МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

СЕВЕРО-КАВКАЗСКАЯ ГОСУДАРСТВЕННАЯ АКАДЕМИЯ

МЕДИЦИНСКИЙ ИИНСТИТУТ

Кафедра «Медицинская кибернетика»

М. Ш. Каппушева
Д. Д. Узденова

МАТЕМАТИКА

Учебно-методическое пособие
для обучающихся 1 курса по специальности
33.05.01 – Фармация

Черкесск 2024

УДК 51
ББК 22.1
К-72

Рекомендовано к изданию редакционно-издательским советом СКГА.
Протокол № 26 от «29» 09. 2023 г.

Рецензенты: Лайпанов М.З.–к. ф.-м. н, и.о. зав. кафедрой Физики КЧГУ

К-72 **Каппушева, М.Ш**. Математика: учебно-методическое пособие для обучающихся 1 курса по специальности 33.05.01 – Фармация / М.Ш. Каппушева, Д.Д. Узденова. – Черкесск: БИЦ СКГА, 2024. – 36 с.

Учебно-методическое пособие "Математика", подготовлено на основании анализа литературных данных и будет полезным для студентов специальностей 33.05.01 – Фармация для самостоятельного выполнения заданий по темам: предел функции, дифференциальное исчисление функции одной переменной. Исследование функции, что повысит эффективность изучения данных разделов дисциплины.

УДК 51
ББК 22.1

Содержание

ВВЕДЕНИЕ 4
ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ВОПРОСЫ 5
ФУНКЦИИ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ 6
ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ 22
ТЕМЫ РЕФЕРАТОВ 33
ОСНОВНАЯ ЛИТЕРАТУРА 34
ДОПОЛНИТЕЛЬНАЯ ЛИТЕРАТУРА 34

ВВЕДЕНИЕ

Учебно-методическое пособие для обучающихся 1 курса по специальности 33.05.01 – Фармация по высшей математике содержит задачи и примеры. Охватывает два раздела программы по дисциплине «Математика»: предел функции, дифференциальное исчисление функции одной переменной, исследование функции; интегральное исчисление функции одной переменной, приложения определенного интеграла.

В каждом разделе подобраны типовые примеры и задачи, для решения которых студент должен владеть основными понятиями и теоремами курса, а также прочими навыками, полученными на семинарских занятиях под руководством преподавателя. Настоящее пособие предназначено для самостоятельной работы студентов с целью закрепления полученных навыков и подготовки к контрольным работам.

Для этого в каждом разделе приведен вариант типовых заданий по математике для самостоятельной работы студентов с подробным решением, содержащим основные определения, формулы, алгоритм решения конкретной задачи и ответ.

Это позволяет повысить эффективность самостоятельной работы студентов. Они содержат задания из: Демидович Б.П. «Сборник задач и упражнений по математическому анализу», Минорский В.П. «Сборник задач по высшей математике», Данко П.Е. и др. «Высшая математика в упражнениях и задачах».

ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ВОПРОСЫ

Раздел 1. Функции одной переменной

1.1. Ограниченные и неограниченные числовые множества.
1.2. Понятие функции. Основные элементарные функции, их свойства и графики.
1.3. Определение предела числовой последовательности.
1.4. Арифметические свойства предела числовой последовательности.
1.5. Критерий Коши сходимости числовой последовательности.
1.6. Определения (по Коши и по Гейне) предела функции.
1.7. Арифметические свойства предела функции.
1.8. Замечательные пределы.
1.9. Эквивалентные бесконечно малые функции: определение, таблица эквивалентностей.
1.10. Определения (по Коши и по Гейне) функции, непрерывной в точке. Арифметические свойства непрерывных функций.

Раздел 2. Дифференциальное исчисление функций одной переменной

2.1. Определение производной. Геометрический и физический смысл производной.
2.2. Определение функции, дифференцируемой в точке. Необходимое и достаточное условие дифференцируемости. Определение дифференциала.
2.3. Правила вычисления производных и дифференциалов, связанные с арифметическими действиями над функциями.
2.4. Таблица производных основных элементарных функций.
2.5. Производная сложной функции.
2.6. Теорема Лагранжа о среднем (формула конечных приращений).
2.7. Производные высших порядков.
2.8. Правила Лопиталя для раскрытия неопределенностей.
2.9. Формула Тейлора с остаточным членом в формах Пеано и Лагранжа.
2.10. Разложение элементарных функций по формуле Тейлора – Маклорена.
2.11. Определение экстремума функции, необходимое условие экстремума.

ФУНКЦИИ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

Найти предел функции:

1. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^3-2x^2+2\sqrt[3]{x^2}-4}{3x-4x^2-8x^3+3x\sqrt{x}}$
2. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-4x+3}{4-\sqrt{5x+1}}$
3. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+3x-2}-\sqrt{x^2-2x+3}\right)$
4. $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{3x^2+4x-4}{16-2x-5x^2}$
5. $\lim\limits_{x\to 4-0}(x^2-16)\cdot\ln(4-x)$
6. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{4x+11}{4x+17}\right)^{5-8x}$
7. $\lim\limits_{x\to +0}(\sin 3x)^{\operatorname{tg} 9x}$
8. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{5x}-\cos 3x}{\arcsin\frac{x}{2}}$

Продифференцировать функцию:

9. $y=\left(3^{\operatorname{ctg}\frac{2x}{5}}-\operatorname{tg}^4\frac{3}{2\sqrt{x}}\right)\cdot\log_2(3x-5);\ y'-?$
10. $y=\frac{\cos\sqrt{3x}+\arccos(2x-1)}{\operatorname{tg}(2-5x^2)};\ dy-?$
11. Составить уравнение касательной к графику функции $y=4x-3x^2+2$, перпендикулярной прямой $x-2y+5=0$.
12. Показать, что функция $y=4e^{-2x}\sin 4x$ является решением дифференциального уравнения $y''+4y'+20y=0$.
13. Тело движется вдоль оси Ox по закону $x(t)=t^3+2t^2+5t$. Найти скорость и ускорение в момент времени $t=2$.
14. Исследовать функцию $y=\frac{x^3}{x^2-4}$ и построить ее график.

Решение

1. $$\lim_{x\to\infty}\frac{5x^3-2x^2+2\sqrt[3]{x^2}-4}{3x-4x^2-8x^3+3x\sqrt{x}}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\left|\begin{matrix}\text{разделим числитель}\\ \text{и знаменатель дроби на } x^3\end{matrix}\right|=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{5-\dfrac{2}{x}+\dfrac{2}{x^2\sqrt[3]{x}}-\dfrac{4}{x^3}}{\dfrac{3}{x^2}-\dfrac{4}{x}-8+\dfrac{3}{x\sqrt{x}}}=-\frac{5}{8}.$$

Решение

$$2.\ \lim_{x\to 3}\frac{x^2-4x+3}{4-\sqrt{5x+1}}=\left[\frac{0}{0}\right]=\left|\begin{array}{c}\text{домножим числитель и знаменатель}\\ \text{дроби}\\ \text{на сопряженное выражение}\end{array}\right|=$$

$$=\lim_{x\to 3}\frac{(x-3)(x-1)\cdot\left(4+\sqrt{5x+1}\right)}{\left(4-\sqrt{5x+1}\right)\cdot\left(4+\sqrt{5x+1}\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 3}\frac{(x-3)(x-1)\cdot\left(4+\sqrt{5x+1}\right)}{(16-5x-1)}=$$

$$=\lim_{x\to 3}\left(4+\sqrt{5x+1}\right)\cdot\lim_{x\to 3}\frac{(x-3)(x-1)}{15-5x}=$$

$$=(4+\sqrt{16})\cdot\lim_{x\to 3}\frac{(x-3)\cdot(x-1)}{-5(x-3)}=8\cdot\lim_{x\to 3}\frac{x-1}{-5}=-\frac{16}{5}$$

Решение

$$3.\ \lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+3x-2}-\sqrt{x^2-2x+3}\right)=[\infty-\infty]=\left|\begin{array}{c}\text{приведем к виду}\\ \text{дроби, домножив}\\ \text{и разделив на}\\ \text{сопряженное}\\ \text{выражение}\end{array}\right|=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2+3x-2}-\sqrt{x^2-2x+3}\right)\cdot\left(\sqrt{x^2+3x-2}+\sqrt{x^2-2x+3}\right)}{\sqrt{x^2+3x-2}+\sqrt{x^2-2x+3}}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+3x-2-(x^2-2x+3)}{\sqrt{x^2+3x-2}+\sqrt{x^2-2x+3}}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{5x-5}{\sqrt{x^2+3x-2}+\sqrt{x^2-2x+3}}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\left|\begin{array}{c}\text{разделим числитель и}\\ \text{знаменатель дроби на } x\end{array}\right|=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{x\cdot\left(5-\frac{5}{x}\right)}{|x|\cdot\left(\sqrt{1+\frac{3}{x}-\frac{2}{x^2}}+\sqrt{1-\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2}}\right)}=\frac{5}{2}\cdot\lim_{x\to\infty}\frac{x}{|x|}=\begin{cases}\frac{5}{2}\ \text{при } x\to+\infty\\ -\frac{5}{2}\ \text{при } x\to-\infty\end{cases}$$

