum_{n=3}^{\infty} \frac{x^n}{n-2};$$

$$6.8. \text{ a) } \sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{n-1};$$

$$6.9. \text{ a) } \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n+4};$$

$$6.10. \text{ a) } \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{4n^2 + 4n + 1};$$

$$6.11. \text{ a) } \sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^{n-2}}{n-1};$$

$$6.12. \text{ a) } \sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n-2};$$

$$6.13. \text{ a) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n+3}}{n};$$

$$6.14. \text{ a) } \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot x^{n+3}}{n^2 + 4n + 3};$$

$$6.15. \text{ a) } \sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^{n-2}}{n+3};$$

$$6.16. \text{ a) } \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{2^n(n+1)};$$

$$6.17. \text{ a) } \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+3}}{n+1};$$

$$6.18. \text{ a) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n-1};$$

$$\text{б) } \sum_{n=0}^{\infty} \frac{9n^2 + 6n + 1}{3^n} \cdot x^{3n};$$

$$\text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 + n}{3^n} \cdot x^n;$$

$$\text{б) } \sum_{n=2}^{\infty} (n^2 - n) \cdot x^{n-1};$$

$$\text{б) } \sum_{n=0}^{\infty} (n+2) \cdot x^{2n};$$

$$\text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} (16n^2 - 1) \cdot x^{4n-2};$$

$$\text{б) } \sum_{n=0}^{\infty} (n^2 + 7n + 12) \cdot x^{n+2};$$

$$\text{б) } \sum_{n=0}^{\infty} (9n^2 + 9n + 2) \cdot x^{3n};$$

$$\text{б) } \sum_{n=3}^{\infty} (n-2) \cdot x^{2n-6};$$

$$\text{б) } \sum_{n=0}^{\infty} \frac{49n^2 + 14n + 1}{7^n} \cdot x^{7n};$$

$$\text{б) } \sum_{n=3}^{\infty} (n^2 - 2n) \cdot x^{n-2};$$

$$\text{б) } \sum_{n=2}^{\infty} (4n^2 - 6n + 2) \cdot x^{2n};$$

$$\text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} (n+3) \cdot x^{2n-2};$$

$$\text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} (4n^2 - 2n - 2) \cdot x^{2n-1};$$

$$\text{б) } \sum_{n=0}^{\infty} \frac{36n^2 + 12n + 1}{6^n} \cdot x^{6n};$$

$$\text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} (9n^2 - 9n + 2) \cdot x^{3n};$$

$$\text{б) } \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot (n^2 + 3n + 2) \cdot x^n;$$

$$6.19. \text{ a) } \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+2}}{n^2 + 7n + 12};$$

$$6.20. \text{ a) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n-2}}{n \cdot 4^{n-1}};$$

$$6.21. \text{ a) } \sum_{n=4}^{\infty} \frac{x^n}{n-3};$$

$$6.22. \text{ a) } \sum_{n=3}^{\infty} \frac{x^n}{n-2};$$

$$6.23. \text{ a) } \sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^{n-2}}{n^2 + n - 2};$$

$$6.24. \text{ a) } \sum_{n=0}^{\infty} \frac{18x^{3n+3}}{n+1};$$

$$6.25. \text{ a) } \sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n^2 - n};$$

$$6.26. \text{ a) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n-1}}{2n+1};$$

$$6.27. \text{ a) } \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot x^n}{n+3};$$

$$6.28. \text{ a) } \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+6}}{n+3};$$

$$6.29. \text{ a) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{4^n \cdot n};$$

$$6.30. \text{ a) } \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{3n}}{n+2};$$

$$\text{б) } \sum_{n=2}^{\infty} (n-1) \cdot x^{3n-3};$$

$$\text{б) } \sum_{n=0}^{\infty} (n^2 + 5n + 4) \cdot x^n;$$

$$\text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} (4n^2 - 1) \cdot x^{2n-1};$$

$$\text{б) } \sum_{n=0}^{\infty} (4n^2 + 8n + 3) \cdot x^{2n};$$

$$\text{б) } \sum_{n=0}^{\infty} (n+2) \cdot x^{n+5};$$

$$\text{б) } \sum_{n=0}^{\infty} \frac{25n^2 + 10n + 1}{5^n} \cdot x^{5n};$$

$$\text{б) } \sum_{n=0}^{\infty} (n+6) \cdot x^{6n};$$

$$\text{б) } \sum_{n=2}^{\infty} (n^2 + 2n - 3) \cdot x^{n-2};$$

$$\text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{7^{n+1}} \cdot x^{n-1};$$

$$\text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} (9n^2 - 1) \cdot x^{3n};$$

$$\text{б) } \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot (4n^2 + 6n + 2) \cdot x^{2n};$$

$$\text{б) } \sum_{n=0}^{\infty} \frac{16n^2 + 8n + 1}{4^n} \cdot x^{4n}.$$

Задачи для расчетно-графической работы для третьего семестра

Задание 1.1. Изобразите фигуру, площадь которой выражается повторными интегралами. Найдите эту площадь непосредственно по рисунку и с помощью криволинейного интеграла второго рода.

$$1.1. \text{ а) } \int_0^1 dx \int_{x/2}^x dy + \int_1^2 dx \int_{x/2}^1 dy;$$

$$\text{б) } \int_{-1}^0 dx \int_0^{2x+2} dy + \int_0^2 dx \int_0^{\sqrt{4-x^2}} dy;$$

$$1.2. \text{ а) } \int_{-4}^0 dy \int_{-y-4}^0 dx + \int_0^2 dy \int_{2y-4}^0 dx;$$

$$\text{б) } \int_0^1 dx \int_{-x}^0 dy + \int_1^2 dx \int_{-\sqrt{-x^2+2x}}^0 dy;$$

$$1.3. \text{ а) } \int_0^2 dy \int_{-y/2}^0 dx + \int_2^3 dy \int_{y-3}^0 dx;$$

$$\text{б) } \int_0^1 dx \int_{1-\sqrt{2x-x^2}}^1 dy + \int_1^2 dx \int_{x-1}^2 dy;$$

$$1.4. \text{ а) } \int_{-4}^0 dx \int_{-x/2}^2 dy + \int_0^4 dx \int_{x/2}^2 dy;$$

$$\text{б) } \int_{-1}^1 dy \int_{-1-\sqrt{1-y^2}}^{-1+\sqrt{1-y^2}} dx;$$

$$1.5. \text{ а) } \int_0^2 dy \int_0^y dx + \int_2^4 dy \int_0^{4-y} dx;$$

$$\text{б) } \int_{-1}^0 dx \int_{1-x}^{2+\sqrt{1-x^2}} dy;$$

$$1.6. \text{ а) } \int_{-1}^0 dy \int_{-2y}^2 dx + \int_0^1 dy \int_{2y}^2 dx;$$

