

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ  
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

СЕВЕРО-КАВКАЗСКАЯ ГОСУДАРСТВЕННАЯ АКАДЕМИЯ

Н.Х. Кятов

# **СТРОИТЕЛЬНАЯ МЕХАНИКА**

**СТАТИЧЕСКИ ОПРЕДЕЛИМЫЕ СТЕРЖНЕВЫЕ СИСТЕМЫ**

Учебное пособие для бакалавров направления подготовки  
08.03.01 Строительство

Черкесск, 2025

УДК 624.04  
ББК 38.112  
К 99

Рассмотрено на заседании кафедры «Строительства и управления недвижимостью»

Протокол № 1 от «06» сентября 2024 г.

Рекомендовано к изданию редакционно-издательским советом СКГА.

Протокол № 27 от «07» ноября 2024 г.

**Рецензенты:**

Байрамуков С.Х. – д.т.н., проф. зав. кафедрой строительства и управления недвижимостью Северо-Кавказской государственной академии

Урчуков М.К. – руководитель проекта по строительству канатных дорог ООО ИСК «Кубанское» (Общество с ограниченной ответственностью инвестиционно-строительная компания «Кубанское»)

К 99      **Кятов, Н.Х.** Строительная механика. Статически определимые стержневые системы: учебное пособие для бакалавров направления подготовки 08.03.01 Строительство / Н.Х. Кятов. – Черкесск: БИЦ СКГА, 2025. – 176 с.

В учебном пособии приведены основные сведения по расчету статически определимых многопролетных балок, рам и арок на неподвижную и подвижную нагрузки. Рассмотрены примеры определения перемещений по формуле Мора и способом Верещагина с подробными решениями. Приведены многочисленные вопросы для самоконтроля и примеры для самостоятельного решения.

Учебное пособие соответствует требованиям государственных образовательных стандартов по строительной механике для студентов, обучающихся по направлению подготовки 08.03.01 «Строительство» всех форм обучения. Может быть полезно студентам и магистрантам строительных и других специальностей.

**УДК 624.04**  
**ББК 38.112**

© Кятов Н.Х., 2025  
© ФГОУ ВО СКГА, 2025

## ОГЛАВЛЕНИЕ

|  |     |
|--|-----|
| Введение   | 4   |
| Глава 1. Многопролетные шарнирно-консольные статически<br>определимые балки          | 6   |
| 1.1. Кинематический анализ стержневых систем   | 7   |
| 1.2. Построение эпюр внутренних усилий и определение перемещений                     | 11  |
| 1.3. Построение линий влияния и определение усилий по линиям<br>влияния              | 55  |
| Глава 2. Статически определимые рамы   | 102 |
| 2.1. Построение эпюр внутренних усилий и определение перемещений<br>и углов поворота | 103 |
| Глава 3. Статически определимые арки   | 150 |
| 3.1. Геометрические характеристики арок  | 150 |
| 3.2. Расчет трехшарнирных арок на неподвижную нагрузку                               | 152 |
| 3.3. Построение линий влияния и определение усилий по линиям<br>влияния              | 164 |
| Список использованной литературы   | 472 |
| Приложение. Справочно-нормативные материалы  | 173 |

## ВВЕДЕНИЕ

Любое сооружение состоит из множества различных конструктивных элементов и деталей, которые делятся на несущие и ограждающие. Несущие конструкции воспринимают действующие на них разнообразные нагрузки и через фундамент передают на землю.

Расчет реальных сооружений с точным учетом всех форм и геометрических размеров его несущих элементов, а также их взаимодействия между собой теоретически недоступен, и поэтому строительная механика использует метод научной абстракции, заменяя сооружения их расчетными схемами, упрощающими изображение его элементов и связей между элементами и отражающими наиболее важные свойства, которые определяют поведение действительного сооружения под нагрузкой, например, железобетонные перемычки над окнами и дверями, железобетонные балки перекрытия и ригеля и аналогичные строительные конструкции заменяются стержнем с различными опорными связями на концах, железобетонные фермы заменяются шарнирно-стержневыми фермами, железобетонный каркас с колоннами, балками, ригелями и плитами заменяется стержневой рамой и т.п. Реальные опорные устройства и связи между строительными конструкциями сооружения заменяются идеальными связями [2].

В качестве простейшего примера рассмотрим составление расчетной схемы для железобетонной перемычки оконного или дверного проема в кирпичной самонесущей стене (рис. 1, а). Железобетонная перемычка устанавливается горизонтально на кирпичные стены оконного проема на цементно-песчаном растворе. Затем продолжается кладка кирпичной стены, и железобетонная балка постепенно нагружается. Вес кирпичной кладки и собственный вес железобетонной перемычки воздействуют на балку в виде распределенной нагрузки с интенсивностью  $q$ .

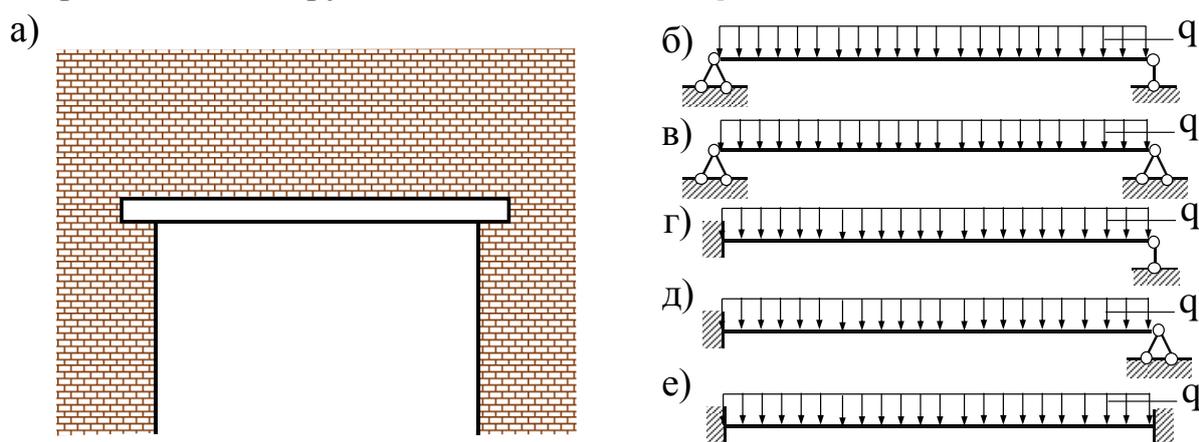


Рисунок 1– Возможные расчетные схемы железобетонной перемычки.

Самая простая расчетная схема (рис. 1, б) представляет собой балку на двух опорах. Левая опора шарнирно-неподвижная, а правая – шарнирно-подвижная и имеет возможность горизонтального перемещения. Самая сложная (рис. 1, е) – балка с защемленными в стену концами. В зависимости

от выбранной расчетной схемы получим соответствующие изгибающие моменты и поперечные силы, по которым и определяются размеры поперечного сечения балки и рабочей арматуры.

Целью учебного пособия «Строительная механика. Статически определимых стержневых систем» является подготовка квалифицированных специалистов с профессиональными навыками и умениями в области расчета и проектирования конструкций зданий и сооружений промышленного и гражданского строительства с умением оценивать их прочность и надежность. Основной задачей расчетного проектирования отдельных строительных конструкций является ограничение напряжений и деформаций в конструкциях, предельными значениями, обеспечивающих безотказную их эксплуатацию.

Для более успешного освоения материала и работу строительных конструкций под нагрузкой во всех темах учебного пособия приведены примеры расчета стержневых систем с подробными решениями, способствующие выработке практических умений и навыков решения характерных задач.

## **ГЛАВА 1. МНОГОПРОЛЕТНЫЕ ШАРНИРНО-КОНСОЛЬНЫЕ СТАТИЧЕСКИ ОПРЕДЕЛИМЫЕ БАЛКИ.**

Одним из типовых элементов строительных конструкции зданий и сооружений является стержневая система. Стержневые системы – расчетные схемы, моделирующие работу сооружения стержнями, используются в конструкции балок, рам, арок, ферм и комбинированных систем. Основным элементом такой системы является стержень. Стержнем – прямолинейный или криволинейный брус, называется тело, у которого один размер значительно больше двух других. Стержни могут работать на растяжение и сжатие, изгиб и кручение. Стержни, работающие в основном на изгиб, называются балками.

В стержневых системах стержни соединяются друг с другом в узлах. Узел – точка пересечения осей двух или более стержней, может быть шарнирным или жестким.

Стержневая система называется фермой – вид системы с шарнирными узлами, если допустимо считать, что узлами соединения стержней являются шарниры и нагрузки приложены только к узлам. Если оси стержней прямолинейны, то стержни при этих условиях будут работать только на растяжение-сжатие.

Стержневая система называется рамой – вид системы, состоящая из прямолинейных стержней, соединенных жесткими и частично шарнирными узлами, элементы которой испытывают все виды плоской деформации. Стержни в рамах кроме растяжения-сжатия работают также на сдвиг и изгиб, а в пространственных рамах – и на кручение.

Изгибающий момент и поперечная сила – это внутренние силовые факторы, возникающий в элементах строительных конструкций, работающих на изгиб: балки, рамы, арки, плиты и т.д. Определение изгибающих моментов и поперечных сил является неотъемлемой частью любого расчета строительных конструкций, работающих на изгиб. Эпюры изгибающих моментов и поперечных сил строят для наглядной визуализации их распределения и выявления наиболее опасных и подверженных разрушению мест элементов строительных конструкций.

Для определения изгибающих моментов и поперечных сил используется метод сечений, по которому считается, что если, например, балка находится в равновесии, то и любая часть этой балки также должна находиться в равновесии, если действие каждой части друг на друга, заменить равными внутренними силовыми факторами. Используя этот метод вместе с уравнениями равновесия, можно определить изгибающий момент и поперечную силу в любом сечении. Более подробно этот метод рассмотрим на ряде примеров.

## 1.1. Кинематический анализ стержневых систем.

Задача кинематического анализа – определить, является ли изучаемая стержневая система геометрически неизменяемой, поскольку только геометрически неизменяемая стержневая система может воспринимать внешнюю нагрузку. Геометрически неизменяемой называется такая стержневая система, которая при воздействии внешней нагрузки изменяет свою конфигурацию только за счет деформации стержней [1, 2, 4].

Судить о геометрической изменяемости можно по числу степеней свободы стержневой системы. Для плоской стержневой системы число степеней свободы определяем по формуле Чебышева:

$$W = 3D - 2Ш - C_0, \quad (1.1)$$

где  $D$  – число дисков – отдельные стержни, геометрически неизменяемые части системы;

$Ш$  – число простых одиночных шарниров;

$C_0$  – число опорных стержней.

Простой шарнир соединяет два стержня с помощью шарнира. Кратный шарнир соединяет  $n$  стержней и эквивалентен  $(n - 1)$  простому шарниру. Например, на рисунке 1.1 приведены простые шарниры (а и б) и кратные шарниры (в и г). Кратный шарнир (рис. 1.1, в) соединяет три стержня значит он эквивалентен двум простым стержням:  $Ш = n - 1 \Leftrightarrow Ш = 3 - 1 \Leftrightarrow Ш = 2$ . Кратный шарнир (рис. 1.1, г) соединяет четыре стержня значит он эквивалентен трем простым стержням:  $Ш = n - 1 \Leftrightarrow Ш = 4 - 1 \Leftrightarrow Ш = 3$ .

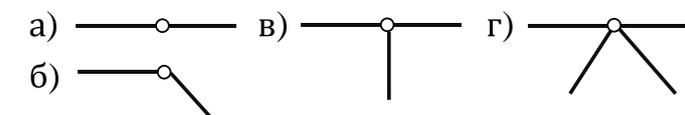


Рисунок 1.1– Схемы простых и кратных шарниров

Для плоских шарнирно-стержневых конструкций (ферм) число степеней свободы можно определить по формулам:

$$W = 2У - C, \quad (1.2)$$

где  $У$  – число узлов;

$C$  – число всех стержней.

Возможны три следующие варианта числа степеней свободы стержневой системы:

1)  $W > 0$  – система является геометрически изменяемой и не имеет достаточного числа связей для геометрической неизменяемости;

2)  $W = 0$  – система является геометрически неизменяемой и имеет необходимое число связей для геометрической неизменяемости;

3)  $W < 0$  – система является геометрически неизменяемой, но имеет лишние связи.

Условие  $W \leq 0$  не является достаточным, т.к. геометрическая неизменяемость стержневой системы обеспечивается не только необходимым количеством стержней, но и их расположением в стержневой системе.

Геометрически неизменяемая элементарная часть плоской шарнирной конструкции образуется узлом с двумя присоединенными к нему стержнями, не лежащими на одной прямой. Кроме того, для обеспечения геометрической неизменяемости плоская стержневая система должна иметь не менее трех опорных стержней-связей, поскольку она обладает тремя степенями свободы. При этом все опорные стержни не должны пересекаться в одной точке и не должны быть параллельными.

**Пример 1.1.** Рассмотрим плоскую стержневую конструкцию, показанную на рис.1.2, а.

Найдем количество узлов и стержней:  $У = 6$ ,  $С = 12$  (9 стержней в самой конструкции и 3 опорных стержня). По формуле (1.2) определим число степеней свободы:

$$W = 2У - С \Leftrightarrow W = 2 \cdot 6 - 12 \Leftrightarrow W = 0.$$

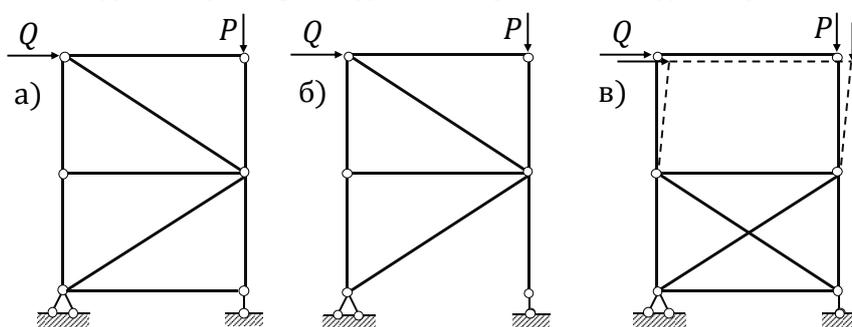


Рисунок 1.2– Геометрически неизменяемая а) и изменяемая б) и в) система.

Таким образом, плоская стержневая конструкция имеет необходимое число связей для геометрической неизменяемости, т.е. вся система неподвижна, геометрически неизменяема и статически определима.

Теперь удалим нижний стержень (рис. 1.2, б). На первый взгляд может показаться, что система осталась геометрически неизменяемой: также система состоит из жестких шарнирно соединенных треугольников, препятствующих геометрическому изменению. Количество узлов не изменилось:  $У = 6$ , а количество стержней уменьшилось:  $С = 11$ . По формуле (1.2) определим число степеней свободы:

$$W = 2У - С \Leftrightarrow W = 2 \cdot 6 - 11 \Leftrightarrow W = 1 > 0.$$

Получается, что плоская стержневая конструкция стала геометрически изменяемой и не имеет достаточного числа связей для геометрической неизменяемости.

Теперь переместим один из стержней – верхний раскос, вниз (рис. 1.2, в). При этом количество узлов и стержней не изменилось, следовательно, и число степеней свободы, но стержневая система стала геометрически изменяемой – верхняя часть системы может наклоняться влево или вправо. Следовательно, данный пример наглядно показывает, что условие  $W \leq 0$  не является достаточным условием геометрической неизменяемости стержневой системы.

**Пример 1.2.** Рассмотрим плоскую шарнирно-стержневую ферму, показанную на рис. 1.3, а.

Найдем количество узлов и стержней:  $У = 6$ ,  $С = 11$ . По формуле (1.2) определим число степеней свободы:

$$W = 2У - С \Leftrightarrow W = 2 \cdot 6 - 11 \Leftrightarrow W = 1 > 0.$$

Ферма является геометрически изменяемой и не имеет достаточного числа связей для геометрической неизменяемости, т.е. не хватает одного стержня (рис. 1.3, б).

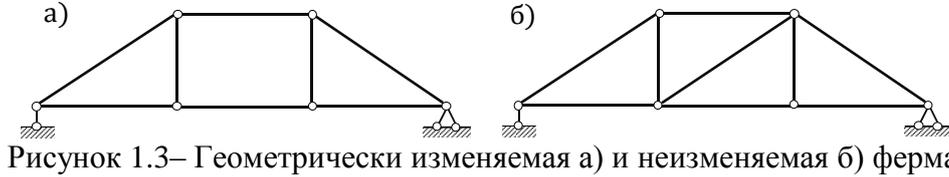


Рисунок 1.3– Геометрически изменяемая а) и неизменяемая б) ферма.

**Пример 1.3.** Рассмотрим двух пролётную балку, показанную на рис. 1.4, а.

Найдем количество стержней, простых шарниров и опорных стержней:  $Д = 3$ ,  $Ш = 2$  и  $С_0 = 5$ . По формуле (1.1) определим число степеней свободы:

$$W = 3Д - 2Ш - С_0 \Leftrightarrow W = 3 \cdot 3 - 2 \cdot 2 - 5 \Leftrightarrow W = 0.$$

Значит, двух пролётная балка неподвижна, геометрически неизменяема и статически определима.

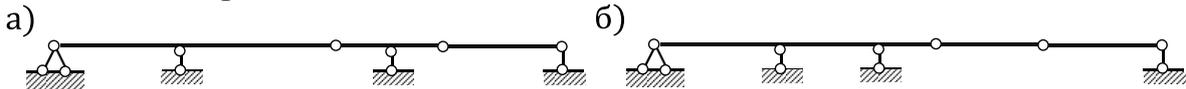


Рисунок 1.4– Геометрически неизменяемая а) и изменяемая б) двух пролётная балка.

Теперь вторую опорную связь справа переместим влево (рис. 1.3, б). Число дисков, простых шарниров и опорных стержней остались прежние, а система стала геометрически изменяемой, так как простой шарнир справа может под действием нагрузки получить вертикальное перемещение. Отсюда следует, что кинематический анализ не является достаточным. Он оперирует только количественным соотношением параметров в формуле (1.1), не выявляя качественного характера геометрической структуры стержневой системы. Поэтому необходим еще и структурный анализ.

**Пример 1.4.** Рассмотрим двух пролётную раму, показанную на рис. 1.5. Выполним аналитический и геометрический (структурный) анализ стержневой системы.

Найдем количество дисков, простых шарниров и опорных стержней:  $Д = 3$  (диски АГ, ГБД, ДВ),  $Ш = 2$  (шарниры Г, Д) и  $С_0 = 5$  (заделка А – 3 связи, опоры Б и В по 1 связи). По формуле (1.1) определим число степеней свободы:

$$W = 3Д - 2Ш - С_0 \Leftrightarrow W = 3 \cdot 3 - 2 \cdot 2 - 5 \Leftrightarrow W = 0.$$

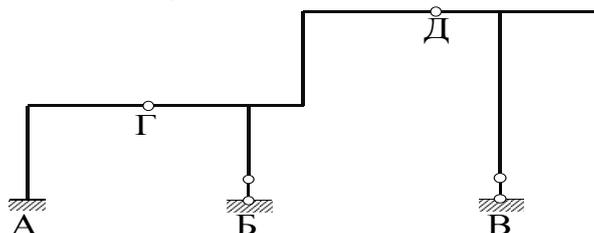


Рис. 1.5– Схема двухпролётной плоской рамы

Значит, двух пролетная рама по аналитическому признаку неподвижна, геометрически неизменяема и статически определима. Этого как было показано в предыдущих примерах недостаточно, поэтому выполним геометрический (структурный) анализ рамы.

Диск АГ при помощи заделки А жестко присоединен к земле и составляет с ней единый неподвижный диск (рис. 1.4). Если провести параллель с поэтажной схемой многопролетной шарнирной балки, то диск АГ в данном примере является консольной (анкерной) балкой. Диск ГБД при помощи шарнира Г и стержня опоры Б присоединен к земле и диску АГ. Шарнир Г заменяется двумя опорными связями с неподвижным диском АГ, что делает диск ГБД также неподвижным относительно земли. Значит, соединение дисков АГ и ГБД является геометрически неизменяемым. Диск ДВ при помощи шарнира Д и стержня опоры В присоединен к земле и диску ГБД. Шарнир Д также заменяется двумя опорными связями с диском ГБД, что делает диск ДВ также неподвижным относительно земли. Таким образом аналитический и геометрический (структурный) анализ рамы показали, что вся система неподвижна, геометрически неизменяема и статически определима.

**Пример для самостоятельного решения.**

Выполнить кинематический и структурный анализ систем, представленных на рис. 1.6.

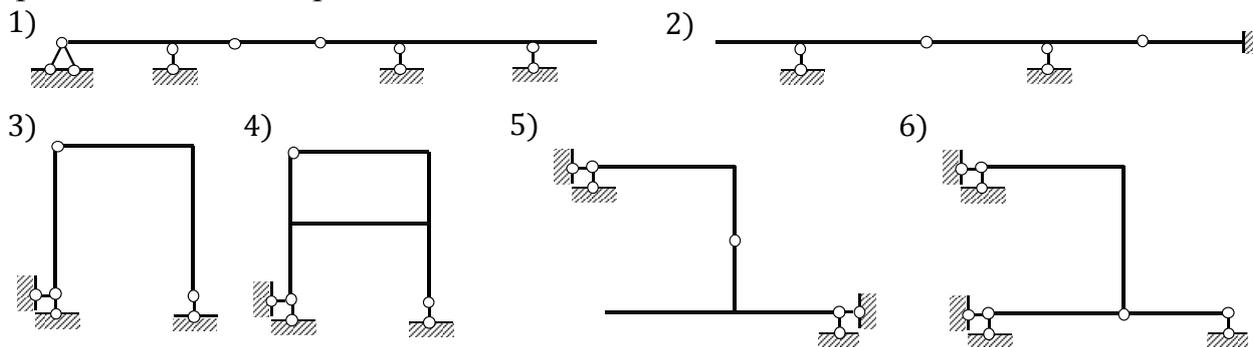


Рисунок 1.6– Схемы стержневых систем.

**Вопросы для самоконтроля.**

1. Что представляют с собой расчетная схема сооружения?
2. Этапы и алгоритм проведения кинематического анализа расчетных схем стержневых систем.
3. Что называется геометрически неизменяемой стержневой системой?
4. Что называют степенью свободы стержневой системой?
5. На сколько уменьшает степень свободы один стержень с шарнирными концами и простой шарнир, соединяющий два стержня?
6. Что представляют с собой простой шарнир и кратный шарнир?
7. Как определяется степень свободы многопролетной шарнирно-консольной балки?
8. Что называют мгновенно изменяемыми системами?

9. Что называют статически определимой стержневой системой?
10. Какие внешние признаки характеризуют мгновенную изменяемость стержневых систем?
11. Можно ли через число простых шарниров определить кратность шарнира?
12. Какие типы опор используются для соединения стержневой системы с основанием?
13. Как называется стержневая система с числом степеней свободы  $W = -1$ ?
14. Как называется стержневая система с числом степеней свободы  $W = 1$ ?
15. Можно ли из статически неопределимой стержневой системы получить статически определимую и каким образом?
16. Для чего проводится кинематический и структурный анализ?
17. Какой шарнир называется простым, а какой – кратным (сложным)?
18. Скольким простым шарнирам эквивалентен шарнир, соединяющий четыре стержня?
19. Скольким кинематическим связям эквивалентна шарнирно неподвижная опора, абсолютно жесткая заделка и подвижная заделка?
20. Сколько опорных стержней необходимо для присоединения одного стержня к основанию?
21. Сколько опорных стержней необходимо для присоединения двух стержней, соединенных простым шарниром, к основанию?

## **1.2. Построение эпюр внутренних усилий и определение перемещений.**

В данном параграфе рассмотрим примеры расчета многопролетных шарнирно-консольных статически определимых балок [1, 2, 4]. Расчет консольных и двухопорных балок изучается в курсе сопротивления материалов [3].

Для удобства расчета и наглядности представления о характере работы каждого элемента многопролетной статически определимой балки строится поэтажная схема. Простой шарнир, используемый в таких балках эквивалентен шарнирно-неподвижной опоре по числу связей и степеней свободы. Заменяя шарниры в балке на шарнирно-неподвижные опоры, можно построить поэтажную схему, позволяющую рассчитывать и строить эпюры изгибающих моментов и поперечных сил для балок каждого яруса в отдельности, начиная с верхнего этажа.

**Пример 1.5.** Для многопролетной шарнирно-консольной балки, приведенной на рис. 1.7 необходимо:

- 1) выполнить кинематический анализ балки;
- 2) построить поэтажную схему балки;
- 3) построить эпюры изгибающих моментов и поперечных сил:

а) определить реакции всех связей балки от действия заданной нагрузки;

б) построить эпюру поперечных сил от действия заданной нагрузки;

в) построить эпюру изгибающих моментов от действия заданной нагрузки;

4) определить перемещения используя формулу Мора и способ Верещагина:

а) определить угол поворота для сечений «1, 2, 3 и 4»;

б) определить прогиб для сечений «3 и 5».

Исходные данные:  $M = 10$  кНм,  $P = 3$  кН,  $q = 4$  кН/м, размеры даны в метрах.

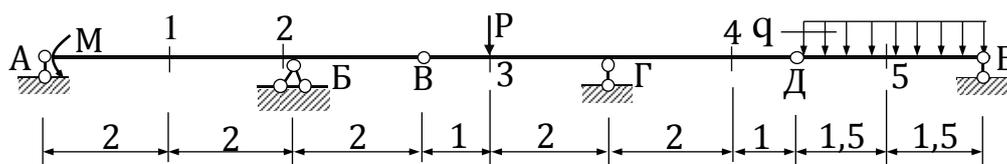


Рисунок 1.7– Расчетная схема.

### 1. Кинематический анализ многопролетной шарнирно-консольной балки.

Найдем количество дисков  $D$ , простых шарниров  $Ш$  и опорных стержней  $C_0$ :  $D = 3$  (диски АВ, ВД и ДЕ),  $Ш = 2$  (шарниры В и Д) и  $C_0 = 5$  (опора Б – 2 связи, опоры А, Г и Е по 1 связи). По формуле (1.1) определим число степеней свободы:

$$W = 3D - 2Ш - C_0 \Leftrightarrow W = 3 \cdot 3 - 2 \cdot 2 - 5 \Leftrightarrow W = 0.$$

Значит, трехпролетная шарнирно-консольная балка по аналитическому признаку неподвижна, геометрически неизменяема и статически определима.

Выполним геометрический (структурный) анализ шарнирно-консольной балки.

Диск АВ, являющийся анкерной балкой, при помощи трех стержней, непересекающихся в одной точке, (опоры А и Б) присоединен к земле и составляет с ней единый неподвижный диск (рис. 1.7). Диск ВД при помощи шарнира В и стержня опоры Г присоединен к земле и диску АВ (ось стержня не проходит через шарнир). Шарнир В заменяется двумя опорными связями с неподвижным диском АВ, что делает диск ВД также неподвижным относительно земли. Значит, соединение дисков АВ и ВД является геометрически неизменяемым. Диск ДЕ при помощи шарнира Д и стержня опоры Е присоединен к земле и диску ВД. Шарнир Д также заменяется двумя опорными связями с диском ВД, что делает диск ДВ также неподвижным относительно земли. Таким образом аналитический и геометрический (структурный) анализ балки показали, что вся система неподвижна, геометрически неизменяема и статически определима.

## 2. Построение поэтажной схемы трех пролетной шарнирно-консольной балки.

Для построения поэтажной схемы необходимо сначала выделить главную анкерную балку. Для этого нужно мысленно удалить шарниры, соединяющие балки (диски) между собой (рис. 1.8).

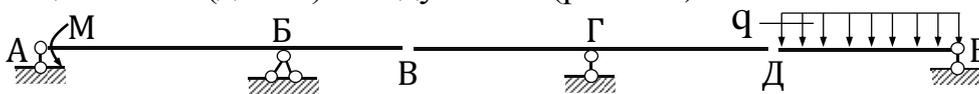


Рисунок 1.8– Расчетная схема без шарниров.

Из трех полученных балок только одна балка способна самостоятельно воспринимать нагрузку – это балка АБВ, имеющая две шарнирные опоры А и В с землей (рис. 1.8). Она и есть главная анкерная балка, на которую поэтажно опираются остальные балки. Второстепенные балки (ВГД и ДЕ) не могут самостоятельно воспринимать нагрузку так как имеют только по одной опоре Г и Е. Недостающими опорами для них служат соединительные шарниры. После построения поэтажной схемы заданную балку можно рассматривать как ряд простых балок (рис. 1.9).

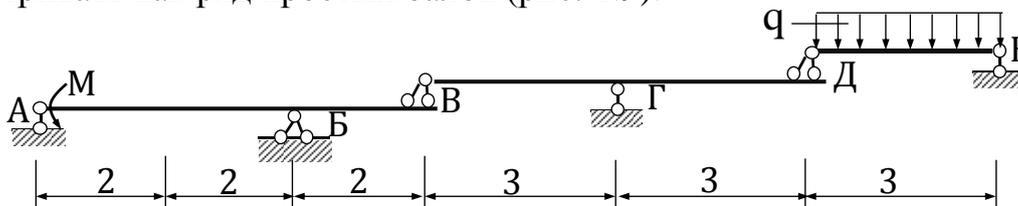


Рисунок 1.9– Поэтажная схема.

Нагрузка, приложенная к балкам нижнего яруса поэтажной схемы, не вызывает усилий в вышележащих балках. Например, если приложить нагрузку на консоль балки АБВ, то консоль будет прогибаться и балка АБВ будет изгибаться. Балки ВГД и ДЕ не будут изгибаться, а просто будут поворачиваться на шарнирах В, Д и Е. Поэтому расчёт начинается с самых верхних балок (рис. 1.9), после которых по очереди рассматриваются нижележащие балки.

### 3. Построение эпюр изгибающих моментов и поперечных сил.

Расчет начинаем с самой верхней балки ДЕ (рис. 1.10), так как она воспринимает только нагрузку, приложенной непосредственно к ней и на нее не влияют нагрузки, действующие на другие балки, расположенные на нижних этажах.

а) *Определение опорных реакций балки от действия заданной нагрузки.*

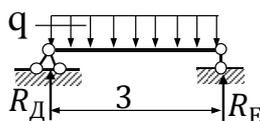


Рисунок 1.10– Расчетная схема балки ДЕ.

Так как балка ДЕ статически определима и геометрически неизменяема, то опорные реакции  $R_D$  и  $R_E$  можно определить из уравнений

равновесия. Сперва вспомним правило знаков при составлении уравнений моментов. Если сила (сосредоточенная, распределенная, момент сил, опорная реакция), действующая на балку, дает момент, направленный по часовой стрелке, то в уравнении суммы моментов ставят знак плюс, а если против часовой стрелки – знак минус. Устанавливаем направления действия опорных реакций  $R_D$  и  $R_E$ . Нагрузка равномерна распределена по длине балки и направлена вниз, значит опорные реакции направлены вверх. Составляем уравнения равновесия относительно шарниров Д и Е:

$$\sum M_D = 0; -R_E \cdot 3 + q \cdot 3 \cdot \frac{3}{2} = 0 \Leftrightarrow R_E \cdot 3 = 4 \cdot 3 \cdot \frac{3}{2} \Leftrightarrow R_E = 6 \text{ кН};$$

$$\sum M_E = 0; R_D \cdot 3 - q \cdot 3 \cdot \frac{3}{2} = 0 \Leftrightarrow R_D \cdot 3 = 4 \cdot 3 \cdot \frac{3}{2} \Leftrightarrow R_D = 6 \text{ кН}.$$

Для проверки верности определения опорных реакций проектируем все силы, действующие на балку ДЕ на вертикальную ось:

$$\sum z = 0; q \cdot 3 - R_D - R_E = 0 \Leftrightarrow 4 \cdot 3 - 6 - 6 = 0 \Leftrightarrow 0 = 0.$$

Значит, опорные реакции определены правильно.

б) *Построение эпюры поперечных сил балки от действия заданной нагрузки.*

Сперва вспомним правило знаков для поперечных сил из курса сопротивления материалов [3]. Если внешняя сила (сосредоточенная, распределенная, опорная реакция), лежащая по левую сторону от сечения, направлена вверх, то поперечная сила, возникающая в сечении, считается положительной, а если направлена вниз – отрицательной. Например, на расстоянии  $x$  от левой опоры проведем сечение  $a$ , разделим балку мысленно на две части и рассмотрим равновесие левой части (рис. 1.11).

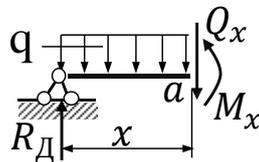


Рисунок 1.11– Расчетная схема для определения  $Q_x$  балки ДЕ.

Внутренние силовые факторы  $Q_x$  и  $M_x$ , приложенные в сечении  $a$ , мысленно удерживают левую часть балки и определяются из уравнений равновесия. Значения этих величин не зависят от того, рассматриваются ли условия равновесия правой или левой части балки, а зависит от нагрузки и места расположения сечения, где они определяются. Опорная реакция  $R_D$  направлена вверх (рис. 1.11), тогда поперечная сила, возникающая от этой силы, положительная. Распределенная нагрузка направлена вниз, тогда поперечная сила, возникающая от этой силы, отрицательная.

В соответствии с правилом знаков определяем значения поперечных сил в характерных точках (в точке бесконечно близкой к опоре Д справа  $Q_D$ , в точке середины пролета  $Q_{l/2}$  и в точке бесконечно близкой к опоре Е слева  $Q_E$ ) и строим эпюру поперечных сил (рис. 1.12).

$$1) Q_D = R_D = 6 \text{ кН}.$$

$$2) Q_{l/2} = Q_D - q \cdot \frac{l}{2} \Leftrightarrow Q_{l/2} = 6 - 4 \cdot \frac{3}{2} \Leftrightarrow Q_{l/2} = 0.$$

$$3) Q_E = Q_D - q \cdot l \Leftrightarrow Q_E = 6 - 4 \cdot 3 \Leftrightarrow Q_E = -6 \text{ кН.}$$

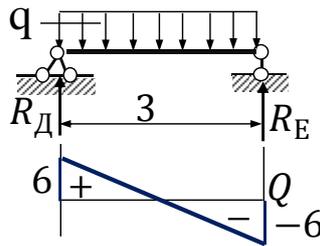


Рисунок 1.12– Эпюра поперечных сил  $Q$  балки ДЕ.

в) *Построение эпюры изгибающих моментов балки от действия заданной нагрузки.*

Сперва вспомним правило знаков для изгибающих моментов из курса сопротивления материалов [3]. Изгибающий момент считается положительным, если внешняя сила или внешний момент изгибает балку выпуклостью вниз (т.е. если у балки растянуты нижние волокна), и отрицательным – если выпуклостью вверх.

Балка ДЕ неподвижна, геометрически неизменяема, статически определима и находится в равновесии. Значит любая часть балки под действием внешних сил и внутренних усилий также должна находиться в равновесии. Мысленно вырежем левую часть балки длиной  $x$ . Прикладываем внешнюю нагрузку и возникающие усилия  $M_x$  и  $Q_x$  в месте сечения и рассмотрим ее равновесие (рис. 1.13). Опорная реакция  $R_D$  изгибает балку выпуклостью вниз (рис. 1.11), значит изгибающий момент, возникающий от этой силы, положительный. Распределенная нагрузка изгибает балку выпуклостью вверх, тогда изгибающий момент, возникающий от этой силы, отрицательный.

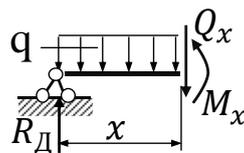


Рисунок 1.13– Расчетная схема для определения  $M_x$  балки ДЕ.

Определяем ординаты эпюры изгибающих моментов  $M$  из уравнений равновесия:

$$\sum M = 0; M_x = R_D \cdot x - q \cdot x \cdot \frac{x}{2} \Leftrightarrow M_x = 6 \cdot x - 4 \cdot \frac{x^2}{2}.$$

Находим значения изгибающих моментов в различных характерных сечениях балки: 1) при  $x = 0$ ,  $M_x = 0$ ; 2) при  $x = 1,5$  м,  $M_x = 6 \cdot 1,5 - 4 \cdot \frac{1,5^2}{2} \Leftrightarrow M_x = 4,5$  кНм; 3) при  $x = 3$  м,  $M_x = 0$  (рис. 1.14).

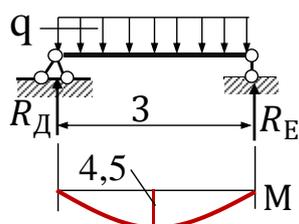


Рисунок 1.14– Эпюра изгибающих моментов балки ДЕ.

**Рассмотрим следующую балку ВД** (рис. 1.15), расположенную ниже балки ДЕ. Опорное давление  $R_D$  прикладываем к балке ВД с противоположным направлением. Устанавливаем направления действия опорных реакций  $R_B$  и  $R_G$ . Сосредоточенные силы  $R_D$  и  $P$ , расположенные справа и слева от опоры Г, направлены вниз, значит опорная реакция  $R_G$  направлена вверх. Рассмотрим действующие на балку силы  $R_D$  и  $P$  относительно опоры Г. Сила  $R_D$  имеет большее значение, чем сила  $P$ , и имеет большее плечо и вызывает момент по часовой стрелке. Следовательно, для уравновешивания балки опорная реакция  $R_B$  должна вызывать момент против часовой стрелки, т.е. опорная реакция  $R_B$  должна быть направлена вниз (рис. 1.15).

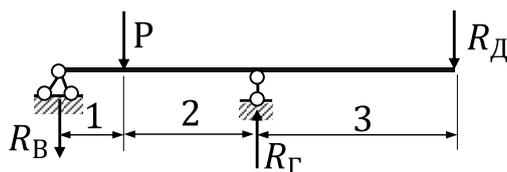


Рисунок 1.15– Расчетная схема балки ВГД.

а) *Определение опорных реакций балки от действия нагрузки.*

Опорные реакции  $R_B$  и  $R_G$  определяем из уравнений равновесия:

$$\sum M_B = 0; P \cdot 1 - R_G \cdot 3 + R_D \cdot 6 = 0 \Leftrightarrow R_G \cdot 3 = 3 \cdot 1 + 6 \cdot 6 \Leftrightarrow R_G = 13 \text{ кН};$$

$$\sum M_G = 0; -R_B \cdot 3 - P \cdot 2 + R_D \cdot 3 = 0 \Leftrightarrow R_B \cdot 3 = 6 \cdot 3 - 3 \cdot 2 \Leftrightarrow R_B = 4 \text{ кН}.$$

Проверяем верность определения опорных реакций. Спроектируем все силы, действующие на балку ВГД на вертикальную ось:

$$\sum z = 0; R_D + P - R_G + R_B = 0 \Leftrightarrow 6 + 3 - 13 + 4 = 0 \Leftrightarrow 0 = 0.$$

Следовательно, опорные реакции определены правильно.

б) *Построение эпюры поперечных сил балки от действия нагрузки.*

Определяем значения поперечных сил в характерных точках (в точке бесконечно близкой к опоре В справа  $Q_B$  и в точках бесконечно близких к опоре Г слева  $Q_G^I$  и справа  $Q_G^{II}$ ) с учетом правила знаков и строим эпюру поперечных сил (рис. 1.16):

$$1) Q_B = -R_B = -4 \text{ кН}.$$

$$2) Q_G^I = -R_B - P \Leftrightarrow Q_G^I = -4 - 3 \Leftrightarrow Q_G^I = -7 \text{ кН}.$$

$$3) Q_G^{II} = Q_G^I + R_G \Leftrightarrow Q_G^{II} = -7 + 13 \Leftrightarrow Q_G^{II} = 6 \text{ кН}.$$

$$4) Q_D = Q_G^{II} = 6 \text{ кН}.$$

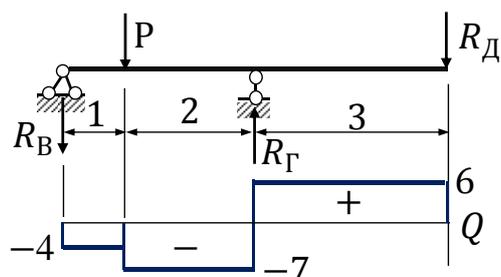


Рисунок 1.16– Эюра поперечных сил  $Q$  балки ВД.