Решение

4. $$\lim_{x\to-2}\frac{3x^2+4x-4}{16-2x-5x^2}=\left[\frac{0}{0}\right]=\left|\begin{matrix}\text{разложим}\\ \text{многочлены}\\ \text{на множители}\end{matrix}\right|=\lim_{x\to-2}\frac{3\cdot(x+2)\cdot\left(x-\frac{2}{3}\right)}{-5\cdot(x+2)\cdot\left(x-\frac{8}{5}\right)}=$$

$$=\lim_{x\to-2}\frac{3x-2}{8-5x}=\frac{-8}{18}=\frac{-4}{9}.$$

5. $$\lim_{x\to4-0}(x^2-16)\cdot\ln(4-x)=[0\cdot\infty]=\lim_{x\to4-0}\frac{\ln(4-x)}{\frac{1}{x^2-16}}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\left|\begin{matrix}\text{раскроем}\\ \text{неопреде-}\\ \text{ленность}\\ \text{по}\\ \text{правилу}\\ \text{Лопиталя}\end{matrix}\right|=$$

$$=\lim_{x\to4-0}\frac{(\ln(4-x))'}{\left(\frac{1}{x^2-16}\right)'}=\lim_{x\to4-0}\frac{\frac{1}{4-x}\cdot(-1)}{-\frac{1}{(x^2-16)^2}\cdot2x}=\lim_{x\to4-0}\frac{(x-4)^2\cdot(x+4)^2}{2x\cdot(x-4)}=$$

$$=\lim_{x\to4-0}\frac{(x-4)\cdot(x+4)^2}{2x}=\frac{0\cdot64}{8}=0.$$

6. $$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{4x+11}{4x+17}\right)^{5-8x}=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{4x+17-6}{4x+17}\right)^{5-8x}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{-6}{4x+17}\right)^{5-8x}=$$

$$=[1^\infty]=\left|\begin{matrix}\text{используем второй}\\ \text{замечательный предел}\\ \frac{-6}{4x+17}=t;t\to0\text{ при }x\to\infty\\ 4x+17=-\frac{6}{t};x=\frac{1}{4}\cdot\left(-\frac{6}{t}-17\right)\end{matrix}\right|=\lim_{t\to o}(1+t)^{5+2\cdot\left(\frac{6}{t}+17\right)}=$$

$$=\lim_{t\to o}(1+t)^{\frac{12}{t}+39}=\lim_{t\to o}\left((1+t)^{\frac{1}{t}}\right)^{12}\cdot\lim_{t\to o}(1+t)^{39}=e^{12}\cdot1^{39}=e^{12}$$

7. $\lim\limits_{x\to+0}(\sin 3x)^{\operatorname{tg} 9x} = [0^0] = \lim\limits_{x\to+0} e^{\ln(\sin 3x)^{\operatorname{tg} 9x}} =$

$= e^{\lim\limits_{x\to+0}\operatorname{tg} 9x\cdot\ln(\sin 3x)} = (*) = e^0 = 1.$

$(*)$ Рассмотрим предел в показателе степени: $\lim\limits_{x\to+0}\operatorname{tg} 9x\cdot\ln(\sin 3x) = [0\cdot\infty] =$

$$= \lim_{x\to+0}\frac{\ln\sin 3x}{\operatorname{ctg} 9x} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{x\to+0}\frac{(\ln\sin 3x)'}{(\operatorname{ctg} 9x)'} = \lim_{x\to+0}\frac{\frac{1}{\sin 3x}\cdot\cos 3x\cdot 3}{-\frac{1}{\sin^2 9x}\cdot 9} =$$

$$= -\frac{1}{3}\cdot\lim_{x\to+0}\cos 3x\cdot\lim_{x\to+0}\frac{\sin^2 9x}{\sin 3x} = -\frac{1}{3}\cdot 1\cdot\lim_{x\to+0}\frac{\sin^2 9x}{\sin 3x} = \left[\frac{0}{0}\right] =$$

$$= -\frac{1}{3}\cdot\lim_{x\to+0}\frac{(\sin^2 9x)'}{(\sin 3x)'} = -\frac{1}{3}\cdot\lim_{x\to+0}\frac{2\sin 9x\cdot\cos 9x\cdot 9}{\cos 3x\cdot 3} = -\frac{1}{3}\cdot\frac{2\cdot 0\cdot 1\cdot 9}{1\cdot 3} = 0$$

8. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{5x}-\cos 3x}{\arcsin\frac{x}{2}} = \left[\dfrac{0}{0}\right] = \left|\begin{matrix}\text{раскроем неопределенность}\\ \text{по правилу Лопиталя}\end{matrix}\right| =$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{(e^{5x}-\cos 3x)'}{\left(\arcsin\frac{x}{2}\right)'} = \lim_{x\to 0}\frac{5e^{5x}+3\sin 3x}{\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{2}\right)^2}}\cdot\frac{1}{2}} = \frac{5\cdot e^0+3\cdot 0}{\frac{1}{\sqrt{1}}\cdot\frac{1}{2}} = 2\cdot(5+0) = 10$$

9. $y = \left(3^{\operatorname{ctg}\frac{2x}{5}} - \operatorname{tg}^4\frac{3}{2\sqrt{x}}\right)\cdot\log_2(3x-5);\quad y'-?$

Найдем производную сложной функции:

$$y' = \left(3^{\operatorname{ctg}\frac{2x}{5}}\cdot\ln 3\cdot\frac{1}{\sin^2\left(\frac{2x}{5}\right)}\cdot\frac{2}{5} - 4\operatorname{tg}^3\frac{3}{2\sqrt{x}}\cdot\frac{1}{\cos^2\left(\frac{3}{2\sqrt{x}}\right)}\cdot\left(-\frac{3}{4\sqrt{x^3}}\right)\right)\cdot$$

$$\cdot\log_2(3x-5) + \frac{1\cdot 3}{(3x-5)\ln 2}\cdot\left(3^{\operatorname{ctg}\frac{2x}{5}} - \operatorname{tg}^4\frac{3}{2\sqrt{x}}\right)$$

11. По условию касательная перпендикулярна заданной прямой l, следовательно, угловой коэффициент касательной $К_{кас} = -\frac{1}{K_l}$.

$l: y = \frac{x}{2} + \frac{5}{2}$. Таким образом, $К_l = \frac{1}{2}$, а $К_{кас} = -2$.

Известно, что $К_{кас} = y'(x_0)$, где x_0 – абсцисса точки касания. Для заданной функции $y'(x) = (4x - 3x^2 + 2)' = 4 - 6x$.

Найдем x_0 из уравнения $4 - 6 \cdot x_0 = -2 \;=>\; x_0 = 1$. Вычислим $y_0 = y(x_0) = y(1) = 4 - 3 + 2 = 3$

Подставим найденные значения в уравнение касательной:

$$y - y_0 = К_{кас} \cdot (x - x_0).$$

$$y - 3 = -2(x - 1), \qquad y = -2x + 5.$$

Ответ: $y = -2x + 5$ – уравнение касательной.

12. Найдем первую и вторую производные данной функции, подставим их вместе с исходной функцией в уравнение и убедимся, что уравнение превратится в тождество.

$$y' = 4 \cdot (e^{-2x} \cdot (-2) \cdot \sin 4x + e^{-2x} \cdot \cos 4x \cdot 4) =$$
$$= -8e^{-2x} \cdot (\sin 4x - 2\cos 4x)$$
$$y'' = -8 \cdot (e^{-2x} \cdot (-2) \cdot (\sin 4x - 2\cos 4x) + e^{-2x} \cdot (4\cos 4x + 8\sin 4x)) =$$
$$= 16e^{-2x} \cdot (-3\sin 4x - 4\cos 4x).$$

Рассмотрим левую часть уравнения:

$$y'' + 4y' + 20y = 16e^{-2x} \cdot (-3\sin 4x - 4\cos 4x) +$$
$$+4 \cdot (-8) \cdot e^{-2x} \cdot (\sin 4x - 2\cos 4x) + 20 \cdot 4 \cdot e^{-2x} \sin 4x =$$
$$= e^{-2x} \cdot (-48\sin 4x - 64\cos 4x - 32\sin 4x + 64\cos 4x + 80\sin 4x) =$$
$$= e^{-2x} \cdot 0 = 0$$

Итак, уравнение принимает вид тождества $0 = 0$.

Следовательно, данная функция является решением уравнения.

14. Исследовать функцию $y = \frac{x^3}{x^2-4}$ и построить ее график.

1) $D(y) = (-\infty; 2) \cup (-2; 2) \cup 2; +\infty)$

Найдем лево- и правосторонние пределы функции при $x \to 2$ и $x \to -2$

$$\lim_{x \to -2-0} \frac{x^3}{x^2 - 4} = \left[\frac{-8}{+0}\right] = -\infty, \lim_{x \to -2+0} \frac{x^3}{x^2 - 4} = \left[\frac{-8}{-0}\right] = +\infty,$$

$$\lim_{x \to 2-0} \frac{x^3}{x^2 - 4} = \left[\frac{8}{-0}\right] = -\infty, \lim_{x \to 2+0} \frac{x^3}{x^2 - 4} = \left[\frac{8}{+0}\right] = +\infty.$$

$x_1 = -2, x_2 = 2$ – точки разрыва II рода.