$$\text{б) } \int_{-1}^1 dx \int_{-1}^{-1+\sqrt{1-x^2}} dy;$$

$$1.7. \text{ а) } \int_{-3}^0 dy \int_{-y}^3 dx + \int_0^1 dy \int_{3y}^3 dx;$$

$$\text{б) } \int_0^2 dy \int_{3-\sqrt{2y-y^2}}^{3+\sqrt{2y-y^2}} dx;$$

$$1.8. \text{ а) } \int_{-2}^0 dx \int_{-2}^x dy + \int_0^4 dx \int_{-2}^{-x/2} dy;$$

$$\text{б) } \int_{-2}^0 dy \int_{2-\sqrt{4-y^2}}^{y+4} dx + \int_0^2 dy \int_{2-\sqrt{4-y^2}}^{2+\sqrt{4-y^2}} dx;$$

$$1.9. \text{ а) } \int_{-4}^{-3} dy \int_{-4-y}^0 dx + \int_{-3}^0 dy \int_{y/3}^0 dx;$$

$$\text{б) } \int_2^3 dx \int_{3-x}^{\sqrt{-x^2+4x-3}} dy;$$

$$1.10. \text{ а) } \int_{0,5}^1 dx \int_{-2x}^{-1} dy + \int_1^2 dx \int_{-2}^{-x} dy;$$

$$\text{б) } \int_{-3}^{-2} dy \int_0^{3+y} dx + \int_{-2}^{-1} dy \int_0^{\sqrt{-y^2-4y-3}} dx;$$

$$1.11. a) \int_0^1 dy \int_{y/2}^{2y} dx + \int_1^4 dy \int_{y/2}^2 dx;$$

$$1.12. a) \int_{-5}^{-3} dy \int_{-5-y}^0 dx + \int_{-3}^{-1} dy \int_{y+1}^0 dx;$$

$$1.13. a) \int_{-1}^0 dx \int_{-2x}^2 dy + \int_0^1 dx \int_x^2 dy;$$

$$1.14. a) \int_{-1}^0 dy \int_{-2y}^1 dx + \int_0^1 dy \int_{2y}^1 dx;$$

$$1.15. a) \int_{-3}^{-1} dx \int_1^{x+4} dy + \int_{-1}^0 dx \int_1^{-2x+1} dy;$$

$$1.16. a) \int_0^3 dx \int_2^{x+2} dy + \int_3^4 dx \int_2^{14-3x} dy;$$

$$1.17. a) \int_{-2}^0 dy \int_{-y}^2 dx + \int_0^1 dy \int_{2y}^2 dx;$$

$$1.18. a) \int_0^1 dy \int_{y/3-3}^0 dx + \int_1^3 dy \int_{y/3-3}^{1-y} dx;$$

$$1.19. a) \int_{-4}^{-2} dx \int_{-3}^{x+1} dy + \int_{-2}^{-1} dx \int_{3x+3}^{x+1} dy;$$

$$1.20. a) \int_1^2 dy \int_2^{2y} dx + \int_2^3 dy \int_2^{8-2y} dx;$$

$$1.21. a) \int_{-3}^{-1,5} dx \int_{-x}^3 dy + \int_{-1,5}^0 dx \int_{-x}^{-2x} dy;$$

$$1.22. a) \int_{-1,5}^{0,5} dy \int_1^{y+0,5} dx + \int_{0,5}^1 dy \int_{-1}^{3-4y} dx;$$

$$1.23. a) \int_1^2 dy \int_{2-3y}^{-1} dx + \int_2^3 dy \int_{3y-10}^{-1} dx;$$

$$b) \int_{-3}^{-1} dx \int_{-x-4}^{-1+\sqrt{-x^2-2x+3}} dy;$$

$$b) \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} dx \int_2^{1+\sqrt{4-x^2}} dy;$$

$$b) \int_{-1}^1 dy \int_{y+1}^{\sqrt{-y^2+2y+3}} dx;$$

$$b) \int_2^3 dx \int_2^x dy + \int_3^4 dx \int_2^{2+\sqrt{-x^2+6x-8}} dy;$$

$$b) \int_2^4 dy \int_{3-\sqrt{4y-y^2}}^{7-y} dx;$$

$$b) \int_1^3 dx \int_{2-\sqrt{-x^2+2x+3}}^{2+\sqrt{-x^2+2x+3}} dy;$$

$$b) \int_0^1 dx \int_{-1+\sqrt{2x-x^2}}^0 dy;$$

$$b) \int_2^3 dx \int_0^{1-\sqrt{-x^2+4x-3}} dy + \int_3^4 dx \int_0^{4-x} dy;$$

$$b) \int_0^2 dy \int_{-2+\sqrt{-y^2+4y}}^0 dx;$$

$$b) \int_{-3}^{-2} dx \int_0^{1-\sqrt{-x^2-6x-8}} dy + \int_{-2}^0 dx \int_0^{-x/2} dy;$$

$$b) \int_0^2 dy \int_0^{y/2} dx + \int_2^3 dy \int_0^{1-\sqrt{-y^2+6y-8}} dx;$$

$$b) \int_{-3}^{-1} dx \int_0^{(x+3)/2} dy + \int_{-1}^0 dx \int_0^{1-\sqrt{1-x^2}} dy;$$

$$b) \int_{-1}^0 dx \int_{1+\sqrt{-x^2-2x}}^{3+x} dy;$$

$$1.24. \text{ a) } \int_{-3}^1 dx \int_{-x-3}^0 dy + \int_{-1}^0 dx \int_{2x}^0 dy;$$

$$1.25. \text{ a) } \int_{-2}^{-1} dy \int_0^{2y+4} dx + \int_{-1}^1 dy \int_0^{1-y} dx;$$

$$1.26. \text{ a) } \int_{-2}^0 dx \int_{-2}^x dy + \int_0^2 dx \int_{-2}^{-x} dy;$$

$$1.27. \text{ a) } \int_{-2}^0 dy \int_{-y/2}^1 dx + \int_0^2 dy \int_{y/2}^1 dx;$$

$$1.28. \text{ a) } \int_0^3 dx \int_0^{x/3} dy + \int_3^4 dx \int_0^{4-x} dy;$$

$$1.29. \text{ a) } \int_{-1}^1 dx \int_{-x-1}^0 dy + \int_1^2 dx \int_{2x-4}^0 dy;$$

$$1.30. \text{ a) } \int_{-1}^0 dx \int_{-3x}^{2-x} dy + \int_0^2 dx \int_0^{2-x} dy;$$