в) *Построение эюры изгибающих моментов балки от действия заданной нагрузки.*

Балка ВГД неподвижна, геометрически неизменяема, статически определима и находится в равновесии. Значит любая часть балки под действием внешних сил и внутренних усилий также должна находиться в равновесии. Балка ВГД консольная и состоит из 3-х участков: 1-ый участок от введенной опоры В до точки приложения сосредоточенной силы Р, 2-ой участок до точки Г и 3-ий участок от точки Г до точки Д.

Сначала рассмотрим 1-ый участок. Мысленно вырежем левую часть балки длиной  $x$  (рис. 1.17, а). Переменная  $x$  изменяется от 0 до 1, т.е. от введенной опоры В до точки приложения сосредоточенной силы Р. Прикладываем внешнюю нагрузку и возникающие усилия  $M_x$  и  $Q_x$  в месте сечения и рассмотрим ее равновесие (рис. 1.17, а).

Определяем ординаты эюры изгибающих моментов  $M$  из уравнений равновесия:

$$\sum M = 0; -M_x - R_B \cdot x = 0 \Leftrightarrow M_x = -R_B \cdot x \Leftrightarrow M_x = -4 \cdot x.$$

При  $x = 0$ ,  $M_x = 0$ ; при  $x = 1$  м,  $M_x = -4 \cdot 1 = -4$  кНм.

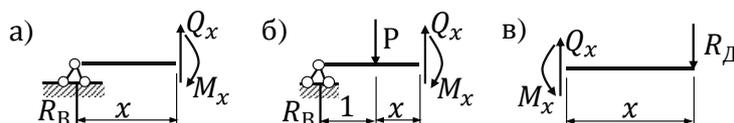


Рисунок 1.17– Расчетные схемы для определения  $M_x$  всех участков балки ВГД.

Рассмотрим 2-ой участок. Мысленно вырежем левую часть балки длиной  $x + 1$ . Переменная  $x$  изменяется от 0 до 2, т.е. от точки приложения сосредоточенной силы Р до опоры Г. Прикладываем внешнюю нагрузку и возникающие усилия  $M_x$  и  $Q_x$  в месте сечения и рассмотрим ее равновесие (рис. 1.17, б).

Определяем ординаты эюры изгибающих моментов  $M$  из уравнений равновесия:

$$\begin{aligned} \sum M = 0; -M_x - R_B \cdot (x + 1) - P \cdot x = 0 &\Leftrightarrow M_x = -R_B \cdot (x + 1) - P \cdot \\ &x \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow M_x = -4 \cdot (x + 1) - 3 \cdot x = -7x - 4. \end{aligned}$$

При  $x = 0$ ,  $M_x = -4$  кНм; при  $x = 2$  м,  $M_x = -7 \cdot 2 - 4 = -18$  кНм.

Рассмотрим теперь 3-ий участок. Мысленно вырежем правую часть балки длиной  $x$  от точки Д (можно вырезать и левую часть балки, но тогда

вычислений будет также больше и возможность внести в расчет ошибок тоже повышается). Переменная  $x$  изменяется от 0 до 3, т.е. от точки Д до опоры Г. Прикладываем внешнюю нагрузку и возникающие усилия  $M_x$  и  $Q_x$  в месте сечения и рассмотрим ее равновесие (рис. 1.17, в).

Определяем ординаты эпюры изгибающих моментов  $M$  из уравнений равновесия:

$$\sum M = 0; M_x = -R_D \cdot x \Leftrightarrow M_x = -6 \cdot x.$$

При  $x = 0$ ,  $M_x = 0$ ; при  $x = 3$  м,  $M_x = -6 \cdot 3 = -18$  кНм.

Построим эпюру изгибающих моментов для всей балки ВГД (рис. 1.18).

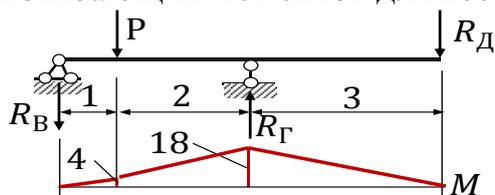


Рисунок 1.18– Эпюра изгибающих моментов балки ВД.

**Рассмотрим главную анкерную балку АБВ** (рис. 1.19). На эту балку помимо действующего на нее сосредоточенного момента передается давление от балки ВГД, равное реакции  $R_B$  с противоположным направлением.

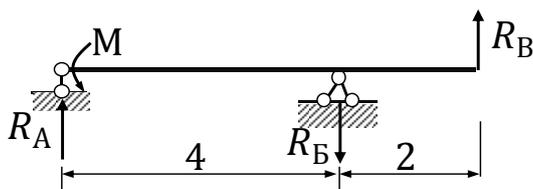


Рисунок 1.19– Расчетная схема балки АБВ.

а) *Определение опорные реакции балки от действия заданной нагрузки.*

Опорные реакции  $R_A$  и  $R_B$  определяем из уравнений равновесия:

$$\sum M_A = 0; -R_B \cdot 6 + R_B \cdot 4 - M = 0 \Leftrightarrow R_B \cdot 4 = 4 \cdot 6 + 10 \Leftrightarrow R_B = 8,5 \text{ кН};$$

$$\sum M_B = 0; -R_B \cdot 2 + R_A \cdot 4 - M = 0 \Leftrightarrow R_A \cdot 4 = 4 \cdot 2 + 10 \Leftrightarrow R_A = 4,5 \text{ кН}.$$

Спроектируем все силы, действующие на балку АБВ на вертикальную ось:

$$\sum z = 0; R_A - R_B + R_B = 0 \Leftrightarrow 4,5 - 8,5 + 4 = 0 \Leftrightarrow 0 = 0.$$

Значит, опорные реакции определены правильно.

б) *Построение эпюры поперечных сил балки от действия заданной нагрузки.*

Определяем значения поперечных сил в характерных точках (в точке бесконечно близкой к опоре А справа  $Q_A$  и в точках бесконечно близких к опоре Б слева  $Q_B^I$  и справа  $Q_B^{II}$ ) с учетом правила знаков и строим эпюру поперечных сил (рис. 1.20):

$$1) Q_A = R_A \Leftrightarrow Q_A = 4,5 \text{ кН}.$$

$$2) Q_B^I = Q_A \Leftrightarrow Q_B^I = 4,5 \text{ кН}.$$

$$3) Q_B^{II} = Q_B^I - R_B \Leftrightarrow Q_B^{II} = 4,5 - 8,5 \Leftrightarrow Q_B^{II} = -4 \text{ кН}.$$

$$4) Q_B = Q_B^{II} \Leftrightarrow Q_B = -4 \text{ кН}.$$

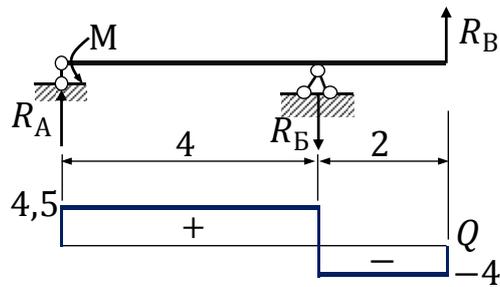


Рисунок 1.20– Эпюра поперечных сил  $Q$  балки АБВ.

в) *Построение эпюры изгибающих моментов балки от действия заданной нагрузки.*

Балка АБВ неподвижна, геометрически неизменяема, статически определима и находится в равновесии. Значит любая часть балки под действием внешних сил и внутренних усилий также должна находиться в равновесии. Балка АБВ консольная и состоит из 2-х участков: 1-ый участок от опоры А до опоры В и 2-ой участок от опоры В до точки В.

Сначала рассмотрим 1-ый участок. Мысленно вырежем левую часть балки длиной  $x$ . Переменная  $x$  изменяется от 0 до 4, т.е. от опоры А до опоры В. Прикладываем внешнюю нагрузку и возникающие усилия  $M_x$  и  $Q_x$  в месте сечения и рассмотрим ее равновесие (рис. 1.21, а).

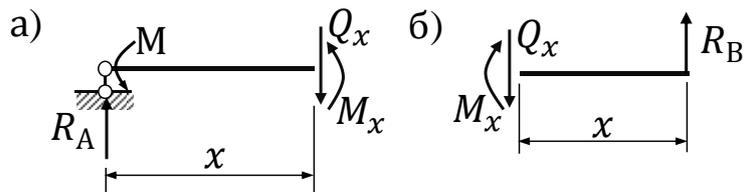


Рисунок 1.21– Расчетная схема для определения  $M_x$  1-го участка балки АБВ.

Определяем ординаты эпюры изгибающих моментов  $M$  из уравнений равновесия:

$$\sum M = 0; R_A \cdot x - M_x - M = 0 \Leftrightarrow M_x = R_A \cdot x - M \Leftrightarrow M_x = 4,5 \cdot x - 10.$$

При  $x = 0$ ,  $M_x = -10$  кНм; при  $x = 4$  м,  $M_x = 4,5 \cdot 4 - 10 = 8$  кНм.

Рассмотрим теперь 2-ой участок. Мысленно вырежем правую часть балки длиной  $x$  от точки В. Переменная  $x$  изменяется от 0 до 2, т.е. от точки В до опоры В. Прикладываем внешнюю нагрузку и возникающие усилия  $M_x$  и  $Q_x$  в месте сечения и рассмотрим ее равновесие (рис. 1.21, б).

Определяем ординаты эпюры изгибающих моментов  $M$  из уравнений равновесия:

$$\sum M = 0; M_x - R_B \cdot x = 0 \Leftrightarrow M_x = R_B \cdot x \Leftrightarrow M_x = 4 \cdot x.$$

При  $x = 0$ ,  $M_x = 0$ ; при  $x = 2$  м,  $M_x = 4 \cdot 2 = 8$  кНм.

Построим эпюру изгибающих моментов для всей балки АБВ (рис. 1.22).

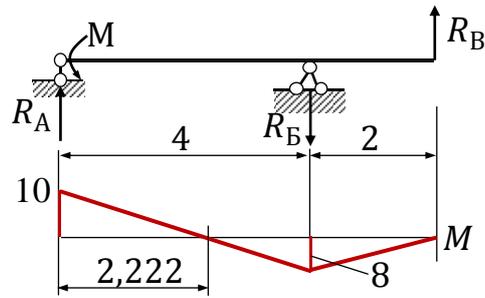


Рисунок 1.22– Эпюра изгибающих моментов балки АВ.

Построим эпюры поперечных сил  $Q$  и изгибающих моментов  $M$  для всей трехпролетной шарнирно-консольной балки (рис. 1.23).

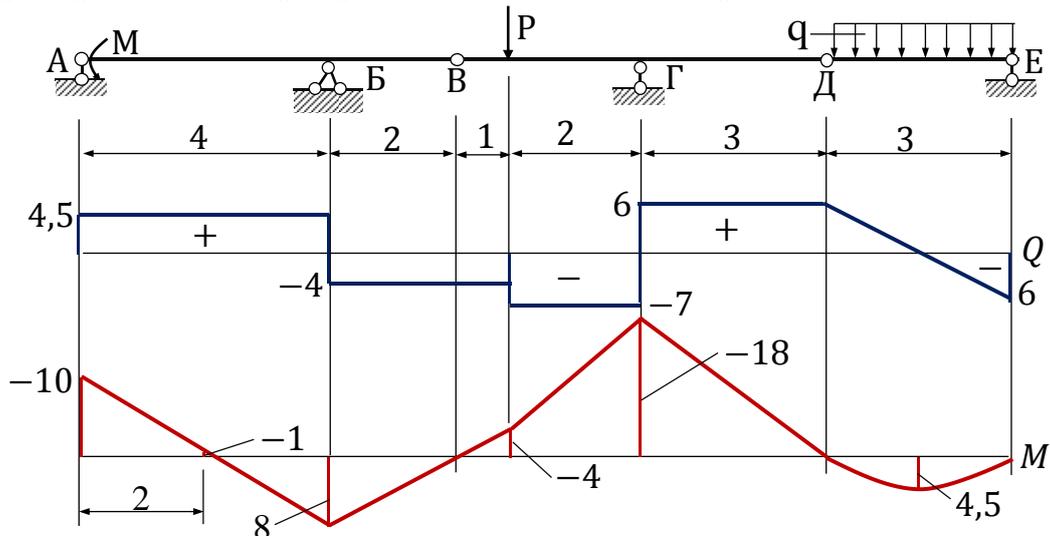


Рисунок 1.23– Эпюры поперечных сил и изгибающих моментов балки.

#### 4. Определение перемещений.

##### **Определение угла поворота заданного сечения по формуле Мора.**

Угол поворота  $\gamma$  произвольного сечения при постоянной жесткости  $EI$  в пределах каждого элемента шарнирно-консольной балки определяется по формуле Мора [1, 2, 4]

$$\gamma = \sum \frac{1}{EI} \int_0^l M_{11} M_1 dx,$$

где  $M_1$  – изгибающий момент в сечении от заданной нагрузки;

$M_{11}$  – изгибающий момент в сечении от единичного момента.

##### **а) Определим угол поворота сечения 2.**

В балке АБВ, где расположено сечение 2, отмечаем произвольные сечения на расстоянии  $x_1$  от опоры А (рис. 1.24).

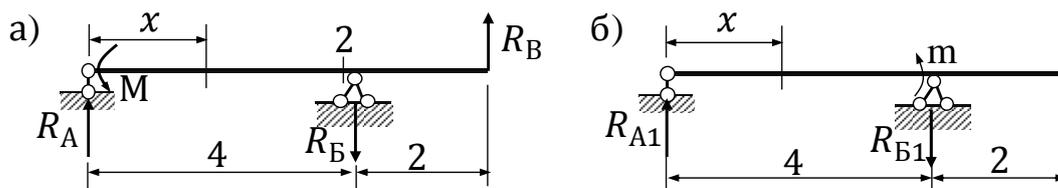


Рисунок 1.24.

Находим выражения для изгибающих моментов от действия заданной нагрузки как функции координат произвольного сечения  $x$ :

$$M_1 = R_A x - M = 4,5x - 10.$$

Опорные реакции балки АБВ определены раньше при построении эпюр  $Q$  и  $M$  (рис. 1.19)

К балке без внешних нагрузок прикладываем по направлению искомого поворота единичный момент  $m = 1$  (рис. 1.24, б).

Находим выражения для опорных реакций:

$$\sum M_{B1} = 0; R_{A1} \cdot 4 - m = 0 \Leftrightarrow R_{A1} \cdot 4 - 1 = 0 \Leftrightarrow R_{A1} = 0,25.$$

$$\sum M_{A1} = 0; R_{B1} \cdot 4 - m = 0 \Leftrightarrow R_{B1} \cdot 4 - 1 = 0 \Leftrightarrow R_{B1} = 0,25.$$

Находим выражения для изгибающих моментов от действия единичного момента как функции координат произвольного сечения  $x$ :

$$M_{11} = R_A x = 0,25x.$$

Подставляем полученные выражения изгибающих моментов от заданной нагрузки  $M_1$  и от единичного момента  $M_{11}$  в формулу Мора и интегрируем по участкам.

$$\begin{aligned} \gamma &= \sum \frac{1}{EI} \int_0^l M_{11} M_1 dx \Leftrightarrow \gamma = \frac{1}{EI} \int_0^4 0,25x \cdot (4,5x - 10) dx \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \gamma = \frac{1}{EI} \int_0^4 (1,125x^2 - 2,5x) dx \Leftrightarrow \gamma = \frac{1}{EI} \left( \int_0^4 1,125x^2 dx - \int_0^4 2,5x dx \right) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \gamma = \frac{1}{EI} \left( 1,25 \int_0^4 x^2 dx - 2,5 \int_0^4 x dx \right) \Leftrightarrow \gamma = \frac{1}{EI} \left( 1,125 \frac{x^3}{3} \Big|_0^4 - 2,5 \frac{x^2}{2} \Big|_0^4 \right) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \gamma = \frac{1}{EI} \left( 1,125 \frac{4^3}{3} - 2,5 \frac{4^2}{2} \right) \Leftrightarrow \gamma = \frac{4}{EI}. \end{aligned}$$

### б) Определим угол поворота сечения 3.

В балке ВГД, где расположено сечение 3, отмечаем произвольные сечения на расстоянии  $x_1$  от опоры В и на расстоянии  $x_2$  от опоры Г (рис. 1.25).

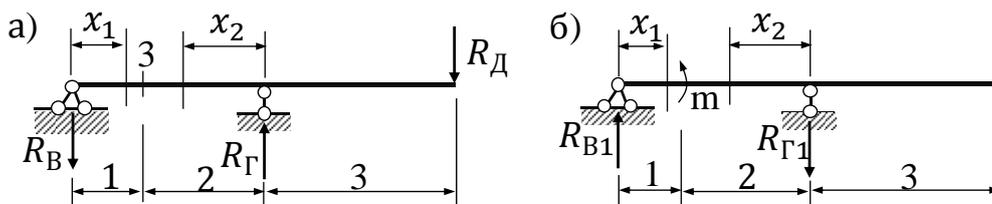


Рисунок 1.25– Схема для определения угла поворота сечения 3.

Находим выражения для изгибающих моментов  $M_1$  и  $M_2$  от действия заданной нагрузки как функций координат произвольных сечений  $x_1$  и  $x_2$ :

$$M_1 = -R_B x_1 = -4x_1;$$

$$M_2 = -R_D(x_2 + 3) + R_G x_2 \Leftrightarrow M_2 = -6(x_2 + 3) + 13x_2 \Leftrightarrow M_2 = 7x_2 - 18.$$

К балке без внешних нагрузок прикладываем по направлению искомого поворота единичный момент  $m = 1$  (рис. 1.25, б).

Находим выражения для опорных реакций:

$$\sum M_{B1} = 0; R_{G1} \cdot 3 - m = 0 \Leftrightarrow R_{G1} \cdot 3 - 1 = 0 \Leftrightarrow R_{G1} = 1/3.$$

$$\sum M_{G1} = 0; R_{B1} \cdot 3 - m = 0 \Leftrightarrow R_{B1} \cdot 3 - 1 = 0 \Leftrightarrow R_{B1} = 1/3.$$

Находим выражение для изгибающего момента  $M_{11}$  и  $M_{12}$  от действия единичного момента как функции координата произвольных сечений  $x_1$  и  $x_2$ :

$$M_{11} = R_{B1}x \Leftrightarrow M_{11} = 1/3 x_1; M_{12} = -R_{\Gamma1}x \Leftrightarrow M_{12} = -1/3 x_2.$$

Изгибающие моменты на консоли Г1Д от действия единичного момента не возникают.

Подставляем полученные выражения изгибающих моментов от заданной нагрузки  $M_1$  и  $M_2$  и от единичного момента  $M_{11}$  и  $M_{12}$  в формулу Мора и интегрируем по участкам.

$$\begin{aligned} \gamma &= \sum \frac{1}{EI} \int_0^l M_{11} M_1 dx \Leftrightarrow \gamma = \frac{1}{EI} \int_0^1 (1/3 x_1) \cdot (-4x_1) dx_1 + \\ &+ \frac{1}{EI} \int_0^2 (-1/3 x_2) \cdot 7x_2 dx_2 + \frac{1}{EI} \int_0^2 (-1/3 x_2) \cdot (-18) dx_2 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \gamma = -\frac{1}{EI} \int_0^1 \left(\frac{4}{3} x_1^2\right) dx_1 - \frac{1}{EI} \int_0^2 \frac{7}{3} x_2^2 dx_2 + \frac{1}{EI} \int_0^2 6x_2 dx_2 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \gamma = \frac{1}{EI} \left( -\frac{4}{3} \int_0^1 x_1^2 dx_1 - \frac{7}{3} \int_0^2 x_2^2 dx_2 + 6 \int_0^2 x_2 dx_2 \right) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \gamma = \frac{1}{EI} \left( -\frac{4}{3} \cdot \frac{x_1^3}{3} \Big|_0^1 - \frac{7}{3} \cdot \frac{x_2^3}{3} \Big|_0^2 + 6 \cdot \frac{x_2^2}{2} \Big|_0^2 \right) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \gamma = \frac{1}{EI} \cdot \left( -\frac{4}{3} \cdot \frac{1^3}{3} - \frac{7}{3} \cdot \frac{2^3}{3} + 6 \cdot \frac{2^2}{2} \right) \Leftrightarrow \gamma = \frac{5,33}{EI}. \end{aligned}$$

**в) Определим угол поворота сечения 4.**

В балке ВГД, где расположено сечение 4, отмечаем произвольные сечения на расстоянии  $x_1$  от опоры В и на расстоянии  $x_2$  от сечения 4 (рис. 1.26) так как правее сечения 4 действие единичного момента не вызывает изгибающих моментов.

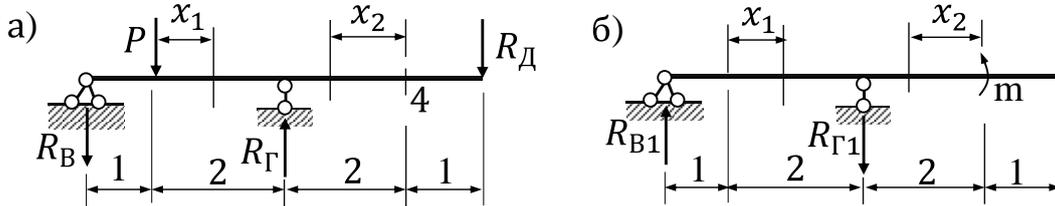


Рисунок 1.26– Схема для определения угла поворота сечения 4.

Находим выражения для изгибающих моментов  $M_1$  и  $M_2$  от действия заданной нагрузки как функции координат произвольных сечений  $x_1$  и  $x_2$ . Опорные реакции определены раньше при построении эпюр  $Q$  и  $M$  (рис. 1.14).

$$\begin{aligned} M_1 &= -R_B(x_1 + 1) - P \cdot x_1 \Leftrightarrow M_1 = -4(x_1 + 1) - 3x_1 \Leftrightarrow M_1 = -7x_1 - 4; \\ M_2 &= -R_D(x_2 + 1) \Leftrightarrow M_2 = -6(x_2 + 1). \end{aligned}$$

К балке без внешних нагрузок прикладываем по направлению искомого поворота единичный момент  $m = 1$  (рис. 1.26, б).

Находим выражения для опорных реакций:

$$\begin{aligned} \sum M_{B1} &= 0; R_{\Gamma1} \cdot 3 - m = 0 \Leftrightarrow R_{\Gamma1} \cdot 3 - 1 = 0 \Leftrightarrow R_{\Gamma1} = 1/3. \\ \sum M_{\Gamma1} &= 0; R_{B1} \cdot 3 - m = 0 \Leftrightarrow R_{B1} \cdot 3 - 1 = 0 \Leftrightarrow R_{B1} = 1/3. \end{aligned}$$

Находим выражения для изгибающих моментов  $M_{11}$  и  $M_{12}$  от действия единичного момента как функции координат произвольных сечений  $x_1$  и  $x_2$ :

$$M_{11} = R_{B1}(x_1 + 1) \Leftrightarrow M_{11} = 1/3 (x_1 + 1); M_{12} = 1.$$

Подставляем полученные выражения изгибающих моментов от заданной нагрузки  $M_1$  и  $M_2$  и от единичного момента  $M_{11}$  и  $M_{12}$  в формулу Мора и интегрируем по участкам.

$$\begin{aligned} \gamma &= \sum \frac{1}{EI} \int_0^l M_{11} M_1 dx \Leftrightarrow \gamma = \frac{1}{EI} \int_0^2 \frac{1}{3} (x_1 + 1) \cdot (-7x_1 - 4) dx_1 + \\ &+ \frac{1}{EI} \int_0^2 1 \cdot [-6(x_2 + 1)] dx_2 \Leftrightarrow \gamma = -\frac{1}{EI} \int_0^2 \frac{7}{3} x_1^2 dx_1 - \frac{1}{EI} \int_0^2 \frac{4}{3} x_1 dx_1 - \\ &- \frac{1}{EI} \int_0^2 \frac{7}{3} x_1 dx_1 - \frac{1}{EI} \int_0^2 \frac{4}{3} dx_1 - \frac{1}{EI} \int_0^2 6x_2 dx_2 - \frac{1}{EI} \int_0^2 6 dx_2 \Leftrightarrow \gamma = \\ &= -\frac{1}{EI} \left( \frac{7}{3} \int_0^2 x_1^2 dx_1 + \frac{11}{3} \int_0^2 x_1 dx_1 + \frac{4}{3} \int_0^2 dx_1 + 6 \int_0^2 x_2 dx_2 + 6 \int_0^2 dx_2 \right) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \gamma = -\frac{1}{EI} \left( \frac{7}{3} \cdot \frac{x_1^3}{3} \Big|_0^2 + \frac{11}{3} \cdot \frac{x_1^2}{2} \Big|_0^2 + \frac{4}{3} x_1 \Big|_0^2 + 6 \frac{x_2^2}{2} \Big|_0^2 + 6x_2 \Big|_0^2 \right) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \gamma = -\frac{1}{EI} \left( \frac{7}{3} \cdot \frac{2^3}{3} + \frac{11}{3} \cdot \frac{2^2}{2} + \frac{4}{3} \cdot 2 + 6 \frac{2^2}{2} + 6 \cdot 2 \right) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \gamma = -\frac{1}{EI} \left( \frac{56}{9} + \frac{66}{9} + \frac{24}{9} + 12 + 12 \right) \Leftrightarrow \gamma = -\frac{40,2}{EI}. \end{aligned}$$

г) **Определим угол поворота сечения 5.**

В балке ДЕ, где расположено сечение 5, отмечаем произвольные сечения на расстоянии  $x_1$  от опоры Д и на расстоянии  $x_2$  от опоры Е (рис. 1.27).

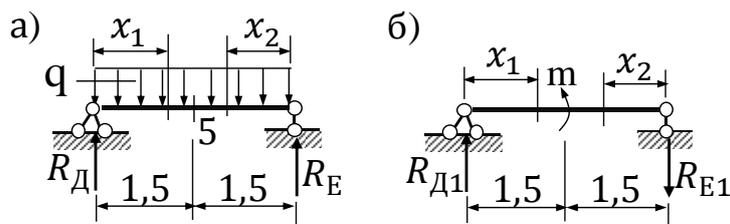


Рисунок 1.27– Схема для определения угла поворота сечения 5.

Находим выражения для изгибающих моментов  $M_1$  и  $M_2$  от действия заданной нагрузки как функций координат произвольных сечений  $x_1$  и  $x_2$ :

$$\begin{aligned} M_1 &= R_D x_1 - q x_1 \frac{x_1}{2} \Leftrightarrow M_1 = 6x_1 - 4x_1 \frac{x_1}{2} \Leftrightarrow M_1 = 6x_1 - 2x_1^2; \\ M_2 &= R_E x_2 - q x_2 \frac{x_2}{2} \Leftrightarrow M_2 = 6x_2 - 4x_2 \frac{x_2}{2} \Leftrightarrow M_2 = 6x_2 - 2x_2^2. \end{aligned}$$

Опорные реакции определены раньше при построении эпюр  $Q$  и  $M$  (рис. 1.10)

К балке без внешних нагрузок прикладываем по направлению искомого поворота единичный момент  $m = 1$  (рис. 1.27, б).

Находим выражения для опорных реакций:

$$\begin{aligned} \sum M_{D1} &= 0; R_{E1} \cdot 3 - m = 0 \Leftrightarrow R_{E1} \cdot 3 - 1 = 0 \Leftrightarrow R_{E1} = 1/3. \\ \sum M_{E1} &= 0; R_{D1} \cdot 3 - m = 0 \Leftrightarrow R_{D1} \cdot 3 - 1 = 0 \Leftrightarrow R_{D1} = 1/3. \end{aligned}$$

Находим выражение для изгибающего момента  $M_{11}$  и  $M_{12}$  от действия единичного момента как функций координат произвольных сечений  $x_1$  и  $x_2$ :

$$M_{11} = R_{D1} x_1 \Leftrightarrow M_{11} = 1/3 x_1; M_{12} = -R_{E1} x_2 \Leftrightarrow M_{12} = -1/3 x_2.$$

Подставляем полученные выражения изгибающих моментов от заданной нагрузки  $M_1$  и  $M_2$  и от единичного момента  $M_{11}$  и  $M_{12}$  в формулу и интегрируем по участкам.

$$\begin{aligned}
\gamma &= \sum \frac{1}{EI} \int_0^l M_{11} M_1 dx \Leftrightarrow \gamma = \frac{1}{EI} \int_0^{1,5} (1/3 x_1) \cdot (6x_1 - 2x_1^2) dx_1 + \\
&+ \frac{1}{EI} \int_0^{1,5} (-1/3 x_2) \cdot (6x_2 - 2x_2^2) dx_2 \Leftrightarrow \gamma = \frac{1}{EI} \int_0^{1,5} 2x_1^2 dx_1 - \\
&- \frac{1}{EI} \int_0^{1,5} \frac{2}{3} x_1^3 dx_1 - \frac{1}{EI} \int_0^{1,5} 2x_2^2 dx_2 + \frac{1}{EI} \int_0^{1,5} \frac{2}{3} x_2^3 dx_2 \Leftrightarrow \\
\Leftrightarrow \gamma &= \frac{1}{EI} \left( 2 \int_0^{1,5} x_1^2 dx_1 - \frac{1}{3} \int_0^{1,5} x_1^3 dx_1 \right) - \frac{1}{EI} \left( 2 \int_0^{1,5} x_2^2 dx_2 - \frac{1}{3} \int_0^{1,5} x_2^3 dx_2 \right) \Leftrightarrow \\
\Leftrightarrow \gamma &= \frac{1}{EI} \left( 2 \frac{x_1^3}{3} \Big|_0^{1,5} - \frac{2}{3} \frac{x_1^4}{4} \Big|_0^{1,5} \right) - \frac{1}{EI} \left( 2 \frac{x_2^3}{3} \Big|_0^{1,5} - \frac{2}{3} \frac{x_2^4}{4} \Big|_0^{1,5} \right) \Leftrightarrow \\
\Leftrightarrow \gamma &= \frac{1}{EI} \left( 2 \frac{1,5^3}{3} - \frac{2}{3} \frac{1,5^4}{4} \right) - \frac{1}{EI} \left( 2 \frac{1,5^3}{3} - \frac{2}{3} \frac{1,5^4}{4} \right) \Leftrightarrow \gamma = 0.
\end{aligned}$$

**Определение прогиба заданного сечения по формуле Мора.**

Прогиб  $\delta$  произвольного сечения при постоянной жесткости  $EI$  в пределах каждого элемента шарнирно-консольной балки определяется по формуле Мора [1, 2, 4]

$$\delta = \sum \frac{1}{EI} \int_0^l M_{11} M_1 dx,$$

где  $M_1$  – изгибающий момент в сечении от заданной нагрузки;

$M_{11}$  – изгибающий момент в сечении от единичной силы.

**а) Определим прогиб в сечении 1 в середине пролета АБ.**

В балке АБВ, где расположено сечение 1, отмечаем произвольные сечения на расстоянии  $x_1$  от опоры А и на расстоянии  $x_2$  от опоры Б (рис. 1.28).

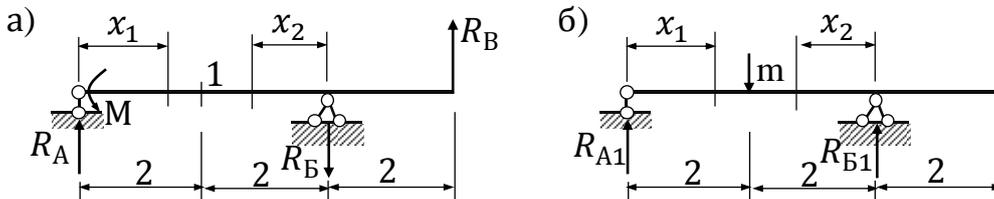


Рисунок 1.28– Схема для определения прогиба сечения 1.

Находим выражения для изгибающих моментов  $M_1$  и  $M_2$  от действия заданной нагрузки как функций координат произвольных сечений  $x_1$  и  $x_2$ :

$$M_1 = R_A x_1 - M \Leftrightarrow M_1 = 5,5x_1 - 10;$$

$$M_2 = -R_B x_2 + R_B (x_2 + 2) \Leftrightarrow M_2 = -11,5x_2 + 6(x_2 + 2) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow M_2 = -5,5x_2 + 12.$$

К балке без внешних нагрузок прикладываем по направлению искомого перемещения единичную силу  $t = 1$  (рис. 1.28, б).

Находим выражения для опорных реакций:

$$\sum M_{A1} = 0; t \cdot 2 - R_{B1} \cdot 4 = 0 \Leftrightarrow R_{B1} \cdot 4 - 2 = 0 \Leftrightarrow R_{B1} = 1/2.$$

$$\sum M_{B1} = 0; R_{A1} \cdot 4 - t \cdot 2 = 0 \Leftrightarrow R_{A1} \cdot 4 - 2 = 0 \Leftrightarrow R_{A1} = 1/2.$$

Находим выражения для изгибающих моментов  $M_{11}$  и  $M_{12}$  от действия единичной силы как функций координат произвольных сечений  $x_1$  и  $x_2$ . Действие единичной силы в середине балки изгибающих моментов на консоли не вызывает:

$$M_{11} = R_{A1} x_1 \Leftrightarrow M_{11} = 1/2 x_1; M_{12} = R_{B1} x_2 \Leftrightarrow M_{12} = 1/2 x_2.$$

Подставляем полученные выражения изгибающих моментов от заданной нагрузки  $M_1$  и  $M_2$  и от единичной силы  $M_{11}$  и  $M_{12}$  в формулу и интегрируем по участкам.

$$\begin{aligned} \delta &= \sum \frac{1}{EI} \int_0^l M_{11} M_1 dx \Leftrightarrow \delta = \frac{1}{EI} \int_0^2 1/2 x_1 \cdot (5,5x_1 - 10) dx_1 + \\ &+ \frac{1}{EI} \int_0^2 1/2 x_2 \cdot (-5,5x_2 + 12) dx_2 \Leftrightarrow \delta = \frac{1}{EI} \int_0^2 2,75x_1^2 dx_1 - \\ &- \frac{1}{EI} \int_0^2 5x_1 dx_1 - \frac{1}{EI} \int_0^2 2,75x_2^2 dx_2 + \frac{1}{EI} \int_0^2 6x_2 dx_2 \Leftrightarrow \delta = \\ &= \frac{1}{EI} \left( 2,75 \int_0^2 x_1^2 dx_1 - 5 \int_0^2 x_1 dx_1 - 2,75 \int_0^2 x_2^2 dx_2 + 6 \int_0^2 x_2 dx_2 \right) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \delta = \frac{1}{EI} \left( 2,75 \frac{x_1^3}{3} \Big|_0^2 - 5 \frac{x_1^2}{2} \Big|_0^2 - 2,75 \frac{x_2^3}{3} \Big|_0^2 + 6 \frac{x_2^2}{2} \Big|_0^2 \right) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \delta = \frac{1}{EI} \left( 2,75 \frac{2^3}{3} - 5 \frac{2^2}{2} - 2,75 \frac{2^3}{3} + 6 \frac{2^2}{2} \right) \Leftrightarrow \delta = \frac{2}{EI}. \end{aligned}$$

**б) Определим прогиб сечения 5 в середине пролета ДЕ.**

В балке ДЕ, где расположено сечение 5, отмечаем произвольное сечение на расстоянии  $x$  от опоры Д (рис. 1.29). Так как балка относительно сечения 5 симметричная, то рассмотрим только левую половину балки.

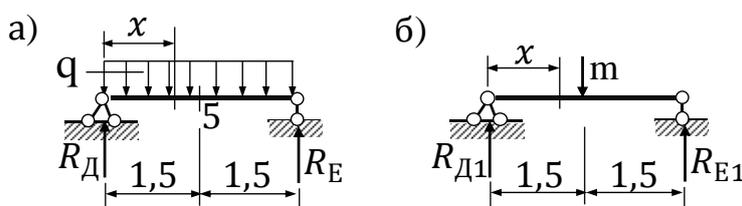


Рисунок 1.29.

Находим выражение для изгибающего момента  $M_1$  от действия заданной нагрузки как функции координата произвольного сечения  $x$ :

$$M_1 = R_D x - qx \frac{x}{2} \Leftrightarrow M_1 = 6x - 4x \frac{x}{2} \Leftrightarrow M_1 = 6x - 2x^2.$$

К балке без внешних нагрузок прикладываем по направлению искомого перемещения единичную силу  $m = 1$  (рис. 1.29, б).

Находим выражения для опорных реакций:

$$\sum M_{D1} = 0; -R_{E1} \cdot 3 + m \cdot 1,5 = 0 \Leftrightarrow R_{E1} \cdot 3 - 1,5 = 0 \Leftrightarrow R_{E1} = 1/2.$$

$$\sum M_{E1} = 0; R_{D1} \cdot 3 - m \cdot 1,5 = 0 \Leftrightarrow R_{D1} \cdot 3 - 1,5 = 0 \Leftrightarrow R_{D1} = 1/2.$$

Находим выражение для изгибающего момента  $M_{11}$  от действия единичной силы как функции координата произвольного сечения  $x$ :

$$M_{11} = R_{D1} x \Leftrightarrow M_{11} = 1/2 x.$$

Подставляем полученные выражения изгибающих моментов от заданной нагрузки  $M_1$  и от единичного момента  $M_{11}$  в формулу и интегрируем по участкам. Величина интеграла для правой половины будет такая же, как и для левой. Поэтому интегрирование проведем в пределах левой половины балки, а затем результат умножим на 2.

$$\begin{aligned} \delta &= 2 \sum \frac{1}{EI} \int_0^l M_{11} M_1 dx \Leftrightarrow \delta = \frac{2}{EI} \int_0^{1,5} (1/2 \cdot x) \cdot (6x - 2x^2) dx \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \delta = \frac{2}{EI} \int_0^{1,5} 3x^2 dx - \frac{2}{EI} \int_0^{1,5} x^3 dx \Leftrightarrow \delta = \frac{2}{EI} \left( 3 \int_0^{1,5} x^2 dx - \int_0^{1,5} x^3 dx \right) \Leftrightarrow \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \delta = \frac{2}{EI} \left( 3 \frac{x^3}{3} \Big|_0^{1,5} - \frac{x^4}{4} \Big|_0^{1,5} \right) \Leftrightarrow \delta = \frac{2}{EI} \left( 3 \frac{1,5^3}{3} - \frac{1,5^4}{4} \right) \Leftrightarrow \delta = \frac{4,22}{EI}.$$

**Определение угла поворота заданного сечения способом Верещагина.**

Угол поворота  $\gamma$  произвольного сечения при постоянной жесткости  $EI$  в пределах каждого элемента шарнирно-консольной балки определяется по формуле Верещагина [1, 2, 4]

$$\gamma = \sum \frac{1}{EI} \int_0^l \bar{M}_m M_n dx \Leftrightarrow \gamma = \sum \frac{1}{EI} \omega_n y_m.$$

Способ Верещагина заключается в перемножении площади одной эпюры на ординату другой эпюры, взятой под центром тяжести первой эпюры. Строят две эпюры изгибающих моментов:

- 1) от заданной нагрузки (эпюра  $M_n$ );
- 2) от единичной нагрузки (эпюра  $\bar{M}_m$ ).

Площадь вычисляют для эпюры от заданной нагрузки, которая может иметь любое очертание – криволинейное или прямолинейное. Ординату вычисляют для эпюры от единичной нагрузки, которая может иметь только прямолинейное очертание. Если обе эпюры прямолинейные, то площадь эпюры может быть определена для любой из них.

**а) Определим угол поворота сечения 2.**

Эпюра изгибающих моментов от заданной нагрузки  $M_n$  построена на рис. 1.22. Перенесем ее на рис. 1.30. Построим эпюру изгибающих моментов  $M_m$  от единичного момента  $m = 1$ . Опорные реакции от действия единичного момента определены на рис. 1.19:  $R_{A1} = 1/4$ ,  $R_{B1} = 1/4$ . Изгибающий момент в сечении Б1 балки равен:

$$M = R_{A1} \cdot 4 \Leftrightarrow M = 1/4 \cdot 4 \Leftrightarrow M = 1.$$

Так как действующий на балку единичный момент  $m$  изгибающих моментов на консоли Б1В не вызывает, то эпюры там также нет (рис. 1.30, б).