Прямые $x = -2$ и $x = 2$ являются вертикальными асимптотами.

2) Уравнение наклонных асимптот: $y = kx + b$, где $k = \lim_{\substack{x \to +\infty \\ x \to -\infty}} \frac{f(x)}{x}$ и $b = \lim_{\substack{x \to +\infty \\ x \to -\infty}} (f(x) - kx)$

$$k = \lim_{\substack{x \to +\infty \\ x \to -\infty}} \frac{x^2}{x^2 - 4} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{\substack{x \to +\infty \\ x \to -\infty}} \frac{1}{1 - \frac{4}{x^2}} = 1,$$

$$b = \lim_{\substack{x \to +\infty \\ x \to -\infty}} \left(\frac{x^3}{x^2 - 4} - 1 \cdot x\right) = \lim_{\substack{x \to +\infty \\ x \to -\infty}} \frac{x^3 - x \cdot (x^2 - 4)}{x^2 - 4} =$$

$$= \lim_{\substack{x \to +\infty \\ x \to -\infty}} \frac{4x}{x^2 - 4} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{\substack{x \to +\infty \\ x \to -\infty}} \frac{\frac{4}{x}}{1 - \frac{4}{x^2}} = 0.$$

Следовательно, $y = x -$ наклонная асимптота при $x \to +\infty$ и при $x \to -\infty$.

3) Точки пересечения графика с осями координат:

$c\ Ox: \begin{cases} y = 0 \\ y = \frac{x^3}{x^2-4} \end{cases}; \begin{cases} y = 0 \\ x = 0 \end{cases}; O(0; 0)$ $\qquad$ $c\ Oy: \begin{cases} x = 0 \\ y = \frac{x^3}{x^2-4} \end{cases}; \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}; O(0; 0)$

4) Исследуем функцию на четность / нечетность по определению:

$$y(-x) = -y(x) \text{ – нечетная функция,}$$

$$y(-x) = y(x) \text{ – четная функция.}$$

Рассмотрим $y(-x) = \frac{(-x)^3}{(-x)^2-4} = \frac{-x^3}{x^2-4} = -y(x)$, следовательно, $y(x)$ – нечетная функция $\Rightarrow$ график симметричен относительно начала координат.

5) Функция не является периодической

6) Найдем критические точки функции по первой производной:

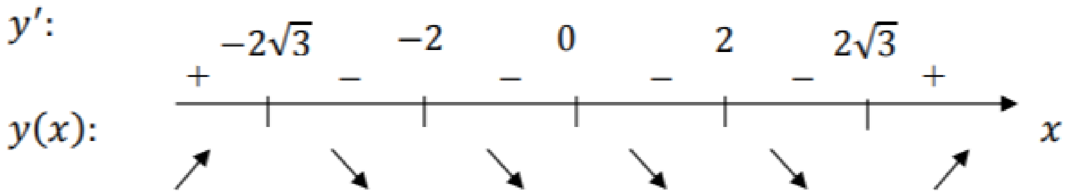
$$y' = \frac{3x^2 \cdot (x^2-4) - x^3 \cdot 2x}{(x^2-4)^2} = \frac{3x^4 - 12x^2 - 2x^4}{(x^2-4)^2} = \frac{x^4 - 12x^2}{(x^2-4)^2} =$$

$$= \frac{x^2(x^2-12)}{(x^2-4)^2} = \frac{x^2(x-2\sqrt{3})(x+2\sqrt{3})}{(x^2-4)^2}$$

Критические точки: а) $y'(x)$ не существует при $x_{1,2} = \pm 2 \notin D(y)$;

б) $y'(x) = 0$, при $x_3 = 0$, $x_{4,5} = \pm 2\sqrt{3}$.

7) Найдем интервалы монотонности:



8) Найдем точки экстремумов и экстремумы:

$x_{max} = -2\sqrt{3}, x_{min} = 2\sqrt{3}$.

$$y_{max} = y(-2\sqrt{3}) = \frac{-24\sqrt{3}}{12-4} = -3\sqrt{3}, y_{min} = y(2\sqrt{3}) = 3\sqrt{3}.$$

9) Найдем критичесие точки по второй производной:

$$y'' = \left(\frac{x^4-12x^2}{(x^2-4)^2}\right)' =$$

$$= \frac{(4x^3-24x)\cdot(x^2-4x)^2 - (x^4-12x^2)\cdot 2\cdot(x^2-4)\cdot 2x}{(x^2-4)^4} =$$

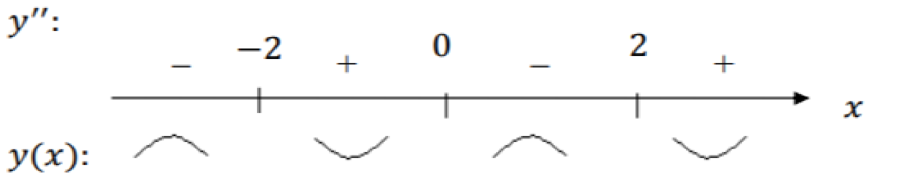
$$= \frac{(x^2-4)(4x^5-40x^3+96x-4x^5+48x^3)}{(x^2-4)^4} =$$

$$= \frac{8x^3+96x}{(x^2-4)^3} = \frac{8x(x^2+12)}{(x^2-4)^3}$$

Критические точки: а) y'' не существует при $x_{1,2} = \pm 2 \notin D(y)$

б) $y'' = 0$ при $x = 0$

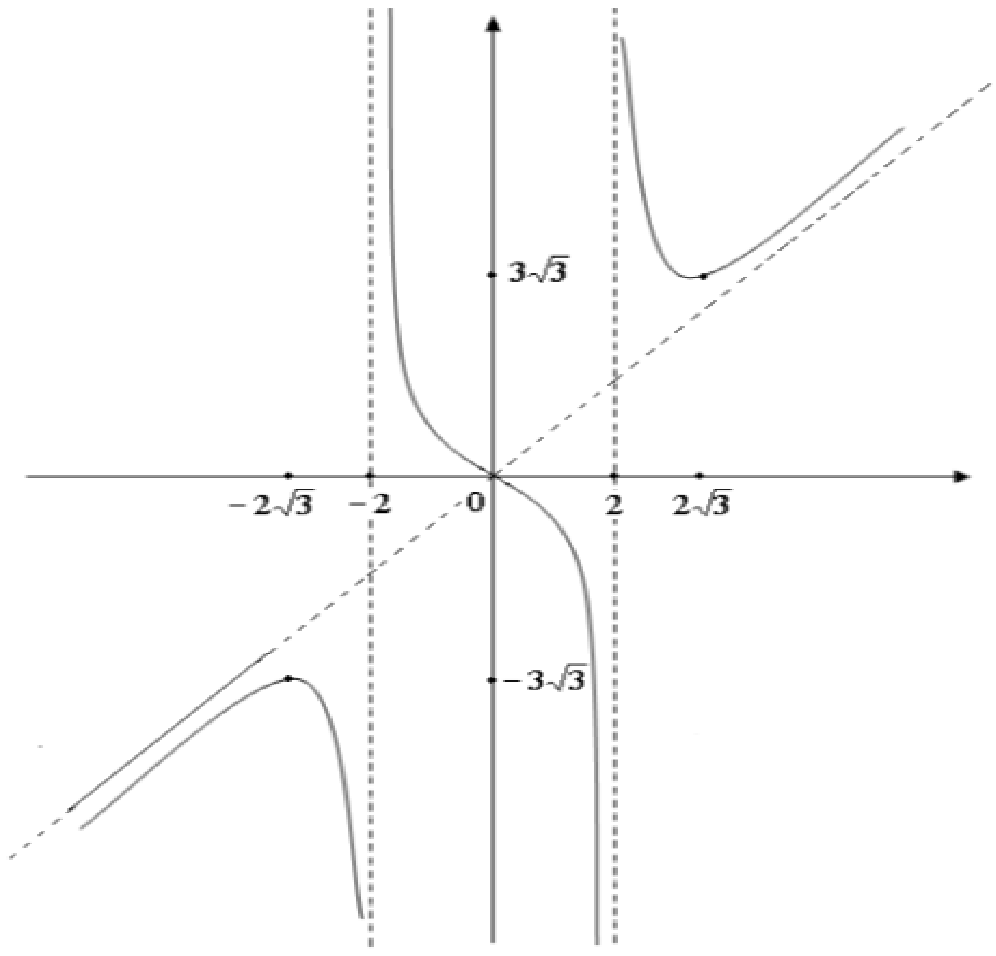
10) Интервалы выпуклости и вогнутости:



11) Точки перегиба: $x_0 = 0$, $y_0 = y(0) = 0$, $O\ (0;0)$ – точка перегиба

12) Сводная таблица результатов исследования:

x	$(-\infty;\ -2\sqrt{3})$	$-2\sqrt{3}$	$(-2\sqrt{3};\ -2)$	-2	$(-2;0)$	0	$(0;2)$	2	$(2;\ 2\sqrt{3})$	$2\sqrt{3}$	$(2\sqrt{3};\ +\infty)$
y'	+	0	–	Не сущ.	–	0	–	Не сущ.	–	0	+
y''	–	–	–	Не сущ.	+	0	–	Не сущ.	+	+	+
$y(x)$	↗	$-3\sqrt{3}$	↘	Т.р.	↘	0	↘	Т.р.	↘	$3\sqrt{3}$	↗



ВАРИАНТЫ ЗАДАНИЙ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

Вариант 1

Найти предел функции:

1. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{7x^3+12x^2-x+2}{8-17x^3-x\sqrt{3x^2}}$
2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2+5x}{\sqrt[3]{1+x}-\sqrt[3]{1-x}}$
3. $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+5x}-x)$
4. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x^2-x-1}{x^3-1}$
5. $\lim\limits_{x\to 1}(x-1)\mathrm{tg}\dfrac{\pi x}{2}$
6. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x+5}{2x-8}\right)^{x+2}$
7. $\lim\limits_{x\to 0}(3x)^{\sin 7x}$
8. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{23x^2+\sin 3xe^x}{\mathrm{tg}7x+15x^3}$

Продифференцировать функции:

9. $y=\arcsin^6\sqrt{x}\cdot(6^{\mathrm{tg}\,5x}+\mathrm{tg}^4 5x)$; y'–?