$$\text{б) } \int_{-1}^0 dy \int_{-y-3}^{-1-\sqrt{-y^2-2y}} dx;$$

$$\text{б) } \int_1^3 dx \int_0^{\sqrt{-x^2+6x-5}} dy + \int_3^5 dx \int_0^{5-x} dy;$$

$$\text{б) } \int_0^2 dy \int_{3-\sqrt{-y^2+4y}}^{3+y} dx;$$

$$\text{б) } \int_{-2}^0 dx \int_{-x-2}^0 dy + \int_0^2 dx \int_{-\sqrt{4-x^2}}^0 dy;$$

$$\text{б) } \int_0^3 dy \int_{-2-\sqrt{9-y^2}}^{1-y} dx;$$

$$\text{б) } \int_2^3 dy \int_{3-\sqrt{-y^2+6y-8}}^3 dx + \int_3^4 dy \int_{y-1}^3 dx;$$

$$\text{б) } \int_{-2}^0 dy \int_0^{\sqrt{4-y^2}} dx + \int_0^2 dy \int_0^{2-y} dx.$$

Задание 1.2.

Для данной функции $f(x, y)$ и области D представьте двойной интеграл $\iint_D f(x, y) dx dy$ в виде повторного двумя способами: с внешним интегрированием по x и внешним интегрированием по y . Вычислите двойной интеграл одним из способов.

$$2.1. \text{ a) } f(x, y) = \frac{1}{(x+y)^2}, \quad D: 0 \leq x \leq 1, 1 \leq y \leq 2;$$

$$\text{б) } f(x, y) = 2x + y + 1, \quad D: y = x^2 + 1, y = 5, x = 0;$$

$$\text{в) } f(x, y) = x^2 y, \quad D: y = \frac{1}{x}, y = x, y = 0, x = 2;$$

$$2.2. \text{ a) } f(x, y) = \frac{1}{(x+y+1)^2}, \quad D: 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1;$$

$$\text{б) } f(x, y) = \frac{y}{(2-x)^2}, \quad D: y = 4 - x^2, x = 0, y = 1;$$

- в) $f(x, y) = 3 - x - y$, $D: y = \frac{2}{x}$, $y = 0$, $x = 1$, $x = 3$;
- 2.3. а) $f(x, y) = \frac{x}{(x^2 + y^2 + 1)^2}$, $D: 0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$;
- б) $f(x, y) = 2x - y$, $D: y = -x^2$, $y = 0$, $x = 2$;
- в) $f(x, y) = y \ln x$, $D: y = \frac{1}{x}$, $y = \sqrt{x}$, $x = 2$;
- 2.4. а) $f(x, y) = \frac{x}{(x^2 + y^2)^2}$, $D: 0 \leq x \leq 1$, $1 \leq y \leq 2$;
- б) $f(x, y) = 1 - x$, $D: y = e^x$, $y = e$, $x = 0$;
- в) $f(x, y) = x^2 + y$, $D: y = \frac{2}{x}$, $y = 2x$, $y = 0$, $x = 2$;
- 2.5. а) $f(x, y) = x \cos(x + y)$, $D: 0 \leq x \leq \pi$, $0 \leq y \leq \frac{\pi}{2}$;
- б) $f(x, y) = ye^x$, $D: y = \frac{x}{2}$, $x = 2$, $y = 0$;
- в) $f(x, y) = xy$, $D: y = x^2$, $y = -x$, $y = 1$;
- 2.6. а) $f(x, y) = y \sin(x - y)$, $D: 0 \leq x \leq \pi$, $0 \leq y \leq \frac{\pi}{2}$;
- б) $f(x, y) = y2^x$, $D: y = \frac{1}{2}x + 2$, $y = 3$, $x = 0$;
- в) $f(x, y) = -2y - x$, $D: y = x^2 - 1$, $y = -3x + 3$, $x = 0$;
- 2.7. а) $f(x, y) = x^2 y \cos(xy^2)$, $D: 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$, $0 \leq y \leq 2$;
- б) $f(x, y) = x + y$, $D: y = \ln x$, $y = 0$, $x = e$;
- в) $f(x, y) = 2x + 3y$, $D: y = \sqrt{x}$, $y = 2 - x$, $y = 0$, $x = 4$;
- 2.8. а) $f(x, y) = \frac{x}{(x + y)^3}$, $D: 1 \leq x \leq 2$, $0 \leq y \leq 1$;
- б) $f(x, y) = y^2 \sin x$, $D: y = 1 + \cos x$, $y = 0$, $x = 0$;
- в) $f(x, y) = x^2 + 2y$, $D: y = 3x$, $y = \frac{3}{x}$, $y = 0$, $x = 2$;
- 2.9. а) $f(x, y) = x^2 y^2 \sin xy^3$, $D: 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$, $1 \leq y \leq 2$;
- б) $f(x, y) = 2x - y$, $D: y = e^x$, $y = 3$, $x = 0$;
- в) $f(x, y) = x^3 + y$, $D: x = y^2$, $x = 3$, $y = 0$, $y = 1$;

- 2.10. a) $f(x, y) = \frac{y^2}{(x + y^3)^2}$, $D: 0 \leq x \leq 1, 1 \leq y \leq 2$;
 б) $f(x, y) = y^2 \cos x$, $D: y = \sin x, y = 0, x = \frac{\pi}{2}$;
 в) $f(x, y) = \frac{x}{\sqrt{y}}$, $D: x = y^2, y = 1, y = 2, x = 0$;
- 2.11. a) $f(x, y) = \frac{x^3}{\sqrt{x^4 + y^2}}$, $D: 0 \leq x \leq 1, 1 \leq y \leq 2$;
 б) $f(x, y) = ye^x$, $D: y = \frac{1}{2}x, y = 2, x = 0$;
 в) $f(x, y) = y\sqrt{x}$, $D: x = y^2, y = x, x = 1$;
- 2.12. a) $f(x, y) = y \cos(2x + y)$, $D: 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \leq y \leq \pi$;
 б) $f(x, y) = x^2 + y$, $D: x = y^2, y = 1, x = 0$;
 в) $f(x, y) = xy$, $D: y = \ln x + 1, y = 0, x = 0, x = 1$;
- 2.13. a) $f(x, y) = x^2 \sin(y - x)$, $D: \frac{\pi}{2} \leq x \leq \pi, 0 \leq y \leq \pi$;
 б) $f(x, y) = x + y$, $D: y = \frac{1}{x-2}, y = 3, x = 4$;
 в) $f(x, y) = \frac{x}{y}$, $D: y = 2x, y = \frac{x}{3}, y = 2$;
- 2.14. a) $f(x, y) = \frac{y^4}{(x^2 + y^5)^2}$, $D: 1 \leq x \leq \sqrt{3}, 0 \leq y \leq 1$;
 б) $f(x, y) = y \cos x$, $D: y = 1 + \cos x, y = 0, x = \frac{\pi}{2}$;
 в) $f(x, y) = \frac{x}{y}$, $D: y = x^2, y = 2 - x, y = 4$;
- 2.15. a) $f(x, y) = y \cos(x - y)$, $D: \frac{\pi}{2} \leq x \leq \pi, 0 \leq y \leq \frac{\pi}{2}$;
 б) $f(x, y) = \sqrt{xy}$, $D: x = y^2, y = 0, x = 4$;
 в) $f(x, y) = y(x - 1)$, $D: y = \frac{1}{x-1}, y = 0, x = 2, x = 3$;
- 2.16. a) $f(x, y) = \frac{x^2}{(x^3 + y)^2}$, $D: 1 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 1$;