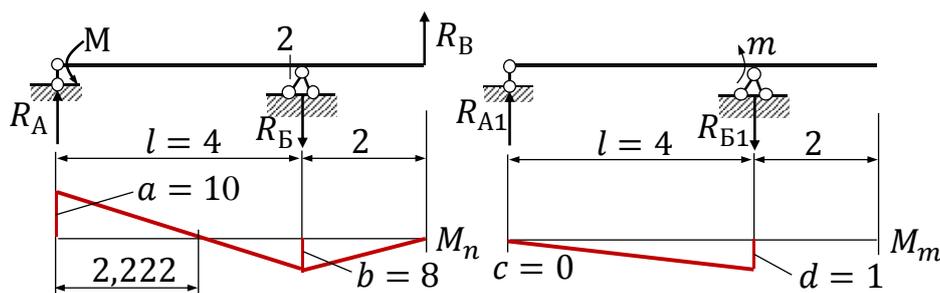


Рисунок 1.30– Эпюры изгибающих моментов  $M_n$  и  $M_m$  балки АБВ.

Перемножим эпюры  $M_n$  и  $M_m$  на пролете АБ. Эпюра  $M_n$  имеет сложную форму, поэтому воспользуемся формулой трапеции [1]

$$\begin{aligned} \omega y &= \frac{l}{6} [2(ac + bd) + ad + bc] \Leftrightarrow \omega y = \\ &= \frac{4}{6} [2(10 \cdot 0 + 8 \cdot 1) - 10 \cdot 1 + 8 \cdot 0] \Leftrightarrow \omega y = 4; \end{aligned}$$

$$\gamma = \sum \frac{1}{EI} \omega_n y_m \Leftrightarrow \gamma = \frac{4}{EI}.$$

Результаты, полученные по формуле Мора и способом Верещагина, совпадают.

**б) Определим угол поворота сечения 3.**

Эпюра изгибающих моментов от заданной нагрузки  $M_n$  построена на рис. 1.19. Перенесем ее на рисунок 1.31. Построим эпюру изгибающих моментов  $M_m$  от единичного момента  $m = 1$ . Опорные реакции от действия единичного момента определены на рис. 1.25:  $R_{B1} = 1/3$ ,  $R_{Г1} = 1/3$ . Изгибающий момент слева сечения 3 равен:

$$M = R_{B1} \cdot 1 \Leftrightarrow M = \frac{1}{3} \cdot 1 \Leftrightarrow M = \frac{1}{3}.$$

Изгибающий момент справа сечения 3 равен:

$$M = -R_{Г1} \cdot 2 \Leftrightarrow M = -\frac{1}{3} \cdot 2 \Leftrightarrow M = -\frac{2}{3}.$$

Так как действующий на балку единичный момент  $m$  не вызывает изгибающих моментов на консоли Г1Д, то эпюры там также нет (рис. 1.31).

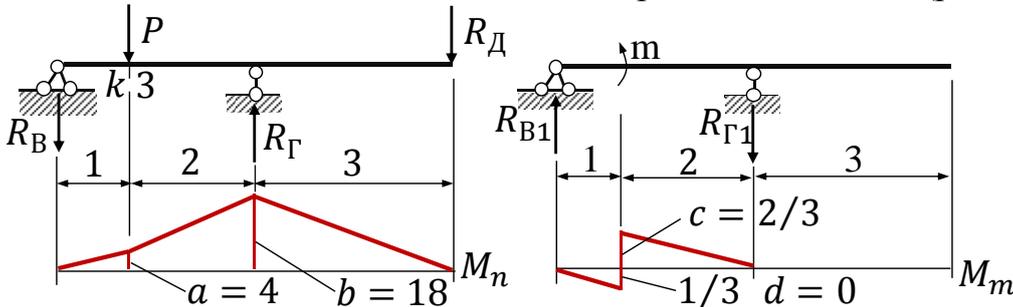


Рисунок 1.31– Эпюры изгибающих моментов  $M_n$  и  $M_m$  балки ВД.

Перемножим эпюры  $M_n$  и  $M_m$  на пролете ВГ. Левая часть эпюры  $M_m$  до сечения 4 расположена снизу, а правая – сверху. Эпюра  $M_n$  имеет сложную форму и целиком расположена сверху. Левая часть эпюры  $M_n$  имеет треугольную форму, площадь которой равна

$$\omega_{Bk} = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 4 \Leftrightarrow \omega_{Bk} = 2.$$

Расстояние от левой точки этой эпюры (точка В) до его центра тяжести равно  $\frac{2}{3} \cdot 1 = \frac{2}{3}$ , тогда ордината  $y_{ВГл}$  из эпюры  $M_m$ , взятая под центром тяжести площади  $\omega_{ВГл}$ , равна

$$y_{Bk} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} \Leftrightarrow y_{Bk} = \frac{2}{9}.$$

Правая часть эпюры  $M_n$  имеет форму трапеции, а эпюра  $M_m$  – треугольную форму, поэтому воспользуемся формулой трапеции [1]

$$\begin{aligned} \omega_{kГ} y_{kГ} &= \frac{l}{6} [2(ac + bd) + ad + bc] \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \omega_{kГ} y_{kГ} &= \frac{2}{6} \left[ 2 \left( 4 \cdot \frac{2}{3} + 18 \cdot 0 \right) + 4 \cdot 0 + 18 \cdot \frac{2}{3} \right] \Leftrightarrow \omega_{kГ} y_{kГ} = 5,78. \\ \gamma &= \sum \frac{1}{EI} \omega_n y_m \Leftrightarrow \gamma = \frac{1}{EI} \cdot (-\omega_{Bk} \cdot y_{Bk} + \omega_{kГ} y_{kГ}) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \gamma &= \frac{1}{EI} \cdot \left( -2 \cdot \frac{2}{9} + 5,78 \right) \Leftrightarrow \gamma = \frac{5,34}{EI}. \end{aligned}$$

Результаты, полученные по формуле Мора и способом Верещагина, совпадают.

**в) Определим угол поворота сечения 4.**

Эпюра изгибающих моментов от заданной нагрузки  $M_n$  построена на рис. 1.18. Перенесем ее на рис. 1.32. Построим эпюру изгибающих моментов  $M_m$  от единичного момента  $t = 1$ . Опорные реакции от действия единичного момента определены на рис. 1.26:  $R_{B1} = 1/3$ ,  $R_{Г1} = 1/3$ . Изгибающий момент в сечении Г1 балки равен:

$$M = R_{B1} \cdot 3 \Leftrightarrow M = 1/3 \cdot 3 \Leftrightarrow M = 1.$$

Так как действующий на балку единичный момент  $t$  изгибающих моментов правее сечения 4 на консоли Г1В не вызывает, то эпюры там также нет (рис. 1.32). Действие единичного момента  $t$  вызывает изгибающие моменты левее сечения 4.

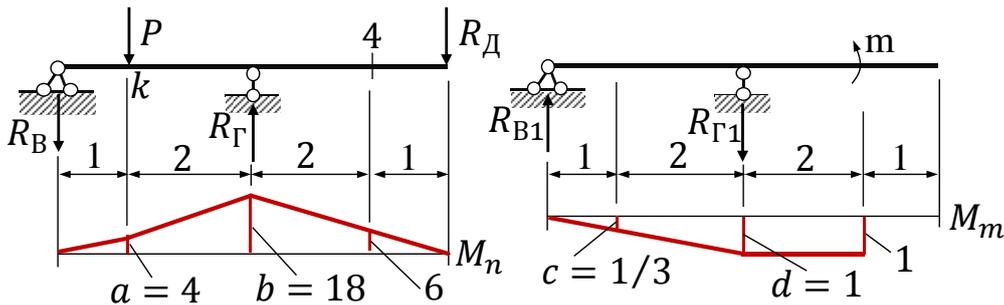


Рисунок 1.32– Эпюры изгибающих моментов  $M_n$  и  $M_m$  балки ВГД.

Перемножим эпюры  $M_n$  и  $M_m$  на участке Вк. Эпюра  $M_n$  имеет треугольную форму, площадь которой равна

$$\omega_{Bk} = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 4 \Leftrightarrow \omega_{Bk} = 2.$$

Расстояние от левой точки этой эпюры (точка В) до его центра тяжести равно  $\frac{2}{3} \cdot 1 = \frac{2}{3}$ . Тогда ордината  $y_{Bk}$  из эпюры  $M_m$ , взятая под центром тяжести площади  $\omega_{Bk}$ , равна

$$y_{Bk} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} \Leftrightarrow y_{Bk} = \frac{2}{9}.$$

Перемножим эпюры  $M_n$  и  $M_m$  на участке кГ. Эпюры  $M_n$  и  $M_m$  имеют форму трапеции, поэтому воспользуемся формулой трапеции [1]

$$\begin{aligned} \omega_{kГ} y_{kГ} &= \frac{l}{6} [2(ac + bd) + ad + bc] \Leftrightarrow \omega_{kГ} y_{kГ} = \\ &= \frac{2}{6} \left[ 2 \left( -4 \cdot \frac{1}{3} - 18 \cdot 1 \right) - 4 \cdot 1 - 18 \cdot \frac{1}{3} \right] \Leftrightarrow \omega_{kГ} y_{kГ} = -16,22. \end{aligned}$$

Теперь перемножим эпюры  $M_n$  и  $M_m$  на пролете ГД. Эпюра  $M_n$  до сечения 4 имеет форму трапеции, площадь которой равна

$$\omega_{ГД} = \frac{1}{2} \cdot (6 + 18) \cdot 2 \Leftrightarrow \omega_{ГД} = 24.$$

Так как эпюра  $M_m$  на пролете ГД имеет прямоугольную форму, то ордината  $y_{ГД} = 1$ .

Эпюры  $M_n$  и  $M_m$  расположены по разные стороны от оси балки, поэтому произведение  $\omega_{ВГ} \cdot y_{ВГ}$  будет отрицательным:

$$\begin{aligned} \gamma &= \sum \frac{1}{EI} \omega_n y_m \Leftrightarrow \gamma = -\frac{1}{EI} \cdot (\omega_{Bk} \cdot y_{Bk} + \omega_{kГ} \cdot y_{kГ} + \omega_{ГД} \cdot y_{ГД}) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \gamma = -\frac{1}{EI} \cdot \left( 2 \cdot \frac{2}{9} + 16,22 + 24 \cdot 1 \right) \Leftrightarrow \gamma = -\frac{40,7}{EI}. \end{aligned}$$

Результаты, полученные по формуле Мора и способом Верещагина, совпадают.

**г) Определим угол поворота сечения 5.**

Эпюра изгибающих моментов от заданной нагрузки  $M_n$  построена на рис. 1.14. Перенесем ее на рис. 1.33. Построим эпюру изгибающих моментов  $M_m$  от единичного момента  $m = 1$ . Опорные реакции от действия единичного момента определены на рис. 1.26:  $R_{B1} = 1/3$ ,  $R_{Г1} = 1/3$ . Изгибающий момент слева сечения 5 равен:

$$M = R_{Д1} \cdot 1,5 \Leftrightarrow M = \frac{1}{3} \cdot 1,5 \Leftrightarrow M = \frac{1}{2}.$$

Изгибающий момент справа сечения 5 равен:

$$M = -R_{Е1} \cdot 1,5 \Leftrightarrow M = -\frac{1}{3} \cdot 1,5 \Leftrightarrow M = -\frac{1}{2}.$$

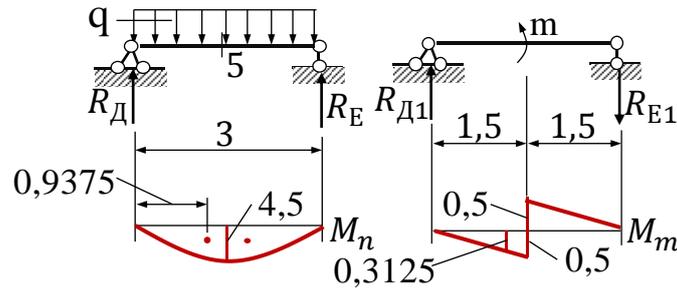


Рисунок 1.33– Эпюры изгибающих моментов  $M_n$  и  $M_m$  балки ДЕ.

Перемножим эпюры  $M_n$  и  $M_m$  на пролете ДЕ. Эпюра  $M_n$  имеет форму квадратной параболы и расположена снизу. Одна половина эпюры  $M_m$  расположена снизу, а другая – сверху. Поэтому эпюру  $M_n$  тоже разделим пополам. Площадь половины эпюры  $M_n$  определим по формуле (табл. 1 прил.)

$$\omega_{ДЕ} = \frac{2}{3} \cdot 1,5 \cdot 4,5 \Leftrightarrow \omega_{ДЕ} = 4,5.$$

Расстояние от левой точки этой эпюры (точка Д) до его центра тяжести равно  $\frac{5}{8} \cdot 1,5 = 0,9375$ , тогда ордината  $y_{ДЕ}$  из эпюры  $M_m$ , взятая под центром тяжести площади  $\omega_{ДЕ}$ , равна

$$y_{ДЕ,п} = \frac{5}{8} \cdot 0,5 \Leftrightarrow y_{ДЕ,п} = 0,3125; y_{ДЕ,л} = -\frac{5}{8} \cdot 0,5 \Leftrightarrow y_{ДЕ,л} = -0,3125.$$

Эпюры  $M_n$  и  $M_m$  правой половины расположены по разные стороны от оси балки, поэтому произведение  $\omega_{ДЕ} \cdot y_{ДЕ}$  будет отрицательным:

$$\begin{aligned} \gamma &= \sum \frac{1}{EI} \omega_n y_m \Leftrightarrow \gamma = \frac{1}{EI} \cdot (\omega_{ДЕ} \cdot y_{ДЕ,п} + \omega_{ДЕ} \cdot y_{ДЕ,л}) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \gamma = \frac{1}{EI} \cdot (4,5 \cdot 0,3125 - 4,5 \cdot 0,3125) \Leftrightarrow \gamma = 0. \end{aligned}$$

Результаты, полученные по формуле Мора и способом Верещагина, совпадают.

**Определение прогиба сечения способом Верещагина.**

**а) Определим прогиб сечения 1 в середине пролета АБ.**

Эпюра изгибающих моментов от заданной нагрузки  $M_n$  построена на рис. 1.22. Перенесем ее на рис. 1.34. Построим эпюру изгибающих моментов

$M_m$  от единичной силы  $t = 1$ . Опорные реакции от действия единичной силы определены на рис. 1.28:  $R_{A1} = 1/2$ ,  $R_{B1} = 1/2$ . Изгибающий момент слева сечения 1 равен:

$$M = R_{A1} \cdot 2 \Leftrightarrow M = \frac{1}{2} \cdot 2 \Leftrightarrow M = 1.$$

Изгибающий момент справа сечения 1 равен:

$$M = R_{B1} \cdot 2 \Leftrightarrow M = \frac{1}{2} \cdot 2 \Leftrightarrow M = 1.$$

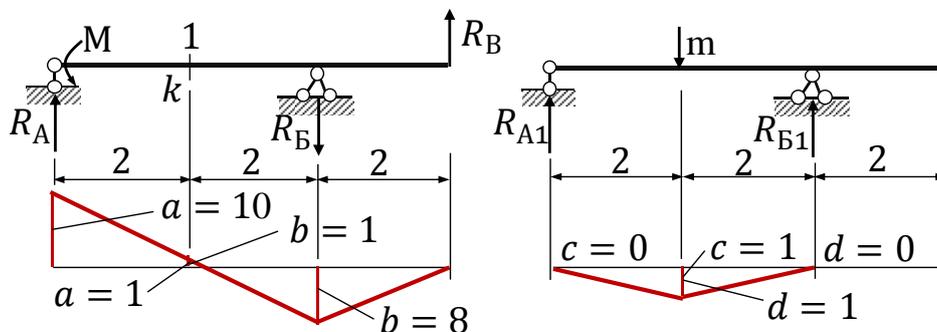


Рисунок 1.34– Эпюры изгибающих моментов  $M_n$  и  $M_m$  балки АБ.

Так как действующий на балку единичная сила  $t$  изгибающих моментов на консоли Б1В не вызывает, то эпюры там также нет (рис. 1.34).

Перемножим эпюры  $M_n$  и  $M_m$  на пролете АБ. Эпюра  $M_n$  имеет сложную форму, левая часть которой расположена сверху, а правая – снизу. Эпюра  $M_m$  имеет треугольную форму и расположена снизу. Эпюры  $M_n$  и  $M_m$  разделим пополам и для их перемножения воспользуемся формулой трапеции [1]

$$\begin{aligned} \omega_{Ak}y_{Ak} &= \frac{l}{6} [2(ac + bd) + ad + bc] \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \omega_{Ak}y_{Ak} &= \frac{2}{6} [2(10 \cdot 0 - 1 \cdot 1) - 10 \cdot 1 + 1 \cdot 0] \Leftrightarrow \omega_{Ak}y_{Ak} = -4; \\ \omega_{kB}y_{kB} &= \frac{l}{6} [2(ac + bd) + ad + bc] \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \omega_{kB}y_{kB} &= \frac{2}{6} [2(-1 \cdot 1 + 8 \cdot 0) + 1 \cdot 0 + 8 \cdot 1] \Leftrightarrow \omega_{kB}y_{kB} = 2; \\ \delta &= \sum \frac{1}{EI} \omega_n y_m \Leftrightarrow \delta = \frac{1}{EI} \cdot (-4 + 2) \Leftrightarrow \delta = -\frac{2}{EI}. \end{aligned}$$

Результаты, полученные по формуле Мора и способом Верещагина, совпадают.

**б) Определим прогиб сечения 5 в середине пролета ДЕ.**

Эпюра изгибающих моментов от заданной нагрузки  $M_n$  построена на рис. 1.14. Перенесем ее на рис. 1.35. Построим эпюру изгибающих моментов  $M_m$  от единичного момента  $t = 1$ . Опорные реакции от действия единичной силы определены на рис. 1.29:  $R_{B1} = 1/2$ ,  $R_{Г1} = 1/2$ . Изгибающий момент слева сечения 5 равен:

$$M = R_{Д1} \cdot 1,5 \Leftrightarrow M = \frac{1}{2} \cdot 1,5 \Leftrightarrow M = 0,75.$$

Изгибающий момент справа сечения 5 равен:

$$M = R_{Е1} \cdot 1,5 \Leftrightarrow M = \frac{1}{2} \cdot 1,5 \Leftrightarrow M = 0,75.$$

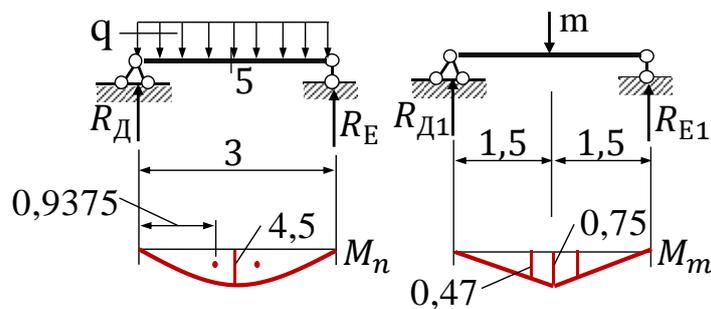


Рисунок 1.35– Эпюры изгибающих моментов  $M_n$  и  $M_m$  балки ДЕ.

Так как эпюры  $M_n$  и  $M_m$  относительно сечения 5 симметричные, то величина площади и ординаты для правой половины будет такая же, как и для левой. Поэтому перемножение эпюр проведем в пределах левой половины балки, а затем результат умножим на 2. Перемножим эпюры  $M_n$  и  $M_m$  на пролете ДЕ. Эпюра  $M_n$  имеет форму квадратной параболы и расположена снизу. Эпюра  $M_m$  имеет треугольную форму и расположена снизу. Площадь половины эпюры  $M_n$  определим по формуле (табл. 1 прил.)

$$\omega_{ДЕ} = \frac{2}{3} \cdot 1,5 \cdot 4,5 \Leftrightarrow \omega_{ДЕ} = 4,5.$$

Так как расстояние от левой точки этой эпюры (точка Д) до его центра тяжести равно  $\frac{5}{8} \cdot 1,5 = 0,9375$ , то ордината  $y_{ДЕ}$  из эпюры  $M_m$ , взятая под центром тяжести площади  $\omega_{ДЕ}$ , равна

$$y_{ДЕ} = \frac{5}{8} \cdot 0,75 \Leftrightarrow y_{ДЕ} = 0,47.$$

Находим прогиб сечения 5 балки ДЕ.

$$\delta = \sum \frac{1}{EI} \omega_n y_m \Leftrightarrow \delta = \frac{2}{EI} \cdot \omega_{ДЕ} \cdot y_{ДЕ} \Leftrightarrow \delta = \frac{2}{EI} \cdot (4,5 \cdot 0,47) \Leftrightarrow \delta = \frac{4,23}{EI}.$$

Результаты, полученные по формуле Мора и способом Верещагина, совпадают.

**Пример 1.6.** Для многопролетной шарнирно-консольной балки, приведенной на рис. 1.36:

- 1) выполнить кинематический анализ балки;
- 2) построить поэтажную схему балки;
- 3) определить реакции всех связей балки от действия заданной нагрузки;
- 4) построить эпюру поперечных сил от действия заданной нагрузки;
- 5) построить эпюру изгибающих моментов от действия заданной нагрузки;
- 6) определить угол поворота для сечения «1, 2, 3, 4 и 5» и прогиб для сечений «2 и 4» двумя способами используя: 1) формулу Мора и 2) правило Верещагина.

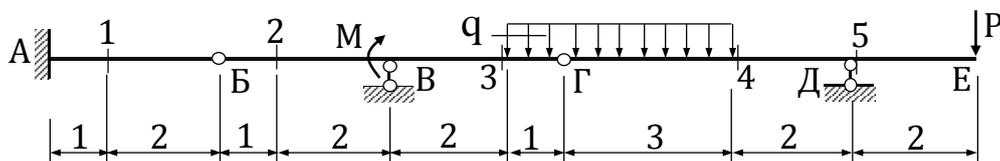


Рисунок 1.36– Расчетная схема.

Исходные данные:  $M = 4$  кНм,  $q = 2$  кН/м,  $P = 1$  кН, размеры даны в метрах.

### 1. Кинематический и геометрический анализ трех пролетной шарнирно-консольной балки.

Найдем количество дисков  $D$ , простых шарниров  $\text{Ш}$  и опорных стержней  $C_0$ :  $D = 3$  (диски АБ, БВГ и ГДЕ),  $\text{Ш} = 2$  (шарниры Б и Г) и  $C_0 = 5$  (опора А – 3 связи, опоры В и Д по 1 связи). По формуле (1.1) определим число степеней свободы:

$$W = 3D - 2\text{Ш} - C_0 \Leftrightarrow W = 3 \cdot 3 - 2 \cdot 2 - 5 \Leftrightarrow W = 0.$$

Значит, трех пролетная шарнирно-консольная балка по аналитическому признаку неподвижна, геометрически неизменяема и статически определима.

Выполним геометрический (структурный) анализ шарнирно-консольной балки.

Диск АБ, являющийся анкерной балкой, при помощи трех связей жестко присоединен к земле и составляет с ней единый неподвижный диск (рис. 1.36). Диск БВГ при помощи шарнира Б и стержня опоры В присоединен к земле и диску АБ (ось опорного стержня не проходит через шарнир). Шарнир Б заменяется двумя опорными связями с неподвижным диском АБ, что делает диск БВГ также неподвижным относительно земли. Значит, соединение дисков АБ и БВГ является геометрически неизменяемым. Диск ГДЕ при помощи шарнира Г и стержня опоры Д присоединен к земле и диску БВГ. Шарнир Г также заменяется двумя опорными связями с диском БВГ, что делает диск ГДЕ также неподвижным относительно земли. Таким образом аналитический и геометрический (структурный) анализ балки показали, что вся система неподвижна, геометрически неизменяема и статически определима.

### 2. Построение поэтажной схемы многопролетной шарнирно-консольной балки.

Для построения поэтажной схемы необходимо сначала выделить главную анкерную балку. Для этого нужно мысленно удалить шарниры, соединяющие балки (диски) между собой (рис. 1.37).

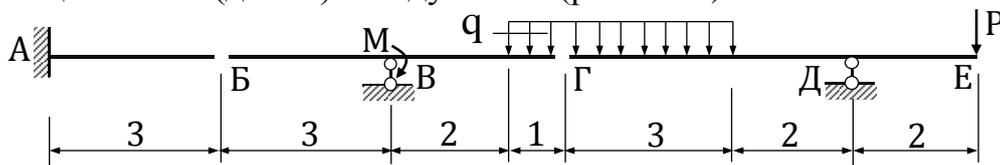


Рисунок 1.37– Расчетная схема без шарниров.

Из трех полученных балок только одна балка способна самостоятельно воспринимать нагрузку – это балка АБ, имеющая три связи с землей в заделке (опора А на рис. 1.37). Она и есть главная анкерная балка, на которую поэтажно (рис. 1.38) опираются остальные балки. Второстепенные балки (БВГ и ГДЕ) не могут самостоятельно воспринимать нагрузку так как имеют только по одной опоре В и Д.

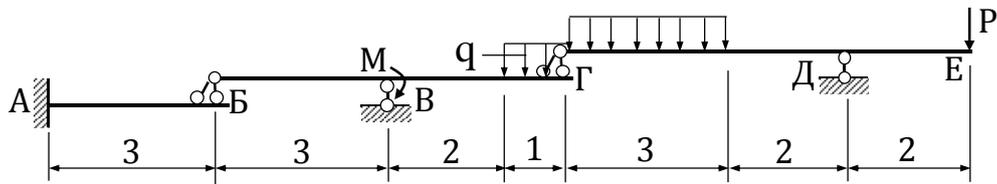


Рисунок 1.38– Поэтажная схема.

### 3. Построение эпюр изгибающих моментов и поперечных сил.

Расчет начинаем с самой верхней балки ГДЕ (рис. 1.39), так как она воспринимает только нагрузку, приложенной непосредственно к ней и на нее не влияют нагрузки, действующие на другие балки, расположенные на нижних этажах.

а) *Определение опорные реакции балки от действия заданной нагрузки.*

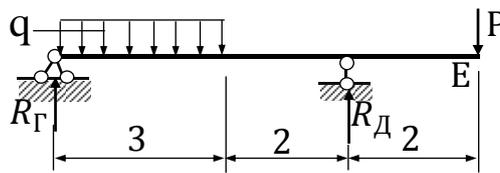


Рисунок 1.39– Расчетная схема балки ГДЕ.

Опорные реакции  $R_{\Gamma}$  и  $R_{\text{Д}}$  определяем из уравнений равновесия:

$$\sum M_{\Gamma} = 0; q \cdot 3 \cdot \frac{3}{2} + P \cdot 7 - R_{\text{Д}} \cdot 5 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow R_{\text{Д}} \cdot 5 = 2 \cdot 3 \cdot \frac{3}{2} + 1 \cdot 7 \Leftrightarrow R_{\text{Д}} = 3,2 \text{ кН};$$

$$\sum M_{\text{Д}} = 0; R_{\Gamma} \cdot 5 - q \cdot 3 \cdot \left(\frac{3}{2} + 2\right) + P \cdot 2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow R_{\Gamma} \cdot 5 = 2 \cdot 3 \cdot \left(\frac{3}{2} + 2\right) - 1 \cdot 2 \Leftrightarrow R_{\Gamma} = 3,8 \text{ кН}.$$

Спроектируем все силы, действующие на балку ГДЕ на вертикальную ось:

$$\sum z = 0; q \cdot 3 - R_{\text{Д}} - R_{\Gamma} + P = 0 \Leftrightarrow 2 \cdot 3 - 3,2 - 3,8 + 1 = 0 \Leftrightarrow 0 = 0.$$

Значит, опорные реакции определены правильно.

б) *Построение эпюру поперечных сил балки от действия заданной нагрузки.*

С учетом правила знаков определяем значения поперечных сил в характерных точках (в точке бесконечно близкой к опоре Г справа  $Q_{\Gamma}$ , в точке середины распределенной нагрузки  $Q_{l/2}$  и в точках бесконечно близких к опоре Д слева  $Q_{\text{Дл}}$  и справа  $Q_{\text{Дп}}$ ) и строим эпюру поперечных сил (рис. 1.40):

$$1) Q_{\Gamma} = R_{\Gamma} \Leftrightarrow Q_{\Gamma} = 3,8 \text{ кН};$$

$$2) Q_{l/2} = Q_{\Gamma} - q \cdot \frac{l}{2} \Leftrightarrow Q_{l/2} = 3,8 - 2 \cdot \frac{3}{2} \Leftrightarrow Q_{l/2} = 0,8;$$

$$3) Q_{\text{Дл}} = Q_{\Gamma} - q \cdot l \Leftrightarrow Q_{\text{Дл}} = 3,8 - 2 \cdot 3 \Leftrightarrow Q_{\text{Дл}} = -2,2 \text{ кН};$$

$$4) Q_{\text{Дп}} = Q_{\text{Дл}} + R_{\text{Д}} \Leftrightarrow Q_{\text{Дп}} = -2,2 + 3,2 \Leftrightarrow Q_{\text{Дп}} = 1 \text{ кН};$$

$$5) Q_{\text{Е}} = P \Leftrightarrow Q_{\text{Е}} = 1 \text{ кН}.$$

Найдем расстояние от точки Г до точки, где эпюра поперечных сил рана нулю.

$$Q_x = R_{\Gamma} - q \cdot x = 0 \Leftrightarrow x = R_{\Gamma}/q \Leftrightarrow x = 3,8/2 \Leftrightarrow x = 1,9 \text{ м.}$$

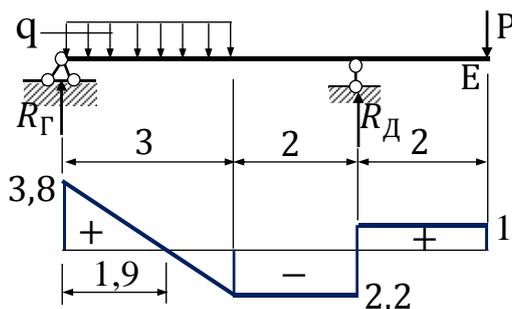


Рисунок 1.40– Эпюра поперечных сил  $Q$  балки ГДЕ.

**в) Построение эпюры изгибающих моментов балки от действия заданной нагрузки.**

Балка ГДЕ неподвижна, геометрически неизменяема, статически определима и находится в равновесии. Значит любая часть балки под действием внешних сил и внутренних усилий также должна находиться в равновесии. Балка ГДЕ консольная и состоит из 3-х участков: 1-ый участок от введенной опоры Г до сечения 4, 2-ой участок от опоры Д до точки Е и 3-ий участок от сечения 4 до опоры Д.

Сначала рассмотрим 1-ый участок. Мысленно вырежем левую часть балки длиной  $x$ . Переменная  $x$  изменяется от 0 до 3, т.е. от введенной опоры Г до сечения 4. Прикладываем внешнюю нагрузку и возникающие усилия  $M_x$  и  $Q_x$  в месте сечения и рассмотрим ее равновесие (рис. 1.41, а).

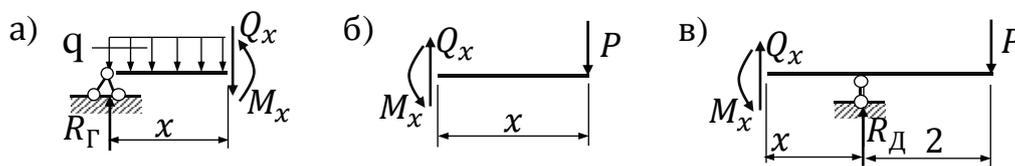


Рисунок 1.41– Расчетная схема для определения  $M_x$  1-го, 2-го и 3-го участков балки ГЕ.

Определяем ординаты эпюры изгибающих моментов  $M$  из уравнений равновесия:

$$\sum M = 0; \quad M_x = R_{\Gamma} \cdot x - q \cdot x \cdot \frac{x}{2} \Leftrightarrow M_x = 3,8 \cdot x - 2 \cdot x \cdot \frac{x}{2} \Leftrightarrow M_x = 3,8 \cdot x - x^2.$$

При  $x = 0$ ,  $M_x = 0$ ; при  $x = 1,9$  м,  $M_x = 3,8 \cdot 1,9 - 1,9^2 = 3,61$  кНм; при  $x = 3$  м,  $M_x = 3,8 \cdot 3 - 3^2 = 2,4$  кНм; при  $x = 1,5$  м,  $M_x = 3,8 \cdot 1,5 - 1,5^2 = 3,45$  кНм.

Рассмотрим теперь 2-ой участок. Мысленно вырежем консоль балки длиной  $x$  от точки Е. Переменная  $x$  изменяется от 0 до 2, т.е. от точки Е до опоры Д. Прикладываем внешнюю нагрузку и возникающие усилия  $M_x$  и  $Q_x$  в месте сечения и рассмотрим ее равновесие (рис. 1.41, б).

Определяем ординаты эпюры изгибающих моментов  $M$  из уравнений равновесия:

$$\sum M = 0; \quad M_x = -P \cdot x \Leftrightarrow M_x = -1 \cdot x \Leftrightarrow M_x = -x.$$

При  $x = 0$ ,  $M_x = 0$ ; при  $x = 2$  м,  $M_x = -1 \cdot 2 \Leftrightarrow M_x = -2$  кНм.

Рассмотрим теперь 3-ий участок. Мысленно вырежем правую часть балки длиной  $x$  от точки Е (можно вырезать и левую часть балки, разницы тоже нет никакой, но тогда вычислений будет больше и возможность внести в расчет ошибок тоже больше). Переменная  $x$  изменяется от 0 до 2, т.е. от точки Д до сечения 4. Прикладываем внешнюю нагрузку и возникающие усилия  $M_x$  и  $Q_x$  в месте сечения и рассмотрим ее равновесие (рис. 1.41, в).

Определяем ординаты эпюры изгибающих моментов  $M$  из уравнений равновесия:

$$\begin{aligned} \sum M = 0; M_x = R_D \cdot x - P \cdot (x + 2) &\Leftrightarrow M_x = 3,2 \cdot x - 1 \cdot (x + 2) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow M_x = 2,2 \cdot x - 2. \end{aligned}$$

При  $x = 0$ ,  $M_x = -2$ ; при  $x = 2$  м,  $M_x = 2,2 \cdot 2 - 2 \Leftrightarrow M_x = 2,4$  кНм.

Построим эпюру изгибающих моментов для всей балки ГДЕ (рис. 1.42).

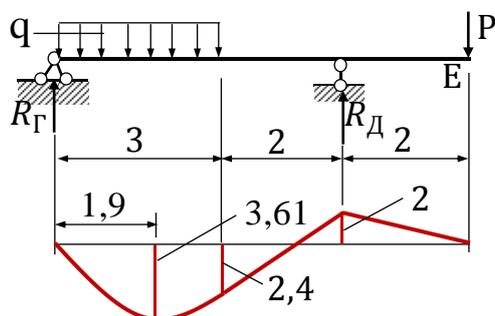


Рисунок 1.42– Эпюра изгибающих моментов балки ГДЕ.

**Рассмотрим балку БВГ** (рис. 1.43), расположенную ниже балки ГДЕ. Опорное давление  $R_G$  прикладываем к балке БВГ с противоположным направлением.

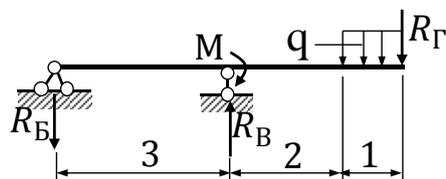


Рисунок 1.43– Расчетная схема балки БВГ.

**а) Определение опорных реакций балки от действия заданной нагрузки.**

Опорные реакции  $R_B$  и  $R_G$  определяем из уравнений равновесия:

$$\sum M_B = 0; -R_B \cdot 3 + M + R_G \cdot 3 + q \cdot 1 \cdot \left(\frac{1}{2} + 2\right) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow R_B \cdot 3 = R_G \cdot 3 + q \cdot 1 \cdot \left(\frac{1}{2} + 2\right) + M \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow R_B \cdot 3 = 3,8 \cdot 3 + 2 \cdot 1 \cdot \left(\frac{1}{2} + 2\right) + 4 \Leftrightarrow R_B = 6,8 \text{ кН};$$

$$\sum M_B = 0; M - R_B \cdot 3 + R_G \cdot 6 + q \cdot 1 \cdot \left(\frac{1}{2} + 5\right) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow R_B \cdot 3 = M + R_G \cdot 6 + q \cdot 1 \cdot \left(\frac{1}{2} + 5\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow R_B \cdot 3 = 4 + 3,8 \cdot 6 + 2 \cdot 1 \cdot \left(\frac{1}{2} + 5\right) \Leftrightarrow R_B = 12,6 \text{ кН}.$$

Спроектируем все силы, действующие на балку БВГ на вертикальную ось:

$$\sum z = 0; R_B - R_B - R_\Gamma - q \cdot 1 = 0 \Leftrightarrow 12,6 - 6,8 - 3,8 - 2 = 0 \Leftrightarrow 0 = 0.$$

Значит, опорные реакции определены правильно.

**б) Построение эпюры поперечных сил балки от действия заданной нагрузки.**

С учетом правила знаков определяем значения поперечных сил в характерных точках (в точке бесконечно близкой к опоре Б справа  $Q_B$ , в точках бесконечно близких к опоре В слева  $Q_B^I$  и справа  $Q_B^{II}$ , в точке Г  $Q_\Gamma$  и в сечении 3  $Q_{сеч3}$ ) и строим эпюру поперечных сил (рис. 1.44):

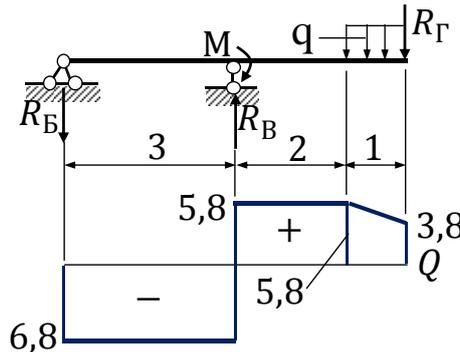


Рисунок 1.44– Эпюра поперечных сил  $Q$  балки БВГ.

- 1)  $Q_B = -R_B \Leftrightarrow Q_B = -6,8 \text{ кН};$
- 2)  $Q_B^I = Q_B \Leftrightarrow Q_B^I = -6,8 \text{ кН};$
- 3)  $Q_B^{II} = Q_B^I - R_B \Leftrightarrow Q_B^{II} = -6,8 + 12,6 \Leftrightarrow Q_B^{II} = 5,8 \text{ кН};$
- 4)  $Q_\Gamma = R_\Gamma \Leftrightarrow Q_\Gamma = 3,8 \text{ кН};$
- 5)  $Q_{сеч3} = Q_\Gamma + q \cdot 1 \Leftrightarrow Q_{сеч3} = 3,8 + 2 \cdot 1 \Leftrightarrow Q_{сеч3} = 5,8 \text{ кН}.$

**в) Построение эпюры изгибающих моментов балки от действия заданной нагрузки.**

Балка БВГ неподвижна, геометрически неизменяема, статически определима и находится в равновесии. Значит любая часть балки под действием внешних сил и внутренних усилий также должна находиться в равновесии. Балка БВГ консольная и состоит из 3-х участков: 1-ый участок от введенной опоры Б до опоры В, 2-ой участок от точки Г до сечения 3 и 3-ий участок от сечения 3 до опоры В.

Сначала рассмотрим 1-ый участок. Мысленно вырежем левую часть балки длиной  $x$ . Переменная  $x$  изменяется от 0 до 3, т.е от опоры Б до опоры В. Прикладываем внешнюю нагрузку и возникающие усилия  $M_x$  и  $Q_x$  в месте сечения и рассмотрим ее равновесие (рис. 1.45, а).

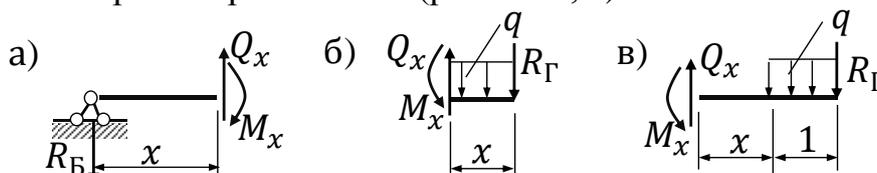


Рисунок 1.45– Расчетная схема для определения  $M_x$  1-го, 2-го и 3-го участков балки БВГ.

Определяем ординаты эпюры изгибающих моментов  $M$  из уравнений равновесия:

$$\sum M = 0; M_x = -R_B \cdot x \Leftrightarrow M_x = -6,8 \cdot x.$$

При  $x = 0$ ,  $M_x = 0$ ; при  $x = 3$  м,  $M_x = -6,8 \cdot 3 = -20,4$  кНм.