10. $y=\dfrac{\mathrm{arcctg}\,x+\mathrm{ctg}\,x}{\ln x}$; dy–?

11. Составить уравнение касательной к графику функции $y=3x^2-7x$, образующей с осью Ox угол 135°.

12. Показать, что функция $y=e^{-x}\sin 2x$ удовлетворяет дифференциальному уравнению $y''+2y'+5y=0$.

13. Тело движется вдоль оси Ox по закону: $x(t)=\frac{t^3}{3}-2t^2+3t$. Найти скорость и ускорение в момент времени $t=3$.

14. Исследовать функцию $y=\frac{x^3-3x}{x^2-1}$ и построить ее график.

Вариант 2

Найти предел функции:

1. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x+5x^2+(7x)^3}{2+(x+3)^3}$
2. $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{\sqrt{3x+1}-4}{x^2+4x-45}$
3. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{3x^2-26x+1}-\sqrt{3x^2+11}\right)$
4. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{-5x^2-3x+2}{7x^2+4x-3}$
5. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\cdot\cos 3x}{\mathrm{tg}\,5x\cdot\cos 2x}$
6. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{5x+4}{5x-3}\right)^{1-x}$
7. $\lim\limits_{x\to +0}\left(\dfrac{1}{\ln x}\right)^{\ln^{-2}x}$
8. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-\cos 3x}{\mathrm{tg}\,x}$

Продифференцировать функцию:

9. $y=\mathrm{ctg}\,e^{\sqrt{x}}\cdot\left(4^{\sin 5x}+\sin^4 5x\right)$; y'–?

10. $y = \dfrac{\operatorname{arctg} x + \sqrt[3]{x}}{\cos x}$; dy–?

11. Составить уравнение касательной к графику функции $y = 3x^2 - 2x$, параллельной прямой $y = 4x + 3$.

12. Показать, что функция $y = e^{-x}\cos 3x$ удовлетворяет дифференциальному уравнению $y'' + 2y' + 10y = 0$.

13. Тело движется вдоль оси Ox по закону: $x(t) = \frac{t^3}{3} - \frac{3t^2}{2} + 2t$. Найти скорость и ускорение в момент времени $t = 4$.

14. Исследовать функцию $y = \frac{x^4}{x^3+1}$ и построить ее график.

Вариант 3

Найти предел функции:

1. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2x^{11} - x^7 + 11}{3x^{11} - x^7 - 1}$

2. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1 - 2x + 5x^2} - (1 + x)}{3x}$

3. $\lim\limits_{x\to\infty} (\sqrt{x^2 + 5x - 1} - \sqrt{x^2 - x + 1})$

4. $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{-x^2 + 2x + 3}{5x^2 - 10x - 15}$

5. $\lim\limits_{x\to +0} \dfrac{\ln(2x + 1)}{\sin x}$

6. $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{3 - x}{7 - x}\right)^{8x-3}$

7. $\lim\limits_{x\to 0} (2x)^{x^2}$

8. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x - \operatorname{tg} x}{12x^2 - 8x}$

Продифференцировать функцию:

9. $y = \ln \operatorname{tg} 3x \cdot \left(7^{\sin(6x)} + \arcsin^7(6x)\right)$; y'–?

10. $y = \dfrac{\sqrt{x} + \operatorname{arcctg} x}{\cos x}$; dy–?

11. Составить уравнение касательной к графику функции $y = 3x^2 + x$, параллельной прямой $y = -5x + 1$.

12. Показать, что функция $y = e^{-x}\sin 3x$ удовлетворяет дифференциальному уравнению $y'' + 2y' + 10y = 0$.

13. Тело движется по закону: $x(t) = t^3 + 2t^2 + 4t$ вдоль оси Ox. Найти скорость и ускорение в момент времени $t = 3$.

20. Исследовать функцию $y = \frac{x^3}{3-x^2}$ и построить ее график.

Вариант 4

Найти предел функции:

1. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{15x^3-8x^5-4}{6x^5+2x^4+5}$

2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{2x^2-3x+16}-2(x-2)}{4x}$

3. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2-2x+3}-\sqrt{x^2+x-4}\right)$

4. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{3x^2-5x-2}{5x-2-2x^2}$

5. $\lim\limits_{x\to 2}(2-x)\cdot\operatorname{ctg}4\pi x$

6. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x+3}{2x+7}\right)^{5-6x}$

7. $\lim\limits_{x\to 1}(\ln x)^{\sin 3\pi x}$

8. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 3x-2^{\operatorname{tg}x}}{3x\cdot e^{5x}}$

Продифференцировать функцию:

9. $y=\operatorname{arcctg}(2-3x)\cdot\left(\log_2\sin\frac{x}{2}-2^{\arcsin^2\sqrt{x}}\right)$; y'–?

10. $y=\dfrac{\arccos 5x-\operatorname{ctg}\dfrac{2}{\sqrt{x}}}{\operatorname{tg}\dfrac{3x}{5}}$; dy–?

11. Составить уравнение касательной к графику функции $y=5x^2-2x+3$, параллельной прямой $y=5-12x$.

12. Показать, что функция $y=4e^{-2x}\cdot\sin 3x$ удовлетворяет дифференциальному уравнению $y''+4y'+13y=0$.

13. Тело движется по закону: $x(t)=\frac{2t^3}{3}+\frac{t^2}{2}+3t$ вдоль оси Ox. Найти скорость и ускорение в момент времени $t=3$.

14. Исследовать функцию $y=\frac{x^4}{x^3-1}$ и построить ее график.

Вариант 5

Найти предел функции:

1. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^4-2x^3+3}{5x^3-4x^2-6x^4}$
2. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{(x^2-2x)}{\sqrt{x^2-3}-x+1}$
3. $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{x^2-3x+1}-\sqrt{x^2+x-5})$
4. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{27-x^3}{3x^2-5x-12}$
5. $\lim\limits_{x\to -2}(x^2-4)\cdot\operatorname{ctg}\dfrac{\pi x}{2}$
6. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{5x-2}{5x+9}\right)^{\frac{3x-4}{6}}$
7. $\lim\limits_{x\to 0}(\cos 4x)^{\operatorname{ctg}3x}$
8. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}3x-x}{\sin^2 4x+5x}$

Продифференцировать функцию:

9. $\arcsin(2x+3)\cdot\left(4^{\operatorname{ctg}3x}-\cos\frac{3x}{5}\right)$; $y'-?$

10. $y=\dfrac{\frac{3}{\sqrt{2x}}-3\operatorname{arctg}4x}{\ln(3x+2)}$; $dy-?$

11. Составить уравнение касательной к графику функции $y=3x^2+x-2$, параллельной прямой $y=4-11x$.

12. Показать, что функция $y=3e^{2x}\cdot\cos 5x$ удовлетворяет дифференциальному уравнению $y''-4y'+29y=0$.

13. Тело движется по закону: $x(t)=\frac{t^3}{3}+3t^2+4t$ вдоль оси Ox. Найти скорость и ускорение в момент времени $t=5$.

14. Исследовать функцию $y=\frac{x^2}{x^3-1}$ и построить ее график.

Вариант 6

Найти предел функции:

1. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{7x^{\frac{13}{5}}-2\sqrt{2}x^2+5}{-3x^{\frac{13}{5}}-\sqrt{x}+7}$
2. $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{\sqrt[3]{x-6}+2}{x^3+8}$
3. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2-7x+1}-\sqrt{x^2+14x-1}\right)$
4. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{7x^2-15x+2}{x^2-5x+6}$
5. $\lim\limits_{x\to +0}x^2\cdot\log_2 x$
6. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{4-3x}{34-3x}\right)^{5-21x}$
7. $\lim\limits_{x\to 0}(\cos 3x)^{\frac{11}{x}}$
8. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}2x+\sin 3x}{5x+x^2}$

Продифференцировать функцию:

9. $y=\ln(7x+3)\cdot(5^{\sin 3x}+\sin^5 3x)$; $y'-?$

10. $y=\dfrac{\arccos x+\sqrt{x}}{\sin x}$; $dy-?$

11. Указать точку, в которой касательная к графику функции $y=x^2+2x-3$, параллельна оси абсцисс.