- б) $f(x, y) = x + 2y$, $D: y = -x, y = -\frac{1}{2}x + 1, x = 0$;
- в) $f(x, y) = \frac{x}{y^2}$, $D: y = 2x^2 + 1, y = 1 - 2x, y = 3$;
- 2.17. а) $f(x, y) = \frac{y}{(x + y)^3}$, $D: 0 \leq x \leq 1, 1 \leq y \leq 2$;
- б) $f(x, y) = \frac{x^2}{y^2}$, $D: y = x, y = \frac{1}{x}, x = 2$;
- в) $f(x, y) = x^2$, $D: y = 2^x, y = 1 - x, y = 0, x = -1$;
- 2.18. а) $f(x, y) = x \sin(2x + y)$, $D: 0 \leq x \leq \frac{\pi}{4}, 0 \leq y \leq \frac{\pi}{2}$;
- б) $f(x, y) = yx^3$, $D: y = x^2 - 2, y = x, y = 0, x \geq 0$;
- в) $f(x, y) = x$, $D: x = -y^2, y = 2 - x, y = 0, x = -1$;
- 2.19. а) $f(x, y) = \frac{1}{\sqrt{(x^2 + y + 1)^3}}$, $D: 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1$;
- б) $f(x, y) = x - y$, $D: y = e^x, y = 1, x = 2$;
- в) $f(x, y) = x + 2$, $D: y = x^2 + 1, y = -x + 1, y = 0, x = 2$;
- 2.20. а) $f(x, y) = x^2 e^{xy}$, $D: 1 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 2$;
- б) $f(x, y) = y \sin x$, $D: y = 1 - \sin x, y = 0, x = 0$;
- в) $f(x, y) = xy$, $D: y = \frac{1}{x - 1}, y = x - 1, y = 0, x = 3$;
- 2.21. а) $f(x, y) = xy^2 e^{x^2 y}$, $D: 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 1$;
- б) $f(x, y) = 3x + 2y$, $D: y = x + 1, y = 0, x = 2$;
- в) $f(x, y) = x + 1$, $D: y = x^2 + 1, y = x + 1, y = 3 - x, y = 0$;
- 2.22. а) $f(x, y) = x 2^{xy}$, $D: 2 \leq x \leq 3, 0 \leq y \leq 1$;
- б) $f(x, y) = x + 2y$, $D: y = -x - 1, x = 0, y = 2$;
- в) $f(x, y) = \frac{x}{y}$, $D: x = -y^2, y = x + 6, y = 4, x = 0$;
- 2.23. а) $f(x, y) = x(x + y)^5$, $D: 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1$;
- б) $f(x, y) = x + y$, $D: y = x^2 - 2, y = x$;
- в) $f(x, y) = 2x$, $D: y = e^x, y = 1 - x, y = 0, x = 2$;
- 2.24. а) $f(x, y) = x^2 y^2 e^{x^3 y}$, $D: 0 \leq x \leq 1, 1 \leq y \leq 2$;

- б) $f(x, y) = \frac{x^2}{y^2}$, $D: y = \sqrt{x}, y = 2, x = 0$;
- в) $f(x, y) = x + 1$, $D: y = 2 - x, y = \frac{1}{3}x + 2, y = 0, x = 3$;
- 2.25. а) $f(x, y) = x^2 3^{xy}$, $D: 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1$;
- б) $f(x, y) = 2x - y$, $D: y = 3 - x, y = 0, x = 1$;
- в) $f(x, y) = \frac{x^2}{y^2}$, $D: y = -x^2, y = x, x = 1$;
- 2.26. а) $f(x, y) = x^3 y^2 e^{x^4 y}$, $D: 0 \leq x \leq 1, 1 \leq y \leq 2$;
- б) $f(x, y) = 3x + y$, $D: y = x^2, y = 0, x = 2$;
- в) $f(x, y) = \frac{y}{x+1}$, $D: y = 1 + x, y = 9 - 3x, y = 0, x = 0$;
- 2.27. а) $f(x, y) = y\sqrt{x + y^2}$, $D: 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1$;
- б) $f(x, y) = x^2 + y^2$, $D: y = \frac{2}{x}, y = 1, x = 1$;
- в) $f(x, y) = xy$, $D: y = e^x, y = -\frac{1}{2}x + 1, y = 0, x = -1$;
- 2.28. а) $f(x, y) = y(x + y)^5$, $D: 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1$;
- б) $f(x, y) = x^2 + 2y$, $D: y = \frac{2}{x}, y = 3, x = 2$;
- в) $f(x, y) = x + 1$, $D: y = (x - 1)^2, y = x + 1, y = 1 - x$;
- 2.29. а) $f(x, y) = xe^{xy}$, $D: 1 \leq x \leq 2, 1 \leq y \leq 2$;
- б) $f(x, y) = x^3 + 2y$, $D: y = 2 - x, y = x, x = 0$;
- в) $f(x, y) = xy$, $D: y = x - 1, y = -x - 1, y = 0, x = 2$;
- 2.30. а) $f(x, y) = x^2 y^2 e^{xy^3}$, $D: 1 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 1$;
- б) $f(x, y) = x^2 + y$, $D: y = 2 + 2x, y = 2, x = -1$;
- в) $f(x, y) = x + y$, $D: y = -\frac{1}{x}, y = 2, y = 0, x = -1, x = 0$.

Задание 1.3. Расставьте пределы интегрирования в двойном интеграле $\iint_D f(x, y) dx dy$ если D – трапеция с вершинами в точках A_1, A_2, A_3, A_4 , и найдите площадь трапеции A_1, A_2, A_3, A_4 . Вычислите площадь этой трапеции с помощью криволинейного интеграла первого рода.