Рассмотрим теперь 2-ой участок. Мысленно вырежем консольную часть балки длиной  $x$  от точки Г. Переменная  $x$  изменяется от 0 до 1, т.е. от точки Г до сечения 3. Прикладываем внешнюю нагрузку и возникающие усилия  $M_x$  и  $Q_x$  в месте сечения и рассмотрим ее равновесие (рис. 1.45, б).

Определяем ординаты эпюры изгибающих моментов  $M$  из уравнений равновесия:

$$\begin{aligned} \sum M = 0; M_x = -R_G \cdot x - q \cdot x \cdot \frac{x}{2} &\Leftrightarrow M_x = -3,8 \cdot x - 2 \cdot x \cdot \frac{x}{2} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow M_x = -3,8x - x^2. \end{aligned}$$

При  $x = 0$ ,  $M_x = 0$ ; при  $x = 1$  м,  $M_x = -1 - 3,8 \cdot 1^2 = -4,8$  кНм.

Рассмотрим теперь 3-ий участок. Мысленно вырежем консольную часть балки длиной  $x$  от сечения 3. Переменная  $x$  изменяется от 0 до 2, т.е. от сечения 3 до опоры В. Прикладываем внешнюю нагрузку и возникающие усилия  $M_x$  и  $Q_x$  в месте сечения и рассмотрим ее равновесие (рис. 1.45, в).

Определяем ординаты эпюры изгибающих моментов  $M$  из уравнений равновесия:

$$\begin{aligned} \sum M = 0; M_x = -R_G \cdot (x + 1) - q \cdot 1 \cdot \left(\frac{1}{2} + x\right) &\Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow M_x = -3,8(1 + x) - 2 \cdot 1 \cdot \left(\frac{1}{2} + x\right) &\Leftrightarrow M_x = -4,8 - 5,8x. \end{aligned}$$

При  $x = 0$ ,  $M_x = -4,8$  кНм; при  $x = 2$  м,  $M_x = -4,8 - 5,8 \cdot 2 = -16,4$  кНм.

Построим эпюру изгибающих моментов для всей балки БВГ (рис. 1.46).

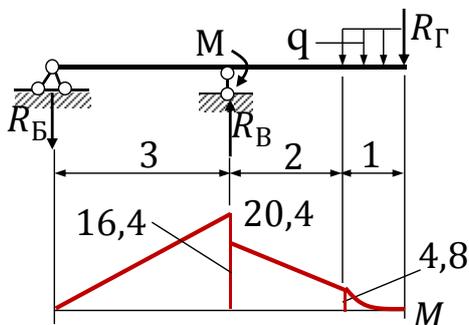


Рисунок 1.46– Эпюра изгибающих моментов балки БВГ.

**Рассмотрим главную анкерную балку АБ (рис. 1.47).** На эту балку передается давление от балки БВГ, равное реакции  $R_B$  с противоположным направлением.

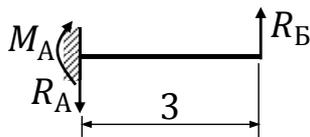


Рисунок 1.47– Расчетная схема балки АБ.

**а) Определение реакции всех связей балки от действия заданной нагрузки.**

Опорная реакция  $R_A$  и опорный момент  $M_A$  определяем из уравнений равновесия:

$$\sum M_A = 0; M_A = R_B \cdot 3 \Leftrightarrow M_A = 6,8 \cdot 3 \Leftrightarrow M_A = 20,4 \text{ кНм};$$

$$\sum z = 0; R_B - R_A \Leftrightarrow R_A = R_B \Leftrightarrow R_A = 6,8 \text{ кН}.$$

**б) Построение эпюры поперечных сил балки от действия заданной нагрузки.**

С учетом правила знаков определяем значения поперечных сил в характерных точках (в точке бесконечно близкой к опоре А справа  $Q_A$ , в точке бесконечно близкой к точке Б слева  $Q_B$ ) и строим эпюру поперечных сил (рис. 1.48):

$$1) Q_A = -R_A \Leftrightarrow Q_A = -6,8 \text{ кН};$$

$$2) Q_B = Q_A \Leftrightarrow Q_B = -6,8 \text{ кН}.$$

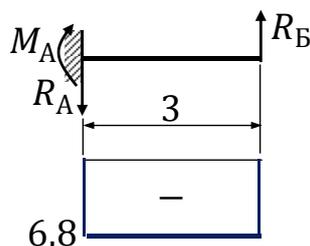


Рисунок 1.48– Эпюра поперечных сил  $Q$  балки АБ.

**в) Построение эпюры изгибающих моментов балки от действия заданной нагрузки.**

Балка АБ неподвижна, геометрически неизменяема, статически определима и находится в равновесии. Значит любая часть балки под действием внешних сил и внутренних усилий также должна находиться в равновесии.

Мысленно вырежем левую часть балки длиной  $x$ . Переменная  $x$  изменяется от 0 до 3, т.е. от точки Б до опоры А. Прикладываем внешнюю нагрузку и возникающие усилия  $M_x$  и  $Q_x$  в месте сечения и рассмотрим ее равновесие (рис. 1.49).

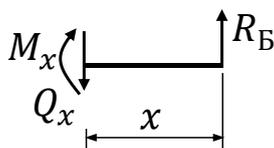


Рисунок 1.49– Расчетная схема для определения  $M_x$  балки АБ.

Определяем ординаты эпюры изгибающих моментов  $M$  из уравнений равновесия:

$$\sum M = 0; M_x = R_B \cdot x \Leftrightarrow M_x = 6,8 \cdot x.$$

При  $x = 0$ ,  $M_x = 0$ ; при  $x = 3$  м,  $M_x = 6,8 \cdot 3 = 20,4$  кНм.

Построим эпюру изгибающих моментов для балки АБ (рис. 1.50).

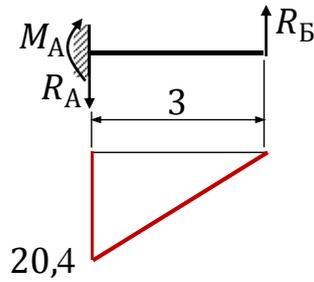


Рисунок 1.50– Эпюра изгибающих моментов балки АБ.

Построим эпюры поперечных сил и изгибающих моментов для всей трехпролетной шарнирно-консольной балки (рис. 1.51). Значения изгибающих моментов в сечениях 1 и 2 определим из подобия соответствующих треугольников:

$$1) \frac{20,4}{3} = \frac{x_1}{2} \Leftrightarrow x_1 = \frac{20,4}{3} \cdot 2 \Leftrightarrow x_1 = 13,6 \text{ кНм};$$

$$2) \frac{-20,4}{3} = \frac{x_2}{1} \Leftrightarrow x_2 = \frac{-20,4}{3} \cdot 1 \Leftrightarrow x_2 = -6,8 \text{ кНм}.$$

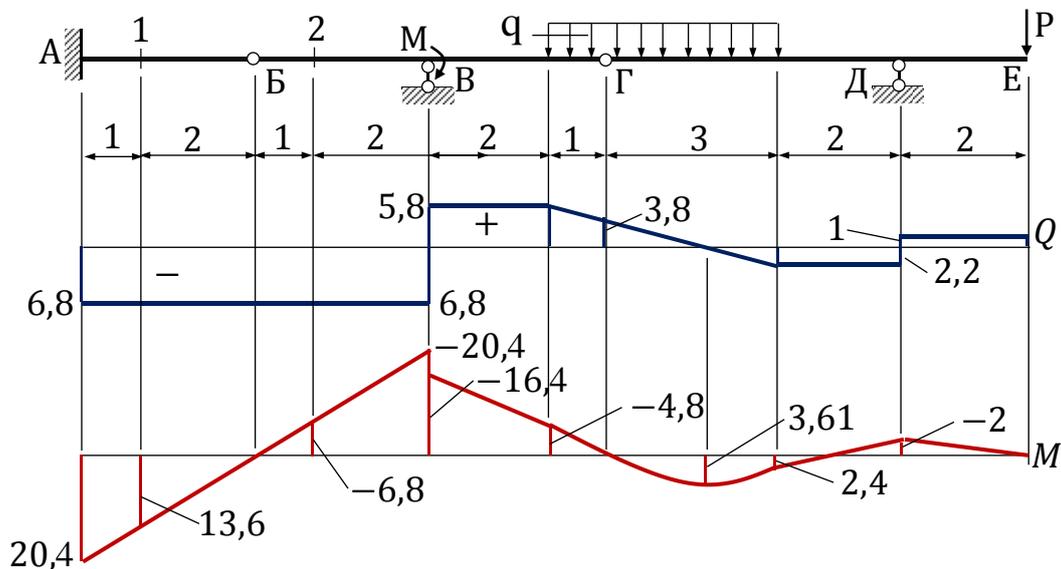


Рисунок 1.51– Эпюры поперечных сил и изгибающих моментов балки.

#### 4. Определение перемещений.

##### Определение угла поворота сечения по формуле Мора.

##### а) Определим угол поворота сечения 1.

В балке АБ, где расположено сечение 1, отмечаем произвольное сечение на расстоянии  $x$  от опоры А (рис. 1.52, а).

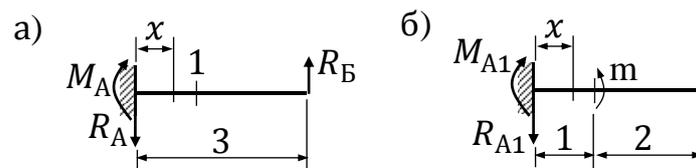


Рисунок 1.52– Схемы для определения угла поворота сечения 1.

Находим выражения для изгибающих моментов как функции координат произвольного сечения  $x$ . Опорные реакции определены на рис. 1.47:  $R_A = 6,8$  кН,  $M_A = 20,4$  кНм.

$$M_1 = -R_A x + M_A \Leftrightarrow M_1 = -6,8x + 20,4.$$

К балке без внешних нагрузок прикладываем по направлению искомого поворота единичный момент  $m = 1$  (рис. 1.52, б).

Находим выражения для опорных реакций:

$$\sum M_{A1} = 0; M_{A1} - m = 0 \Leftrightarrow M_{A1} = 1.$$

$$R_{A1} = 0.$$

Находим выражения для изгибающих моментов как функции координаты произвольного сечения  $x$ . Справа от сечения 1 изгибающих моментов от действия единичного момента не возникают:

$$M_{11} = M_{A1} \Leftrightarrow M_{11} = 1.$$

Подставляем полученные выражения изгибающих моментов от заданной нагрузки  $M_1$  и от единичного момента  $M_{11}$  в формулу и интегрируем по участкам.

$$\begin{aligned} \gamma &= \sum \frac{1}{EI} \int_0^l M_{11} M_1 dx \Leftrightarrow \gamma = \frac{1}{EI} \int_0^1 1 \cdot (-6,8x + 20,4) dx \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \gamma &= \frac{1}{EI} \int_0^1 (-6,8x + 20,4) dx \Leftrightarrow \gamma = \frac{1}{EI} \left( -6,8 \int_0^1 x dx + 20,4 \int_0^1 dx \right) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \gamma &= \frac{1}{EI} \left( -6,8 \frac{x^2}{2} \Big|_0^1 + 20,4x \Big|_0^1 \right) \Leftrightarrow \gamma = \frac{1}{EI} (-3,4 + 20,4) \Leftrightarrow \gamma = \frac{17}{EI}. \end{aligned}$$

### б) Определим угол поворота сечения 2.

В балке БВГ, где расположено сечение 2, отмечаем произвольные сечения на расстоянии  $x_1$  от опоры Б и на расстоянии  $x_2$  от опоры В (рис. 1.53).

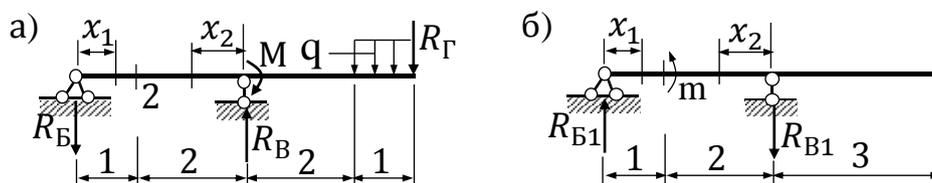


Рисунок 1.53– Схемы для определения угла поворота сечения 2.

Находим выражения для изгибающих моментов  $M_1$  и  $M_2$  как функции координат произвольных сечений  $x_1$  и  $x_2$ . Опорные реакции определены на рис. 1.43:  $R_B = 6,8$  кН,  $R_V = 12,6$  кН.

$$M_1 = -R_B x_1 \Leftrightarrow M_1 = -6,8x_1;$$

$$M_2 = R_V x_2 - M - q \cdot 1 \cdot \left( \frac{1}{2} + 2 + x_2 \right) - R_G \cdot (3 + x_2) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow M_2 = 12,6 \cdot x_2 - 4 - 2 \cdot 1 \cdot \left( \frac{1}{2} + 2 + x_2 \right) - 3,8 \cdot (3 + x_2) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow M_2 = 6,8x_2 - 20,4.$$

К балке без внешних нагрузок прикладываем по направлению искомого поворота единичный момент  $m = 1$  (рис. 1.53, б).

Находим выражения для опорных реакций:

$$\sum M_{B1} = 0; R_{V1} \cdot 3 - m = 0 \Leftrightarrow R_{V1} \cdot 3 - 1 = 0 \Leftrightarrow R_{V1} = 1/3.$$

$$\sum M_{B1} = 0; R_{B1} \cdot 3 - m = 0 \Leftrightarrow R_{B1} \cdot 3 - 1 = 0 \Leftrightarrow R_{B1} = 1/3.$$

Находим выражения для изгибающих моментов  $M_{11}$  и  $M_{12}$  как функции координат произвольных сечений  $x_1$  и  $x_2$ :

$$M_{11} = R_{B1}x_1 \Leftrightarrow M_{11} = 1/3 x_1; M_{12} = R_{B1}x_2 \Leftrightarrow M_{12} = -1/3 x_2.$$

Подставляем полученные выражения изгибающих моментов от заданной нагрузки  $M_1$  и  $M_2$  и от единичного момента  $M_{11}$  и  $M_{12}$  в формулу и интегрируем по участкам.

$$\begin{aligned} \gamma &= \sum \frac{1}{EI} \int_0^l M_{11} M_1 dx \Leftrightarrow \gamma = \frac{1}{EI} \int_0^1 1/3 x_1 \cdot (-6,8x_1) dx_1 + \\ &+ \frac{1}{EI} \int_0^2 -1/3 x_2 \cdot (6,8x_2 - 20,4) dx_2 \Leftrightarrow \gamma = -\frac{6,8}{3} \frac{1}{EI} \int_0^1 x_1^2 dx_1 - \\ &\quad - \frac{6,8}{3} \frac{1}{EI} \int_0^2 x_2^2 dx_2 + \frac{20,4}{3} \frac{1}{EI} \int_0^2 x_2 dx_2 \Leftrightarrow \gamma = \\ &= -\frac{1}{EI} \left( \frac{6,8}{3} \cdot \frac{x_1^3}{3} \Big|_0^1 + \frac{6,8}{3} \cdot \frac{x_2^3}{3} \Big|_0^2 - \frac{20,4}{3} \cdot \frac{x_2^2}{2} \Big|_0^2 \right) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \gamma = -\frac{1}{EI} \left( \frac{6,8}{3} \cdot \frac{1^3}{3} + \frac{6,8}{3} \cdot \frac{2^3}{3} - \frac{20,4}{3} \cdot \frac{2^2}{2} \right) \Leftrightarrow \gamma = -\frac{6,8}{EI}. \end{aligned}$$

**в) Определим угол поворота сечения 3.**

В балке БВГ, где расположено сечение 3, отмечаем произвольные сечения на расстоянии  $x_1$  от опоры В и на расстоянии  $x_2$  от точки Г (рис. 1.54).

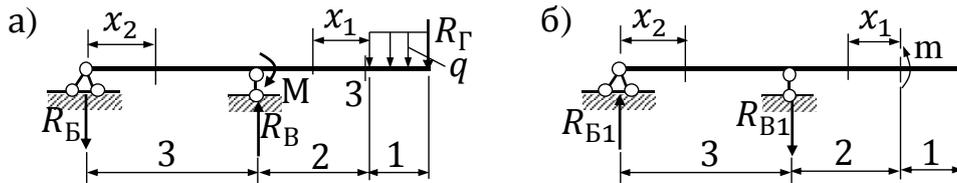


Рисунок 1.54– Схемы для определения угла поворота сечения 3.

Находим выражения для изгибающих моментов  $M_1$  и  $M_2$  как функций координат произвольных сечений  $x_1$  и  $x_2$ . Опорные реакции определены на рис. 1.43:  $R_B = 6,8$  кН,  $R_G = 12,6$  кН.

$$M_1 = -R_G(x_1 + 1) - q \cdot 1 \cdot \left( \frac{1}{2} + x_1 \right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow M_1 = -3,8(x_1 + 1) - 2 \cdot 1 \cdot \left( \frac{1}{2} + x_1 \right) = -5,8x_1 - 4,8;$$

$$M_2 = -R_B x_2 \Leftrightarrow M_2 = -6,8x_2.$$

К балке без внешних нагрузок прикладываем по направлению искомого поворота единичный момент  $m = 1$  (рис. 1.54, б).

Находим выражения для опорных реакций:

$$\sum M_{B1} = 0; R_{B1} \cdot 3 - m = 0 \Leftrightarrow R_{B1} \cdot 3 - 1 = 0 \Leftrightarrow R_{B1} = 1/3;$$

$$\sum M_{B1} = 0; R_{B1} \cdot 3 - m = 0 \Leftrightarrow R_{B1} \cdot 3 - 1 = 0 \Leftrightarrow R_{B1} = 1/3.$$

Находим выражение для изгибающего момента  $M_{11}$  и  $M_{12}$  как функции координата произвольных сечений  $x_1$  и  $x_2$ :

$$M_{11} = m \Leftrightarrow M_{11} = 1;$$

$$M_{12} = R_{B1}x_2 \Leftrightarrow M_{12} = \frac{1}{3}x_2.$$

Подставляем полученные выражения изгибающих моментов от заданной нагрузки  $M_1$  и  $M_2$  и от единичного момента  $M_{11}$  и  $M_{12}$  в формулу и интегрируем по участкам.

$$\begin{aligned} \gamma &= \sum \frac{1}{EI} \int_0^l M_{11} M_1 dx \Leftrightarrow \gamma = \frac{1}{EI} \int_0^2 1 \cdot (-5,8x_1 - 4,8) dx_1 + \\ & \frac{1}{EI} \int_0^3 \frac{1}{3} \cdot x_2 (-6,8x_2) dx_2 \Leftrightarrow \gamma = -\frac{1}{EI} \int_0^2 5,8x_1 dx_1 - \frac{1}{EI} \int_0^2 4,8 dx_1 - \\ & -\frac{1}{EI} \int_0^3 \frac{6,8}{3} x_2^2 dx_2 \Leftrightarrow \gamma = -\frac{1}{EI} \left( 5,8 \frac{x_1^2}{2} \Big|_0^2 + 4,8x_2 \Big|_0^2 + \frac{6,8}{3} \frac{x_2^3}{3} \Big|_0^3 \right) \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow \gamma = -\frac{1}{EI} \left( 5,8 \cdot \frac{2^2}{2} + 4,8 \cdot 2 + \frac{6,8}{3} \cdot \frac{3^3}{3} \right) \Leftrightarrow \gamma = -\frac{41,6}{EI}. \end{aligned}$$

г) **Определим угол поворота сечения 4.**

В балке ГДЕ, где расположено сечение 4, отмечаем произвольные сечения на расстоянии  $x_1$  от опоры Г и на расстоянии  $x_2$  от опоры Д (рис. 1.55).

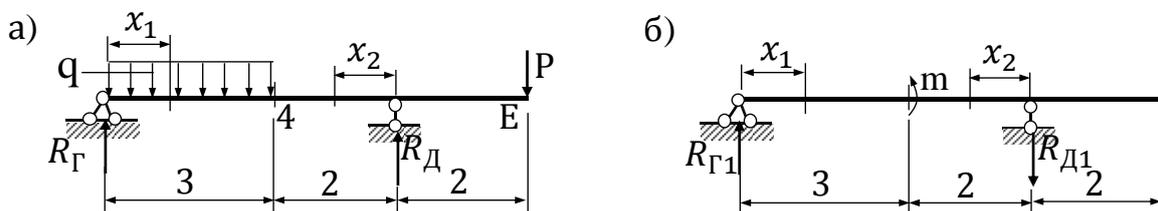


Рисунок 1.55– Схемы для определения угла поворота сечения 4.

Находим выражения для изгибающих моментов  $M_1$  и  $M_2$  как функций координат произвольных сечений  $x_1$  и  $x_2$ . Опорные реакции определены на рис. 1.39:  $R_G = 3,8$  кН,  $R_D = 3,2$  кН.

$$M_1 = R_G x_1 - q x_1 \frac{x_1}{2} \Leftrightarrow M_1 = 3,8x_1 - 2x_1 \frac{x_1}{2} \Leftrightarrow M_1 = 3,8x_1 - x_1^2;$$

$$M_2 = R_D x_2 - P(x_2 + 2) \Leftrightarrow M_2 = 3,2x_2 - 1 \cdot (x_2 + 2) \Leftrightarrow M_2 = 2,2x_2 -$$

2.

К балке без внешних нагрузок прикладываем по направлению искомого поворота единичный момент  $m = 1$  (рис. 1.54, б).

Находим выражения для опорных реакций:

$$\sum M_{G1} = 0; R_{D1} \cdot 5 - m = 0 \Leftrightarrow R_{D1} \cdot 5 - 1 = 0 \Leftrightarrow R_{D1} = 1/5;$$

$$\sum M_{D1} = 0; R_{G1} \cdot 5 - m = 0 \Leftrightarrow R_{G1} \cdot 5 - 1 = 0 \Leftrightarrow R_{G1} = 1/5.$$

Находим выражения для изгибающих моментов  $M_{11}$  и  $M_{12}$  как функции координата произвольных сечений  $x_1$  и  $x_2$ :

$$M_{11} = R_{G1} x_1 \Leftrightarrow M_{11} = 1/5 x_1; M_{12} = -R_{D1} x_2 \Leftrightarrow M_{12} = -1/5 x_2.$$

Подставляем полученные выражения изгибающих моментов от заданной нагрузки  $M_1$  и  $M_2$  и от единичного момента  $M_{11}$  и  $M_{12}$  в формулу и интегрируем по участкам.

$$\begin{aligned} \gamma &= \sum \frac{1}{EI} \int_0^l M_{11} M_1 dx \Leftrightarrow \gamma = \frac{1}{EI} \int_0^3 \frac{1}{5} x_1 \cdot (3,8x_1 - x_1^2) dx_1 + \\ & + \frac{1}{EI} \int_0^2 \left( -\frac{1}{5} x_2 \right) \cdot (2,2x_2 - 2) dx_2 = \frac{1}{EI} \int_0^3 \frac{3,8}{5} x_1^2 dx_1 - \frac{1}{EI} \int_0^3 \frac{1}{5} x_1^3 dx_1 - \\ & - \frac{1}{EI} \int_0^2 \frac{2,2}{5} x_2^2 dx_2 + \frac{1}{EI} \int_0^2 \frac{2}{5} x_2 dx_2 \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow \gamma = \frac{1}{EI} \left( \frac{3,8}{5} \cdot \frac{x_1^3}{3} \Big|_0^3 - \frac{1}{5} \cdot \frac{x_1^4}{4} \Big|_0^3 - \frac{2,2}{5} \cdot \frac{x_2^3}{3} \Big|_0^2 + \frac{2}{5} \cdot \frac{x_2^2}{2} \Big|_0^2 \right) \Leftrightarrow \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \gamma = \frac{1}{EI} \left( \frac{3,8}{5} \cdot \frac{3^3}{3} - \frac{1}{5} \cdot \frac{3^4}{4} - \frac{2,2}{5} \cdot \frac{2^3}{3} + \frac{2}{5} \cdot \frac{2^2}{2} \right) \Leftrightarrow \gamma = \frac{2,42}{EI}.$$

д) **Определим угол поворота сечения 5.**

В балке ГДЕ, где расположено сечение 5, отмечаем произвольные сечения на расстоянии  $x_1$  от опоры Г, на расстоянии  $x_2$  от точки 4 и на расстоянии  $x_3$  от точки Е (рис. 1.56).

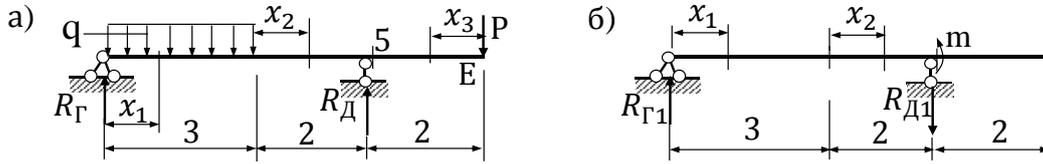


Рисунок 1.56– Схемы для определения угла поворота сечения 5.

Находим выражения для изгибающих моментов  $M_1$ ,  $M_2$  и  $M_3$  как функций координат произвольных сечений  $x_1$ ,  $x_2$  и  $x_3$ . Опорные реакции определены на рис. 1.39:  $R_G = 3,8$  кН,  $R_D = 3,2$  кН.

$$M_1 = R_G \cdot x_1 - q \cdot x_1 \cdot \frac{x_1}{2} \Leftrightarrow M_1 = 3,8 \cdot x_1 - 2 \cdot x_1 \cdot \frac{x_1}{2} \Leftrightarrow M_1 = 3,8 \cdot x_1 - x_1^2.$$

$$M_2 = R_G(x_2 + 3) - q3(1,5 + x_2) \Leftrightarrow M_2 = 3,8(x_2 + 3) - 2 \cdot 3(1,5 + x_2) \Leftrightarrow M_2 = -2,2x_2 + 2,4;$$

$$M_3 = Px_3 \Leftrightarrow M_3 = 1 \cdot x_3 \Leftrightarrow M_3 = x_3.$$

К балке без внешних нагрузок прикладываем по направлению искомого поворота единичный момент  $m = 1$  (рис. 1.56, б).

Находим выражения для опорных реакций:

$$\sum M_{G1} = 0; R_{D1} \cdot 5 - m = 0 \Leftrightarrow R_{D1} \cdot 5 - 1 = 0 \Leftrightarrow R_{D1} = 1/5;$$

$$\sum M_{D1} = 0; R_{G1} \cdot 5 - m = 0 \Leftrightarrow R_{G1} \cdot 5 - 1 = 0 \Leftrightarrow R_{G1} = 1/5.$$

Находим выражения для изгибающих моментов  $M_{11}$ ,  $M_{12}$  и  $M_{13}$  как функции координата произвольного сечения  $x_1$ ,  $x_2$  и  $x_3$ .

$$M_{11} = R_{G1}x_1 \Leftrightarrow M_{11} = 1/5 x_1; \quad M_{12} = R_{G1}(x_2 + 3) \Leftrightarrow M_{12} = 1/5 x_2 + 3/5.$$

Так как консоль ДЕ от действия единичного момента  $m = 1$  не изгибается, то в нем не возникают и изгибающие моменты:  $M_{13} = 0$ .

Подставляем полученные выражения изгибающих моментов от заданной нагрузки  $M_1$ ,  $M_2$  и  $M_3$  и от единичного момента  $M_{11}$ ,  $M_{12}$  и  $M_{13}$  в формулу и интегрируем по участкам.

$$\begin{aligned} \gamma &= \sum \frac{1}{EI} \int_0^l M_{11} M_1 dx \Leftrightarrow \gamma = \frac{1}{EI} \int_0^3 \frac{1}{5} x_1 \cdot (3,8 \cdot x_1 - x_1^2) dx_1 + \\ &\frac{1}{EI} \int_0^2 \left( \frac{1}{5} x_2 + \frac{3}{5} \right) \cdot (-2,2x_2 + 2,4) dx_2 + \frac{1}{EI} \int_0^2 0 \cdot x_3 dx_3 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \gamma = \frac{1}{EI} \int_0^3 \frac{3,8}{5} x_1^2 dx_1 - \frac{1}{EI} \int_0^3 \frac{1}{5} x_1^3 dx_1 - \frac{1}{EI} \int_0^2 \frac{2,2}{5} x_2^2 dx_2 - \\ &\frac{1}{EI} \int_0^2 \frac{6,6}{5} x_2 dx_2 + \frac{1}{EI} \int_0^2 \frac{2,4}{5} x_2 dx_2 + \frac{1}{EI} \int_0^2 \frac{7,2}{5} dx_2 \Leftrightarrow \gamma = \\ &= \frac{1}{EI} \left( \frac{3,8}{5} \cdot \frac{x_1^3}{3} \Big|_0^3 - \frac{1}{5} \cdot \frac{x_1^4}{4} \Big|_0^3 - \frac{2,2}{5} \cdot \frac{x_2^3}{3} \Big|_0^2 - \frac{6,6}{5} \cdot \frac{x_2^2}{2} \Big|_0^2 + \frac{2,4}{5} \cdot \frac{x_2^2}{2} \Big|_0^2 + \frac{7,2}{5} \cdot x_2 \Big|_0^2 \right) = \\ &= \frac{1}{EI} \left( \frac{3,8}{5} \cdot \frac{3^3}{3} - \frac{1}{5} \cdot \frac{3^4}{4} - \frac{2,2}{5} \cdot \frac{2^3}{3} - \frac{6,6}{5} \cdot \frac{2^2}{2} + \frac{2,4}{5} \cdot \frac{2^2}{2} + \frac{7,2}{5} \cdot 2 \right) = \frac{2,82}{EI}. \end{aligned}$$

**Определение прогиба сечения по формуле Мора.**

**а) Определим прогиб в сечении 2.**

В балке БВГ, где расположено сечение 2, отмечаем произвольные сечения на расстоянии  $x_1$  от опоры Б и на расстоянии  $x_2$  от опоры В (рис. 1.57).

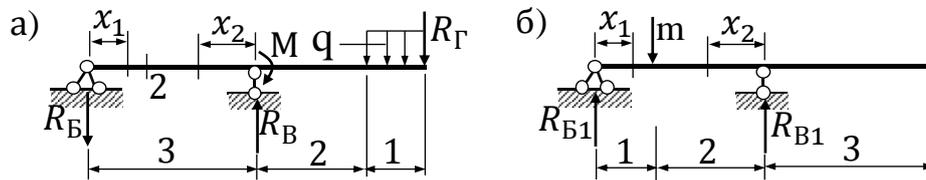


Рисунок 1.57– Схемы для определения прогиба сечения 2.

Находим выражения для изгибающих моментов  $M_1$  и  $M_2$  как функций координат произвольных сечений  $x_1$  и  $x_2$ . Опорные реакции определены на рис. 1.43:  $R_B = -6,8$  кН,  $R_V = 12,6$  кН

$$M_1 = -R_B x_1 \Leftrightarrow M_1 = -6,8x_1;$$

$$M_2 = R_V x_2 - M - q \cdot 1 \cdot (x_2 + 2,5) - R_G \cdot (x_2 + 3) \Leftrightarrow M_2 = 12,6x_2 - 4 - 2 \cdot (x_2 + 2,5) - 3,8 \cdot (x_2 + 3) \Leftrightarrow M_2 = 6,8x_2 - 20,4.$$

К балке без внешних нагрузок прикладываем по направлению искомого перемещения единичную силу  $m = 1$  (рис. 1.57, б).

Находим выражения для опорных реакций:

$$\sum M_{B1} = 0; m \cdot 1 - R_{B1} \cdot 3 = 0 \Leftrightarrow R_{B1} \cdot 3 - 1 = 0 \Leftrightarrow R_{B1} = 1/3;$$

$$\sum M_{V1} = 0; R_{B1} \cdot 3 - m \cdot 2 = 0 \Leftrightarrow R_{B1} \cdot 3 - 2 = 0 \Leftrightarrow R_{B1} = 2/3.$$

Находим выражения для изгибающих моментов  $M_{11}$  и  $M_{12}$  как функций координат произвольных сечений  $x_1$  и  $x_2$ . Действие единичной силы в середине балки изгибающих моментов на консоли не вызывает:

$$M_{11} = R_{B1} x_1 \Leftrightarrow M_{11} = 2/3 x_1; M_{12} = R_{V1} x_2 \Leftrightarrow M_{12} = 1/3 x_2.$$

Подставляем полученные выражения изгибающих моментов от заданной нагрузки  $M_1$  и  $M_2$  и от единичной силы  $M_{11}$  и  $M_{12}$  в формулу и интегрируем по участкам.

$$\begin{aligned} \delta &= \sum \frac{1}{EI} \int_0^l M_{11} M_1 dx \Leftrightarrow \delta = \frac{1}{EI} \int_0^1 \frac{2}{3} x_1 \cdot (-6,8x_1) dx_1 + \\ &+ \frac{1}{EI} \int_0^2 \frac{1}{3} x_2 \cdot (6,8x_2 - 20,4) dx_2 \Leftrightarrow \delta = \frac{1}{EI} \int_0^1 -\frac{13,6}{3} x_1^2 dx_1 + \\ &+ \frac{1}{EI} \int_0^2 \frac{6,8}{3} x_2^2 dx_2 - \frac{1}{EI} \int_0^2 6,8x_2 dx_2 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \delta &= \frac{1}{EI} \left( -\frac{13,6}{3} \cdot \frac{x_1^3}{3} \Big|_0^1 + \frac{6,8}{3} \cdot \frac{x_2^3}{3} \Big|_0^2 - 6,8 \cdot \frac{x_2^2}{2} \Big|_0^2 \right) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \delta &= \frac{1}{EI} \left( -\frac{13,6}{3} \cdot \frac{1^3}{3} + \frac{6,8}{3} \cdot \frac{2^3}{3} - 6,8 \cdot \frac{2^2}{2} \right) \Leftrightarrow \delta = -\frac{9,07}{EI}. \end{aligned}$$

**б) Определим прогиб в сечении 4.**

В балке ГДЕ, где расположено сечение 4, отмечаем произвольные сечения на расстоянии  $x_1$  от опоры Б и на расстоянии  $x_2$  от опоры В (рис. 1.58).

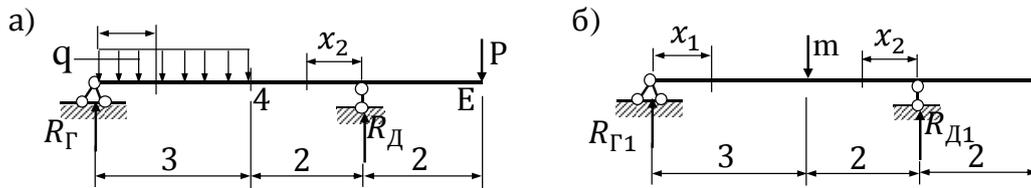


Рисунок 1.58.

Находим выражения для изгибающих моментов  $M_1$  и  $M_2$  как функций координат произвольных сечений  $x_1$  и  $x_2$ . Опорные реакции определены на рис. 1.39:  $R_{\Gamma} = 3,8$  кН,  $R_{\text{Д}} = 3,2$  кН.

$$M_1 = R_{\Gamma}x_1 - qx_1 \frac{x_1}{2} \Leftrightarrow M_1 = 3,8x_1 - 2x_1 \frac{x_1}{2} \Leftrightarrow M_1 = 3,8x_1 - x_1^2;$$

$$M_2 = R_{\text{Д}}x_2 - P(x_2 + 2) \Leftrightarrow M_2 = 3,2x_2 - 1 \cdot (x_2 + 2) \Leftrightarrow M_2 = 2,2x_2 -$$

2.

К балке без внешних нагрузок прикладываем по направлению искомого перемещения единичную силу  $m = 1$  (рис. 1.58, б).

Находим выражения для опорных реакций:

$$\sum M_{\Gamma_1} = 0; m \cdot 3 - R_{\text{Д}1} \cdot 5 = 0 \Leftrightarrow R_{\text{Д}1} \cdot 5 - 1 \cdot 3 = 0 \Leftrightarrow R_{\text{Д}1} = 3/5;$$

$$\sum M_{\text{Д}1} = 0; R_{\Gamma_1} \cdot 5 - m \cdot 2 = 0 \Leftrightarrow R_{\Gamma_1} \cdot 5 - 1 \cdot 2 = 0 \Leftrightarrow R_{\Gamma_1} = 2/5.$$

Находим выражения для изгибающих моментов  $M_{11}$  и  $M_{12}$  как функций координат произвольных сечений  $x_1$  и  $x_2$ . Действие единичной силы в середине балки изгибающих моментов на консоли не вызывает:

$$M_{11} = R_{\Gamma_1}x_1 \Leftrightarrow M_{11} = 2/5 x_1; M_{12} = R_{\text{Д}1}x_2 \Leftrightarrow M_{12} = 3/5 x_2.$$

Подставляем полученные выражения изгибающих моментов от заданной нагрузки  $M_1$  и  $M_2$  и от единичной силы  $M_{11}$  и  $M_{12}$  в формулу и интегрируем по участкам.

$$\begin{aligned} \delta &= \sum \frac{1}{EI} \int_0^l M_{11}M_1 dx \Leftrightarrow \delta = \frac{1}{EI} \int_0^3 \frac{2}{5} x_1 \cdot (3,8x_1 - x_1^2) dx_1 + \\ &+ \frac{1}{EI} \int_0^2 \frac{3}{5} x_2 \cdot (2,2x_2 - 2) dx_2 \Leftrightarrow \delta = \frac{1}{EI} \int_0^3 \frac{7,6}{5} x_1^2 dx_1 - \\ &- \frac{1}{EI} \int_0^3 \frac{2}{5} x_1^3 dx_1 + \frac{1}{EI} \int_0^2 \frac{6,6}{5} x_2^2 dx_2 - \frac{1}{EI} \int_0^2 \frac{6}{5} x_2 dx_2 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \delta &= \frac{1}{EI} \left( \frac{7,6}{5} \cdot \frac{x_1^3}{3} \Big|_0^3 - \frac{2}{5} \cdot \frac{x_1^4}{4} \Big|_0^3 + \frac{6,6}{5} \cdot \frac{x_2^3}{3} \Big|_0^2 - \frac{6}{5} \cdot \frac{x_2^2}{2} \Big|_0^2 \right) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \delta &= \frac{1}{EI} \left( \frac{7,6}{5} \cdot \frac{3^3}{3} - \frac{2}{5} \cdot \frac{3^4}{4} + \frac{6,6}{5} \cdot \frac{2^3}{3} - \frac{6}{5} \cdot \frac{2^2}{2} \right) \Leftrightarrow \delta = \frac{6,7}{EI}. \end{aligned}$$

**Определение угла поворота способом Верещагина.**

**а) Определим угол поворота сечения 1.**

Эпюра изгибающих моментов от заданной нагрузки  $M_n$  построена на рис. 1.50. Перенесем ее на рис. 1.59. Построим эпюру изгибающих моментов  $M_m$  от единичного момента  $m = 1$ . Опорные реакции от действия единичного момента определены на рис. 1.52:  $R_{\text{А}1} = 0$ ,  $M_{\text{А}1} = 1$ . Изгибающий момент в сечении 1 балки равен:

$$M = M_{\text{А}1} \Leftrightarrow M = 1.$$

Так как действующий на балку единичный момент  $m$  изгибающих моментов на консоли правее сечения 1 не вызывает, а только поворачивает, то эпюры там также нет (рис. 1.59).

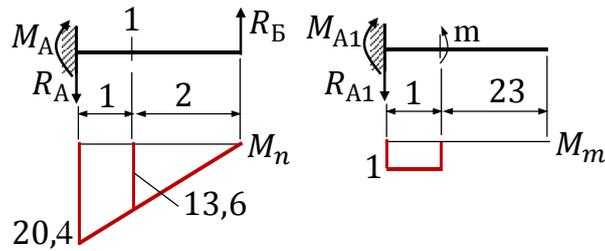


Рисунок 1.59– Эпюры изгибающих моментов  $M_n$  и  $M_m$  балки АБ.

Перемножим эпюры  $M_n$  и  $M_m$  на пролете АБ. Эпюра  $M_n$  до сечения 1 имеет форму трапеции, площадь которой равна

$$\omega_{AB} = \frac{1}{2} \cdot (13,6 + 20,4) \cdot 1 \Leftrightarrow \omega_{AB} = 17.$$

Так как эпюра  $M_m$  на пролете АБ имеет прямоугольную форму, то ордината  $y_{AB} = 1$ .