12. Показать, что функция $y=e^{-3x}(2x+1)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению $y''+6y'+9y=0$.

13. Тело массой 100 кг движется прямолинейно по закону: $S(t)=\frac{3t^2}{2}+\frac{t^3}{3}$. Определить кинетическую энергию $\left(\frac{mv^2}{2}\right)$ тела через 5 секунд после начала движения.

14. Исследовать функцию $y=\frac{3x^2+7x+2}{(x+1)^2}$ и построить ее график.

Вариант 7

Найти предел функции:

1. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{-3x^{\frac{5}{2}}-x^{\frac{1}{2}}+3}{8-\sqrt{x}+15x^{\frac{5}{2}}}$

2. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{(x^2+2x-15)}{\sqrt{5x+1}-x-1}$

3. $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{x^2-7x+3}-\sqrt{x^2+7})$

4. $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{3x^2-8x-28}{-2x^2+5x+18}$

5. $\lim\limits_{x\to 13}(x-13)\operatorname{tg}\dfrac{\pi x}{2}$

6. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{13x-29}{13x-14}\right)^{11x+1}$

7. $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x}}$

8. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2-\sin 2x}{\operatorname{tg}3x-x^2}$

Продифференцировать функцию:

9. $y=\arccos\sqrt{x+1}\cdot(5^{\operatorname{ctg}5x}+\operatorname{ctg}^3 5x);\ y'-?$

10. $y=\dfrac{\sin x+\log_4(3x+1)}{\operatorname{arctg}x};\ dy-?$

11. В каких точках касательная к графику функции $y=x^3-12x^2+36x-1$ параллельна оси Ox.

12. Показать, что функция $y=e^{-x}(\cos 3x+\sin 3x)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению $y''+2y'+10y=0$.

13. Точка движется по прямой по закону: $S(t)=5t^2-10t+1$. Определить скорость и ускорение точки в момент времени $t=2$.

14. Исследовать функцию $y=\frac{x^3}{x^2-4}$ и построить ее график.

Вариант 8

Найти предел функции:

1. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x+3x^{\frac{7}{2}}+11x^{\frac{5}{2}}}{3x^{\frac{5}{2}}+3x^{\frac{3}{2}}-2}$

2. $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{x}-2}{\sqrt[3]{x^2-16}}$

3. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-7x+23}\right)$

4. $\lim\limits_{x\to -10}\dfrac{4x^2+30x-100}{-x^2-5x+50}$

5. $\lim\limits_{x\to +0}\ln 13x\cdot\sin x$

6. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{14-15x}{3-15x}\right)^{1+2x}$

7. $\lim\limits_{x\to 0}(\operatorname{tg}3x)^{\sin x}$

8. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{5x}-\cos 3x}{\operatorname{tg}5x}$

Продифференцировать функцию:

9. $y=\cos\sqrt{7x+3}\cdot\left(5^{\arcsin 4x}+\arcsin^5 4x\right);\ y'-?$

10. $y=\dfrac{3\operatorname{tg}2x}{\log_2 x-5e^x};\ dy-?$

11. Определить угол наклона касательной к параболе $y=x^2+3x+2$ в точке пересечения параболы с осью абсцисс.

12. Показать, что функция $y=e^{-3x}(4x+2)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению $y''+6y'+9y=0$.

13. Точка движется вдоль оси Ox по закону: $x(t)=\frac{t^3}{3}-t^2-3t$. Определить скорость и ускорение точки в момент времени $t=2$.

14. Исследовать функцию $y=\frac{4-x^2}{4+x^2}$ и построить ее график.

Вариант 9

Найти предел функции:

1. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^3-4x^2-\sqrt{3}}{15-2x^2+\sqrt{31}x^3}$

2. $\lim\limits_{x\to-8}\dfrac{10-x-6\sqrt{1-x}}{x^2+8x}$

3. $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+7x}-\sqrt{x^2+1})$

4. $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{5-3x-2x^2}{3x^2-7x+4}$

5. $\lim\limits_{x\to+0}(x-\sin x)\ln x$

6. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{27x-8}{27x+1}\right)^{\frac{x-1}{3}}$

7. $\lim\limits_{x\to+0}(\operatorname{tg}5x)^{\sin 3x}$

8. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{5x^2+2x}{\sin x+\operatorname{tg}x}$

Продифференцировать функцию:

9. $y=\left(\arccos^3\sqrt{5x+1}\right)\cdot\left(8^{\operatorname{tg}\frac{x}{7}}+\operatorname{tg}^8 7x\right);\ y'-?$

10. $y=\dfrac{\sqrt[3]{x}-\sin x}{\log_5 x};dy-?$

11. Определить угол между осью абсцисс и касательной к параболе $y=x^2+x+5$, в точке пересечения параболы с осью ординат.

12. Показать, что функция $y=e^x\sin 4x$ удовлетворяет дифференциальному уравнению $y''-2y'+17y=0$.

13. Точка движется вдоль оси Ox по закону: $x(t)=t^3+3t^2-9t$. Определить скорость и ускорение точки в момент времени $t=2$.

14. Исследовать функцию $y=\frac{x^3}{(x-2)^2}$ и построить ее график.

Вариант 10

Найти предел функции:

1. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{-x^{\frac{3}{2}}+8\sqrt{x}+13}{-\sqrt{2}x+15x\sqrt{x}}$

2. $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{x^2-2x-3}{\sqrt{3x-8}-x+2}$

3. $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{x^2-7x+14}-\sqrt{x^2+7x+5})$

4. $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^3-1}{x^4-1}$

5. $\lim\limits_{x\to+0}\sin 2x\cdot\ln x$

6. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3-2x}{7-2x}\right)^{14-x}$

7. $\lim\limits_{x\to0}(\operatorname{tg}5x)^{\sin 7x}$

8. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos 4x}{2x\cdot\operatorname{tg}2x}$

Продифференцировать функцию:

9. $y=\arcsin\sqrt{x}\cdot\left(9^{\sin 3x}+\sin^9 3x\right); y'-?$

10. $y=\dfrac{\operatorname{arctg}x}{\log_3(2x+1)}; dy-?$

11. В каких точках касательные к графику функции $y=x^3+\frac{3x^2}{2}-6x$ параллельны оси Ox?

12. Показать, что функция $y=e^{-x}\sin 4x$ является решением дифференциального уравнения $y''+2y'+17y=0$.

13. Тело движется вдоль оси Ox по закону: $x(t)=t^3-3t^2-9t$. Найти скорость и ускорение тела в момент времени $t=3$.

14. Исследовать функцию $y=\frac{3-x^2}{x+2}$ и построить ее график.

ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

Примерный вариант заданий с решением

Найти / вычислить интегралы:

1. $\int \frac{e^{2x}+e^x}{e^x-1}dx$
2. $\int \operatorname{arctg}\sqrt{5x-1}dx$
3. $\int_1^2 (2x+1)\ln x dx$
4. $\int \sin^6\frac{x}{2}\cos^2\frac{x}{2}dx$
5. $\int \frac{1-3x}{\sqrt{9+8x-x^2}}dx$
6. $\int \frac{2x^2-4x+5}{3x^2+8}dx$
7. $\int \frac{x+17}{x^3-2x^2-5x+6}dx$
8. $\int \frac{dx}{\sqrt{(25+x^2)^3}}$
9. $\int_0^{63} \frac{dx}{\sqrt{x+1}+\sqrt[3]{x+1}}$

10*. Вычислить площадь фигуры, ограниченной графиками функций: $y=2x-x^2+3$, $y=x^2-4x+3$. Сделать чертеж.

10**. Найти объем тела, полученного вращением вокруг оси Ox фигуры, ограниченной графиками функций: $y=x^2-2x+1, y=0, x=2$. Сделать чертеж.

Решение

1. $\int \frac{e^{2x}+e^x}{e^x-1}dx = \int \frac{(e^x+1)e^x}{e^x-1}dx =$

$$= \begin{bmatrix} \text{замена переменной:} \\ e^x = t \\ d(e^x)=dt \\ e^x dx = dt \end{bmatrix} = \int \frac{t+1}{t-1}dt = \int \frac{t-1+2}{t-1}dt =$$

$$= \int 1+\frac{2}{t-1}dt = \int dt + 2\int \frac{dt}{t-1} = t - 2\ln|t-1| + C =$$

$$= e^x - 2\ln|e^x-1| + C$$

2. $\int arctg\sqrt{5x-1}dx$

Интегралы вида: $\int P(x)\ln x\,dx$, $\int P(x)\operatorname{arctg} x\,dx$, $\int P(x)\arcsin x\,dx$, где $P(x)$ – многочлен, находят методом интегрирования по частям, причем, за $u(x)$ принимается трансцендентная функция: $\ln x$ $\left(\ln^n x,\ \ln\left(f(x)\right)\right)$ или $\operatorname{arctg} x (\operatorname{arcctg} x)$ или $\arcsin x\ (\arccos x)$.