- 3.1. $A_1(1; 1), A_2(1; 3), A_3(3; 5), A_4(4; 4)$;
- 3.2. $A_1(-1; -1), A_2(1; -3), A_3(3; -3), A_4\left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$;
- 3.3. $A_1(1; -2), A_2(2; 0), A_3(7; -5), A_4(4; -5)$;
- 3.4. $A_1(2; -1), A_2(5; -1), A_3\left(2\frac{1}{2}; 4\right), A_4(1; 1)$;
- 3.5. $A_1(-2; -1), A_2(-2; 2), A_3(0; 3), A_4\left(3; 1\frac{1}{2}\right)$;
- 3.6. $A_1(-1; -2), A_2(2; 0), A_3(2; 3), A_4\left(0; 1\frac{2}{3}\right)$;
- 3.7. $A_1(1; 2), A_2\left(2; 4\frac{1}{3}\right), A_3(4; 5), A_4(4; 3)$;
- 3.8. $A_1(1; 1), A_2\left(3; 1\frac{2}{3}\right), A_3(4; 1), A_4(4; -1)$;
- 3.9. $A_1(1; -1), A_2(1; 4), A_3(4; 1), A_4(3; -3)$;
- 3.10. $A_1(-4; 3), A_2(-1; 3), A_3(0; 1), A_4\left(-3\frac{1}{2}; 2\right)$;
- 3.11. $A_1(-4; 4), A_2(-3; 5), A_3(-1; 3), A_4(-1; 1)$;
- 3.12. $A_1(1; 2), A_2(2; 0), A_3(7; 5), A_4(4; 5)$;
- 3.13. $A_1(2; 1), A_2(5; 1), A_3\left(2\frac{1}{2}; -4\right), A_4(1; -1)$;
- 3.14. $A_1(1; -2), A_2\left(2; -4\frac{1}{3}\right), A_3(4; -5), A_4(4; -3)$;
- 3.15. $A_1(-1; 3), A_2(1; 5), A_3(2; 4), A_4(-1; 1)$;
- 3.16. $A_1(-1; 0), A_2(2; -2), A_3(2; 0), A_4\left(1; \frac{2}{3}\right)$;
- 3.17. $A_1(-1; 4), A_2(2; 4), A_3(3; 2), A_4\left(-\frac{1}{2}; 3\right)$;
- 3.18. $A_1\left(0; \frac{1}{2}\right), A_2\left(3; \frac{1}{2}\right), A_3\left(\frac{1}{2}; 5\frac{1}{2}\right), A_4\left(-1; 2\frac{1}{2}\right)$;

- 3.19. $A_1\left(-4; -2\frac{1}{2}\right), A_2\left(-4; \frac{1}{2}\right), A_3\left(-2; 1\frac{1}{2}\right), A_4(1; 0);$
- 3.20. $A_1(0; -1), A_2\left(1; 2\frac{2}{3}\right), A_3(3; 4), A_4(3; 1);$
- 3.21. $A_1(-2; -1), A_2(-1; 1), A_3(4; -4), A_4(1; -4);$
- 3.22. $A_1(-5; -3), A_2\left(-4\frac{1}{2}; -2\right), A_3(-1; -1), A_4(-2; -3);$
- 3.23. $A_1(2; -3), A_2\left(2\frac{1}{2}; -1\frac{1}{2}\right), A_3(6; -5), A_4(4; -5);$
- 3.24. $A_1(-1; 1), A_2(2; -1), A_3(2; -4), A_4\left(0; -2\frac{2}{3}\right);$
- 3.25. $A_1(-2; 0), A_2(0; 2), A_3(2; 2), A_4\left(-1\frac{1}{2}; -1\frac{1}{2}\right);$
- 3.26. $A_1(-4; -3), A_2(-4; -1), A_3\left(-3; -\frac{1}{3}\right), A_4(-1; -1);$
- 3.27. $A_1(-4; 1), A_2(-4; 3), A_3\left(-2; 2\frac{1}{3}\right), A_4(-1; 0);$
- 3.28. $A_1(0; -3), A_2(-1; -1), A_3\left(2\frac{1}{2}; -2\right), A_4(3; -3);$
- 3.29. $A_1(-1; -3), A_2(-2; 1), A_3(1; 4), A_4(1; -1);$
- 3.30. $A_1(-4; 5), A_2(-1; 5), A_3(2; 2), A_4(1; 0).$

Задание 1.4

Пусть D – область интегрирования интеграла из задания 1а). Найдите массу пластинки, имеющей форму области D , если ее плотность задана функцией $\rho(x, y)$. Вычислите среднее значение плотности в области D .

- | | |
|---|---------------------------------|
| 4.1. $\rho(x, y) = x + y;$ | 4.2. $\rho(x, y) = 2 - x;$ |
| 4.3. $\rho(x, y) = 3 - 2x;$ | 4.4. $\rho(x, y) = 2x + 4y;$ |
| 4.5. $\rho(x, y) = 4x + 1;$ | 4.6. $\rho(x, y) = 3x + 2y;$ |
| 4.7. $\rho(x, y) = 5x + y + 1;$ | 4.8. $\rho(x, y) = 8 - 2x - y;$ |
| 4.9. $\rho(x, y) = -2x - 2y;$ | 4.10. $\rho(x, y) = 4 - y;$ |
| 4.11. $\rho(x, y) = \frac{1}{2}x + 2y;$ | 4.12. $\rho(x, y) = 2 - x;$ |
| 4.13. $\rho(x, y) = 2y + 1;$ | 4.14. $\rho(x, y) = x + y + 3;$ |

- 4.15. $\rho(x, y) = y + 1$;
 4.17. $\rho(x, y) = 4x + 2y + 1$;
 4.19. $\rho(x, y) = 1 - y$;
 4.21. $\rho(x, y) = y - 2x$;
 4.23. $\rho(x, y) = -3x$;
 4.25. $\rho(x, y) = 4x + 1$;
 4.27. $\rho(x, y) = 4x + 2$;
 4.29. $\rho(x, y) = 1 - 2y$;

- 4.16. $\rho(x, y) = 3y + 3$;
 4.18. $\rho(x, y) = 3y + 6$;
 4.20. $\rho(x, y) = x + 2y$;
 4.22. $\rho(x, y) = 2 - x$;
 4.24. $\rho(x, y) = -2x - 2y$;
 4.26. $\rho(x, y) = 4 - x - y$;
 4.28. $\rho(x, y) = 2x + y$;
 4.30. $\rho(x, y) = 3 + 4y$.