Эпюры  $M_n$  и  $M_m$  расположены по одну сторону от оси балки, поэтому произведение  $\omega_{BГ} \cdot y_{BГ}$  будет положительным:

$$\gamma = \sum \frac{1}{EI} \omega_n y_m \Leftrightarrow \gamma = \frac{1}{EI} \cdot \omega_{AB} \cdot y_{AB} \Leftrightarrow \gamma = \frac{1}{EI} \cdot 17 \cdot 1 \Leftrightarrow \gamma = \frac{17}{EI}.$$

Результаты, полученные по формуле Мора и способом Верещагина, совпадают.

**б) Определим угол поворота сечения 2.**

Эпюра изгибающих моментов от заданной нагрузки  $M_n$  построена на рис. 1.46. Перенесем ее на рис. 1.60. Построим эпюру изгибающих моментов  $M_m$  от единичного момента  $t = 1$ . Опорные реакции от действия единичного момента определены на рис. 1.53:  $R_{B1} = 1/3$ ,  $R_{B1} = 1/3$ . Изгибающий момент слева сечения 2 равен:

$$M = R_{B1} \cdot 1 \Leftrightarrow M = \frac{1}{3} \cdot 1 \Leftrightarrow M = \frac{1}{3}.$$

Изгибающий момент справа сечения 2 равен:

$$M = -R_{B1} \cdot 2 \Leftrightarrow M = -\frac{1}{3} \cdot 2 \Leftrightarrow M = -\frac{2}{3}.$$

Так как действующий на балку единичный момент  $t$  изгибающих моментов на консоли В1Г не вызывает, то эпюры там также нет (рис. 1.60).

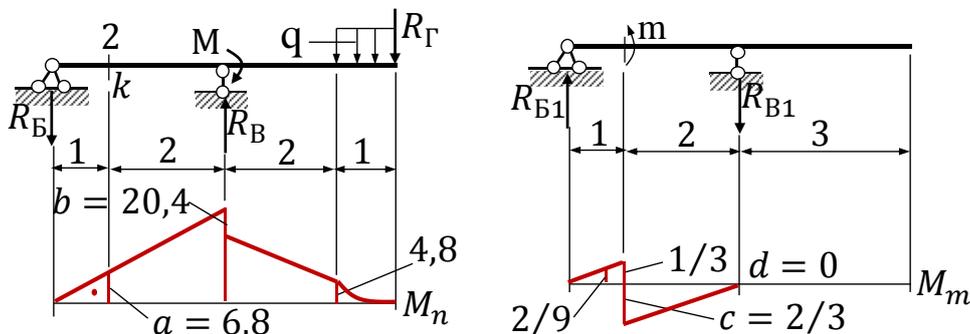


Рисунок 1.60– Эпюры изгибающих моментов  $M_n$  и  $M_m$  балки БГ.

Перемножим эпюры  $M_n$  и  $M_m$  на пролете БВ. Эпюры  $M_n$  и  $M_m$  до сечения 2 имеет треугольные формы и расположены с одной стороны от оси балки. Площадь эпюры  $M_n$  равна

$$\omega_{Bk} = \frac{1}{2} \cdot 6,8 \cdot 1 \Leftrightarrow \omega_{Bk} = 3,4.$$

Расстояние от левой точки этой эпюры (точка Б) до его центра тяжести равно  $\frac{2}{3} \cdot 1 = \frac{2}{3}$ , тогда ордината  $y_{Bk}$  из эпюры  $M_m$ , взятая под центром тяжести площади  $\omega_{Bk}$ , равна

$$y_{Bk} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} \Leftrightarrow y_{Bk} = \frac{2}{9}.$$

Эпюры  $M_n$  от сечения 2 до опоры В имеет форму трапеции, эпюра  $M_m$  – треугольную форму и расположены по разные стороны от оси балки, поэтому воспользуемся формулой трапеции [1]

$$\begin{aligned} \omega_{kB} y_{kB} &= \frac{l}{6} [2(ac + bd) + ad + bc] \Leftrightarrow \omega_{kB} y_{kB} = \\ &= \frac{2}{6} \left[ 2 \left( -6,8 \cdot \frac{2}{3} + 20,4 \cdot 0 \right) - 6,8 \cdot 0 - 20,4 \cdot \frac{2}{3} \right] \Leftrightarrow \omega_{kB} y_{kB} = -7,56. \end{aligned}$$

Таким образом, угол поворота балки в сечении 2 равен

$$\begin{aligned} \gamma &= \sum \frac{1}{EI} \omega_n y_m \Leftrightarrow \gamma = \frac{1}{EI} \cdot (\omega_{Bk} \cdot y_{Bk} + \omega_{kB} y_{kB}) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \gamma = \frac{1}{EI} \cdot \left( 3,4 \cdot \frac{2}{9} - 7,56 \right) \Leftrightarrow \gamma = -\frac{6,8}{EI}. \end{aligned}$$

Результаты, полученные по формуле Мора и способом Верещагина, совпадают.

### в) Определим угол поворота сечения 3.

Эпюра изгибающих моментов от заданной нагрузки  $M_n$  построена на рис. 1.43. Перенесем ее на рис. 1.61.

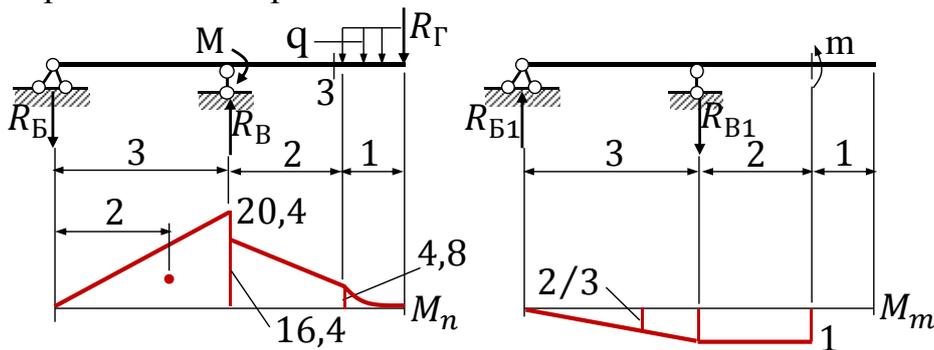


Рисунок 1.61– Эпюры изгибающих моментов  $M_n$  и  $M_m$  балки БВГ.

Построим эпюру изгибающих моментов  $M_m$  от единичного момента  $t = 1$ . Опорные реакции от действия единичного момента определены на рис. 1.54:  $R_{B1} = 1/3$ ,  $R_{B1} = 1/3$ . Изгибающий момент справа опоры В1 равен:

$$M = t \Leftrightarrow M = 1.$$

Изгибающий момент слева опоры В1 равен:

$$M = R_{B1} \cdot x.$$

При  $x = 0$ ,  $M = 0$ ; при  $x = 3$ ,  $M = R_{B1} \cdot x \Leftrightarrow M = \frac{1}{3} \cdot 3 \Leftrightarrow M = 1$ .

Так как действующий на балку единичный момент  $t$  изгибающих моментов справа от сечения 3 не вызывает, то эпюра там отсутствует (рис. 1.61).

Перемножим эпюры  $M_n$  и  $M_m$  на пролете БВГ. Эпюры  $M_n$  и  $M_m$  на пролете БВ имеют треугольные формы и расположены с разных сторон от оси балки. Площадь эпюры  $M_n$  равна

$$\omega_{БВ1} = \frac{1}{2} \cdot 20,4 \cdot 3 \Leftrightarrow \omega_{БВ1} = 30,6.$$

Расстояние от левой точки этой эпюры (точка Б) до его центра тяжести равно  $\frac{2}{3} \cdot 3 = 2$ , тогда ордината  $y_{БВ1}$  из эпюры  $M_m$ , взятая под центром тяжести площади  $\omega_{БВ1}$ , равна

$$y_{БВ1} = \frac{2}{3} \cdot 1 \Leftrightarrow y_{БВ1} = \frac{2}{3}.$$

Эпюры  $M_n$  от опоры В до сечения 3 имеет форму трапеции, эпюра  $M_m$  – прямоугольную форму и расположены по разные стороны от оси балки. Площадь эпюры  $M_n$  равна

$$\omega_{В1Г} = \frac{1}{2} \cdot (16,4 + 4,8) \cdot 2 \Leftrightarrow \omega_{В1Г} = 21,2.$$

Эпюра  $M_m$  на пролете В1Г имеет прямоугольную форму, то ордината  $y_{В1Г} = 1$ .

Таким образом, угол поворота балки в сечении 3 равен

$$\begin{aligned} \gamma &= \sum \frac{1}{EI} \omega_n y_m \Leftrightarrow \gamma = \frac{1}{EI} \cdot (\omega_{БВ1} \cdot y_{БВ1} + \omega_{В1Г} \cdot y_{В1Г}) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \gamma = \frac{1}{EI} \cdot \left( -30,6 \cdot \frac{2}{3} - 21,2 \cdot 1 \right) \Leftrightarrow \gamma = -\frac{41,6}{EI}. \end{aligned}$$

Результаты, полученные по формуле Мора и способом Верещагина, совпадают.

#### г) **Определим угол поворота сечения 4.**

Эпюра изгибающих моментов от заданной нагрузки  $M_n$  построена на рис. 1.42. Перенесем ее на рис. 1.62. Построим эпюру изгибающих моментов  $M_m$  от единичного момента  $t = 1$ . Опорные реакции от действия единичного момента определены на рис. 1.55:  $R_{Г1} = 1/5$ ,  $R_{Д1} = 1/5$ . Изгибающий момент справа опоры Г1 до сечения 4 равен:

$$M = R_{Г1} \cdot x \Leftrightarrow M = \frac{1}{5} x.$$

При  $x = 0$ ,  $M = 0$ ; при  $x = 3$ ,  $M = \frac{1}{5} x \Leftrightarrow M = \frac{1}{5} \cdot 3 \Leftrightarrow M = \frac{3}{5}$ .

Изгибающий момент слева опоры Д1 до сечения 4 равен:

$$M = -R_{Д1} \cdot x \Leftrightarrow M = -\frac{1}{5} x.$$

При  $x = 0$ ,  $M = 0$ ; при  $x = 2$ ,  $M = -\frac{1}{5} x \Leftrightarrow M = -\frac{1}{5} \cdot 2 \Leftrightarrow M = -\frac{2}{5}$ .

Так как действующий на балку единичный момент  $t$  изгибающих моментов справа от опоры Д не вызывает, то эпюра там отсутствует (рис. 1.62).

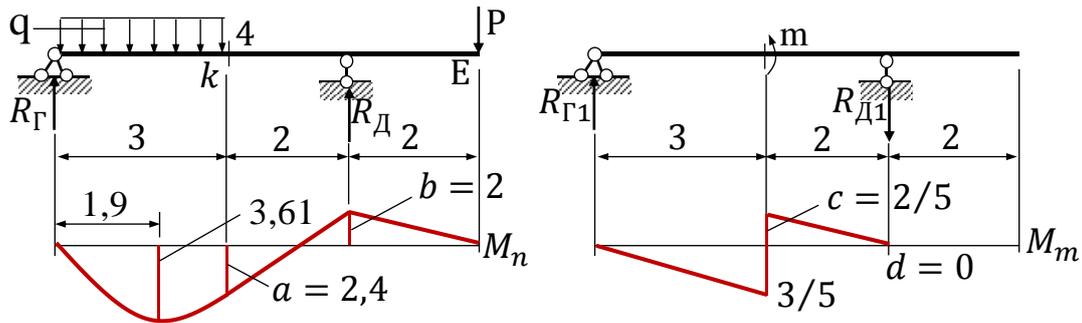


Рисунок 1.62– Эпюры изгибающих моментов  $M_n$  и  $M_m$  балки ГДЕ.

Эпюра  $M_n$  от опоры Г до сечения 4 имеет сложное очертание. Отыскание ее площади и центра тяжести затруднительно. Поэтому разложим ее на простые фигуры (по табл. 2 приложения – рис. 1.63), для вычисления площадей и центров тяжести которых имеются готовые формулы (табл. 1 приложения).

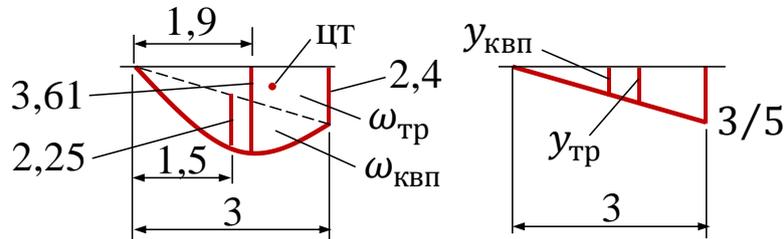


Рисунок 1.63– Разложение эпюры  $M_n$  на простые фигуры.

Теперь перемножим эпюры  $M_n$  и  $M_m$  на пролете ГД до сечения 4. Площадь треугольника  $\omega_{\text{тр}}$  эпюры  $M_n$  равна

$$\omega_{\text{тр}} = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 2,4 \Leftrightarrow \omega_{\text{тр}} = 3,6.$$

Расстояние от левой точки треугольника (точка Г) до его центра тяжести равно  $\frac{2}{3} \cdot 3 = 2$ , тогда ордината  $y_{\text{тр}}$  из эпюры  $M_m$ , взятая под центром тяжести площади  $\omega_{\text{тр}}$ , равна

$$y_{\text{тр}} = \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{5} \Leftrightarrow y_{\text{тр}} = \frac{2}{5}.$$

Площадь квадратной параболы  $\omega_{\text{квп}}$  эпюры  $M_n$  равна

$$\omega_{\text{квп}} = \frac{2}{3} \cdot 3 \cdot 2,25 \Leftrightarrow \omega_{\text{квп}} = 4,5,$$

где высота параболы  $h = \frac{ql^2}{8} \Leftrightarrow h = \frac{2 \cdot 3^2}{8} \Leftrightarrow h = 2,25$ .

Ордината  $y_{\text{квп}}$  из эпюры  $M_m$ , взятая под центром тяжести площади  $\omega_{\text{квп}}$ , равна

$$y_{\text{квп}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{5} \Leftrightarrow y_{\text{квп}} = \frac{3}{10}.$$

Перемножение эпюр  $M_n$  и  $M_m$  на пролете ГД от сечения 4 до опоры Д выполним с помощью формулы трапеции [1]

$$\begin{aligned} \omega_{kД} y_{kД} &= \frac{l}{6} [2(ac + bd) + ad + bc] \Leftrightarrow \omega_{kД} y_{kД} = \\ &= \frac{2}{6} \left[ 2 \left( -2,4 \cdot \frac{2}{5} + 2 \cdot 0 \right) + 2,4 \cdot 0 + 2 \cdot \frac{2}{5} \right] \Leftrightarrow \omega_{kД} y_{kД} = -0,37. \end{aligned}$$

Таким образом, угол поворота балки в сечении 4 равен

$$\gamma = \sum \frac{1}{EI} \omega_n y_m \Leftrightarrow \gamma = \frac{1}{EI} \cdot (\omega_{\text{тр}} \cdot y_{\text{тр}} + \omega_{\text{квп}} \cdot y_{\text{квп}} + \omega_{\text{кд}} y_{\text{кд}}) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \gamma = \frac{1}{EI} \cdot \left( 3,6 \cdot \frac{2}{5} + 4,5 \cdot \frac{3}{10} - 0,37 \right) \Leftrightarrow \gamma = \frac{2,42}{EI}.$$

Результаты, полученные по формуле Мора и способом Верещагина, совпадают.

**д) Определим угол поворота сечения 5.**

Эпюра изгибающих моментов от заданной нагрузки  $M_n$  построена на рис. 1.42. Перенесем ее на рис. 1.64. Построим эпюру изгибающих моментов  $M_m$  от единичного момента  $t = 1$ . Опорные реакции от действия единичного момента определены на рис. 1.61:  $R_{\Gamma 1} = 1/5$ ,  $R_{Д 1} = 1/5$ . Изгибающий момент справа от опоры  $\Gamma 1$  равен:

$$M = R_{\Gamma 1} \cdot x.$$

$$\text{При } x = 0, M = 0; \text{ при } x = 3, M = R_{\Gamma 1} \cdot x \Leftrightarrow M = \frac{1}{5} \cdot 3 \Leftrightarrow M = \frac{3}{5};$$

$$\text{при } x = 5, M = \frac{1}{5} \cdot 5 \Leftrightarrow M = 1.$$

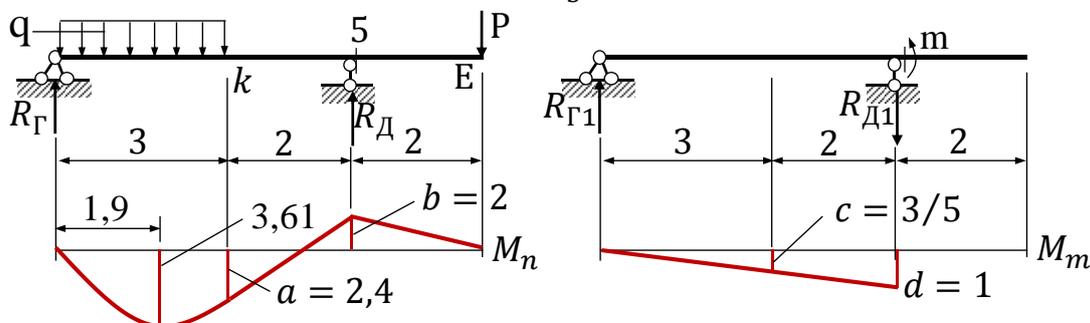


Рисунок 1.64– Эпюры изгибающих моментов  $M_n$  и  $M_m$  балки ГДЕ.

Так как действующий на балку единичный момент  $t$  изгибающих моментов справа от сечения 5 не вызывает, то эпюры там отсутствует (рис. 1.64).

Эпюры  $M_n$  и  $M_m$  на пролете ГД до сечения 4 полностью совпадают с эпюрами, показанными на рисунках 1.62 и 1.63. Поэтому перепишем перемножение этой части эпюр

$$\frac{1}{EI} \cdot (\omega_{\text{тр}} \cdot y_{\text{тр}} + \omega_{\text{квп}} \cdot y_{\text{квп}}) = \frac{1}{EI} \cdot \left( 3,6 \cdot \frac{2}{5} + 4,5 \cdot \frac{3}{10} \right).$$

Перемножение эпюр  $M_n$  и  $M_m$  на пролете ГД от сечения 4 до опоры Д выполним с помощью формулы трапеции [1]

$$\omega_{\text{кд}} y_{\text{кд}} = \frac{l}{6} [2(ac + bd) + ad + bc] \Leftrightarrow \omega_{\text{кд}} y_{\text{кд}} =$$

$$= \frac{2}{6} \left[ 2 \left( 2,4 \cdot \frac{3}{5} - 2 \cdot 1 \right) + 2,4 \cdot 1 - 2 \cdot \frac{3}{5} \right] \Leftrightarrow \omega_{\text{кд}} y_{\text{кд}} = 0,03.$$

Таким образом, угол поворота балки в сечении 5 равен

$$\gamma = \sum \frac{1}{EI} \omega_n y_m \Leftrightarrow \gamma = \frac{1}{EI} \cdot (\omega_{\text{тр}} \cdot y_{\text{тр}} + \omega_{\text{квп}} \cdot y_{\text{квп}} + \omega_{\text{кд}} y_{\text{кд}}) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \gamma = \frac{1}{EI} \cdot \left( 3,6 \cdot \frac{2}{5} + 4,5 \cdot \frac{3}{10} + 0,03 \right) \Leftrightarrow \gamma = \frac{2,82}{EI}.$$

Результаты, полученные по формуле Мора и способом Верещагина, совпадают.

## Определение прогиба способом Верещагина.

### а) Определим прогиб сечения 2.

Эпюра изгибающих моментов от заданной нагрузки  $M_n$  построена на рис. 1.43. Перенесем ее на рис. 1.65. Построим эпюру изгибающих моментов  $M_m$  от единичной силы  $t = 1$ . Опорные реакции определены на рис. 1.57:  $R_{B1} = 2/3$  кН,  $R_{B1} = 1/3$  кН. Изгибающий момент слева сечения 2 равен:

$$M = R_{B1} \cdot 2 \Leftrightarrow M = \frac{2}{3} \cdot 1 \Leftrightarrow M = \frac{2}{3}.$$

Изгибающий момент справа сечения 2 равен:

$$M = R_{B1} \cdot 2 \Leftrightarrow M = \frac{1}{3} \cdot 2 \Leftrightarrow M = \frac{2}{3}.$$

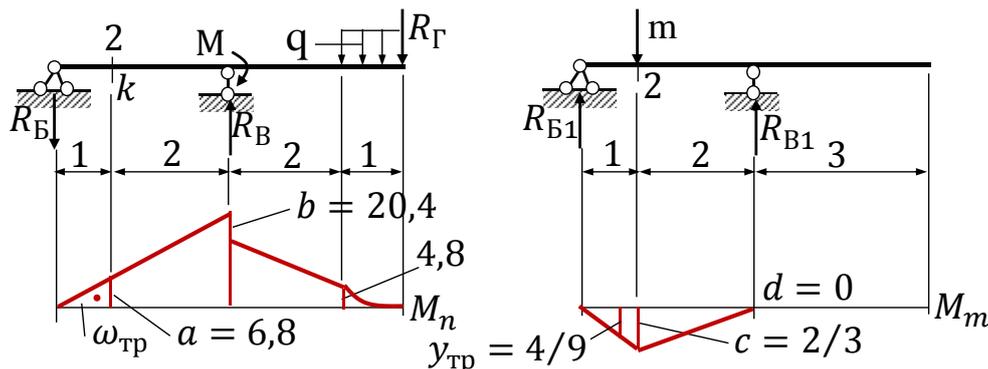


Рисунок 1.65– Эпюры изгибающих моментов  $M_n$  и  $M_m$  балки БВГ.

Так как действующий на балку единичная сила  $t$  изгибающих моментов на консоли не вызывает, то эпюры там также нет (рис. 1.65).

Перемножим эпюры  $M_n$  и  $M_m$  на пролете БВ, расположенные по разные стороны от оси балки.

От опоры Б до сечения 2 эпюры  $M_n$  и  $M_m$  имеют треугольные формы. Площадь треугольника  $\omega_{тр}$  эпюры  $M_n$  равна

$$\omega_{тр} = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 6,8 \Leftrightarrow \omega_{тр} = 3,4.$$

Расстояние от левой точки треугольника (точка Б) до его центра тяжести равно  $\frac{2}{3} \cdot 1 = \frac{2}{3}$ , тогда ордината  $y_{тр}$  из эпюры  $M_m$ , взятая под центром тяжести площади  $\omega_{тр}$ , равна

$$y_{тр} = \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \Leftrightarrow y_{тр} = \frac{4}{9}.$$

От сечения 2 до опоры В эпюра  $M_n$  имеет форму трапеции, а эпюра  $M_m$  – треугольную форму. Поэтому перемножение этих эпюр выполним с помощью формулы трапеции [1]

$$\begin{aligned} \omega_{кв} y_{кв} &= \frac{l}{6} [2(ac + bd) + ad + bc] \Leftrightarrow \omega_{кв} y_{кв} = \\ &= \frac{2}{6} \left[ 2 \left( -6,8 \cdot \frac{2}{3} + 20,4 \cdot 0 \right) + 6,8 \cdot 0 - 20,4 \cdot \frac{2}{3} \right] \Leftrightarrow \omega_{кв} y_{кв} = -7,56. \end{aligned}$$

Таким образом, угол поворота балки в сечении 4 равен

$$\begin{aligned} \delta &= \sum \frac{1}{EI} \omega_n y_m \Leftrightarrow \delta = \frac{1}{EI} \cdot (\omega_{тр} \cdot y_{тр} + \omega_{кв} y_{кв}) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \delta = \frac{1}{EI} \cdot \left( -3,4 \cdot \frac{4}{9} - 7,56 \right) \Leftrightarrow \delta = -\frac{9,07}{EI}. \end{aligned}$$

Результаты, полученные по формуле Мора и способом Верещагина, совпадают.

**б) Определим прогиб сечения 4.**

Эпюра изгибающих моментов от заданной нагрузки  $M_n$  построена на рис. 1.42. Перенесем ее на рис. 1.66. Построим эпюру изгибающих моментов  $M_m$  от единичной силы  $m = 1$ . Опорные реакции определены на рис. 1.58:  $R_{Г1} = 2/5$  кН,  $R_{Д1} = 3/5$  кН. Изгибающий момент слева сечения 4 равен:

$$M = R_{Г1} \cdot 3 \Leftrightarrow M = \frac{2}{5} \cdot 3 \Leftrightarrow M = 1,2.$$

Изгибающий момент справа сечения 4 равен:

$$M = R_{Д1} \cdot 2 \Leftrightarrow M = \frac{3}{5} \cdot 2 \Leftrightarrow M = 1,2.$$

Так как действующий на балку единичная сила  $m$  изгибающих моментов на консоли не вызывает, то эпюры там также нет (рис. 1.66).

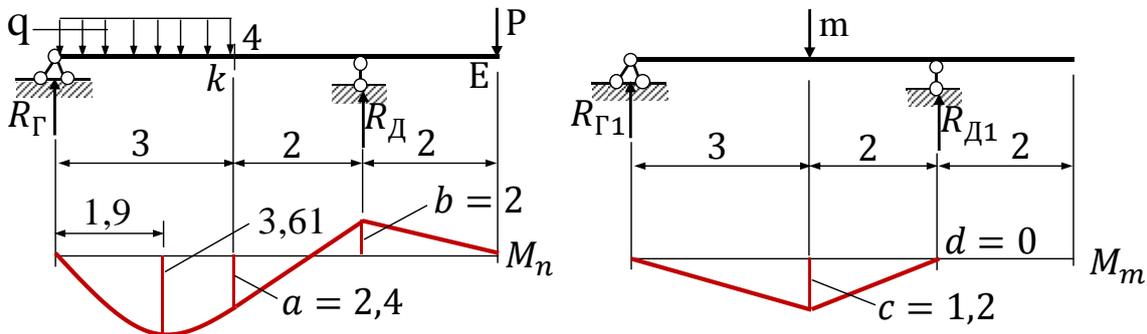


Рисунок 1.66– Эпюры изгибающих моментов  $M_n$  и  $M_m$  балки ГДЕ.

Эпюра  $M_n$  на пролете ГД полностью совпадают с эпюрой, показанной на рисунках 1.63. Поэтому перенесем разложение сложной эпюры на рис. 1.67.

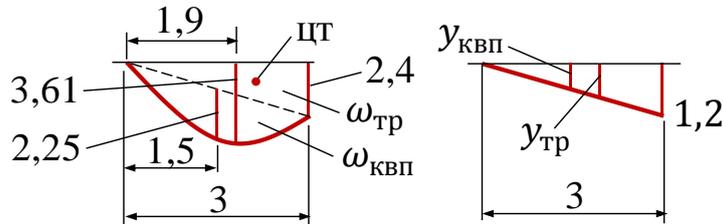


Рисунок 1.67– Разложение эпюры  $M_n$  на простые фигуры.

Перенесем также площади треугольника  $\omega_{тр}$  и квадратной параболы  $\omega_{квп}$ :

$$\omega_{тр} = 3,6 \text{ и } \omega_{квп} = 4,5.$$

Расстояние от левой точки треугольника (точка Г) до его центра тяжести равно  $\frac{2}{3} \cdot 3 = 2$ , тогда ордината  $y_{тр}$  из эпюры  $M_m$ , взятая под центром тяжести площади  $\omega_{тр}$ , равна

$$y_{тр} = \frac{2}{3} \cdot 1,2 \Leftrightarrow y_{тр} = 0,8.$$

Ордината  $y_{квп}$  из эпюры  $M_m$ , взятая под центром тяжести площади  $\omega_{квп}$ , равна

$$y_{квп} = \frac{1}{2} \cdot 1,2 \Leftrightarrow y_{квп} = 0,6.$$

Перемножение эюр  $M_n$  и  $M_m$  на пролете ГД от сечения 4 до опоры Д выполним с помощью формулы трапеции [1]

$$\begin{aligned} \omega_{кД}y_{кД} &= \frac{l}{6}[2(ac + bd) + ad + bc] \Leftrightarrow \omega_{кД}y_{кД} = \\ &= \frac{2}{6}[2(2,4 \cdot 1,2 + 2 \cdot 0) + 2,4 \cdot 0 - 2 \cdot 1,2] \Leftrightarrow \omega_{кД}y_{кД} = 1,12. \\ \delta &= \sum \frac{1}{EI} \omega_n y_m \Leftrightarrow \delta = \frac{1}{EI} \cdot (\omega_{тр} y_{тр} + \omega_{квп} y_{квп} + \omega_{кД} y_{кД}) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \delta = \frac{1}{EI} \cdot [3,6 \cdot 0,8 + 4,5 \cdot 0,6 + 1,12] \Leftrightarrow \delta = \frac{6,7}{EI}. \end{aligned}$$

Результаты, полученные по формуле Мора и способом Верещагина, совпадают.

**Примеры для самостоятельного решения:**

Для многопролетных шарнирно-консольных балок, приведенных на рис. 1.68 (исходные данные:  $M = 5$  кНм,  $q = 4$  кН/м,  $P = 2$  кН, размеры даны в метрах):

- 1) выполнить кинематический анализ балки;
- 2) построить поэтажную схему балки;
- 3) определить реакции всех связей балки от действия заданной нагрузки;
- 4) построить эпюру поперечных сил от действия заданной нагрузки;
- 5) построить эпюру изгибающих моментов от действия заданной нагрузки;
- 6) определить угол поворота для сечений «1, 2 и 3» и прогиб для сечений «1 и 3» двумя способами используя: 1) формулу Мора и 2) правило Верещагина.

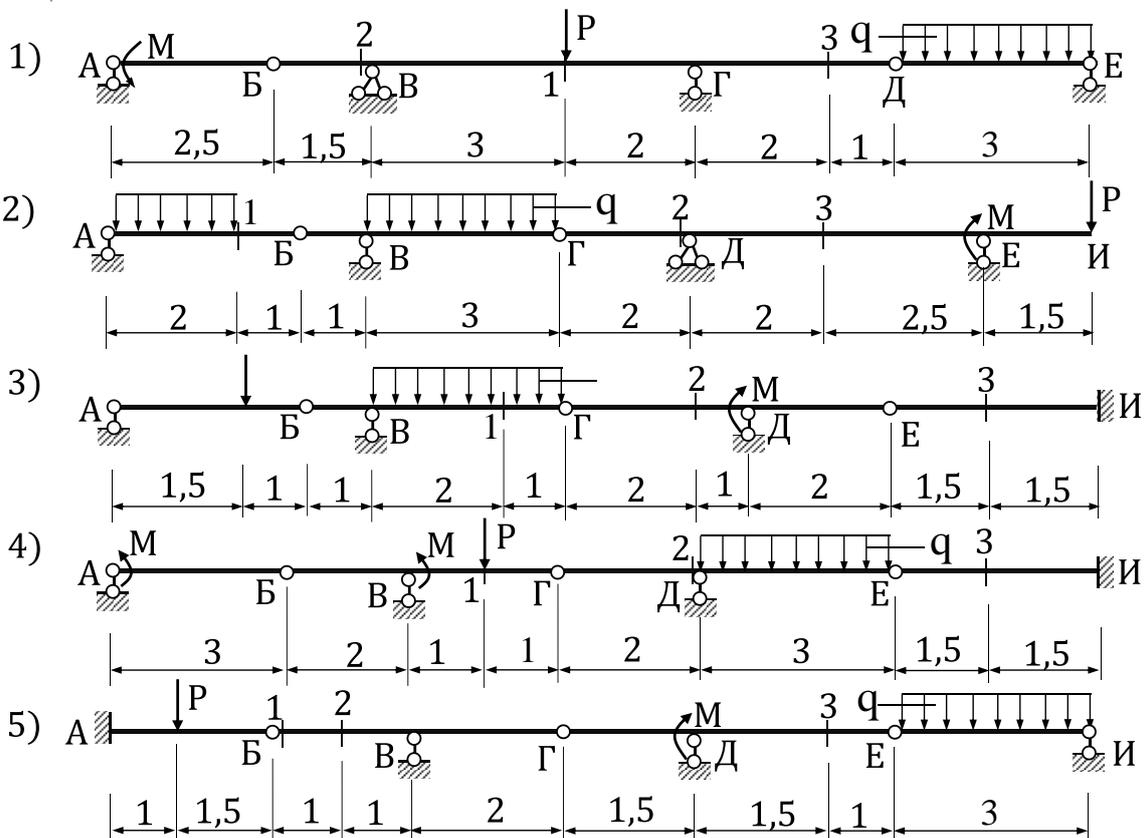


Рисунок 1.68– Расчетные схемы для самостоятельного решения.

### ***Вопросы для самоконтроля.***

1. Какие уравнения применяются при определении опорных реакций?
2. Какие типы элементов составляют многопролетные шарнирно-консольные балки?
3. Какие элементы многопролетной шарнирно-консольной балки являются второстепенными?
4. Какое отличие между основной, подвесной и передаточной балкой?
5. Для чего строится поэтажная схема многопролетной шарнирно-консольной балки?
6. Как составляется поэтажная схема многопролетной шарнирно-консольной балки?
7. С какого яруса начинается расчет многопролетной шарнирно-консольной балки на неподвижную нагрузку?
8. Как проверяется правильность определения опорных реакций?
9. Как выполняется статическая проверка для всей многопролетной шарнирно-консольной балки?
10. От каких сил кроме заданных нагрузок строятся эпюры внутренних усилий для нижнего этажа в поэтажной схеме многопролетной шарнирно-консольной балки?
11. Что такое изгибающий момент и поперечная сила?
12. Как взаимосвязаны эпюры поперечных сил и изгибающих моментов?
13. Чему равен момент в простом и кратном шарнире?
14. При каком значении поперечной силы в сечении стержня изгибающий момент достигает экстремального значения?
15. Какие значения принимает эпюра изгибающих моментов в сечении стержня, в котором эпюра поперечных сил меняет знак?
16. Как определить место экстремального значения изгибающего момента по эпюре поперечных сил?
17. Чему равен суммарный момент для любого узла балки?
18. Как изменяется изгибающий момент в сечении стержня, в котором приложен сосредоточенный момент?
19. Как изменяется поперечная сила в сечении стержня, в котором приложена сосредоточенная сила?
20. Как определяется поперечная сила в сечении стержня?
21. Как определяется изгибающий момент в сечении стержня?
22. Каковы правила знаков поперечной силы и изгибающего момента?
23. Как выполняется перемножение эпюр по правилу Верещагина?
24. Как разбиваются сложные эпюры на простейшие при перемножении по правилу Верещагина?
25. Что принимается в качестве единичного силового фактора при определении линейного перемещения сечения балки с помощью формулы Мора?

26. Что принимается в качестве единичного силового фактора при определении угла поворота сечения балки с помощью формулы Мора?

27. Как установить соответствие направления перемещения с направлением действия единичной нагрузки?

28. При каких условиях применимы способы перемножения эпюр для определения перемещений в статически определимых стержневых системах?

29. Результат перемножения каких эпюр является отрицательным?

### 1.3. Построение линий влияния и определение усилий по линиям влияния.

Линия влияния – это график, выражающий характер изменения опорной реакции, поперечной силы, изгибающего момента при движении по длине многопролетной шарнирно-консольной балки сосредоточенного единичного груза.

Усилия и деформации в элементе стержневой системы зависят от положения подвижной нагрузки. Из всех возможных положений подвижной нагрузки по длине балки необходимо определить такое положение, при котором рассчитываемое усилие или деформация будет наибольшим [1, 2, 4].

Ординаты линий влияния имеют размерность [5]:

$$\text{Размерность ординаты л.в.} = \frac{\text{размерность искомой величины}}{\text{размерность нагрузки}}$$

Например, ординаты линий влияния опорных реакций, поперечных и продольных сил безразмерные величины, так как их размерность и размерность нагрузки  $H$ :  $\frac{H}{H} = 1$  – безразмерная величина. Ординаты линий влияния изгибающего момента измеряются в м, так как размерность искомой величины  $H \cdot \text{м}$ :  $\frac{H \cdot \text{м}}{H} = \text{м}$ .

Для построения линии влияния используются уравнения равновесия статики. Уравнением линии влияния является аналитическое выражение зависимости опорной реакции, изгибающего момента или поперечной силы от текущей координаты единичного груза. Составление уравнений линий влияния опорных реакций и внутренних усилий рассмотрим на примере двух опорной балки с консолями (рис. 1.69).

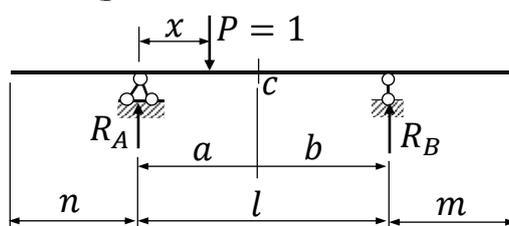


Рисунок 1.69– Схема двух опорной балки с консолями.

Для построения линии влияния опорной реакции  $R_A$  установим единичный груз  $P = 1$  в произвольном месте на расстоянии  $x$  от опоры  $A$  и запишем уравнение равновесия (уравнение моментов) относительно опоры  $B$ :

$$\sum M_B = 0; R_A l - P(l - x) = 0 \Leftrightarrow R_A = P \frac{l-x}{l} \Leftrightarrow R_A = \frac{l-x}{l}.$$

Полученное выражение опорной реакции  $R_A$  является уравнением первой степени и, следовательно, представляет собой прямую линию (рис. 1.71).

Переменная  $x$  изменяется от  $(-n)$  (конец левой консоли) до  $l + m$  (конец правой консоли):

$$\text{при } x = -n, R_A = \frac{l-x}{l} \Leftrightarrow R_A = \frac{l-(-n)}{l} \Leftrightarrow R_A = \frac{l+n}{l};$$

при  $x = 0$ ,  $R_A = \frac{l-x}{l} \Leftrightarrow R_A = \frac{l-0}{l} \Leftrightarrow R_A = 1$ ; т.е. когда единичная сила расположена над опорой  $A$ , то нагрузка полностью передается на эту опору и величина опорной реакции равна:  $R_A = 1$ ;

при  $x = l$ ,  $R_A = \frac{l-x}{l} \Leftrightarrow R_A = \frac{l-l}{l} \Leftrightarrow R_A = 0$ ; т.е. когда единичная сила расположена над опорой  $B$ , то нагрузка полностью передается на эту опору и величина опорной реакции равна нулю:  $R_A = 0$ ;

$$\text{при } x = l + m, R_A = \frac{l-x}{l} \Leftrightarrow R_A = \frac{l-(l+m)}{l} \Leftrightarrow R_A = \frac{-m}{l}.$$

Уравнение линии влияния опорной реакции  $R_B$  получим из уравнения равновесия (уравнение моментов) относительно опоры  $A$ :

$$\sum M_A = 0; R_B l - Px = 0 \Leftrightarrow R_B = P \frac{x}{l} \Leftrightarrow R_B = \frac{x}{l}.$$

Выражение опорной реакции  $R_B$  также является уравнением первой степени и прямой линией (рис. 1.71):

$$\text{при } x = -n, R_B = \frac{x}{l} \Leftrightarrow R_B = -\frac{n}{l};$$

при  $x = 0$ ,  $R_B = \frac{x}{l} \Leftrightarrow R_B = \frac{0}{l} \Leftrightarrow R_B = 0$ ; т.е. когда единичная сила расположена над опорой  $A$ , то нагрузка полностью передается на эту опору и величина опорной реакции равна нулю:  $R_B = 0$ ;

при  $x = l$ ,  $R_B = \frac{x}{l} \Leftrightarrow R_B = \frac{l}{l} \Leftrightarrow R_B = 1$ ; т.е. когда единичная сила расположена над опорой  $B$ , то нагрузка полностью передается на эту опору и величина опорной реакции равна 1:  $R_B = 1$ ;

$$\text{при } x = l + m, R_B = \frac{x}{l} \Leftrightarrow R_B = \frac{l+m}{l}.$$

Таким образом величина опорной реакции  $R_A$  принимает максимальное значение, когда единичный груз расположен на конце левой консоли, отрицательное значение – когда на конце правой консоли и равна 0, когда расположен над опорой  $B$ . Величина опорной реакции  $R_B$  принимает максимальное значение, когда единичный груз расположен на конце правой консоли, отрицательное значение – когда на конце левой консоли и равна 0, когда расположен над опорой  $A$  (рис. 1.71).