Формула интегрирования по частям имеет вид: $\int u dv = uv - \int v du$.

$$\int \operatorname{arctg}\sqrt{5x-1}dx = \left[\begin{matrix} u = \operatorname{arctg}\sqrt{5x-1}\ , & du = \dfrac{dx}{2x\sqrt{5x-1}} \\ dv = dx\ , & v = x \end{matrix}\right] =$$

$$= x\operatorname{arctg}\sqrt{5x-1} - \int x\frac{dx}{2x\sqrt{5x-1}} = x\operatorname{arctg}\sqrt{5x-1} - \int\frac{dx}{2\sqrt{5x-1}} =$$

$$= x\operatorname{arctg}\sqrt{5x-1} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{5}\int(5x-1)^{-\frac{1}{2}}d(5x-1) =$$

$$= x\operatorname{arctg}\sqrt{5x-1} - \tfrac{1}{5}\sqrt{5x-1} + C$$

3. $\displaystyle\int_1^2 (2x+1)\ln x dx$

Формула интегрирования по частям имеет вид: $\int_a^b u dv = uv|_a^b - \int_a^b v du$.

$$\int_1^2 (2x+1)\ln x dx = \left[\begin{matrix} u = \ln x, & du = \dfrac{1}{x}dx \\ dv = (2x+1)dx, & v = x^2 + x \end{matrix}\right] =$$

$$= (x^2+x)\ln x|_1^2 - \int_1^2 \frac{x^2+x}{x}dx = (4+2)\ln 2 - (1+1)\ln 1 - \int_1^2 (x+1)\,dx =$$

$$= 6\ln 2 - \left(\frac{x^2}{2} + x\right)\Bigg|_1^2 = 6\ln 2 - (2+2) + \left(\frac{1}{2}+1\right) = 6\ln 2 - 2{,}5$$

4. $\displaystyle\int \sin^6\frac{x}{2}\cos^2\frac{x}{2}dx$

Для вычисления интегралов вида $\int \sin^{2m}x\cos^{2n}x\,dx$, где m, n – целые неотрицательные числа, применяются формулы понижения степени:

$$\left[\sin x\cos x = \tfrac{1}{2}\sin 2x, \sin^2 x = \tfrac{1-\cos 2x}{2}, \cos^2 x = \tfrac{1+\cos 2x}{2}\right]$$

$$\int \sin^6\frac{x}{2}\cos^2\frac{x}{2}dx = \int (\sin^2\frac{x}{2})^2(\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2})^2 dx =$$

$$= \int (\frac{1-\cos x}{2})^2(\frac{1}{2}\sin x)^2 dx = \frac{1}{16}\int (1-\cos x)^2\sin^2 x dx =$$

$$= \frac{1}{16}\int (1 - 2\cos x + \cos^2 x)\sin^2 x dx =$$

$$=\frac{1}{16}\left(\int \sin^2 x dx - 2\int \cos x \sin^2 x\, dx + \int \cos^2 x \sin^2 x dx\right) =$$
$$=\frac{1}{16}\left(\int \frac{1-\cos 2x}{2} dx - 2\int \cos x \sin^2 x dx\ + \int \cos^2 x \sin^2 x dx\right) =$$
$$=\frac{1}{16}\left(\int \frac{1-\cos 2x}{2} dx - 2\int \sin^2 x d(\sin x) + \int (\sin x \cos x)^2\, dx\right) =$$
$$=\frac{1}{16}\left(\frac{1}{2}\int dx - \frac{1}{2}\int \cos 2x dx - \frac{2}{3}\sin^3 x + \int \left(\frac{1}{2}\sin 2x\right)^2 dx\right) =$$
$$=\frac{1}{16}\left(\frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\sin 2x\ - \frac{2}{3}\sin^3 x + \frac{1}{4}\int \sin^2 2x dx\right) =$$
$$=\frac{1}{16}\left(\frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\sin 2x\ - \frac{2}{3}\sin^3 x + \frac{1}{4}\int \frac{1-\cos 4x}{2} dx =\right.$$
$$=\frac{1}{16}\left(\frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\sin 2x\ - \frac{2}{3}\sin^3 x + \frac{1}{8}x - \frac{1}{32}\sin 4x\right) + C =$$
$$=\frac{1}{16}\left(\frac{5}{8}x - \frac{1}{4}\sin 2x\ - \frac{2}{3}\sin^3 x - \frac{1}{32}\sin 4x\right) + C$$

5. $\int \frac{1-3x}{\sqrt{9+8x-x^2}} dx =$

$$= \left[\begin{array}{c} \text{Выделим полный квадрат в подкоренном выражении:} \\ 9+8x-x^2 = -(x^2-8x+16)+25 = 25-(x-4)^2 \\ \text{Замена переменной: } x-4=t \Rightarrow x=t+4, dx=dt, \\ 9+8x-x^2 = 25-t^2 \end{array}\right] =$$

$$= \int \frac{1-3(t+4)}{\sqrt{25-t^2}} dt = \int \frac{-3t-11}{\sqrt{25-t^2}} dt = \int \frac{-3tdt}{\sqrt{25-t^2}} - \int \frac{11dt}{\sqrt{25-t^2}} =$$
$$= 3\int \frac{-2tdt}{2\sqrt{25-t^2}} - 11\int \frac{dt}{\sqrt{5^2-t^2}} =$$
$$= 3\int \frac{d(25-t^2)}{2\sqrt{25-t^2}} - 11\arcsin\frac{t}{5} = 3\sqrt{25-t^2} - 11\arcsin\frac{t}{5} + C =$$
$$= 3\sqrt{9+8x-x^2} - 11\arcsin\frac{x-4}{5} + C$$

6. $\int \frac{2x^2-4x+5}{3x^2+8} dx$

$\frac{2x^2-4x+5}{3x^2+8}$ – неправильная рациональная дробь (так как высшие степени многочленов в числителе и знаменателе равны).

Выделим целую часть:

$$\frac{2x^2-4x+5}{3x^2+8}=\frac{1}{3}\cdot\frac{3(2x^2-4x+5)}{3x^2+8}=\frac{1}{3}\cdot\frac{6x^2-12x+15}{3x^2+8}$$
$$=\frac{1}{3}\cdot\frac{2(3x^2+8)+(-12x-1)}{3x^2+8}=\frac{1}{3}\cdot(2+\frac{-12x-1}{3x^2+8})$$

Правильная дробь $\frac{-12x-1}{3x^2+8}$ является простейшей дробью II типа. Так как знаменатель–квадратный двучлен, то дробь раскладывают на сумму дробей:

$$\frac{-12x-1}{3x^2+8}=-\frac{12x}{3x^2+8}-\frac{1}{3x^2+8}=$$
$$=\frac{1}{3}\int\left(2+\frac{-12x-1}{3x^2+8}\right)dx==\frac{1}{3}(2x-\int\frac{12xdx}{3x^2+8}-\int\frac{dx}{3x^2+8}=$$
$$=\frac{1}{3}(2x-2\int\frac{6xdx}{3x^2+8}-\int\frac{3dx}{3(3x^2+8)}=$$
$$=\frac{1}{3}\int(2x-2\int\frac{d(3x^2+8)}{3x^2+8}-\int\frac{d(3x)}{(3x)^2+(\sqrt{24})^2})=$$
$$=\frac{1}{3}\left(2x-2\ln(3x^2+8)-\frac{1}{\sqrt{24}}\operatorname{arctg}\frac{3x}{\sqrt{24}}\right)+C$$

7. $\int\frac{x+17}{x^3-2x^2-5x+6}dx$

Подинтегральная функция – правильная рациональная дробь. Разложим знаменатель x^3-2x^2-5x+6 на простые множители: линейные множители или квадратные многочлены с отрицательным дискриминантом.

Так как $x=-1$ – корень многочлена x^3-2x^2-5x+6, значит x^3-2x^2-5x+6 делится на $(x-1)$ без остатка:

Выполним деление «уголком»:

$$\begin{array}{r|l}
x^3-2x^2-5x+6 & x-1 \\ \cline{2-2}
\underline{-x^3-x^2} & x^2-x-6 \\
-x^2-5x+6 & \\
\underline{-(-x^2+x)} & \\
-6x+6 & \\
\underline{-(-6x+6)} & \\
0 &
\end{array}$$

Следовательно,

$$x^3-2x^2-5x+6=(x-1)(x^2-x-6)=(x-1)(x-3)(x+2).$$

Разложим дробь $\frac{x+17}{(x-1)(x-3)(x+2)}$ на сумму простейших дробей

$$\frac{x+17}{(x-1)(x-3)(x+2)}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x-3}+\frac{C}{x+2}=$$

$$= \frac{A(x-3)(x+2) + B(x-1)(x+2) + C(x-1)(x-3)}{(x-1)(x-3)(x+2)} \Rightarrow$$

$$x + 17 = A(x-3)(x+2) + B(x-1)(x+2) + C(x-1)(x-3)$$

Найдем коэффициенты A, B, C методом частных значений:

при $x = 1$: $18 = -6A$ $\quad A = -3$

при $x = 3$: $20 = 10B$ $\quad B = 2$

при $x = -2$: $15 = 15C$ $\quad C = 1$

Интегрируем рациональную дробь

$$\int \frac{x+17}{x^3 - 2x^2 - 5x + 6} dx = \int \frac{-3}{x-1} dx + \int \frac{2}{x-3} dx + \int \frac{1}{x+2} dx =$$

$$= -3 \int \frac{d(x-1)}{x-1} + 2 \int \frac{d(x-3)}{x-3} + \int \frac{d(x+2)}{x+2} =$$

$$= -3 \ln|x-1| + 2 \ln|x-3| + \ln|x+2| + C$$

8. $$\int \frac{dx}{\sqrt{(25+x^2)^3}} =$$

$$= \left[\begin{array}{c} \text{Замена переменной:} \\ x = 5\,\mathrm{tg}\, t; \quad dx = \dfrac{5}{\cos^2 t} dt; \\ \sqrt{(25+x^2)} = \sqrt{25 + 25\mathrm{tg}^2 t} = \sqrt{\dfrac{25}{\cos^2 t}} = \dfrac{5}{|\cos t|} = \dfrac{5}{\cos t} \\ \text{так как } \cos t > 0 \ \forall t \in \left(-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right) \end{array} \right] =$$

$$= \int \frac{5dt}{\cos^2 t \left(\frac{5}{\cos t}\right)^3} dt = \frac{1}{25} \int \cos t dt = \frac{1}{25} \sin t + C =$$

$$= \left[\begin{array}{c} x = 5\mathrm{tg}t = \dfrac{5}{\cos t} \sin t \\ \dfrac{5}{\cos t} = \sqrt{25 + x^2} \\ x = \sqrt{25 + x^2} \sin t \Rightarrow \\ \sin t = \dfrac{x}{\sqrt{25 + x^2}} \end{array} \right] = \frac{x}{\sqrt{25 + x^2}} + C$$

9. $$\int_0^{63} \frac{dx}{\sqrt{x+1} + \sqrt[3]{x+1}} =$$

$$=\left[\begin{array}{c}\text{Найдем наименьшее общее кратное показателя корня}\\ \text{подинтегрального выражения:}\\ \text{НОК}(2;3)=6\\ \text{Замена переменной } \sqrt[6]{x+1}=\text{t}\Rightarrow\\ x+1=t^6, x=t^6-1, dx=6t^5dt\\ \sqrt[3]{x+1}=t^2,\qquad \sqrt{x+1}=t^3\\ \begin{array}{c|c|c} x & 0 & 63\\ \hline t & 1 & 2\end{array}\end{array}\right]=$$

$$\int_1^2\frac{6t^5dt}{t^3+t^2}=6\int_1^2\frac{t^3dt}{t+1}=6\int_1^2\frac{(t^3+1)-1}{t+1}dt=6(\int_1^2\frac{t^3+1}{t+1}dt-\int_1^2\frac{dt}{t+1})=$$

$$6(\int_1^2\frac{(t+1)(t^2-t+1)}{t+1}dt-\ln(t+1)|_1^2)=6(\int_1^2(t^2-t+1)\,dt-$$

$$-\ln 3+\ln 2)=6\left(\frac{t^3}{3}-\frac{t^2}{2}+t\Big|_1^2-\ln3+\ln2\right)=$$

$$=6\left(\left(\frac{8}{3}-2+2\right)-\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+1\right)+\ln\frac{2}{3}\right)=11+6\ln\frac{2}{3}$$

10*. Вычислить площадь фигуры, ограниченной графиками функций: $y=2x-x^2+3,\ y=x^2-4x+3$. Сделать чертеж.

Графиком функции $y=ax^2+bx+c$ является парабола, ветви которой направлены вниз при а < 0, вверх при а > 0.

Координаты вершин параболы: $x_в=-\frac{b}{2a},\ \ y_в=y(-\frac{b}{2a})$.

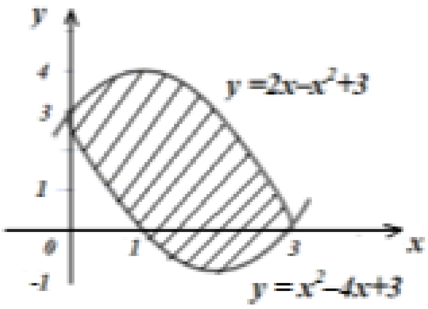
Для $y=2x-x^2+3$ ветви направлены вниз,$(1;4)$ – вершина параболы.

Для $y=x^2-4x+3$ ветви направлены вверх, $(2;-1)$ – вершина параболы.

Найдем точки пересечения парабол: $y=2x-x^2+3$ и $y=x^2-4x+3$:

$$\begin{cases}y=2x-x^2+3\\ y=x^2-4x+3\end{cases}\Rightarrow 2x-x^2+3=x^2-4x+3\Rightarrow 2x^2-6x=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{array}{l}x_1=0\\ x_2=3\end{array}\Rightarrow\begin{array}{l}y_1=3\\ y_2=0\end{array}$$



Итак, $(0;3),(3;0)$ – точки пересечения парабол.

Если фигура ограничена графиками функций

$y = f(x), y = q(x), x = a, x = b\ (a < b)$, где $f(x) \geq q(x)\ \ \forall x \in [a, b]$, то

$$S_{\text{фигуры}} = \int_a^b [f(x) - q(x)]dx.$$

В данном случае: $-x^2 + 2x + 3 \geq x^2 - 4x + 3\ \ \ \forall x \in [0; 3]$

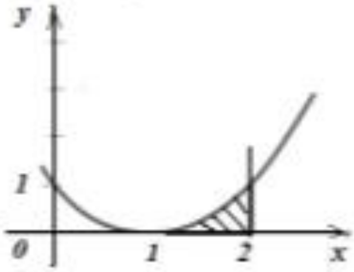
Следовательно, $S_{\text{фигуры}} = \int_0^3 \big((-x^2 + 2x + 3) - (x^2 - 4x + 3)\big)dx =$

$$= \int_3^3 (-2x^2 + 6x)dx = (-\frac{2}{3}x^3 + 3x^2)|_0^3 = (-18 + 27) - 0 = 9\ \text{(кв. ед.)}$$

10**. Найти объем тела, полученного вращением вокруг оси Ox фигуры, ограниченной графиками функций: $y = x^2 - 2x + 1, y = 0, x = 2.$

Сделать чертеж.

$y = x^2 - 2x + 1$ – график параболы, ветви напавлены вверх, (1; 0) – вершина. Вращаемая фигура – криволинейная трапеция.



Если вокруг оси Ox вращается криволинейная трапеция, ограниченная графиками функциями: $y = f(x), y = 0, x = a, x = b(a < b)$, причем $f(x) \geq 0\ \ \ \forall x \in [a, b]$, то объем тела вращения находится по формуле:

$$V = \pi \int_a^b f^2(x)dx$$

В данном случае:

$$V = \pi \int_1^2 (x^2 - 2x + 1)^2 dx = \pi \int_1^2 (x-1)^4 d(x-1) = \pi \frac{(x-1)^5}{5}\bigg|_1^2 =$$

$$= \frac{\pi}{5} - 0 = \frac{\pi}{5}\text{(куб. ед.)}$$

Варианты заданий для самостоятельного решения (1–30)

В заданиях 1–9 найти/вычислить интегралы.

В задании 10 необходимо найти:

10* – площадь фигуры, ограниченной заданными линиями.

10** – объем тела, полученного вращением вокруг оси Ox фигуры, ограниченной графиками функций. Сделать чертеж.

Вариант 1

1. $\int \frac{x^2+4x-3}{x^2+9}dx$
2. $\int_0^{\pi}(4x-7)\cos\frac{x}{2}dx$
3. $\int 7^{-x}(3-x)dx$
4. $\int \operatorname{arcctg}(4x)dx$
5. $\int \sin^5 2x dx$
6. $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{9-x^2}}$
7. $\int \frac{19-2x}{x^2-2x+82}dx$
8. $\int \frac{3x^2-7x+10}{(x^2+4)(x-2)}dx$
9. $\int_2^{14}\frac{dx}{\sqrt{x+2}+5}$
10*. $y=2^x;\ y=0;\ x=1;\ x=2.$

Вариант 2

1. $\int \frac{3x^3-7}{x^2+8}dx$
2. $\int_0^{\frac{\pi}{4}}(x+2)\sin 2x dx$
3. $\int (5x-2)2^x dx$
4. $\int \arcsin\frac{x}{4}dx$
5. $\int \frac{\sin^5 x}{\cos^3 x}dx$
6. $\int \frac{dx}{x^2\cdot\sqrt{3+x^2}}$
7. $\int \frac{9-4x}{x^2+6x+13}dx$
8. $\int \frac{3x^2+2x+1}{(x+4)(x+1)^2}dx$
9. $\int_0^3\frac{dx}{\sqrt{x+1}+1}$
10*. $y=\cos x;\ y=0;\ x=\frac{\pi}{6};\ x=\frac{\pi}{3}$