Задание 1.5. Для данной функции $f(x, y)$ и области D вычислите $\iint_D f(x, y) dx dy$, используя полярные координаты

5.1. $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2 - 9}$,

$D: 9 \leq x^2 + y^2 \leq 25$;

5.2. $f(x, y) = e^{x^2 + y^2}$,

$D: 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4, x \geq 0, y \geq 0$;

5.3. $f(x, y) = \frac{1}{1 + x^2 + y^2}$,

$D: 9 \leq x^2 + y^2 \leq 16, x \leq 0, y \geq 0$;

5.4. $f(x, y) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}$,

$D: 1 \leq x^2 + y^2 \leq 16, x \leq 0, y \leq 0$;

5.5. $f(x, y) = \ln(1 + x^2 + y^2)$,

$D: 4 \leq x^2 + y^2 \leq 36, y \geq 0$;

5.6. $f(x, y) = \cos(x^2 + y^2)$,

$D: \frac{\pi}{3} \leq x^2 + y^2 \leq \frac{\pi}{2}, x \geq 0, y \leq 0$;

5.7. $f(x, y) = x^2 y$,

$D: 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4, x \geq 0, y \leq 0$;

5.8. $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2 - 1}$,

$D: 4 \leq x^2 + y^2 \leq 9, y \geq 0$;

5.9. $f(x, y) = x^2 - y^2$,

$D: 4 \leq x^2 + y^2 \leq 9, y = x, x = 0, y \geq 0$;

5.10. $f(x, y) = x^2 \sqrt{x^2 + y^2}$,

$D: 1 \leq x^2 + y^2 \leq 9, y \leq 0$;

5.11. $f(x, y) = (x^2 + y^2)^2$,

$D: 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4, x \leq 0$;

5.12. $f(x, y) = \frac{y^2 \sqrt{x^2 + y^2 - 1}}{x^2 + y^2}$,

$D: 1 \leq x^2 + y^2 \leq 25, x \geq 0, y \geq 0$;

5.13. $f(x, y) = x \sqrt{x^2 + y^2}$,

$D: 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4, y = x, x = 0, y \geq 0$;

5.14. $f(x, y) = x \sin \sqrt{x^2 + y^2}$,

$D: 4\pi^2 \leq x^2 + y^2 \leq 9\pi^2, x \geq 0, y \geq 0$;

- 5.15. $f(x, y) = y \cos \sqrt{x^2 + y^2}$, $D: \frac{\pi^2}{4} \leq x^2 + y^2 \leq \pi^2, x \geq 0, y \geq 0$;
- 5.16. $f(x, y) = x \cos \sqrt{(x^2 + y^2)^3}$, $D: 4 \leq x^2 + y^2 \leq 9, x \geq 0, y \leq 0$;
- 5.17. $f(x, y) = y \sin \sqrt{x^2 + y^2}$, $D: \pi^2 \leq x^2 + y^2 \leq \frac{9\pi^2}{4}, y \geq 0$;
- 5.18. $f(x, y) = \frac{x}{\sqrt{(x^2 + y^2)^3}}$, $D: 1 \leq x^2 + y^2 \leq 9, y = x, y = 0, x \geq 0$;
- 5.19. $f(x, y) = \frac{y \cos \sqrt{x^2 + y^2}}{x^2 + y^2}$, $D: \frac{\pi^2}{4} \leq x^2 + y^2 \leq \pi^2, y \geq 0$;
- 5.20. $f(x, y) = \frac{x \cos^2 \sqrt{x^2 + y^2}}{x^2 + y^2}$, $D: 4\pi^2 \leq x^2 + y^2 \leq \frac{25\pi^2}{4}, x \leq 0$;
- 5.21. $f(x, y) = \frac{xe^{-\sqrt{x^2 + y^2}}}{x^2 + y^2}$, $D: 1 \leq x^2 + y^2 \leq 9, y = x, x = 0, y \leq 0$;
- 5.22. $f(x, y) = \frac{ye^{-x^2 - y^2}}{\sqrt{x^2 + y^2}}$, $D: 4 \leq x^2 + y^2 \leq 9, y \leq 0$;
- 5.23. $f(x, y) = \frac{xy^2}{\sqrt{(x^2 + y^2)^3}}$, $D: 4 \leq x^2 + y^2 \leq 16, x = y, x = -y, x \geq 0$;
- 5.24. $f(x, y) = \frac{1}{e^{x^2 + y^2}}$, $D: 1 \leq x^2 + y^2 \leq 25, y = -x, y = 0, x \leq 0$;
- 5.25. $f(x, y) = \frac{x\sqrt{1 - x^2 - y^2}}{\sqrt{x^2 + y^2}}$, $D: 1 \leq x^2 + y^2 \leq \pi^2, x \leq 0, y \geq 0$;
- 5.26. $f(x, y) = \frac{1}{\sqrt{25 - x^2 - y^2}}$, $D: 4 \leq x^2 + y^2 \leq 9, y = x, y = 0, x \geq 0$;
- 5.27. $f(x, y) = \frac{x^2}{\sqrt{x^2 + y^2}}$, $D: \frac{1}{4} \leq x^2 + y^2 \leq 1, y = -x, x = 0, y \geq 0$;
- 5.28. $f(x, y) = xy$, $D: 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4, x \leq 0, y \leq 0$;
- 5.29. $f(x, y) = e^{-x^2 - y^2}$, $D: 16 \leq x^2 + y^2 \leq 25, y \leq 0$;
- 5.30. $f(x, y) = x^4 + y^4$, $D: 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4$.

Задание 1.6

Дан трехкратный интеграл.

1. Вычислите этот интеграл.

2. Изобразите тело T , объем которого вычисляется с помощью этого интеграла.

3. Найдите массу тела T , если известна функция $\rho(x, y, z)$ описывающая плотность распределения массы в области T

$$6.1. \int_0^1 dx \int_0^{\frac{1}{2}-\frac{x}{2}} dy \int_0^{\frac{1}{5}-\frac{x}{5}-\frac{2y}{5}} dz, \quad \rho(x, y, z) = 4x + 3y + 1;$$

$$6.2. \int_{-1}^0 dx \int_0^{\frac{1}{2}+\frac{x}{2}} dy \int_0^{\frac{1}{4}+\frac{x}{4}-\frac{y}{2}} dz, \quad \rho(x, y, z) = -3x + 2y;$$

$$6.3. \int_0^3 dx \int_0^{-\frac{3}{2}+\frac{x}{2}} dy \int_0^{\frac{3}{5}-\frac{x}{5}+\frac{2y}{5}} dz, \quad \rho(x, y, z) = x - 4y;$$

$$6.4. \int_0^2 dx \int_0^{\frac{1}{4}-\frac{x}{8}} dy \int_{-\frac{1}{3}+\frac{x}{6}+\frac{4}{3}y}^0 dz, \quad \rho(x, y, z) = 2x + y;$$