Для построения линии влияния изгибающего момента в сечении  $C$ , расположенном на расстоянии  $x$  от левой опоры, надо получить

аналитическое выражение момента в зависимости от расположения единичного груза справа или слева от этого сечения.

Пусть груз расположен справа от сечения  $C$  и перемещается от сечения  $C$  ( $x = a$ ) до конца правой консоли ( $x = l + m$ ). Рассматривая левую часть балки, находим выражение изгибающего момента из уравнения равновесия всех сил (рис. 1.70, а), действующих на левую часть балки ( $M_c$  в сечении  $C$  и  $R_A$ ) с учетом правила знаков:

$$M_c = R_A a \Leftrightarrow M_c = \frac{l-x}{l} a.$$

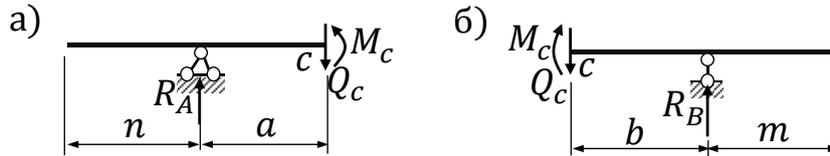


Рисунок 1.70– Расчетная схема двух опорной балки с консолями.

Находим значения изгибающего момента в сечении  $C$  в характерных точках (рис. 1.71):

$$\text{при } x = a, \quad M_c = \frac{l-x}{l} a \Leftrightarrow M_c = \frac{l-a}{l} a \Leftrightarrow M_c = \frac{(a+b)-a}{l} a \Leftrightarrow M_c = \frac{ab}{l};$$

при  $x = l$ ,  $M_c = \frac{l-x}{l} a \Leftrightarrow M_c = \frac{l-l}{l} a \Leftrightarrow M_c = 0$ ; т.е. когда единичная сила расположена над опорой В, нагрузка полностью передается на эту опору и величина изгибающего момента равна:  $M_c = 0$ ;

$$\text{при } x = l + m, \quad M_c = \frac{l-x}{l} a \Leftrightarrow M_c = \frac{l-(l+m)}{l} a \Leftrightarrow M_c = \frac{-ma}{l}.$$

Пусть теперь груз расположен слева от сечения  $c$  и перемещается от конца левой консоли ( $x = -n$ ) до сечения  $C$  ( $x = a$ ). Рассматривая правую часть балки, находим выражение изгибающего момента из уравнения равновесия всех сил, действующих на правую часть балки (рис. 1.70, б) с учетом правила знаков ( $M_c$  в сечении  $C$  и  $R_B$ ):

$$M_c = R_B b \Leftrightarrow M_c = \frac{x}{l} b.$$

Находим значения изгибающего момента в сечении  $C$  в характерных точках (рис. 1.71):

$$\text{при } x = -n, \quad M_c = \frac{x}{l} b \Leftrightarrow M_c = \frac{-nb}{l};$$

при  $x = 0$ ,  $M_c = \frac{x}{l} b \Leftrightarrow M_c = \frac{0}{l} b \Leftrightarrow M_c = 0$ ; т.е. когда единичная сила расположена над опорой А, нагрузка полностью передается на эту опору и величина изгибающего момента равна:  $M_c = 0$ ;

$$\text{при } x = a, \quad M_c = \frac{x}{l} a \Leftrightarrow M_c = \frac{ab}{l}.$$

Величина и знак поперечной силы в сечения  $C$  зависят от расположения единичного груза справа или слева от этого сечения. Поэтому линию влияния поперечной силы будем строить также, как и для изгибающего момента: сперва при движении груза с одной стороны сечения, а затем – с другой стороны.

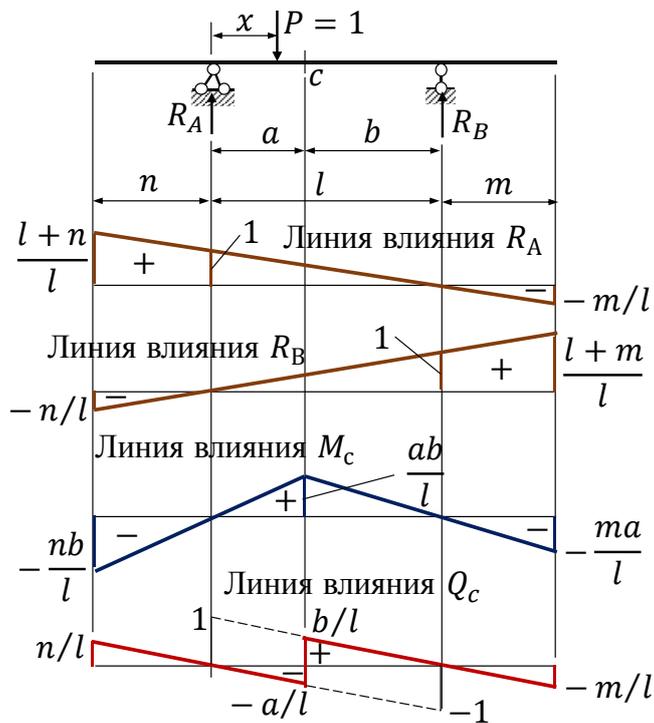


Рисунок 1.71– Линии влияния двух опорной балки с консолями.

Пусть груз расположен справа от сечения  $C$  и перемещается от сечения  $C$  ( $x = a$ ) до конца правой консоли ( $x = l + m$ ). Рассматривая левую часть балки, находим выражение поперечной силы из уравнения равновесия всех сил (рис. 1.69, а), действующих на левую часть балки ( $Q_c$  в сечении  $C$  и  $R_A$ ) с учетом правила знаков (поперечная сила положительная потому, что стремится повернуть балку по часовой стрелке):

$$Q_c = R_A \Leftrightarrow Q_c = \frac{l-x}{l}.$$

Находим значения поперечной силы в сечении  $C$  в характерных точках (рис. 1.71):

$$\text{при } x = a, \quad Q_c = \frac{l-x}{l} \Leftrightarrow Q_c = \frac{l-a}{l} \Leftrightarrow Q_c = \frac{(a+b)-a}{l} \Leftrightarrow Q_c = \frac{b}{l};$$

при  $x = l$ ,  $Q_c = \frac{l-x}{l} \Leftrightarrow Q_c = \frac{l-l}{l} \Leftrightarrow Q_c = 0$ ; т.е. когда единичная сила расположена над опорой  $A$ , нагрузка полностью передается на эту опору и величина поперечной силы равна:  $Q_c = 0$ ;

$$\text{при } x = l + m, \quad Q_c = \frac{l-x}{l} \Leftrightarrow Q_c = \frac{l-(l+m)}{l} \Leftrightarrow Q_c = \frac{-m}{l}.$$

Пусть теперь груз расположен слева от сечения  $C$  и передвигается от конца левой консоли ( $x = -n$ ) до сечения  $C$  ( $x = a$ ). Рассматривая правую часть балки, находим выражение поперечной силы из уравнения равновесия всех сил (рис. 1.69, б), действующих на правую часть балки ( $Q_c$  в сечении  $C$  и  $R_B$ ) с учетом правила знаков (поперечная сила отрицательная потому, что стремится повернуть балку против часовой стрелки):

$$Q_c = -R_B \Leftrightarrow Q_c = -\frac{x}{l}.$$

Находим значения поперечной силы в сечении  $C$  в характерных точках (рис. 1.71):

при  $x = -n$ ,  $Q_c = -\frac{x}{l} \Leftrightarrow Q_c = \frac{n}{l}$ ;

при  $x = 0$ ,  $Q_c = -\frac{x}{l} \Leftrightarrow Q_c = -\frac{0}{l} \Leftrightarrow Q_c = 0$ ; т.е. когда единичная сила расположена над опорой А, нагрузка полностью передается на эту опору и величина поперечной силы равна:  $Q_c = 0$ ;

при  $x = a$ ,  $Q_c = -\frac{x}{l} \Leftrightarrow Q_c = -\frac{a}{l}$ .

**Пример 1.7.** Для многопролетной шарнирно-консольной балки, рассмотренной в примере 1.5 (рис. 1.72):

- 1) построить линии влияния для опорных реакций;
- 2) построить линии влияния поперечных сил для сечений «1, 2, 3, 4 и 5»;
- 3) построить линии влияния изгибающих моментов для сечений «1, 2, 3, 4 и 5»;
- 4) определить по линиям влияния значения опорных реакций  $R_A$  и  $R_B$ ;
- 5) определить по линиям влияния значения поперечных сил и изгибающих моментов в сечениях «1 и 5».

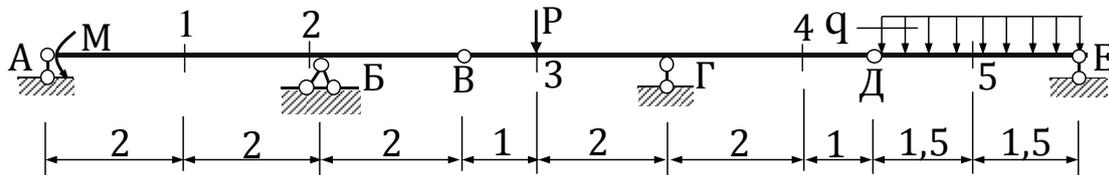


Рисунок 1.72– Расчетная схема.

Исходные данные:  $M = 10$  кНм,  $q = 4$  кН/м, линейные размеры даны в метрах.

**1. Построение линий влияния для опорных реакций.**

Строим поэтажную схему с единичной подвижной нагрузкой (рис. 1.73).

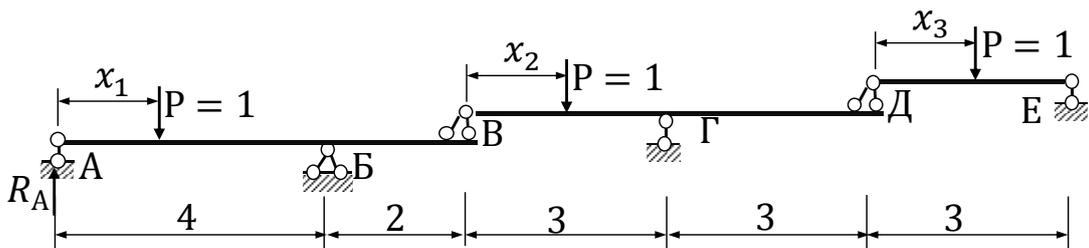


Рисунок 1.73– Поэтажная схема.

**а) Построить линию влияния для опорной реакции  $R_A$  главной балки.**

Установим подвижной единичный груз  $P = 1$  на произвольном расстоянии  $x_1$  от опоры А (рис. 1.73). Составим уравнение равновесия – сумму моментов относительно опоры В всех сил, расположенных левее от нее:

$$\sum M_B = 0; R_A l_1 - P(l_1 - x_1) = 0 \Leftrightarrow R_A = P \frac{l_1 - x_1}{l_1} \Leftrightarrow R_A = \frac{l_1 - x_1}{l_1}.$$

Значит величина реакции  $R_A$  является функцией  $x_1$  в первой степени и графиком этой функции является прямая. При движении груза слева направо переменная  $x_1$  изменяется от 0 (опора А) до края консоли  $l_1 + k$ , где  $k$  – длина правой консоли. График этой функции можно построить по двум точкам:

$$\text{при } x_1 = 0; R_A = \frac{l_1 - x_1}{l_1} \Leftrightarrow R_A = \frac{l_1 - 0}{l_1} \Leftrightarrow R_A = 1;$$

$$\text{при } x_1 = l_1 + k; R_A = \frac{l_1 - x_1}{l_1} \Leftrightarrow R_A = \frac{l_1 - (l_1 + k)}{l_1} \Leftrightarrow R_A = \frac{-k}{l_1} \Leftrightarrow R_A = -\frac{2}{4} \Leftrightarrow R_A = -0,5.$$

Отложим от горизонтальной оси балки над точкой А ординату 1, а под точкой В – ординату  $-0,5$ . Соединив их вершины прямой, получим линию влияния опорной реакции  $R_A$  при движении груза от точки А до точки В балки.

Теперь установим подвижной груз на произвольном расстоянии  $x_2$  от введенной фиктивной опоры В (рис. 1.73). При передвижении подвижного груза по выше расположенной балке ВГД давление от груза передается на главную анкерную балки АВВ через шарнир В. Когда груз находится на конце консоли БВ, опорная реакция  $R_A$  направлена вниз и достигает на этом этапе наибольшего отрицательного значения. При движении груза по балке ВГ на шарнир В будет передаваться давление  $P \frac{l_2 - x_2}{l_2} = \frac{l_2 - x_2}{l_2}$ , полученное также как при движении груза по балке АВ:

при  $x_2 = 0; \frac{l_2 - x_2}{l_2} = \frac{l_2 - 0}{l_2} = 1$ , т.е. груз расположен над шарниром В также, как и на конце консоли БВ и поэтому  $R_A = -0,5$ ;

при  $x_2 = l_2; \frac{l_2 - x_2}{l_2} = 0 \Leftrightarrow \frac{l_2 - l_2}{l_2} = 0 \Leftrightarrow 0 = 0$ , т.е. когда груз расположен над опорой Г, нагрузка полностью передается на эту опору, давление на шарнир В равно 0 и, следовательно, величина опорной реакции  $R_A$  также равна нулю.

Отложим от горизонтальной оси балки под точкой В ординату  $-0,5$ . Соединив вершину этой ординаты и точку 0 под опорой Г, и продолжив прямую до пересечения с вертикалью, проходящей через центр шарнира Д, получим линию влияния опорной реакции  $R_A$  при движении груза от точки В до точки Д (рис. 1.73). Ординату линии влияния под точкой Д определим из подобия треугольников (рис. 1.74).

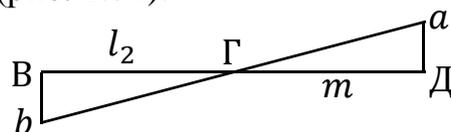


Рисунок 1.74– Схема для определения ординаты линии влияния под точкой Д.

$$\frac{a}{m} = \frac{b}{l_2} \Leftrightarrow a = \frac{b}{l_2} \cdot m \Leftrightarrow a = \frac{0,5}{3} \cdot 3 \Leftrightarrow a = 0,5.$$

Следовательно, при расположении груза в точке Д опорная реакция равна:  $R_A = 0,5$ .

Теперь установим подвижной груз на произвольном расстоянии  $x_3$  от введенной фиктивной опоры Д (рис. 1.73). Когда груз находится в точке Д, опорная реакция  $R_A$  направлена вверх. При движении груза по балке ДЕ на шарнир Д будет передаваться переменное давление  $P \frac{l_3 - x_3}{l_3} = \frac{l_3 - x_3}{l_3}$ .

при  $x_3 = 0$ ;  $\frac{l_3 - x_3}{l_3} = \frac{l_3 - 0}{l_3} = 1$ , т.е. груз расположен над шарниром Д также, как и на конце консоли ГД и поэтому  $R_A = 0,5$ ;

при  $x_3 = l_3$ ;  $\frac{l_3 - x_3}{l_3} = \frac{l_3 - l_3}{l_3} = 0$ , т.е. когда груз расположен над опорой Г, нагрузка полностью передается на эту опору, давление на шарнир Д равно 0 и, следовательно, величина опорной реакции  $R_A$  равна нулю.

Отложим от горизонтальной оси балки под точкой Д ординату 0,5. Соединив вершину этой ординаты и точку 0 под опорой Е, получим линию влияния опорной реакции  $R_A$  при движении груза от точки Д до точки Е и окончательную линию влияния для опорной реакции  $R_A$  многопролетной шарнирно-консольной балки (рис. 1.76).

**б) Построить линию влияния для опорной реакции  $R_B$  главной балки.**

Установим подвижной единичный груз  $P = 1$  на произвольном расстоянии  $x_1$  от опоры А (рис. 1.73). Составим уравнение равновесия – сумму моментов относительно опоры А всех сил, расположенных левее от нее:

$$\sum M_A = 0; R_B l_1 - P x_1 = 0 \Leftrightarrow R_B = P \frac{x_1}{l_1} \Leftrightarrow R_B = \frac{x_1}{l_1}.$$

Величина реакции  $R_B$  также является функцией  $x_1$  в первой степени и графиком этой функции является прямая. При движении груза слева направо переменная  $x_1$  изменяется от 0 (опора А) до края консоли  $l_1 + k$ , где  $k$  – длина правой консоли. График этой функции можно также построить по двум точкам:

$$\text{при } x_1 = 0; R_B = \frac{x_1}{l_1} \Leftrightarrow R_B = \frac{0}{l_1} \Leftrightarrow R_B = 0; \quad \text{при } x_1 = l_1; R_B = \frac{x_1}{l_1} \Leftrightarrow R_B = \frac{l_1}{l_1} \Leftrightarrow R_B = 1;$$

$$\text{при } x_1 = l_1 + k; R_B = \frac{x_1}{l_1} \Leftrightarrow R_B = \frac{l_1 + k}{l_1} \Leftrightarrow R_B = \frac{4 + 2}{4} \Leftrightarrow R_B = 1,25.$$

Отложим от горизонтальной оси балки под точкой Б ординату 1, а под точкой В – ординату 1,25. Соединив точку 0 под опорой А и вершину ординаты 1 под опорой Б или вершину ординаты 1,25 под шарниром В, получим линию влияния опорной реакции  $R_B$  при движении груза от точки А до точки В (рис. 1.76).

Теперь установим подвижной груз на произвольном расстоянии  $x_2$  от фиктивной опоры В (рис. 1.73). Когда груз находится в точке В, опорная реакция  $R_B$  направлена вверх и достигает на этом этапе наибольшего положительного значения. При движении груза по балке ВГ на шарнир В будет передаваться переменное давление  $P \frac{l_2 - x_2}{l_2} = \frac{l_2 - x_2}{l_2}$ .

при  $x_2 = 0$ ;  $\frac{l_2 - x_2}{l_2} = \frac{l_2 - 0}{l_2} = 1$ , т.е. груз расположен над шарниром В также, как и на конце консоли БВ и поэтому  $R_B = 1,25$ ;

при  $x_2 = l_2$ ;  $\frac{l_2 - x_2}{l_2} = \frac{l_2 - l_2}{l_2} = 0$ , т.е. когда груз расположен над опорой Г, нагрузка полностью передается на эту опору, давление на шарнир В равно 0 и, следовательно, величина опорной реакции  $R_B$  также равна нулю.

Отложим от горизонтальной оси балки под точкой В ординату 1,25. Соединив вершину этой ординаты и точку 0 под опорой Г и, продолжив прямую до пересечения с вертикалью, проходящей через центр шарнира Д, получим линию влияния опорной реакции  $R_B$  при движении груза от точки В до точки Д (рис. 1.76). Ординату линии влияния под точкой Д определим также из подобия треугольников:  $a = -1,25$ . Значит, когда подвижной груз расположен на конце консоли ГД значение опорной реакции равно:  $R_B = -1,25$ .

Теперь установим подвижной груз на произвольном расстоянии  $x_3$  от фиктивной опоры Д (рис. 1.73). Когда груз находится в точке Д, опорная реакция  $R_B$  направлена вниз. При движении груза по балке ДЕ на шарнир Д будет передаваться переменное давление  $P \frac{l_3 - x_3}{l_3} = \frac{l_3 - x_3}{l_3}$ . Находим значение опорной реакции:

при  $x_3 = 0$ ;  $\frac{l_3 - x_3}{l_3} = \frac{l_3 - 0}{l_3} = 1$ , т.е. груз расположен над шарниром Д также, как и на конце консоли ГД и поэтому  $R_B = -1,25$ ;

при  $x_3 = l_3$ ;  $\frac{l_3 - x_3}{l_3} = \frac{l_3 - l_3}{l_3} = 0$ , т.е. когда груз расположен над опорой Е, нагрузка полностью передается на эту опору, давление на шарнир Д равно 0 и, следовательно, величина опорной реакции  $R_B$  равна нулю.

Отложим от горизонтальной оси балки под точкой Д ординату  $-1,25$ . Соединив вершину этой ординаты и точку 0 под опорой Е, получим линию влияния опорной реакции  $R_B$  при движении груза от точки Д до точки Е и окончательную линию влияния для опорной реакции  $R_B$  многопролетной шарнирно-консольной балки (рис. 1.76).

**в) Построить линию влияния опорной реакции  $R_G$  второстепенной балки.**

При движении единичного груза по консольной балке АБВ в точки В, Г, Д и Е давление не передается, так как при прогибе консоли БВ под нагрузкой стержни ВД и ДЕ поворачиваются по шарнирам В и Д, и не изгибаются. Следовательно, линии влияния опорной реакции  $R_G$  на отрезке АВ совпадает с осью балки.

Установим подвижной единичный груз  $P = 1$  на произвольном расстоянии  $x_2$  от введенной фиктивной опоры В (рис. 1.73). Когда груз находится в точке В, вся нагрузка передается на конец В консольной балки АБВ, давление на опору Г равно 0 и, следовательно, величина опорной реакции  $R_G$  равна нулю. При движении груза по балке ВГ давление на опору Г постепенно увеличивается. Когда груз расположен над опорой Г, нагрузка

полностью передается на эту опору и, следовательно, величина опорной реакции  $R_{\Gamma}$  равна 1. Когда груз находится в точке Д, опорная реакция  $R_{\Gamma}$  направлена вверх и достигает на этом этапе наибольшего положительного значения.

Соединив точку 0 под точкой В и вершину ординаты 1 под опорой Г, и продолжив прямую до пересечения с вертикалью, проходящей через центр шарнира Д, получим линию влияния опорной реакции  $R_{\Gamma}$  при движении груза от точки В до точки Д. Ординату линии влияния под точкой Д определим также из подобия треугольников:  $a = 2$  (рис. 1.75).

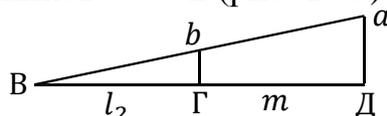


Рисунок 1.75– Схема для определения ординаты линии влияния под точкой Д.

$$\frac{a}{m+l_2} = \frac{b}{l_2} \Leftrightarrow a = \frac{b}{l_2} \cdot (m + l_2) \Leftrightarrow a = \frac{1}{3} \cdot (3 + 3) \Leftrightarrow a = 2.$$

Значит, когда подвижной груз расположен на конце консоли ГД значение опорной реакции равно:  $R_{\Gamma} = 2$ .

Теперь установим подвижной единичный груз  $P = 1$  на произвольном расстоянии  $x_3$  от введенной фиктивной опоры Д (рис. 1.73). Когда груз находится в точке Д, опорная реакция  $R_{\Gamma}$  направлена вверх. При движении груза по балке ДЕ в шарнир Д будет передаваться переменное давление  $P \frac{l_3 - x_3}{l_3} = \frac{l_3 - x_3}{l_3}$ .

при  $x_3 = 0$ ;  $\frac{l_3 - x_3}{l_3} = \frac{l_3 - 0}{l_3} = 1$ , т.е. груз расположен над шарниром Д также, как и на конце консоли ГД и поэтому  $R_{\Gamma} = 2$ ;

при  $x_3 = l_3$ ;  $\frac{l_3 - x_3}{l_3} = \frac{l_3 - l_3}{l_3} = 0$ , т.е. когда груз расположен над опорой Е, нагрузка полностью передается на эту опору и, следовательно, величина опорной реакции  $R_{\Gamma}$  равна нулю.

Отложим от горизонтальной оси балки под точкой Д ординату 2. Соединив вершину этой ординаты и точку 0 под опорой Е, получим линию влияния опорной реакции  $R_{\Gamma}$  при движении груза от точки Д до точки Е и окончательную линию влияния для опорной реакции  $R_{\Gamma}$  многопролетной шарнирно-консольной балки (рис. 1.76).

**г) Построить линию влияния опорной реакции  $R_E$  второстепенной балки.**

При движении груза по балке от точки А до точки Д в точку Е давление не передается, так как при прогибе консоли ГД под нагрузкой стержень ДЕ просто поворачиваются по опорному шарниру Е, а не изгибаются. Следовательно, линии влияния опорной реакции  $R_E$  на отрезке АД нет.

Установим подвижной груз на произвольном расстоянии  $x_3$  от введенной фиктивной опоры Д (рис. 1.73). Когда груз находится в точке Д, вся нагрузка передается на конец Д консольной балки ВГД, давление на опору Е равно 0 и, следовательно, величина опорной реакции  $R_E$  равна нулю.

При движении груза по балке ДЕ давление на опору Е линейно увеличивается. Когда груз расположен над опорой Е, нагрузка полностью передается на эту опору и, следовательно, величина опорной реакции  $R_E$  равна 1.

Соединив точку 0 под опорой Д и вершину ординаты 1 под опорой Е, получим линию влияния опорной реакции  $R_E$  при движении груза от точки Д до точки Е и окончательную линию влияния для опорной реакции  $R_E$  шарнирно-консольной балки (рис. 1.76).

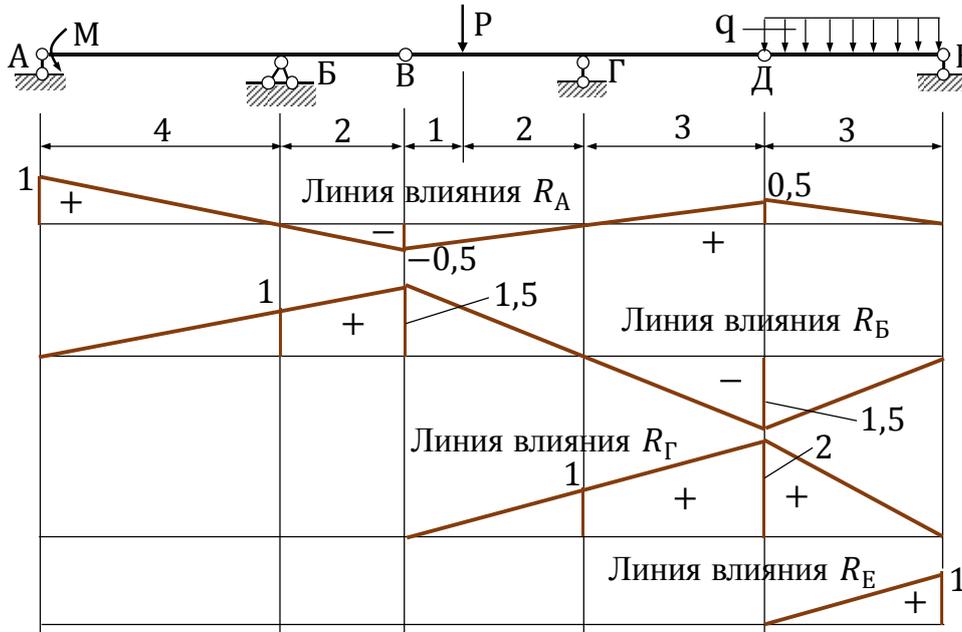


Рисунок 1.76– Линии влияния опорных реакций.

## 2. Построение линий влияния поперечных сил.

а) *Построить линию влияния поперечной силы в сечении 1 главной балки.*

Передвижение груза по главной балке не вызывает поперечных сил в сечениях выше расположенных балок. Поэтому на данном этапе построения линии влияния поперечной силы в сечении 1 рассматриваем только главную балку. Установим подвижной груз на произвольном расстоянии  $x_1$  от опоры А слева от сечния 1 (рис. 1.73). Составим уравнение равновесия – сумму моментов относительно опор А и В и найдем зависимость опорных реакций балки АВ от переменной  $x_1$  и, следовательно, поперечных сил в сечении балки:

$$\sum M_A = 0; R_B l_1 - P x_1 = 0 \Leftrightarrow R_B = P \frac{x_1}{l_1} \Leftrightarrow R_B = \frac{x_1}{l_1};$$

$$\sum M_B = 0; R_A l_1 - P(l_1 - x_1) = 0 \Leftrightarrow R_A = P \frac{l_1 - x_1}{l_1} \Leftrightarrow R_A = \frac{l_1 - x_1}{l_1}.$$

Если подвижной единичный груз  $P = 1$  расположен слева от сечения 1 и передвигается от опоры А ( $x_1 = 0$ ) до сечения 1 ( $x_1 = a_1$ ), то рассматривая правую часть находим выражение поперечной силы из уравнения равновесия всех сил, действующих на правую часть балки с учетом правила знаков

поперечных сил (поперечная сила  $Q_1$  в сечении 1 и опорная реакция  $R_B$ ) (рис. 1.77, б):

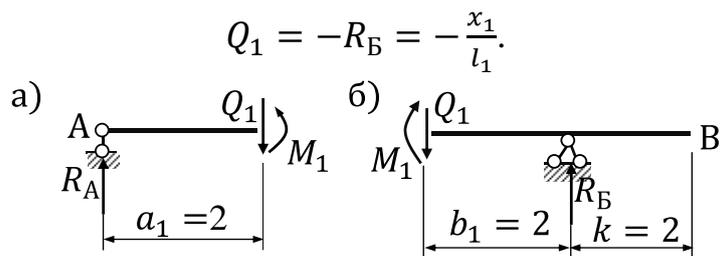


Рисунок 1.77– Схема для построения линии влияния поперечной силы в сечении 1.

Можно рассмотреть и левую часть (рис. 1.77, а), тогда выражение поперечной силы из уравнения равновесия всех сил, действующих на левую часть балки с учетом правила знаков поперечных сил (поперечная сила  $Q_1$  в сечении 1, подвижная единичная сила  $P$  и опорная реакция  $R_A$ ):

$$Q_1 = R_A - P \Leftrightarrow Q_1 = \frac{l_1 - x_1}{l_1} - 1 \Leftrightarrow Q_1 = -\frac{x_1}{l_1}.$$

Результат, как и следовало ожидать, получился одинаковый.

Находим значения поперечных сил в характерных точках:

при  $x_1 = 0$ ,  $Q_1 = -\frac{x_1}{l_1} \Leftrightarrow Q_1 = -\frac{0}{l_1} \Leftrightarrow Q_1 = 0$ , т.е. когда груз расположен над опорой А, нагрузка полностью передается на эту опору и поперечных сил в сечении 1 не возникают;

при  $x_1 = a_1$ ,  $Q_1 = -\frac{x_1}{l_1} \Leftrightarrow Q_1 = -\frac{a_1}{l_1} \Leftrightarrow Q_1 = -\frac{2}{4} \Leftrightarrow Q_1 = -0,5$ , т.е. когда груз расположен над сечением 1, поперечная сила в этом сечении для левой ветви равна  $(-0,5)$ .

Отложим от горизонтальной оси балки под сечением 1 ординату  $(-0,5)$ . Соединив вершину этой ординаты и точку 0 под опорой А, получим левую ветвь линии влияния поперечной силы.

Если груз расположен справа от сечения 1 и передвигается от сечения 1 ( $x_1 = a_1$ ) до точки В ( $x_1 = l_1 + k$ ), то рассматривая левую часть находим выражение поперечной силы из уравнения равновесия всех сил (рис. 1.77, а), действующих на левую часть балки с учетом правила знаков поперечных сил (поперечная сила  $Q_1$  в сечении 1 и опорная реакция  $R_A$ ):

$$Q_1 = R_A \Leftrightarrow Q_1 = \frac{l_1 - x_1}{l_1};$$

при  $x_1 = a_1$ ,  $Q_1 = R_A \Leftrightarrow Q_1 = \frac{l_1 - x_1}{l_1} \Leftrightarrow Q_1 = \frac{l_1 - a_1}{l_1} \Leftrightarrow Q_1 = \frac{4-2}{4} \Leftrightarrow Q_1 = 0,5$ , т.е. когда груз расположен над сечением 1, поперечная сила в этом сечении для правой ветви равна  $0,5$ ;

при  $x_1 = l_1$ ,  $Q_1 = R_A \Leftrightarrow Q_1 = \frac{l_1 - x_1}{l_1} \Leftrightarrow Q_1 = \frac{l_1 - l_1}{l_1} \Leftrightarrow Q_1 = \frac{4-4}{4} \Leftrightarrow Q_1 = 0$ , т.е. когда груз расположен над опорой В, нагрузка полностью передается на эту опору и поперечных сил в сечении 1 не возникают;

при  $x_1 = l_1 + k$ ,  $Q_1 = R_A \Leftrightarrow Q_1 = \frac{l_1 - x_1}{l_1} \Leftrightarrow Q_1 = \frac{l_1 - (l_1 + k)}{l_1} \Leftrightarrow Q_1 = \frac{4 - (4 + 2)}{4} \Leftrightarrow Q_1 = \frac{-2}{4} \Leftrightarrow Q_1 = -0,5$ , т.е. когда груз расположен на конце консоли БВ, поперечная сила в сечении 1 равна:  $Q_1 = -0,5$ .

Отложим от горизонтальной оси балки под сечением 1 ординату 0,5. Соединив вершину ординаты 0,5 под сечением 1 и вершину ординаты (-0,5) под точкой В, получим правую ветвь линии влияния поперечной силы (рис. 1.81).

Теперь установим подвижной груз на произвольном расстоянии  $x_2$  от фиктивной опоры В (рис. 1.73). При движении груза по балке ВД на шарнир В будет передаваться переменное давление  $P \frac{l_2 - x_2}{l_2} = \frac{l_2 - x_2}{l_2}$ :

при  $x_2 = 0$ ;  $\frac{l_2 - x_2}{l_2} = \frac{l_2 - 0}{l_2} = 1$ , т.е. груз расположен над шарниром В и передает нагрузку на шарнир В также, как и на конец консоли БВ и поэтому  $Q_1 = -0,5$ ;

при  $x_2 = l_2$ ;  $\frac{l_2 - x_2}{l_2} = \frac{l_2 - l_2}{l_2} = 0$ , т.е. когда груз расположен над опорой Г, нагрузка полностью передается на эту опору, давление на шарнир В равно 0 и, следовательно, величина поперечной силы в сечении 1 также равна нулю.

Отложим от горизонтальной оси балки под шарниром В ординату (-0,5). Соединив вершину этой ординаты и точку 0 над опорой Г и, продолжив прямую до пересечения с вертикалью, проходящей через центр шарнира Д, получим линию влияния поперечной силы в сечении 1 при движении груза от точки В до точки Д. Ординату линии влияния под точкой Д определим из подобия треугольников:  $a = 0,5$ . Значит, когда груз расположен на конце консоли ГД поперечная сила в сечении 1 равна:  $Q_1 = 0,5$ .

Теперь установим подвижной груз на произвольном расстоянии  $x_3$  от фиктивной опоры Д (рис. 1.73). При движении груза по балке ДЕ в шарнир Д будет передаваться переменное давление  $P \frac{l_3 - x_3}{l_3} = \frac{l_3 - x_3}{l_3}$ :

при  $x_3 = 0$ ;  $\frac{l_3 - x_3}{l_3} = \frac{l_3 - 0}{l_3} = 1$ , т.е. груз расположен над шарниром Д и передает нагрузку на шарнир Д также, как и на конце консоли ГД и поэтому  $Q_1 = 0,5$ ;

при  $x_3 = l_3$ ;  $\frac{l_3 - x_3}{l_3} = \frac{l_3 - l_3}{l_3} = 0$ , т.е. когда груз расположен над опорой Е, нагрузка полностью передается на эту опору, давление на шарнир Д равно 0 и, следовательно, величина поперечной силы в сечении 1 также равна нулю.

Отложим от горизонтальной оси балки под шарниром Д ординату 0,5. Соединив вершину этой ординаты и точку 0 под опорой Е, получим линию влияния поперечной силы в сечении 1 при движении груза от точки Д до точки Е и окончательную линию влияния поперечной силы в сечении 1 многопролетной шарнирно-консольной балки (рис. 1.81).

**б) Построить линию влияния поперечной силы в сечении 2 на бесконечно близком расстоянии слева от точки Б.**

Установим подвижной груз на произвольном расстоянии  $x_1$  от опоры А слева от сечения 2 (рис. 1.78), который перемещается от точки А ( $x_1 = 0$ ) до сечения 2 ( $x_1 = l_1$ ). Рассмотрим равновесие правой части балки (рис. 1.78, а).

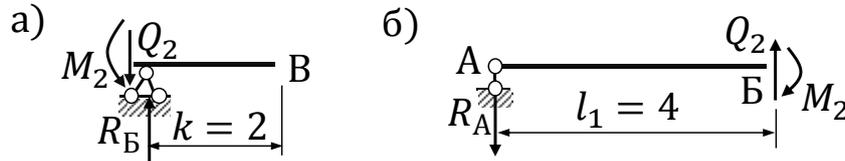


Рисунок 1.78– Схема для построения линии влияния поперечной силы в сечении 2.

Находим выражение поперечной силы  $Q_2$  из уравнения равновесия всех сил, действующих на правую часть балки с учетом правила знаков поперечных сил (поперечная сила  $Q_2$  в сечении 2 и опорная реакция  $R_B$ ) (рис. 1.78, а):

$$Q_2 = -R_B \Leftrightarrow Q_2 = -\frac{x_1}{l_1};$$

при  $x_1 = 0$ ,  $Q_2 = -R_B \Leftrightarrow Q_2 = -\frac{x_1}{l_1} \Leftrightarrow Q_2 = -\frac{0}{l_1} \Leftrightarrow Q_2 = 0$ , т.е. когда груз расположен над опорой А, нагрузка полностью передается на эту опору и поперечных сил в сечении 2 не возникают;

при  $x_1 = l_1$ ,  $Q_2 = -R_B \Leftrightarrow Q_2 = -\frac{x_1}{l_1} \Leftrightarrow Q_2 = -\frac{l_1}{l_1} \Leftrightarrow Q_2 = -1$ , т.е. когда груз расположен над сечением 2, поперечная сила в этом сечении для левой ветви равна:  $Q_2 = -1$ .

Соединив точку 0 под опорой А и вершину ординаты  $(-1)$  под сечением 2, получим левую ветвь линии влияния поперечной силы в сечении 2 при движении груза от точки А до точки Б балки (рис. 1.81).

Если подвижной груз расположен справа от сечения 2 и передвигается от сечения 2 ( $x_1 = a$ ) до точки В ( $x_1 = l_1 + k$ ), то рассматривая левую часть находим выражение поперечной силы из уравнения равновесия всех сил (рис. 1.78, б), действующих на левую часть балки с учетом правила знаков поперечных сил (поперечная сила  $Q_2$  в сечении 2 и опорная реакция  $R_A$ ):

$$Q_2 = R_A \Leftrightarrow Q_2 = \frac{l_1 - x_1}{l_1};$$

при  $x_1 = l_1$ ,  $Q_2 = R_A \Leftrightarrow Q_2 = \frac{l_1 - x_1}{l_1} \Leftrightarrow Q_2 = \frac{l_1 - l_1}{l_1} \Leftrightarrow Q_2 = 0$ , т.е. когда груз расположен над опорой Б, поперечная сила в этом сечении равна 0;

при  $x_1 = l_1 + k$ ,  $Q_2 = R_A \Leftrightarrow Q_2 = \frac{l_1 - x_1}{l_1} \Leftrightarrow Q_2 = \frac{l_1 - (l_1 + k)}{l_1} \Leftrightarrow Q_2 = \frac{4 - (4 + 2)}{4} \Leftrightarrow Q_2 = \frac{-2}{4} \Leftrightarrow Q_2 = -0,5$ , т.е. когда груз расположен над точкой В, поперечная сила в сечении 2 равна:  $Q_2 = -0,5$ .

Отложим от горизонтальной оси балки под точкой В ординату  $(-0,5)$ . Соединив точку 0 под опорой Б и вершину ординаты  $(-0,5)$  под точкой В, получим правую ветвь линии влияния поперечной силы в сечении 2 при движении груза от точки Б до точки В (рис. 1.81).

Теперь установим подвижной груз на произвольном расстоянии  $x_2$  от фиктивной опоры В (рис. 1.73). При движении груза по балке ВД на шарнир В будет передаваться переменное давление  $P \frac{l_2 - x_2}{l_2} = \frac{l_2 - x_2}{l_2}$ .

при  $x_2 = 0$ ;  $\frac{l_2 - x_2}{l_2} = \frac{l_2 - 0}{l_2} = 1$ , т.е. груз расположен над шарниром В и передает нагрузку на шарнир В также, как и на конце консоли БВ и поэтому  $Q_2 = -0,5$ ;

при  $x_2 = l_2$ ;  $\frac{l_2 - x_2}{l_2} = \frac{l_2 - l_2}{l_2} = 0$ , т.е. когда груз расположен над опорой Г, нагрузка полностью передается на эту опору, давление на шарнир В равно 0 и, следовательно, величина поперечно силы в сечении 2 также равна нулю:  $Q_2 = 0$ .