Вариант 3

1. $\int \frac{x^3-x}{x^2+3}dx$
2. $\int_0^{\pi}(2x-1)\cos\frac{x}{3}dx$
3. $\int e^{\frac{x}{2}}\left(\frac{x}{2}+2\right)dx$
4. $\int \operatorname{arctg}\frac{x}{4}dx$
5. $\int \sin^3 x\cos^3 x dx$
6. $\int \frac{x^4}{\sqrt{4-x^2}}dx$
7. $\int \frac{15-2x}{x^2-4x+5}dx$
8. $\int \frac{x-3x^2-1}{(x-1)(x^2+2)}dx$
9. $\int_0^8\frac{dx}{\sqrt{3x+1}+1}$
10*. $y=(x-2)^2;\ y=0;\ y=1;\ x=0.$

Вариант 4

. $\int \frac{x^2 - 2x + 3}{x^2 + 16} dx$

2. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} (2x - 1)\cos 2x dx$

3. $\int \arccos(2x)\, dx$

4. $\int (x + 4)2^x dx$

5. $\int \frac{\sin^3 x}{\cos^5 x} dx$

6. $\int \frac{x^3}{\sqrt{1 + x^2}} dx$

7. $\int \frac{2x + 7}{x^2 + 2x + 2} dx$

8. $\int \frac{x - 8}{x(x - 2)^2} dx$

9. $\int_0^9 \frac{dx}{3 + \sqrt{9 - x}}$

10*. $y = (x - 1)^2;\ y = 0;\ x = 0.$

Вариант 5

1. $\int \frac{x^2 - 2x + 2}{x^2 + 3} dx$

2. $\int_0^{\pi} (2x - 1)\cos\frac{x}{2} dx$

3. $\int (1 - \frac{x}{2})3^{x+2} dx$

4. $\int x\mathrm{arctg}2x dx$

5. $\int \frac{\cos^3 x}{\sin^8 x} dx$

6. $\int x^2\sqrt{49 - x^2} dx$

7. $\int \frac{4x - 5}{x^2 + 4x + 20} dx$

8. $\int \frac{dx}{x(3x + 1)^2}$

9. $\int_1^5 \frac{dx}{\sqrt{x - 1} + 2}$

10*. $y = \ln x;\ y = 0;\ x = e;\ x = e^3.$

Вариант 6

1. $\int \frac{x^2 + 2x}{x^2 + 5} dx$

2. $\int_0^{\frac{\pi}{3}} (x - 1)\cos 3x dx$

3. $\int \mathrm{arctg}2x dx$

4. $\int (\frac{x}{2} - 1)e^{3x} dx$

5. $\int \cos^6 x \sin^3 x dx$

6. $\int \frac{x^3 dx}{\sqrt{4 + x^2}}$

7. $\int \frac{17 - 2x}{x^2 + 4x + 13} dx$

8. $\int \frac{x^3 + 3}{x^2(x^2 + 3)} dx$

9. $\int_0^{12} \frac{dx}{1 + \sqrt{16 - x}}$

10*. $y = \log_2 x; y = 0; x = 4.$

Вариант 7

1. $\int \frac{x^3 + 4x - 5}{x^2 + 4} dx$

2. $\int_0^{\pi} (8x - 1) \sin \frac{x}{2} dx$

3. $\int (x + 1) e^{-x} dx$

4. $\int \arccos \frac{x}{3} dx$

5. $\int \frac{4x + 13}{x^2 + 6x + 18} dx$

6. $\int \frac{x - 1}{x(4x^2 + 1)} dx$

7. $\int \cos^3 x \sin^4 x dx$

8. $\int \frac{dx}{x^2 \sqrt{4 - x^2}}$

9. $\int_0^4 \frac{dx}{1 + \sqrt{4 - x}}$

10*. $y = \sqrt{x - 1}; y = 1; x = 5.$

Вариант 8

1. $\int \frac{x^3 + 1}{x^2 + 5} dx$

2. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} (20 - 8x) \sin 2x dx$

3. $\int \arcsin(3x) dx$

4. $\int (2x + 3) e^{-4x} dx$

5. $\int \cos^5 3x dx$

6. $\int \frac{dx}{x^2 \sqrt{9 + x^2}}$

7. $\int \frac{2x - 3}{x^2 - 6x + 34} dx$

8. $\int \frac{2x^2 - 3x + 4}{x(x - 1)(x + 2)} dx$

9. $\int_0^4 \frac{dx}{1 + \sqrt{2x + 1}}$

10*. $y = \log_2 x; y = 0; x = 8.$

Вариант 9

1. $\int \frac{x^3 + 16}{x^2 + 2} dx$

2. $\int_0^{\frac{\pi}{6}} (4 - x) \sin 3x dx$

3. $\int (3 - x) e^{x+3} dx$

4. $\int \operatorname{arctg} \frac{x}{3} dx$

5. $\int \frac{\cos^5 x}{\sin^6 x} dx$

6. $\int \frac{x^4 dx}{\sqrt{9 - x^2}}$

7. $\int \frac{19 - 4x}{x^2 + 4x + 5} dx$

8. $\int \frac{x - 12}{x^2 (x + 4)} dx$

9. $\int_0^6 \frac{dx}{1 + \sqrt{2x + 4}}$

10*. $y = \sin x; y = 0;\ x = \frac{\pi}{6};\ x = \frac{\pi}{2}.$

Вариант 10

1. $\int \frac{x^2+2x}{x^2+1}dx$

2. $\int_0^{\pi} x\cos\frac{x}{2}dx$

3. $\int (3x+1)e^{2x}dx$

4. $\int \frac{\ln(x+1)}{(x+1)^2}dx$

5. $\int \frac{\sin^3 x}{\cos^2 x}dx$

6. $\int \frac{x^2dx}{\sqrt{(16+x^2)^3}}$

7. $\int \frac{2x+2}{x^2+10x+26}dx$

8. $\int \frac{2x^2-x+1}{(x-1)(x^2+3)}dx$

9. $\int_1^5 \frac{dx}{\sqrt{3x+1}+1}$

10*. $y=\cos x; y=0;\ x=0;\ x=\frac{\pi}{4}$

ТЕМЫ РЕФЕРАТОВ

1. Связь математики с другими науками.
2. Способы вычисления интегралов.
3. Определение элементарных функций.
4. Двойные интегралы и полярные координаты.
5. Запись и вычисление дифференциальных уравнений.
6. История появления комплексных чисел.
7. Сущность линейной зависимости векторов».
8. Математические головоломки и игры: сущность, значение и виды.
9. Основы математического анализа.
10. Основные концепции математического моделирования.
11. Математическое программирование: сущность и значение.
12. Методы решения линейных уравнений.
13. Методы решения нелинейных уравнений.
14. Основополагающие концепции математической статистики.
15. Определение уравнения переходного процесса.
16. Применение кратных либо тройных интегралов.
17. Решение смешанных математических задач.
18. Вычисление тригонометрических неравенств.
19. Математическая философия Аристотеля.
20. Основные тригонометрические формулы.
21. Математик Эйлер и его научные труды.
22. Определение экстремумов функций многих переменных.
23. Декарт и его математические труды.
24. Основные концепции математики.
25. Развитие логики и мышления на уроках математики.
26. Современные открытия в области математики.
27. Пределы и производные: сущность, значение, вычисление.

ОСНОВНАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Хамидуллин Р.Я. Математика. Базовый курс: учебник / Хамидуллин Р.Я., Гулиян Б.Ш.. — Москва: Университет «Синергия», 2019. — 720 с. — ISBN 978-5-4257-0386-6. — Текст: электронный // Электронно-библиотечная система IPR BOOKS: [сайт]. — URL: http://www.iprbookshop.ru/101347.html (дата обращения: 31.03.2021). — Режим доступа: для авторизир. пользователей

ДОПОЛНИТЕЛЬНАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Громов А.И. Математика: учебное пособие / Громов А.И., Кузьминов В.И.. — Москва: Российский университет дружбы народов, 2018. — 504 с. — ISBN 978-5-209-07511-0. — Текст: электронный // Электронно-библиотечная система IPR BOOKS: [сайт]. — URL: http://www.iprbookshop.ru/91022.html (дата обращения: 31.03.2021). — Режим доступа: для авторизир. пользователей
2. Задохина Н.В. Математика и информатика. Решение логико-познавательных задач: учебное пособие для студентов вузов / Задохина Н.В.. — Москва: ЮНИТИ-ДАНА, 2017. — 127 с. — ISBN 978-5-238-02661-9. — Текст: электронный // Электронно-библиотечная система IPR BOOKS : [сайт]. — URL: http://www.iprbookshop.ru/81654.html (дата обращения: 31.03.2021). — Режим доступа: для авторизир. пользователей

КАППУШЕВА Мариям Шабагановна
УЗДЕНОВА Джамиля Дахировна

МАТЕМАТИКА

Учебно-методическое пособие
для обучающихся 1 курса по специальности
33.05.01 – Фармация

Корректор Чагова О.Х.
Редактор Чагова О.Х.

Сдано в набор 26.08.2024 г.
Формат 60х84/16
Бумага офсетная.
Печать офсетная.
Усл. Печ. л. 2,09
Заказ № 4952
Тираж 100 экз.

Оригинал-макет подготовлен
в Библиотечно-издательском центре СКГА
369000, г. Черкесск, ул. Ставропольская, 36