$$6.5. \int_{-3}^0 dx \int_0^{1+\frac{x}{3}} dy \int_0^{\frac{1}{3}+\frac{x}{9}-\frac{y}{3}} dz, \quad \rho(x, y, z) = 2 - x + y;$$

$$6.6. \int_0^{\frac{1}{2}} dx \int_{-\frac{1}{3}+\frac{2x}{3}}^0 dy \int_{-2+4x-6y}^0 dz, \quad \rho(x, y, z) = 2x - y;$$

$$6.7. \int_{-4}^0 dx \int_{-2-\frac{x}{2}}^0 dy \int_{-4-x-2y}^0 dz, \quad \rho(x, y, z) = -3x - y;$$

$$6.8. \int_{-1}^0 dx \int_0^{\frac{5}{2}+\frac{5x}{2}} dy \int_{-5-5x+2y}^0 dz, \quad \rho(x, y, z) = -x + 2y;$$

$$6.9. \int_{-1}^0 dx \int_{-\frac{1}{2}-\frac{x}{2}}^0 dy \int_0^{3x+6y+3} dz, \quad \rho(x, y, z) = -2x - 2y;$$

$$\begin{aligned}
6.10. & \int_0^2 dx \int_{-2+x}^0 dy \int_0^{\frac{1}{2}-\frac{x}{4}+\frac{y}{4}} dz, \quad \rho(x, y, z) = 3x - 2y; \\
6.11. & \int_0^4 dx \int_{-4+x}^0 dy \int_{-8+2x-2y}^0 dz, \quad \rho(x, y, z) = 2x - 3y; \\
6.12. & \int_0^3 dx \int_0^{6-2x} dy \int_0^{2-\frac{2x}{3}-\frac{y}{3}} dz, \quad \rho(x, y, z) = x + y + 2; \\
6.13. & \int_0^3 dx \int_0^{2-\frac{2x}{3}} dy \int_{-2+\frac{2x}{3}+y}^0 dz, \quad \rho(x, y, z) = 3 + x + y; \\
6.14. & \int_{-2}^0 dx \int_0^{x+2} dy \int_{-1-\frac{x}{2}+\frac{y}{2}}^0 dz, \quad \rho(x, y, z) = -x + 4y; \\
6.15. & \int_{-6}^0 dx \int_{-3-\frac{x}{2}}^0 dy \int_{-3-\frac{x}{2}-y}^0 dz, \quad \rho(x, y, z) = -x - 2y + 1; \\
6.16. & \int_0^4 dx \int_{\frac{x}{12}-\frac{1}{3}}^0 dy \int_0^{1-\frac{x}{4}+3y} dz, \quad \rho(x, y, z) = 2x - y; \\
6.17. & \int_0^1 dx \int_0^{2-2x} dy \int_{-1+x+\frac{y}{2}}^0 dz, \quad \rho(x, y, z) = 2x + y + 3; \\
6.18. & \int_0^1 dx \int_{2x-2}^0 dy \int_0^{2-2x+y} dz, \quad \rho(x, y, z) = x - 3y; \\
6.19. & \int_0^2 dx \int_0^{2-x} dy \int_{-1+\frac{x}{2}+\frac{y}{2}}^0 dz, \quad \rho(x, y, z) = 1 + x + y; \\
6.20. & \int_{-3}^0 dx \int_0^{1+\frac{x}{3}} dy \int_0^{3+x-3y} dz, \quad \rho(x, y, z) = y - 2x; \\
6.21. & \int_0^1 dx \int_{3x-3}^0 dy \int_0^{3-3x+y} dz, \quad \rho(x, y, z) = x - y;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
6.22. & \int_0^3 dx \int_{-1+\frac{x}{3}}^0 dy \int_{-1+\frac{x}{3}-y}^0 dz, \quad \rho(x, y, z) = x - 2y; \\
6.23. & \int_0^1 dx \int_0^{3-3x} dy \int_{-1+x+\frac{y}{3}}^0 dz, \quad \rho(x, y, z) = 5 + x + 2y; \\
6.24. & \int_{-2}^0 dx \int_0^{4+2x} dy \int_{-1-\frac{x}{2}+\frac{y}{2}}^0 dz, \quad \rho(x, y, z) = 2y - 3x; \\
6.25. & \int_{-2}^0 dx \int_{-1-\frac{x}{2}}^0 dy \int_0^{4+2x+4y} dz, \quad \rho(x, y, z) = -2x - 2y; \\
6.26. & \int_0^1 dx \int_0^{2-2x} dy \int_0^{1-x-\frac{y}{2}} dz, \quad \rho(x, y, z) = 3 + x + y; \\
6.27. & \int_0^2 dx \int_0^{2-x} dy \int_{-1+\frac{x}{2}+\frac{y}{2}}^0 dz, \quad \rho(x, y, z) = 1 + 2x + y; \\
6.28. & \int_{-2}^0 dx \int_{-1-\frac{x}{2}}^0 dy \int_{-2-x-2y}^0 dz, \quad \rho(x, y, z) = 2 - x - 3y; \\
6.29. & \int_0^1 dx \int_{4x-4}^0 dy \int_{-4+4x-y}^0 dz, \quad \rho(x, y, z) = x - 3y; \\
6.30. & \int_0^3 dx \int_0^{2-\frac{2x}{3}} dy \int_{-1+\frac{x}{3}+\frac{y}{2}}^0 dz, \quad \rho(x, y, z) = 2 + x + 2y.
\end{aligned}$$

Вопросы к экзамену за 1 семестр

1. Понятие множеств. Операции над множествами.
2. Понятие функций. Основные свойства функций.
3. Элементарные функции. Классификация функций.
4. Применение функции в экономике.
5. Предел числовой последовательности.
6. Предел функции в бесконечности и в точке.
7. Бесконечно малые величины. Свойства бесконечно малых величин.
8. Бесконечно большие величины. Свойства бесконечно больших величин.
9. Основные теоремы о пределах. Признаки
10. Задача о непрерывном начислении процентов.
11. Первый замечательный предел.
12. Второй замечательный предел.
13. Непрерывность функции. Свойства функций непрерывных на отрезке.
14. Определение производной. Зависимость между непрерывностью и дифференцируемой функции.
15. Схема вычисления производной. Основные свойства дифференцирования.
16. Производная сложной и обратной функций.
17. Производная логарифмической функции.
18. Производная показательной функции.
19. Производная степенной функции.
20. Производная степенно-показательной функции.
21. Производные тригонометрических функций.
22. Производные неявной и параметрической заданной функции.
23. Понятие производных высших порядков.
24. Понятие дифференциала функции.
25. Применения дифференциала в приближенных вычислениях.
26. Экономический смысл производной.
27. Использование понятия производной в экономике.
28. Теорема Ферма.
29. Теорема Ролля.
30. Теорема Лагранжа.
31. Правило Лопиталя.
32. Возрастание и убывание функций.
33. Экстремум функции.
34. Наибольшее и наименьшее значение функции на отрезке.
35. Выпуклость функции. Точка перегиба.
36. Асимптоты графика функции и построение их графиков.
37. Основные понятия функции нескольких переменных.
38. Предел и непрерывность функции нескольких переменных.
39. Частные производные функций двух переменных.