Отложим от горизонтальной оси балки под шарниром В ординату  $(-0,5)$ . Соединив вершину ординаты  $(-0,5)$  и точку 0 под опорой Г и, продолжив прямую до пересечения с вертикалью, проходящей через центр шарнира Д, получим линию влияния поперечной силы в сечении 2 при движении груза от точки В до точки Д балки. Ординату линии влияния над точкой Д определим из подобия треугольников:  $a = 0,5$ . Значит, когда груз расположен на конце консоли ГД поперечная сила в сечении 2 равна:  $Q_2 = 0,5$ .

Теперь установим подвижной груз на произвольном расстоянии  $x_3$  от фиктивной опоры Д (рис. 1.73). При движении груза по балке ДЕ в шарнир Д будет передаваться переменное давление  $P \frac{l_3 - x_3}{l_3} = \frac{l_3 - x_3}{l_3}$ .

при  $x_3 = 0$ ;  $\frac{l_3 - x_3}{l_3} = \frac{l_3 - 0}{l_3} = 1$ , т.е. груз расположен над шарниром Д и передает нагрузку на шарнир Д также, как и на конце консоли балки ГД и поэтому  $Q_2 = 0,5$ ;

при  $x_3 = l_3$ ;  $Q_2 = R_D \Leftrightarrow Q_2 = \frac{l_3 - x_3}{l_3} \Leftrightarrow Q_2 = \frac{l_3 - l_3}{l_3} \Leftrightarrow Q_2 = 0$ , т.е. когда груз расположен над опорой Е, нагрузка полностью передается на эту опору, давление на шарнир Д равно 0 и, следовательно, величина поперечной силы в сечении 2 также равна нулю.

Отложим от горизонтальной оси балки под шарниром Д ординату 0,5. Соединив вершину этой ординаты и точку 0 на опоре Е, получим линию влияния поперечной силы в сечении 2 при движении груза от точки Д до точки Е и окончательную линию влияния поперечной силы в сечении 2 многопролетной шарнирно-консольной балки (рис. 1.81).

### **в) Построить линию влияния поперечной силы в сечении 3.**

Установим подвижной груз на произвольном расстоянии  $x_2$  от фиктивной опоры В слева от сечения 3 (рис. 1.73), который перемещается от точки В ( $x_2 = 0$ ) до сечения 3 ( $x_2 = a_2$ ). Рассмотрим равновесие правой части балки ВД (рис. 1.79, а).

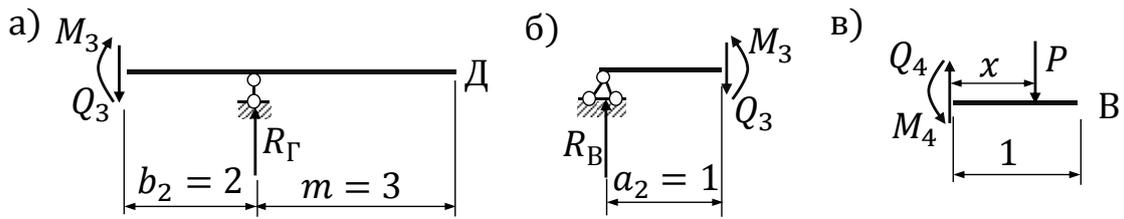


Рисунок 1.79– Схема для построения линии влияния поперечной силы в сечении 3.

Находим выражение поперечной силы  $Q_3$  из уравнения равновесия всех сил, действующих на правую часть балки с учетом правила знаков поперечных сил (поперечная сила  $Q_3$  в сечении 3 и опорная реакция  $R_\Gamma$ ) (рис. 1.79, а):

$$Q_3 = -R_\Gamma \Leftrightarrow Q_3 = -\frac{x_2}{l_2};$$

при  $x_2 = 0$ ,  $Q_3 = -\frac{x_2}{l_2} \Leftrightarrow Q_3 = -\frac{0}{l_2} \Leftrightarrow Q_3 = 0$ , т.е. когда груз расположен над точкой В, нагрузка полностью передается на консоль главной балки АВ и поперечных сил в сечении 3 не возникают;

при  $x_2 = a_2$ ,  $Q_3 = -\frac{x_2}{l_2} \Leftrightarrow Q_3 = -\frac{a_2}{l_2} \Leftrightarrow Q_3 = -\frac{1}{3}$ , т.е. когда груз расположен над сечением 3, поперечная сила в этом сечении для левой ветви равна:  $Q_3 = -\frac{1}{3}$ .

Соединив точку 0 под шарниром В и вершину ординаты  $(-\frac{1}{3})$  под сечением 3, получим левую ветвь линии влияния поперечной силы в сечении 3 при движении груза от точки В до сечения 3 балки (рис. 1.81).

Если подвижной груз расположен справа от сечения 3 и передвигается от этого сечения ( $x_2 = a_2$ ) до точки Д ( $x_2 = l_2 + m$ ), то рассматривая левую часть находим выражение поперечной силы из уравнения равновесия всех сил (рис. 1.79,б), действующих на левую часть балки с учетом правила знаков поперечных сил (поперечная сила  $Q_3$  в сечении 3 и фиктивная опорная реакция  $R_B$ ):

$$Q_3 = R_B \Leftrightarrow Q_3 = \frac{l_2 - x_2}{l_2};$$

при  $x_2 = a_2$ ,  $Q_3 = \frac{l_2 - x_2}{l_2} \Leftrightarrow Q_3 = \frac{l_2 - a_2}{l_2} \Leftrightarrow Q_3 = \frac{3-1}{3} \Leftrightarrow Q_3 = \frac{2}{3}$ , т.е. когда груз расположен над сечением 3, поперечная сила в этом сечении для правой ветви равна:  $Q_3 = \frac{2}{3}$ ;

при  $x_2 = l_2$ ,  $Q_3 = \frac{l_2 - x_2}{l_2} \Leftrightarrow Q_3 = \frac{l_2 - l_2}{l_2} \Leftrightarrow Q_3 = 0$ , т.е. когда груз расположен над опорой Г, нагрузка полностью передается на эту опору и поперечных сил в сечении 3 не возникают;

при  $x_2 = l_2 + m$ ,  $Q_3 = R_B \Leftrightarrow Q_3 = \frac{l_2 - x_2}{l_2} \Leftrightarrow Q_3 = \frac{l_2 - (l_2 + m)}{l_2} \Leftrightarrow Q_3 = \frac{3-(3+3)}{3} \Leftrightarrow Q_3 = \frac{-3}{3} \Leftrightarrow Q_3 = -1$ , т.е. когда груз расположен над точкой Д, поперечная сила в сечении 3 равна:  $Q_3 = -1$ .

Отложим от горизонтальной оси балки под сечением 3 ординату  $\frac{2}{3}$ , а под точкой Д – ординату  $(-1)$ . Соединив вершины ординат  $\frac{2}{3}$  и  $(-1)$ , получим правую ветвь линии влияния поперечной силы (рис. 1.81).

Теперь установим подвижной груз на произвольном расстоянии  $x_3$  от фиктивной опоры Д (рис. 1.73). При движении груза по балке ДЕ на шарнир Д будет передаваться переменное давление  $P \frac{l_3 - x_3}{l_3} = \frac{l_3 - x_3}{l_3}$ :

при  $x_3 = 0$ ;  $\frac{l_3 - x_3}{l_3} = \frac{l_3 - 0}{l_3} = 1$ , т.е. груз расположен над шарниром Д и передает нагрузку также, как и на конец консоли ГД и поэтому  $Q_3 = -1$ ;

при  $x_3 = l_3$ ;  $\frac{l_3 - x_3}{l_3} = \frac{l_3 - l_3}{l_3} = 0$ , т.е. когда груз расположен над опорой Е, нагрузка полностью передается на эту опору, давление на шарнир Д равно 0 и, следовательно, величина поперечной силы в сечении 3 также равна нулю.

Отложим от горизонтальной оси балки под шарниром Д ординату  $-1$ . Соединив вершину этой ординаты и точку 0 под опорой Е, получим линию влияния поперечной силы в сечении 3 при движении груза от точки Д до точки Е и окончательную линию влияния поперечной силы в сечении 3 многопролетной шарнирно-консольной балки (рис. 1.81).

**г) Построить линию влияния поперечной силы в сечении 4.**

Сечение 4 расположено на консоли балки ВГД. При движении подвижного груза по многопролетной шарнирно-консольной балке до сечения 4 сечение просто поворачивается и не изгибается. Линий влияния до сечения 4 нет. Когда груз перемещается справа от сечения 4 до шарнира Д поперечная сила не меняется и равна:  $Q_4 = P = 1$ , т.е. правая ветвь линии влияния параллельна оси консоли ГД (рис. 1.81).

Теперь установим подвижной груз на произвольном расстоянии  $x_3$  от фиктивной опоры Д (рис. 1.73). При движении груза по балке ДЕ на шарнир Д будет передаваться переменное давление  $P \frac{l_3 - x_3}{l_3} = 1 \cdot \frac{l_3 - x_3}{l_3} = \frac{l_3 - x_3}{l_3}$ :

при  $x_3 = 0$ ;  $\frac{l_3 - x_3}{l_3} = \frac{l_3 - 0}{l_3} = 1$ , т.е. груз расположен над шарниром Д также и передает нагрузку, как и на конец консоли ГД и поэтому  $Q_4 = 1$ ;

при  $x_3 = l_3$ ;  $\frac{l_3 - x_3}{l_3} = \frac{l_3 - l_3}{l_3} = 0$ , т.е. когда груз расположен над опорой Е, нагрузка полностью передается на эту опору, давление на шарнир Д равно 0 и, следовательно, величина поперечной силы в сечении 4 также равна нулю.

Отложим от горизонтальной оси балки под шарниром Д ординату 1. Соединив вершину ординаты 1 и точку 0 под опорой Е, получим линию влияния поперечной силы в сечении 4 при движении груза от точки Д до точки Е и окончательную линию влияния поперечной силы в сечении 4 многопролетной шарнирно-консольной балки (рис. 1.81).

**д) Построить линию влияния поперечной силы в сечении 5.**

Установим подвижной груз на произвольном расстоянии  $x_3$  от фиктивной опоры Д слева от сечения 5 (рис. 1.73), который перемещается от

точки Д ( $x_3 = 0$ ) до сечения 5 ( $x_3 = a_3$ ). Рассмотрим равновесие правой части балки ВГД (рис. 1.80, а).

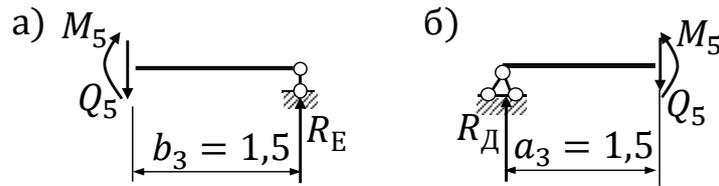


Рисунок 1.80.

Находим выражение поперечной силы  $Q_5$  из уравнения равновесия всех сил, действующих на правую часть балки с учетом правила знаков поперечных сил (поперечная сила  $Q_5$  в сечении 5 и опорная реакция  $R_E$ ) (рис. 1.80, а):

$$Q_5 = -R_E \Leftrightarrow Q_5 = -\frac{x_3}{l_3};$$

при  $x_3 = 0$ ,  $Q_5 = -\frac{x_3}{l_3} \Leftrightarrow Q_5 = -\frac{0}{l_3} \Leftrightarrow Q_5 = 0$ , т.е. когда груз расположен над точкой Д, нагрузка полностью передается на консоль ГД и поперечных сил в сечении 5 не возникают;

при  $x_3 = a_3$ ,  $Q_5 = -\frac{x_3}{l_3} \Leftrightarrow Q_5 = -\frac{a_3}{l_3} \Leftrightarrow Q_5 = -\frac{1,5}{3} \Leftrightarrow Q_5 = -0,5$ , т.е. когда груз расположен над сечением 5, поперечная сила в этом сечении для левой ветви равна:  $Q_5 = -0,5$ .

Соединив точку 0 под шарниром Д и вершину ординаты  $(-0,5)$  под сечением 5, получим левую ветвь линии влияния поперечной силы в сечении 5 при движении груза от точки Д до сечения 5 (рис. 1.81).

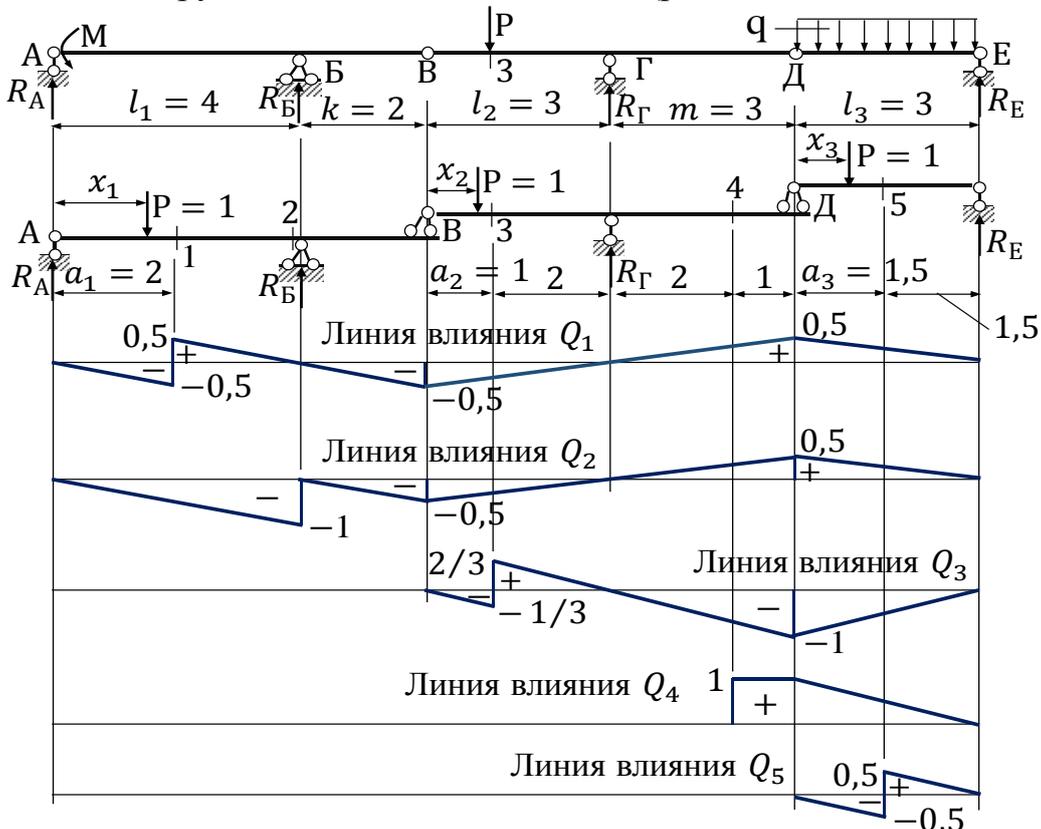


Рисунок 1.81– Линии влияния поперечных сил.

Если подвижной груз расположен справа от сечения 5 и передвигается от этого сечения ( $x_3 = a_3$ ) до точки Е ( $x_3 = l_3$ ), то рассматривая левую часть находим выражение поперечной силы из уравнения равновесия всех сил (рис. 1.80, б), действующих на левую часть балки с учетом правила знаков поперечных сил (поперечная сила  $Q_5$  в сечении 5 и фиктивная опорная реакция  $R_D$ ):

$$Q_5 = R_D \Leftrightarrow Q_5 = \frac{l_3 - x_3}{l_3};$$

при  $x_3 = a_3$ ,  $Q_5 = \frac{l_3 - x_3}{l_3} \Leftrightarrow Q_5 = \frac{l_3 - a_3}{l_3} \Leftrightarrow Q_5 = \frac{3-1}{3} \Leftrightarrow Q_5 = \frac{2}{3}$ , т.е. когда груз расположен над сечением 5, поперечная сила в этом сечении для правой ветви равна:  $Q_5 = \frac{2}{3}$ ;

при  $x_3 = l_3$ ,  $Q_5 = \frac{l_3 - x_3}{l_3} \Leftrightarrow Q_5 = \frac{l_3 - l_3}{l_3} \Leftrightarrow Q_5 = 0$ , т.е. когда груз расположен над опорой Е, нагрузка полностью передается на эту опору и поперечных сил в сечении 5 не возникают;

Отложим от горизонтальной оси балки под сечением 5 ординату  $\frac{2}{3}$ . Соединив вершину ординаты  $\frac{2}{3}$  и точку 0 под опорой Е, получим правую ветвь линии влияния поперечной силы (рис. 1.81).

### **3. Построение линий влияния изгибающих моментов.**

#### **а) Построить линию влияния изгибающего момента в сечении 1.**

Передвижение груза по главной балке не вызывает изгибающих моментов в сечениях выше расположенных балок. Поэтому на данном этапе построения линии влияния изгибающего момента в сечении 1 рассматриваем только главную балку. Установим подвижной груз на произвольном расстоянии  $x_1$  от опоры А слева от сечения 1 (рис. 1.73).

Составим уравнение равновесия – сумму моментов относительно опор А и Б и найдем зависимость опорных реакций балки АБВ от переменной  $x_1$  и, следовательно, изгибающих моментов в сечении балки:

$$\sum M_A = 0; R_B l_1 - P x_1 = 0 \Leftrightarrow R_B = P \frac{x_1}{l_1} \Leftrightarrow R_B = \frac{x_1}{l_1};$$

$$\sum M_B = 0; R_A l_1 - P(l_1 - x_1) = 0 \Leftrightarrow R_A = P \frac{l_1 - x_1}{l_1} \Leftrightarrow R_A = \frac{l_1 - x_1}{l_1}.$$

Если подвижной груз расположен слева от сечения 1 и передвигается от опоры А ( $x_1 = 0$ ) до сечения 1 ( $x_1 = a_1$ ), то рассматривая правую часть находим выражение изгибающего момента из уравнения равновесия всех сил (рис. 1.78, а), действующих на правую часть балки с учетом правила знаков изгибающих моментов (изгибающий момент  $M_1$  в сечении 1 и опорная реакция  $R_B$ ):

$$M_1 = R_B b_1 \Leftrightarrow M_1 = \frac{x_1}{l_1} \cdot b_1.$$

Находим значения изгибающих моментов в характерных точках:

при  $x_1 = 0$ ,  $M_1 = x_1 \Leftrightarrow M_1 = 0$ , т.е. когда груз расположен над опорой А, нагрузка полностью передается на эту опору и изгибающего момента в сечении 1 не возникает:  $M_1 = 0$ ;

при  $x_1 = a_1$ ,  $M_1 = \frac{x_1}{l_1} \cdot b_1 \Leftrightarrow M_1 = \frac{a_1}{l_1} \cdot b_1 \Leftrightarrow M_1 = \frac{2}{4} \cdot 2 \Leftrightarrow M_1 = 1$  м, т.е. когда груз расположен над сечением 1, изгибающий момент в этом сечении для левой ветви равен:  $M_1 = 1$  м.

Отложим от горизонтальной оси балки под сечением 1 ординату 1. Соединив вершину ординаты 1 и точку 0 под опорой А, получим левую ветвь линии влияния изгибающих моментов (рис. 1.82).

Если груз расположен справа от сечения 1 и передвигается от сечения 1 ( $x_1 = a_1$ ) до точки В ( $x_1 = l_1 + k$ ), то рассматривая левую часть находим выражение изгибающего момента из уравнения равновесия всех сил (рис. 1.78, б), действующих на левую часть балки с учетом правила знаков изгибающих моментов (изгибающий момент  $M_1$  в сечении 1 и опорная реакция  $R_A$ ):

$$M_1 = R_A a_1 \Leftrightarrow M_1 = \frac{l_1 - x_1}{l_1} a_1.$$

Находим значения изгибающих моментов в характерных точках:

при  $x_1 = a_1$ ,  $M_1 = R_A a_1 \Leftrightarrow M_1 = \frac{l_1 - x_1}{l_1} a_1 \Leftrightarrow M_1 = \frac{l_1 - a_1}{l_1} a_1 \Leftrightarrow M_1 = \frac{4-2}{4} 2 \Leftrightarrow M_1 = 1$  м, т.е. когда груз расположен над сечением 1, изгибающий момент в этом сечении для правой ветви равен:  $M_1 = 1$  м;

при  $x_1 = l_1$ ,  $M_1 = R_A a_1 \Leftrightarrow M_1 = \frac{l_1 - x_1}{l_1} a_1 \Leftrightarrow M_1 = \frac{l_1 - l_1}{l_1} a_1 \Leftrightarrow M_1 = 0$ , т.е. когда груз расположен над опорой Б, нагрузка полностью передается на эту опору и изгибающего момента в сечении 1 не возникает:  $M_1 = 0$ ;

при  $x_1 = l_1 + k$ ,  $M_1 = R_A a_1 \Leftrightarrow M_1 = \frac{l_1 - x_1}{l_1} a_1 \Leftrightarrow M_1 = \frac{l_1 - (l_1 + k)}{l_1} a_1 \Leftrightarrow M_1 = -\frac{k}{l_1} a_1 \Leftrightarrow M_1 = -\frac{2}{4} 2 \Leftrightarrow M_1 = -1$ , т.е. когда груз расположен на конце консоли БВ, изгибающий момент в сечении 1 равен:  $M_1 = -1$  м.

Отложим от горизонтальной оси балки под сечением 1 ординату 1. Соединив вершину ординаты 1 под сечением 1 и вершину ординаты  $-1$  под точкой В, получим правую ветвь линии влияния изгибающего момента (рис. 1.82).

Пусть подвижной груз перемещается по следующему ярусу – по балке ВГД (рис. 1.73). При движении груза по балке ВГД на шарнир В, а значит и на балку АВВ, где расположено сечение 1, будет передаваться переменное давление, изменяющееся по линейному закону:  $P \frac{l_2 - x_2}{l_2} = 1 \cdot \frac{l_2 - x_2}{l_2} = \frac{l_2 - x_2}{l_2}$ . Когда груз расположен над шарниром В и передает нагрузку на шарнир В также, как и на конец консоли БВ, изгибающий момент в сечении 1 будет равен:  $M_1 = -1$  м. Когда груз расположен над опорой Г, нагрузка полностью передается на эту опору, давление на шарнир В, а значит и на балку АВ, где расположено сечение 1, равно 0. Следовательно, в сечении 1 изгибающие моменты не возникают:  $M_1 = 0$ .

Отложим от горизонтальной оси балки под шарниром В ординату  $(-1)$ . Соединив вершину этой ординаты с точкой под опорой Г и, продолжив

прямую до пересечения с вертикалью, проходящей через центр шарнира Д, получим линию влияния изгибающего момента в сечении 1 при движении груза от точки В до точки Д балки (рис. 1.82). Ординату линии влияния под точкой Д определим из подобия треугольников:  $a = 1$  (см. рис. 1.74). Следовательно, когда груз расположен на конце консоли ГД изгибающий момент в сечении 1 равен:  $M_1 = 1$  м.

Пусть теперь подвижной груз перемещается по следующему ярусу – по балке ДЕ (рис. 1.81). При движении груза по балке ДЕ на шарнир Д, а значит и на балки ВГД и АБВ, где расположено сечение 1, будет передаваться переменное давление, изменяющееся по линейному закону  $P \frac{l_3 - x_3}{l_3} = 1 \cdot \frac{l_3 - x_3}{l_3} = \frac{l_3 - x_3}{l_3}$ . Когда груз расположен над шарниром Д и передает нагрузку на шарнир Д также, как и на конец консоли ГД, изгибающий момент в сечении 1 будет равен:  $M_1 = 1$  м. Когда груз расположен над опорой Е, нагрузка полностью передается на эту опору, давление на шарнир Д, а значит и на балки ВГД и АБВ, где расположено сечение 1, равно 0. Следовательно, в сечении 1 изгибающий момент не возникает:  $M_1 = 0$ .

Соединив вершину ординаты 1 под шарниром Д и точку 0 под опорой Е, получим линию влияния изгибающего момента в сечении 1 при движении груза от точки Д до точки Е и окончательную линию влияния изгибающего момента в сечении 1 многопролетной шарнирно-консольной балки (рис. 1.82).

**б) Построить линию влияния изгибающего момента в сечении 2.**

Сечение 2 расположено на бесконечно близком расстоянии слева от опоры Б главной балки. Пусть подвижной груз передвигается слева от сечения 2 от опоры А до этого сечения (рис. 1.73). Рассмотрим равновесие правой части балки (рис. 1.79, а):

$$M_2 = R_B \cdot 0 \Leftrightarrow M_2 = 0.$$

Следовательно, левая ветвь линия влияния изгибающего момента в сечении 2 совпадает с осью балки, т.е. линия влияния до сечения 2 отсутствует.

Пусть подвижной груз передвигается справа от сечения 2 от опоры Б ( $x_1 = l_1$ ) до точки В ( $x_1 = l_1 + k$ ). Рассмотрим равновесие левой части балки (рис. 1.79, б):

$$M_2 = R_A \cdot l_1 \Leftrightarrow M_2 = \frac{l_1 - x_1}{l_1} \cdot l_1 \Leftrightarrow M_2 = l_1 - x_1.$$

Находим значения изгибающих моментов в характерных точках:

при  $x_1 = l_1$ ,  $M_2 = l_1 - x_1 \Leftrightarrow M_2 = l_1 - l_1 \Leftrightarrow M_2 = 0$ , т.е. когда груз расположен над опорой Б, нагрузка полностью передается на эту опору и изгибающего момента в сечении 2 не возникает:  $M_2 = 0$ ;

при  $x_1 = l_1 + k$ ,  $M_2 = l_1 - (l_1 + k) \Leftrightarrow M_2 = -k \Leftrightarrow M_2 = -2$  м, т.е. когда груз расположен над точкой В, изгибающий момент в сечении 2 для правой ветви равен:  $M_2 = -2$  м.

Отложим от горизонтальной оси балки под шарниром В ординату  $(-2)$ . Соединив точку 0 под опорой Б и вершину ординаты  $(-2)$ , получим правую ветвь линии влияния изгибающих моментов при движении груза по консоли от опоры Б до шарнира В (рис. 1.82).

Пусть подвижной груз перемещается по следующему ярусу – по балке ВГД (рис. 1.73). При движении груза по балке ВГД на шарнир В, а значит и на балку АБВ, где расположено сечение 2, будет передаваться переменное давление, изменяющееся по линейному закону:  $P \frac{l_2 - x_2}{l_2} = 1 \cdot \frac{l_2 - x_2}{l_2} = \frac{l_2 - x_2}{l_2}$ . Когда груз расположен над шарниром В и передает нагрузку на шарнир В также, как и на конец консоли БВ, изгибающий момент в сечении 2 будет равен:  $M_2 = -2$  м. Когда груз расположен над опорой Г, нагрузка полностью передается на нее, давление на шарнир В, а значит и на балку АБВ, где расположено сечение 2, равно 0. Значит, в сечении 2 изгибающие моменты не возникают:  $M_2 = 0$ .

Отложим от горизонтальной оси балки под шарниром В ординату  $(-2)$ . Соединив вершину этой ординаты с точкой под опорой Г и, продолжив прямую до пересечения с вертикалью, проходящей через центр шарнира Д, получим линию влияния изгибающего момента в сечении 2 при движении груза от точки В до точки Д (рис. 1.82). Ординату линии влияния под точкой Д определим из подобия треугольников:  $a = 2$  (см. рис. 1.69). Следовательно, когда груз расположен на конце консоли ГД изгибающий момент в сечении 2 равен:  $M_2 = 2$ .

Пусть теперь подвижной груз перемещается по следующему ярусу – по балке ДЕ (рис. 1.73). При движении груза по балке ДЕ на шарнир Д, а значит и на балки ВГД и АБВ, где расположено сечение 2, будет передаваться переменное давление, изменяющееся по линейному закону  $P \frac{l_3 - x_3}{l_3} = 1 \cdot \frac{l_3 - x_3}{l_3} = \frac{l_3 - x_3}{l_3}$ . Когда груз расположен над шарниром Д и передает нагрузку на шарнир Д также, как и на конец консоли ГД, изгибающий момент в сечении 2 будет равен:  $M_2 = 2$ . Когда груз расположен над опорой Е, нагрузка полностью передается на эту опору, давление на шарнир Д, а значит и на балки ВГД и АБВ, где расположено сечение 2, равно 0. Следовательно, в сечении 2 изгибающий момент не возникает:  $M_2 = 0$ .

Соединив вершину ординаты 2 под шарниром Д и точку 0 под опорой Е, получим линию влияния изгибающего момента в сечении 2 при движении груза от точки Д до точки Е и окончательную линию влияния изгибающего момента в сечении 2 многопролетной шарнирно-консольной балки (рис. 1.82).

**ж) Построить линию влияния изгибающего момента в сечении 3.**

Сечение 3 расположено на расстоянии 1 м справа от фиктивной опоры В балки второго яруса. Пусть подвижной груз передвигается слева от сечения 3 от опоры В ( $x_2 = 0$ ) до этого сечения ( $x_2 = a_2$ ). Рассмотрим равновесие правой части балки (рис. 1.80, а):

$$M_3 = R_\Gamma \cdot b_2 \Leftrightarrow M_3 = \frac{x_2}{l_2} \cdot b_2.$$

Находим значения изгибающих моментов в характерных точках:

при  $x_2 = 0$ ,  $M_3 = \frac{x_2}{l_2} \cdot b_2 \Leftrightarrow M_3 = \frac{0}{l_2} \cdot b_2 \Leftrightarrow M_3 = 0$ , т.е. когда груз расположен над фиктивной опорой (шарниром) В, нагрузка полностью передается на эту опору, а, следовательно, на конец консоли главной балки АБВ. Балка ВГД поворачивается, не изгибаясь и изгибающего момента в сечении 3 не возникает:  $M_3 = 0$ ;

при  $x_2 = a_2$ ,  $M_3 = \frac{x_2}{l_2} \cdot b_2 \Leftrightarrow M_3 = \frac{a_2}{l_2} \cdot b_2 \Leftrightarrow M_3 = \frac{1}{3} \cdot 2 \Leftrightarrow M_3 = \frac{2}{3}$  м, т.е. когда груз расположен над сечением 3, изгибающий момент в этом сечении для левой ветви равен:  $M_3 = 2/3$  м.

Отложим от горизонтальной оси балки под сечением 3 ординату  $2/3$ . Соединив точку 0 под опорой В и вершину ординаты  $2/3$ , получим левую ветвь линии влияния изгибающего момента в сечении 3 при движении груза от точки В до сечения 3 (рис. 1.82).

Следовательно, когда груз расположен на конце консоли ГД изгибающий момент в сечении 3 равен:  $M_3 = 2/3$  м.

Пусть теперь подвижной груз передвигается справа от сечения 3 ( $x_2 = a_2$ ) до точки Д ( $x_2 = l_2 + m$ ). Рассмотрим равновесие левой части балки (рис. 1.79, б):

$$M_3 = R_B \cdot a_2 \Leftrightarrow M_3 = \frac{l_2 - x_2}{l_2} \cdot a_2.$$

Находим значения изгибающих моментов в характерных точках:

при  $x_2 = a_2$ ,  $M_3 = \frac{l_2 - x_2}{l_2} \cdot a_2 \Leftrightarrow M_3 = \frac{l_2 - a_2}{l_2} \cdot a_2 \Leftrightarrow M_3 = \frac{3-1}{3} \cdot 1 \Leftrightarrow M_3 = \frac{2}{3}$ , т.е. когда груз расположен над сечением 3, изгибающий момент в этом сечении для правой ветви равен:  $M_3 = 2/3$  м;

при  $x_2 = l_2$ ,  $M_3 = \frac{l_2 - x_2}{l_2} \cdot a_2 \Leftrightarrow M_3 = \frac{l_2 - l_2}{l_2} \cdot a_2 \Leftrightarrow M_3 = 0$ , т.е. когда груз расположен над опорой Г, нагрузка полностью передается на эту опору и изгибающего момента в сечении 3 не возникает:  $M_3 = 0$ ;

при  $x_2 = l_2 + m$ ,  $M_3 = \frac{l_2 - x_2}{l_2} a_2 \Leftrightarrow M_3 = \frac{l_2 - (l_2 + m)}{l_2} a_2 \Leftrightarrow M_3 = -\frac{m}{l_2} a_2 \Leftrightarrow M_3 = -\frac{3}{3} \cdot 1 \Leftrightarrow M_3 = -1$  м, т.е. когда груз расположен на конце консоли ГД, изгибающий момент в сечении 3 равен:  $M_3 = -1$  м.

Отложим от горизонтальной оси балки под сечением 3 ординату  $2/3$  и под точкой Д – ординату  $(-1)$ . Соединив их вершины, получим правую ветвь линии влияния изгибающего момента в сечении 3 при движении груза от этого сечения до точки Д (рис. 1.82).

Пусть теперь подвижной груз перемещается по следующему ярусу – по балке ДЕ (рис. 1.73). При движении груза по балке ДЕ на шарнир Д, а значит и на балку ВГД, где расположено сечение 3, будет передаваться переменное давление, изменяющееся по линейному закону  $P \frac{l_3 - x_3}{l_3} = 1 \cdot \frac{l_3 - x_3}{l_3} = \frac{l_3 - x_3}{l_3}$ .

Когда груз расположен над шарниром Д и передает нагрузку на шарнир Д также, как и на конец консоли ГД, изгибающий момент в сечении 3 будет равен:  $M_3 = -1$  м. Когда груз расположен над опорой Е, нагрузка полностью передается на эту опору, давление на шарнир Д, а значит и на балку ВГД, где расположено сечение 3, равно 0. Следовательно, в сечении 3 изгибающий момент не возникает:  $M_3 = 0$ .

Отложим от горизонтальной оси балки под шарниром Д ординату  $(-1)$ . Соединив вершину этой ординаты и точку 0 под опорой Е, получим линию влияния изгибающего момента в сечении 3 при движении груза от точки Д до точки Е и окончательную линию влияния изгибающего момента в сечении 3 многопролетной шарнирно-консольной балки (рис. 1.82).

**в) Построить линию влияния изгибающего момента в сечении 4.**

Сечение 4 расположено на консоли ГД на расстоянии 4 м справа от опоры Г балки второго яруса. При расположении груза слева от сечения 4 правее этого сечения консоль и на нее не действует никакая сила (ни внешних сил и опорной реакции). Поэтому при передвижении груза от точки А до сечения 4 изгибающий момент в этом сечении не возникает. Левая ветвь линии влияния изгибающего момента в сечении 4 в этом случае совпадает с осью балки.

Если груз передвигается справа от сечения 4 ( $x = 0$ ) до точки Д ( $x = 1$ ), то, рассматривая равновесие правой части (рис. 1.78, в), получим:

$$M_4 = -P \cdot x.$$

Находим значения изгибающих моментов в характерных точках:

при  $x = 0$ ,  $M_4 = -P \cdot x \Leftrightarrow M_4 = 0$ ;

при  $x = 1$ ,  $M_4 = -P \cdot x \Leftrightarrow M_4 = -1 \cdot 1 \Leftrightarrow M_4 = -1$  м, т.е. когда груз расположен на конце консоли ГД, изгибающий момент в сечении 4 равен:  $M_4 = -1$  м.

Отложим от горизонтальной оси балки под шарниром Д ординату  $(-1)$ . Соединив вершину этой ординаты и точку 0 под сечением 4, получим правую ветвь линии влияния изгибающего момента в сечении 4 при движении груза от сечения 4 до точки Д (рис. 1.82).

Пусть теперь груз передвигается по следующему ярусу – по балке ДЕ (рис. 1.73). При движении груза по балке ДЕ на шарнир Д, а значит и на балку ВГД, где расположено сечение 4, будет передаваться переменное давление, изменяющееся по линейному закону  $P \frac{l_3 - x_3}{l_3} = 1 \cdot \frac{l_3 - x_3}{l_3} = \frac{l_3 - x_3}{l_3}$ .

Когда груз расположен над шарниром Д и передает нагрузку на шарнир Д также, как и на конец консоли ГД, изгибающий момент в сечении 4 будет равен:  $M_4 = -1$  м. Когда груз расположен над опорой Е, нагрузка полностью передается на эту опору, давление на шарнир Д, а значит и на балку ВГД, где расположено сечение 4, равно 0. Следовательно, в сечении 4 изгибающий момент не возникает:  $M_4 = 0$ .

Отложим от горизонтальной оси балки под шарниром Д ординату  $(-1)$ . Соединив вершину этой ординаты и точку 0 под опорой Е, получим

линию влияния изгибающего момента в сечении 4 при движении груза от точки Д до точки Е и окончательную линию влияния изгибающего момента в сечении 4 многопролетной шарнирно-консольной балки (рис. 1.82).

**г) Построить линию влияния изгибающего момента в сечении 5.**

Сечение 5 расположено в середине балки ДЕ третьего яруса.

Если груз передвигается слева от сечения 5 от опоры Д ( $x_3 = 0$ ) до этого сечения ( $x_3 = a_3$ ), то рассматриваем равновесие правой части балки (рис. 1.79, а):

$$M_5 = R_E \cdot b_3 \Leftrightarrow M_5 = \frac{x_3}{l_3} \cdot b_3.$$

Находим значения изгибающих моментов в характерных точках:

при  $x_3 = 0$ ,  $M_5 = \frac{x_3}{l_3} \cdot b_3 \Leftrightarrow M_5 = \frac{0}{l_3} \cdot b_3 \Leftrightarrow M_5 = 0$ , т.е. когда груз расположен над опорой (шарниром) Д, нагрузка полностью передается на эту опору, балка ДЕ поворачивается не изгибаясь и изгибающий момент в сечении 5 не возникает:  $M_5 = 0$ ;

при  $x_3 = a_3$ ,  $M_5 = \frac{x_3}{l_3} \cdot b_3 \Leftrightarrow M_5 = \frac{a_3}{l_3} \cdot b_3 \Leftrightarrow M_5 = \frac{1,5}{3} \cdot 1,5 \Leftrightarrow M_5 = \frac{3}{4}$  м, т.е. когда груз расположен над сечением 5, изгибающий момент в этом сечении для левой ветви равен:  $M_5 = 3/4$  м.

Отложим от горизонтальной оси балки под сечением 5 ординату 3/4. Соединив точку 0 под опорой Д и вершину ординаты 3/4, получим левую ветвь линии влияния изгибающего момента в сечении 5 при движении груза от точки Д до сечения 5 (рис. 1.82).

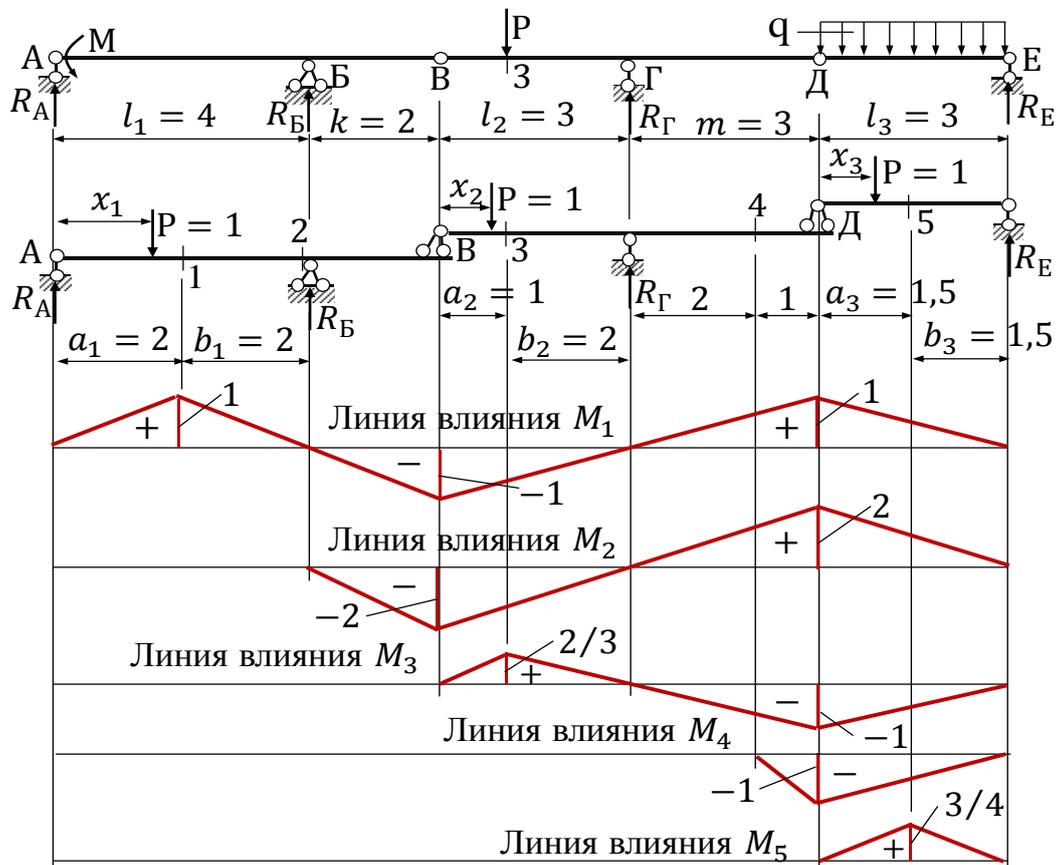


Рисунок 1.82.