40. Дифференциал функции двух переменных.
41. Производная по направлению. Градиент.
42. Экстремум функции нескольких переменных.
43. Наибольшее и наименьшее значение функции.
44. Условный экстремум. Метод множителя Лагранжа.
45. Понятие об эмпирических формулах. Метод наименьших квадратов.

Вопросы на экзамен (2 семестр)

1. Первообразная и неопределенный интеграл
2. Основные свойства неопределенного интеграла
3. Таблица основных интегралов
4. Основные методы интегрирования
5. Интегрирование рациональных функций
6. Интегрирование иррациональных и трансцендентных функций
7. Определение определенного интеграла
8. Условия существования определенного интеграла
10. Необходимое и достаточное условие интегрируемости
11. Интегрируемость непрерывных и некоторых разрывных функций
12. Основные свойства определенного интеграла
13. Оценки интегралов. Формула среднего значения
14. Интеграл с переменным верхним пределом
15. Формула Ньютона—Лейбница
16. Замена переменной в определенном интеграле
17. Формула интегрирования по частям в определенном интеграле
18. Некоторые физические и геометрические приложения определенного интеграла
19. Несобственные интегралы с бесконечными пределами интегрирования
- .
20. Несобственные интегралы от неограниченных функций
21. Приближенное вычисление определенных интегралов
22. Понятие функции нескольких переменных
23. Геометрическое изображение функции двух переменных
24. Предел функции двух переменных
25. Непрерывность функции двух переменных
26. Частные производные
27. Понятие дифференцируемости функции
28. Производные сложных функций
29. Дифференциал функции
30. Касательная плоскость и нормаль к поверхности. Геометрический смысл дифференциала
31. Производная по направлению. Градиент
32. Частные производные и дифференциалы высших порядков

33. Формула Тейлора для функции двух переменных
34. Экстремумы функции двух переменных
35. Метод наименьших квадратов
36. Понятие числового ряда
37. Ряды с неотрицательными членами
38. Знакопередающиеся ряды
39. Абсолютная и условная сходимость рядов
40. Степенные ряды . Определение и общие замечания
41. Интервал сходимости степенного ряда
42. Свойства степенных рядов
43. Разложение функций в степенные ряды
44. Ряды Фурье. Тригонометрический ряд и его основные свойства
45. Сходимость ряда Фурье
46. Ряды Фурье для четных и нечетных функций
47. Ряд Фурье с периодом

Вопросы на экзамен (3 семестр)

1. Двойные интегралы
2. Определение и условия существования двойного интеграла
3. Геометрический смысл двойного интеграла
4. Свойства двойного интеграла
5. Сведение двойного интеграла к повторному.
6. Случай прямоугольной области
7. Случай криволинейной области
8. Замена переменных в двойном интеграле
9. Некоторые геометрические и физические приложения двойных интегралов
10. Вычисление объема
11. Вычисление площади
12. Вычисление площади поверхности
13. Вычисление массы пластинки
14. Вычисление координат центра масс пластинки
15. Вычисление момента инерции пластинки
16. Криволинейные интегралы
17. Определение криволинейного интеграла первого рода
18. Вычисление криволинейных интегралов первого рода
19. Определение криволинейного интеграла второго рода
20. Вычисление криволинейных интегралов второго рода
21. Связь между криволинейными интегралами первого и второго рода
22. Формула Грина
23. Условия независимости криволинейного интеграла от пути интегрирования
24. Интегрирование полных дифференциалов
Некоторые приложения криволинейных интегралов второго рода

25. Вычисление площади с помощью формулы Грина
26. Работа силы
27. Тройные интегралы
28. Определение тройного интеграла
29. Вычисление тройных интегралов
30. Замена переменных в тройном интеграле
31. Некоторые приложения тройных интегралов
32. Поверхностные интегралы
33. Определение поверхностного интеграла первого рода
34. Вычисление поверхностных интегралов первого рода
35. Определение поверхностного интеграла второго рода
36. Вычисление поверхностных интегралов второго рода
37. Связь между поверхностными интегралами первого и второго рода
38. Формула Остроградского.
39. Формула Стокса
40. Скалярное и векторное поля
41. Скалярное поле
42. Векторное поле
43. Потенциальное поле
44. Задача о потоке векторного поля
45. Дивергенция
46. Циркуляция. Ротор
47. Оператор Гамильтона

Список использованной литературы

1. Беклемишев, Д.Б. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры: Учеб. для вузов / Д. Б. Беклемишев. - 8-е изд., перераб. - М: Физматлит, 2000. - 376с.
2. Шипачев, В.С. Задачник по высшей математике: Учеб. пособие / В. С. Шипачев,. - 2-е изд., испр. - М.: Высш. шк., 1998. - 304с.
3. Данко, П.Е. Высшая математика в упражнениях и задачах. В 2-х . Ч.1 / П. Е. Данко; А.Г. Попов, Т.Я. Кожевников . - 5-е изд., испр. - М.: Высш. шк., 1998. - 304с.
4. Шипачев, В.С. Высшая математика: Учеб. пособие. Рек.МО / В. С. Шипачев,. - 3-е изд., 4-е изд., стер., 5-е изд., стер. - М.: Высш. шк., 1996, 1998, 2001. - 479с.
5. Высшая математика для экономистов: Учебн. пособие для вузов / Под ред. проф. Н.Ш.Кремера. – М.: Банки и биржи, ЮНИТИ, 1997. – 439 с.

КОРКМАЗОВА Зарема Османовна
СЕЛИМСУЛТАНОВА Рита Ильясовна

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

Учебно-методическое пособие для обучающихся
очной формы обучения направления подготовки
01.03.02 Прикладная математика и информатика

Корректор Чагова О.Х.
Редактор Чагова О.Х.

Сдано в набор 25.06.2025 г.
Формат 60х84/16
Бумага офсетная.
Печать офсетная.
Усл. печ. л. 8,37
Заказ № 5145
Тираж 100 экз.

Оригинал-макет подготовлен
в Библиотечно-издательском центре СКГА
369000, г. Черкесск, ул. Ставропольская, 36