Пусть теперь подвижной груз передвигается справа от сечения 5 ( $x_3 = a_3$ ) до точки Е ( $x_3 = l_3$ ). Рассмотрим равновесие левой части балки (рис. 1.80, б):

$$M_5 = R_D \cdot a_3 \Leftrightarrow M_5 = \frac{l_3 - x_3}{l_3} \cdot a_3.$$

Находим значения изгибающих моментов в характерных точках:

при  $x_3 = a_3$ ,  $M_5 = \frac{l_3 - x_3}{l_3} \cdot a_3 \Leftrightarrow M_5 = \frac{l_3 - a_3}{l_3} \cdot a_3 \Leftrightarrow M_5 = \frac{3 - 1,5}{3} \cdot 1,5 \Leftrightarrow M_5 = 3/4$  м, т.е. когда груз расположен над сечением 5, изгибающий момент в этом сечении для правой ветви равен:  $M_5 = 3/4$  м;

при  $x_3 = l_3$ ,  $M_5 = \frac{l_3 - x_3}{l_3} \cdot a_3 \Leftrightarrow M_5 = \frac{l_3 - l_3}{l_3} \cdot a_3 \Leftrightarrow M_5 = 0$ , т.е. когда груз расположен над опорой Е, нагрузка полностью передается на эту опору и изгибающий момент в сечении 5 не возникает:  $M_5 = 0$ .

Отложим от горизонтальной оси балки под сечением 5 ординату 3/4. Соединив ее вершину с точкой 0 под опорой Е, получим правую ветвь линии влияния изгибающего момента в сечении 5 при движении груза от этого сечения до точки Д и окончательную линию влияния изгибающего момента для сечения 3 многопролетной шарнирно-консольной балки (рис. 1.82).

#### **4. Определение по линиям влияния значений опорных реакций.**

Значения опорных реакций и внутренних усилий в поперечных сечениях от действия постоянной нагрузки можно найти по их линиям влияния по формуле [1, 2, 4]

$$Z = \sum M_i \operatorname{tg} \alpha_i + \sum P_j y_j + q_k \omega_k,$$

где  $Z$  – определяемое усилие (опорная реакция, изгибающий момент, поперечная сила) для построенной линии влияния;

$M_i$  – сосредоточенный момент;

$\operatorname{tg} \alpha_i$  – тангенс угла наклона между касательной к линии влияния и осью балки в месте приложения сосредоточенного момента;

$P_j$  – сосредоточенная сила;

$y_j$  – ордината линии влияния под силой  $P_j$ ;

$q_k$  – интенсивность равномерно распределенной нагрузки;

$\omega_k$  – площадь участка линии влияния, загруженного равномерно распределенной нагрузкой.

Правило знаков при определении опорных реакций и внутренних усилий:

1) тангенс угла  $\operatorname{tg} \alpha_i$  положительный в первой и третьей координатных четвертях (рис. 1.83, а) и отрицательный – во второй и четвертой четвертях (рис. 1.83, б);

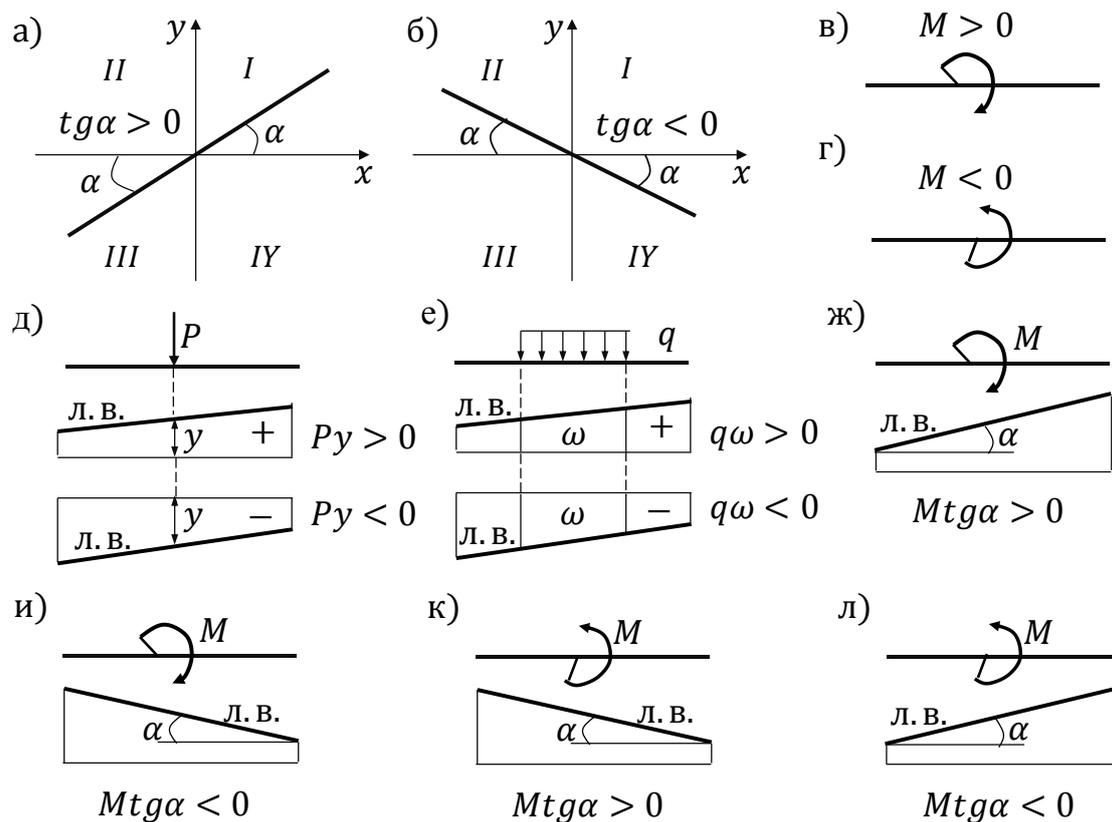


Рисунок 1.83– Схемы к правилам знаков при определении опорных реакций и внутренних усилий.

2) сосредоточенный момент положительный (рис. 1.83, в), если направлен по часовой стрелке и отрицательный (рис. 1.83, г) – если против часовой стрелки;

3) сосредоточенная сила и распределенная нагрузка положительные если направлены сверху вниз;

4) произведение  $P \cdot y$  положительное если  $P$  и  $y$  одного знака (рис. 1.83, д) и отрицательные – если разного знака (рис. 1.83, д);

5) произведения  $q \cdot \omega$  положительные если  $q$  и  $\omega$  одного знака (рис. 1.83, е) и отрицательные – если разного знака (рис. 1.83, е);

6) произведение  $M \cdot tg\alpha$  положительный если  $M$  и  $tg\alpha$  одного знака (рис. 1.83, ж, к) и отрицательные – если разного знака (рис. 1.83, и, л);

**а) Определить по линии влияния значение опорной реакции  $R_A$ .**

Для вычисления по линии влияния опорной реакции  $R_A$  находим тангенс угла наклона  $\alpha_1$  линии влияния в месте приложения сосредоточенного момента, ординату  $y_1$  линии влияния по линии действия сосредоточенной силы и площадь участка  $\omega_1$  линии влияния, загруженного равномерно распределенной нагрузкой (рис. 1.84):

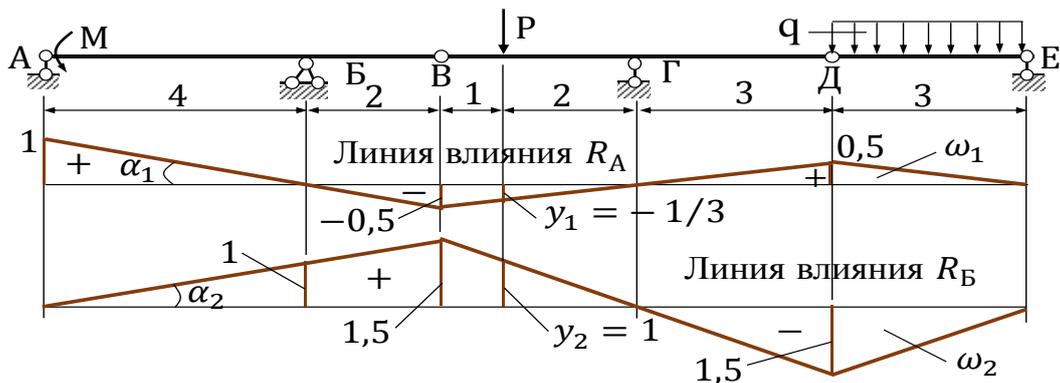


Рисунок 1.84.

$tg\alpha_1 = -\frac{1}{4} \Leftrightarrow tg\alpha_1 = -0,25$ ; тангенс угла  $\alpha$  отрицательный, так как расположен во второй координатной четверти;

$y_1$  – ордината под сосредоточенной силой отрицательная и определяется с помощью подобия треугольников

$$\frac{-0,5}{3} = \frac{y_1}{2} \Leftrightarrow y_1 = \frac{-0,5}{3} \cdot 2 \Leftrightarrow y_1 = -\frac{1}{3}.$$

$\omega_1 = \frac{1}{2} \cdot 0,5 \cdot 3 \Leftrightarrow \omega_1 = 0,75$ ; площадь участка  $\omega_1$  линии влияния положительная.

Сосредоточенный момент  $M$  отрицательный, так как направлен против хода часовой стрелки.

Находим значение опорной реакции:

$$R_A = M \cdot tg\alpha_1 + P \cdot y_1 + q \cdot \omega_1 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow R_A = -10 \cdot (-0,25) + 3 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) + 4 \cdot 0,75 \Leftrightarrow R_A = 4,5 \text{ кН}.$$

Полученный результат полностью совпадает с результатом расчета на неподвижную нагрузку.

**б) Определить по линии влияния значение опорной реакции  $R_B$ .**

Находим тангенс угла наклона  $\alpha_2$  линии влияния в месте приложения сосредоточенного момента и площадь участка  $\omega_2$  линии влияния, загруженного равномерно распределенной нагрузкой (рис. 1.84):

$tg\alpha_2 = \frac{1}{4} \Leftrightarrow tg\alpha_2 = 0,25$ ; тангенс угла  $\alpha_2$  положительный, так как расположен в первой координатной четверти;

$y_2 = 1$ ; ордината под сосредоточенной силой положительная;

$\omega_2 = -\frac{1}{2} \cdot 1,5 \cdot 3 \Leftrightarrow \omega_2 = -2,25$ ; площадь участка  $\omega_2$  линии влияния отрицательная.

Сосредоточенный момент  $M$  отрицательный, так как направлен против хода часовой стрелки.

Находим значение опорной реакции:

$$R_B = M \cdot tg\alpha_2 + P \cdot y_2 + q \cdot \omega_2 \Leftrightarrow R_B = \\ = -10 \cdot 0,25 + 3 \cdot 1 + 4 \cdot (-2,25) \Leftrightarrow R_B = -8,5 \text{ кН}.$$

Полученный результат полностью совпадает с результатом расчета на неподвижную нагрузку.

### 5. Определение по линиям влияния значения поперечных сил и изгибающих моментов.

Из курса сопротивления материалов известно, что эпюры поперечных сил и изгибающих моментов имеют разрывы первого рода в тех сечениях, где приложены сосредоточенная сила и сосредоточенный момент. Поэтому определение поперечных сил и изгибающих моментов в сечениях балки по линиям влияния связано с особенностью загрузки линий влияния, имеющих разрывы непрерывности первого рода [5]. Рассмотрим последовательность определения поперечных сил в подобных случаях на примере двухопорной балки с консолями (рис. 1.85). На балку действуют две сосредоточенные силы:  $P_1 = 6$  кН и  $P_2 = 2$  кН. Необходимо по линиям влияния определить значения поперечных сил в сечениях  $a$  и  $b$  и сравнить с результатами, полученными при действии постоянных сил.

Находим поперечную силу в сечении  $a$  по линии влияния поперечных сил  $Q_a$ . В точке приложения силы  $P_1$  линия влияния  $Q_a$  имеет разрыв. Поэтому поперечную силу ищем в сечении на бесконечно близком расстоянии слева и справа от этого сечения.

Определяем поперечную силу бесконечно близко слева от сечения  $a$ . Сила  $P_1$  положительная, а сила  $P_2$  – отрицательная, так как действует снизу вверх. Ординату линии влияния  $Q_a$  под силой  $P_1$  находим бесконечно близко справа от сечения  $a$ :  $y_{a1}^п = 0,7$  (рис. 1.85). Тогда поперечная сила бесконечно близко слева от сечения  $a$  равна

$$Q_a^{\text{лев}} = P_1 \cdot y_{a1}^п + P_2 \cdot y_{a2} \Leftrightarrow Q_a^{\text{лев}} = 6 \cdot 0,7 - 2 \cdot 0,35 \Leftrightarrow Q_a^{\text{лев}} = 3,5 \text{ кН},$$

где  $y_{a2}$  – ордината линии влияния  $Q_a$  под силой  $P_2$ .

Аналогично определяем поперечную силу бесконечно близко справа от сечения  $a$  (рис. 1.85).

$$Q_a^{\text{пр}} = P_1 \cdot y_{a1}^л + P_2 \cdot y_{a2} \Leftrightarrow Q_a^{\text{пр}} = 6 \cdot (-0,3) - 2 \cdot 0,35 \Leftrightarrow Q_a^{\text{пр}} = -2,5 \text{ кН}.$$

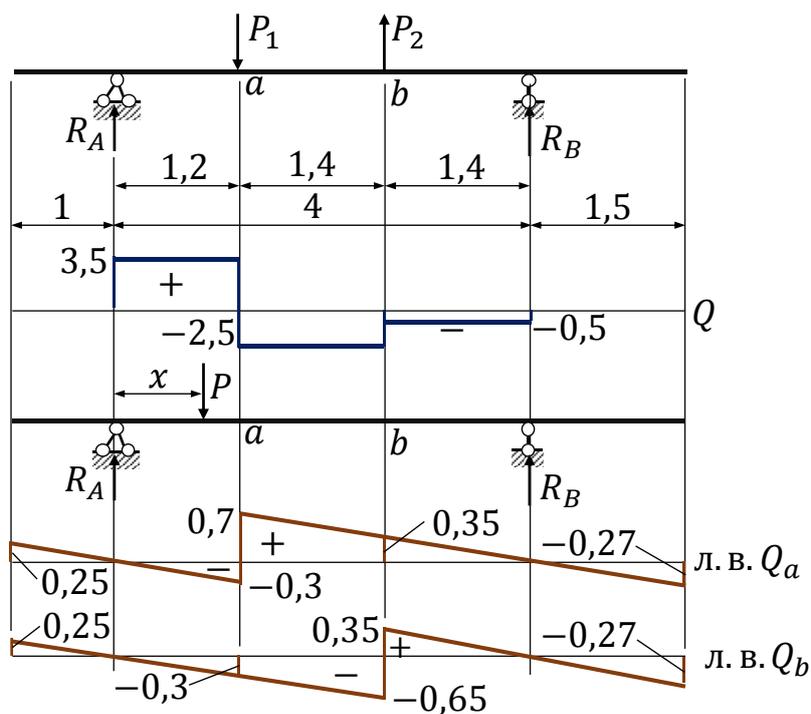


Рисунок 1.85.

Находим поперечную силу в сечении  $b$  по линии влияния поперечных сил  $Q_b$ . В точке приложения силы  $P_2$  линия влияния  $Q_b$  имеет разрыв. Поэтому поперечную силу ищем в сечении на бесконечно близком расстоянии слева и справа от этого сечения.

Определяем поперечную силу бесконечно близко слева от сечения  $b$ . Ординату линии влияния  $Q_b$  под силой  $P_2$  находим бесконечно близко справа от сечения  $b$ :  $y_{b2}^{\text{п}} = 0,35$  (рис. 1.85). Тогда поперечная сила бесконечно близко слева от сечения  $b$  равна

$$Q_b^{\text{лев}} = P_1 \cdot y_{b1} + P_2 \cdot y_{b2}^{\text{п}} \Leftrightarrow Q_b^{\text{лев}} = 6 \cdot (-0,3) - 2 \cdot 0,35 \Leftrightarrow Q_b^{\text{лев}} = -2,5 \text{ кН},$$

где  $y_{b1}$  – ордината линии влияния  $Q_b$  под силой  $P_1$ .

Аналогично определяем поперечную силу бесконечно близко справа от сечения  $b$ .

$$Q_b^{\text{пп}} = P_1 \cdot y_{b2} + P_2 \cdot y_{b2}^{\text{л}} \Leftrightarrow Q_b^{\text{пп}} = 6 \cdot (-0,3) - 2 \cdot (-0,65) \Leftrightarrow Q_b^{\text{пп}} = -0,5 \text{ кН}.$$

Полученные результаты полностью совпадают с результатами расчета на неподвижную нагрузку.

Теперь рассмотрим последовательность определения изгибающих моментов (рис. 1.86). На балку действуют два сосредоточенных момента:  $M_1 = 6$  кНм и  $M_2 = 2$  кНм. Необходимо по линиям влияния определить значения изгибающих моментов в сечениях  $a$  и  $b$  и сравнить с результатами, полученными при действии постоянных сил.

Находим изгибающий момент в сечении  $a$  по линии влияния изгибающих моментов  $M_a$ . В точке приложения момента силы  $M_1$  линия влияния  $M_a$  имеет разрыв. Поэтому изгибающий момент ищем в сечении на бесконечно близком расстоянии слева и справа от этого сечения.

Определяем изгибающий момент бесконечно близко слева от сечения  $a$ . Момент  $M_1$  положительный, а момент  $M_2$  – отрицательный, так как действует против часовой стрелки. Тангенс угла наклона между линией влияния  $M_a$  и осью балки находим в месте приложения сосредоточенного момента  $M_1$  бесконечно близко справа от сечения  $a$  (рис. 1.86):

$$tg\alpha_{a1}^{\Pi} = -\frac{0,84}{2,8} \Leftrightarrow tg\alpha_{a1}^{\Pi} = -0,3.$$

Тогда изгибающий момент бесконечно близко слева от сечения  $a$  равна

$$M_a^{\text{л.в.}} = M_1 \cdot tg\alpha_{a1}^{\Pi} + M_2 \cdot tg\alpha_{a2} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow M_a^{\text{л.в.}} = 6 \cdot (-0,3) - 2 \cdot (-0,3) \Leftrightarrow M_a^{\text{л.в.}} = -1,2 \text{ кНм},$$

где  $tg\alpha_{a2} = -\frac{0,84}{2,8} \Leftrightarrow tg\alpha_{a2} = -0,3$  – тангенс угла наклона между линией влияния  $M_a$  и осью балки в месте приложения сосредоточенного момента  $M_2$ .

Аналогично определяем изгибающий момент бесконечно близко справа от сечения  $a$  (рис. 1.86).

$$M_a^{\text{п.в.}} = M_1 \cdot tg\alpha_{a1}^{\Pi} + M_2 \cdot tg\alpha_{a2} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow M_a^{\text{п.в.}} = 6 \cdot 0,7 - 2 \cdot (-0,3) \Leftrightarrow M_a^{\text{п.в.}} = 4,8 \text{ кНм},$$

где  $tg\alpha_{a1}^{\Pi} = \frac{0,84}{1,2} \Leftrightarrow tg\alpha_{a1}^{\Pi} = 0,7$  – тангенс угла наклона между линией влияния  $M_a$  и осью балки в месте приложения сосредоточенного момента  $M_1$  бесконечно близко слева от сечения  $a$ .

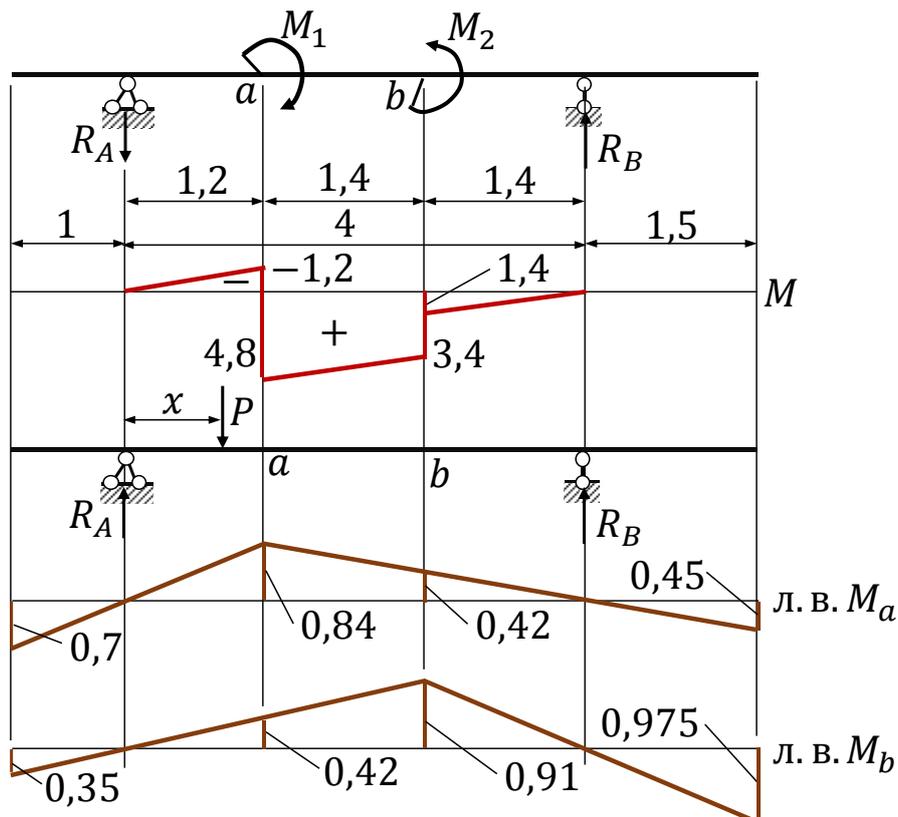


Рисунок 1.86.

Находим изгибающий момент в сечении  $b$  по линии влияния изгибающих моментов  $M_b$ . В точке приложения момента силы  $M_2$  линия

влияния  $M_b$  имеет разрыв. Поэтому изгибающий момент ищем в сечении на бесконечно близком расстоянии слева и справа от этого сечения.

Определяем изгибающий момент бесконечно близко слева от сечения  $b$ . Тангенс угла наклона между линией влияния  $M_b$  и осью балки находим в месте приложения сосредоточенного момента бесконечно близко справа от сечения  $b$ :  $tg\alpha_{b2}^{\text{п}} = -\frac{0,91}{1,4} \Leftrightarrow tg\alpha_{b2}^{\text{п}} = -0,65$  (рис. 1.86). Тогда изгибающий момент бесконечно близко слева от сечения  $b$  равна

$$M_b^{\text{лев}} = M_1 \cdot tg\alpha_{b1} + M_2 \cdot tg\alpha_{b2}^{\text{п}} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow M_b^{\text{лев}} = 6 \cdot 0,35 - 2 \cdot (-0,65) \Leftrightarrow M_b^{\text{лев}} = 3,4 \text{ кНм},$$

где  $tg\alpha_{b1} = \frac{0,91}{2,6} \Leftrightarrow tg\alpha_{b1} = 0,35$  – тангенс угла наклона между линией влияния  $M_b$  и осью балки в месте приложения сосредоточенного момента  $M_1$ .

Аналогично определяем изгибающий момент бесконечно близко справа от сечения  $b$ .

$$M_b^{\text{пр}} = M_1 \cdot tg\alpha_{b1} + M_2 \cdot tg\alpha_{b2}^{\text{л}} \Leftrightarrow M_b^{\text{пр}} = 6 \cdot 0,35 - 2 \cdot 0,35 \Leftrightarrow M_b^{\text{пр}} = 1,4 \text{ кНм},$$

где  $tg\alpha_{b2}^{\text{л}} = \frac{0,91}{2,6} \Leftrightarrow tg\alpha_{b2}^{\text{л}} = 0,35$  – тангенс угла наклона между линией влияния  $M_b$  и осью балки в месте приложения сосредоточенного момента  $M_2$  бесконечно близко слева от сечения  $b$ .

Полученные результаты полностью совпадают с результатами расчета на неподвижную нагрузку.

**а) Определить по линии влияния значение поперечной силы  $Q_1$ .**

Сосредоточенный момент  $M$  отрицательный, так как действует против часовой стрелки (рис. 1.87).

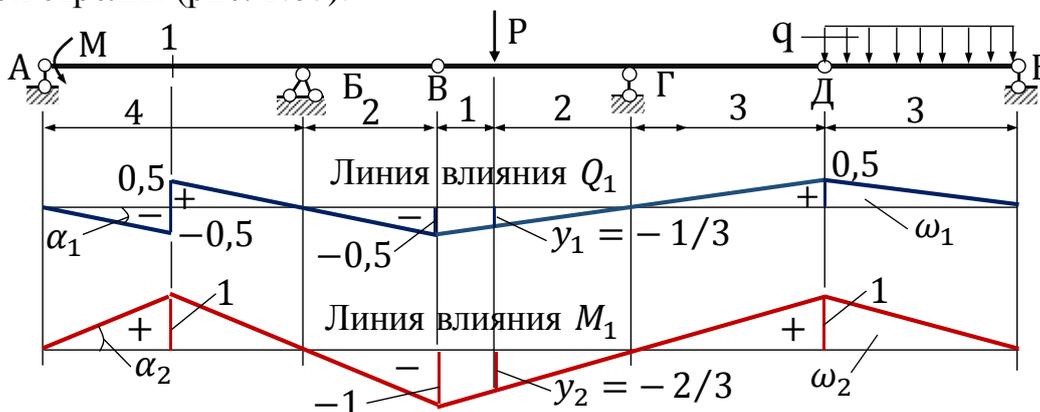


Рисунок 1.87.

В месте приложения сосредоточенного момента тангенс угла наклона линии влияния поперечной силы  $Q_1$  отрицательный и равен:  $tg\alpha_1 = -\frac{0,5}{2} \Leftrightarrow tg\alpha_1 = -0,25$ . Ордината под сосредоточенной силой отрицательная и равна:  $y_1 = -\frac{1}{3}$ . Площадь участка линии влияния  $\omega_1$ , загруженного равномерно распределенной нагрузкой, положительная и равна:  $\omega_1 = \frac{1}{2} \cdot 0,5 \cdot 3 \Leftrightarrow \omega_1 = 0,75$ . Находим значение поперечной силы:

$$Q_1 = Mtg\alpha_1 + Py_1 + q\omega_1 \Leftrightarrow Q_1 = -10 \cdot (-0,25) + 3 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) + 4 \cdot 0,75 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow Q_1 = 4,5 \text{ кН.}$$

Полученный результат совпадает с результатом расчета на неподвижную нагрузку.

**б) Определить по линии влияния значение изгибающего момента  $M_1$ .**

Сосредоточенный момент  $M$  отрицательный, так как действует против часовой стрелки (рис. 1.87). В месте приложения сосредоточенного момента тангенс угла наклона линии влияния изгибающего момента  $M_1$  положительный и равен:  $tga_2 = \frac{1}{2} \Leftrightarrow tga_2 = 0,5$ . Ордината под сосредоточенной силой отрицательная и равна:  $y_2 = -\frac{2}{3}$ . Площадь участка линии влияния  $\omega_2$ , загруженного равномерно распределенной нагрузкой, положительная и равна:  $\omega_{12} = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 3 \Leftrightarrow \omega_{12} = 1,5$ . Находим значение изгибающего момента:

$$M_1 = M \cdot tga_2 + Py_2 + q \cdot \omega_2 \Leftrightarrow M_1 = -10 \cdot 0,5 + 3 \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) + 4 \cdot 1,5 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow M_1 = -1,0 \text{ кНм.}$$

Полученный результат совпадает с результатом расчета на неподвижную нагрузку.

**в) Определить по линии влияния значение поперечной силы  $Q_2$ .**

Сосредоточенный момент  $M$  отрицательный, так как действует против часовой стрелки (рис. 1.88). В месте приложения сосредоточенного момента тангенс угла наклона линии влияния поперечной силы  $Q_1$  отрицательный и равен:  $tga_1 = -\frac{1}{4} \Leftrightarrow tga_1 = -0,25$ . Ордината под сосредоточенной силой отрицательная и равна:  $y_1 = -\frac{1}{3}$ . Площадь участка линии влияния  $\omega_1$ , загруженного равномерно распределенной нагрузкой, положительная и равна:  $\omega_1 = \frac{1}{2} \cdot 0,5 \cdot 3 \Leftrightarrow \omega_1 = 0,75$ . Находим значение поперечной силы:

$$Q_2 = Mtg\alpha_1 + Py_1 + q\omega_1 \Leftrightarrow Q_2 = -10 \cdot (-0,25) + 3 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) + 4 \cdot 0,75 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow Q_2 = 4,5 \text{ кН.}$$

Полученный результат совпадает с результатом расчета на неподвижную нагрузку.

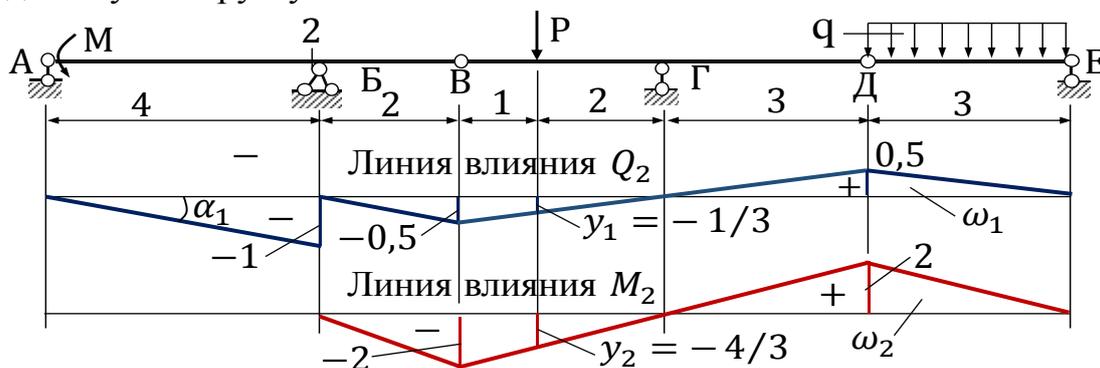


Рисунок 1.88.

г) **Определить по линии влияния значение изгибающего момента  $M_2$ .**

Сосредоточенный момент  $M$  отрицательный, так как действует против часовой стрелки (рис. 1.88). В месте приложения сосредоточенного момента тангенс угла наклона линии влияния изгибающего момента  $M_2$  равен нулю. Ордината под сосредоточенной силой отрицательная и равна:  $y_2 = -\frac{4}{3}$ . Площадь участка линии влияния  $\omega_2$ , загруженного равномерно распределенной нагрузкой, положительная и равна:  $\omega_{12} = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 3 \Leftrightarrow \omega_{12} = 3$ . Находим значение изгибающего момента:

$$M_2 = M \cdot tg\alpha_2 + P y_2 + q \cdot \omega_2 \Leftrightarrow M_2 = -10 \cdot 0 + 3 \cdot \left(-\frac{4}{3}\right) + 4 \cdot 3 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow M_2 = 8 \text{ кНм.}$$

Полученный результат совпадает с результатом расчета на неподвижную нагрузку.

**Пример 1.8.** Для многопролетной шарнирно-консольной балки, рассмотренной в примере 1.6 (рис. 1.89):

- 1) построить линии влияния для опорных реакций;
- 2) построить линии влияния поперечных сил для сечений «1, 2, 3, 4 и 5»;
- 3) построить линии влияния изгибающих моментов для сечений «1, 2, 3, 4 и 5»;
- 4) определить по линиям влияния значения опорных реакций  $R_A$  и  $M_A$ ;
- 5) определить по линиям влияния значения поперечных сил и изгибающих моментов в сечениях «1 и 2».

Исходные данные:  $M = 4$  кНм,  $q = 2$  кН/м,  $P = 1$  кН, размеры даны в метрах.

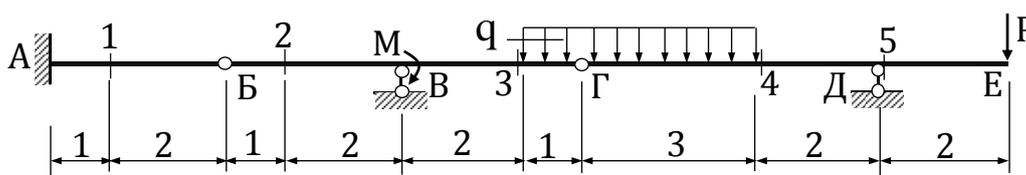


Рисунок 1.89– Расчетная схема.

### 1. Построение линий влияния для опорных реакций.

Строим поэтажную схему с единичной подвижной нагрузкой (рис. 1.90).

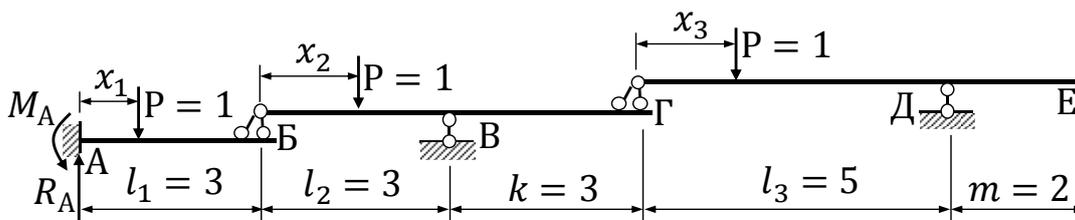


Рисунок 1.90– Поэтажная схема.

**а) Построить линию влияния для опорного момента  $M_A$ .**

Установим подвижной груз на произвольном расстоянии  $x_1$  от опоры А (рис. 1.90). Составим уравнение равновесия – сумму моментов относительно опоры А всех сил, расположенных правее от нее:

$$\sum M_A = 0; P x_1 - M_A = 0 \Leftrightarrow M_A = P x_1 \Leftrightarrow M_A = x_1.$$

Значит величина реакции  $M_A$  является функцией  $x_1$  в первой степени и графиком этой функции является прямая. При движении груза слева направо переменная  $x_1$  изменяется от 0 (опора А) до края балки АБ:  $l_1$ . График этой функции можно построить по двум точкам:

$$\text{при } x_1 = 0; M_A = -x_1 \Leftrightarrow M_A = 0;$$

$$\text{при } x_1 = l_1; M_A = -x_1 \Leftrightarrow M_A = -l_1 \Leftrightarrow M_A = -3.$$

Отложим от горизонтальной оси балки под точкой Б ординату  $(-3)$ . Соединив точку 0 под опорой А и ординату  $(-3)$  прямой, получим линию влияния опорной реакции  $M_A$  при движении груза от точки А до точки Б.

Теперь установим подвижной груз на произвольном расстоянии  $x_2$  от фиктивной опоры Б (рис. 1.90). При передвижении груза по выше расположенной балке БВГ давление от груза передается на главную анкерную балки АБ через шарнир Б. Когда груз находится на конце балки АБ, опорная реакция  $M_A$  направлена против часовой стрелки и достигает на этом этапе наибольшего отрицательного значения. При движении груза по балке БВГ на шарнир Б будет передаваться переменное давление  $P \frac{l_2 - x_2}{l_2} = 1 \cdot$

$$\frac{l_2 - x_2}{l_2} = \frac{l_2 - x_2}{l_2}.$$

Находим значения изгибающих моментов в характерных точках:

при  $x_2 = 0; \frac{l_2 - x_2}{l_2} = \frac{l_2 - 0}{l_2} = 1$ , т.е. груз расположен над шарниром Б также, как и на конце балки АБ и поэтому  $M_A = -3$ ;

при  $x_2 = l_2; \frac{l_2 - x_2}{l_2} = \frac{l_2 - l_2}{l_2} = 0$ , т.е. когда груз расположен над опорой В, нагрузка полностью передается на эту опору, давление на шарнир Б равно 0 и, следовательно, величина опорной реакции  $M_A$  также равна нулю.

Соединив вершину ординаты  $(-3)$  под точкой Б и точку 0 под опорой В, и продолжив прямую до пересечения с вертикалью, проходящей через центр шарнира Г, получим линию влияния опорной реакции  $M_A$  при движении груза от точки Б до точки Г. Ординату линии влияния под точкой Г определим из подобия треугольников (рис. 1.91):

$$\frac{a}{m} = \frac{b}{l_2}; a = \frac{b}{l_2} \cdot m \Leftrightarrow a = \frac{3}{3} \cdot 3 \Leftrightarrow a = 3.$$

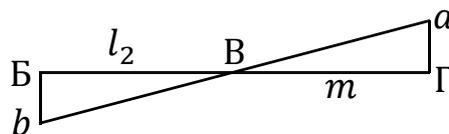


Рисунок 1.91.

Когда груз расположен на конце консоли ВГ опорная реакция  $M_A$  направлена по часовой стрелке, и она положительная. Следовательно, при расположении груза на конце консоли ВГ опорная реакция равна:  $M_A = 3$ .

Теперь установим груз на произвольном расстоянии  $x_3$  от фиктивной опоры Г (рис. 1.90). Когда груз находится в точке Г, опорная реакция  $M_A$  направлена по часовой стрелке. При движении груза по балке ГДЕ на шарнир Г будет передаваться давление  $P \frac{l_3 - x_3}{l_3} = 1 \cdot \frac{l_3 - x_3}{l_3} = \frac{l_3 - x_3}{l_3}$ .

Находим значения изгибающих моментов в характерных точках:

при  $x_3 = 0$ ;  $\frac{l_3 - x_3}{l_3} = \frac{l_3 - 0}{l_3} = 1$ , т.е. груз расположен над шарниром Г также, как и на конце консоли ВГ и поэтому  $M_A = 3$ ;

при  $x_3 = l_3$ ;  $\frac{l_3 - x_3}{l_3} = \frac{l_3 - l_3}{l_3} = 0$ , т.е. когда груз расположен над опорой Д, нагрузка полностью передается на эту опору, давление на шарнир Г равно 0 и, следовательно, величина опорной реакции  $M_A$  равна нулю.

Соединив вершину ординаты 3 под точкой Г и точку 0 под опорой Д и, продолжив прямую до пересечения с вертикалью, проходящей через точку Е, получим линию влияния опорной реакции  $M_A$  при движении груза от точки Г до точки Е и окончательную линию влияния для опорной реакции  $M_A$  многопролетной шарнирно-консольной балки (рис. 1.92). Ординату линии влияния под точкой Е определим из подобия треугольников (рис. 1.91)

$$\frac{a}{m} = \frac{b}{l_3}; a = \frac{b}{l_3} \cdot m \Leftrightarrow a = \frac{3}{5} \cdot 2 \Leftrightarrow a = 1,2.$$

Когда груз расположен на конце консоли ДЕ опорный момент  $M_A$  направлен против часовой стрелки, и он отрицательный. Значит, при расположении груза на конце консоли ДЕ опорный момент равен:  $M_A = -1,2$ .

**б) Построить линию влияния для опорной реакции главной балки  $R_A$ .**

Проектируем все силы, действующие на балку АБ на вертикальную ось:

$$\sum z = 0; R_A - P = 0 \Leftrightarrow R_A = P \Leftrightarrow R_A = 1.$$

Следовательно, при любом положении груза на балке АБ реакция равна единице:  $R_A = 1$ .

Установим теперь груз на произвольном расстоянии  $x_2$  от фиктивной опоры Б (рис. 1.90). Давление от груза передается на главную анкерную балку АБ через шарнир Б. Когда груз находится на конце балки АБ, опорная реакция  $R_A$  направлена вверх и равна 1. При движении груза по балке БВГ на шарнир Б будет передаваться давление  $P \frac{l_2 - x_2}{l_2} = 1 \cdot \frac{l_2 - x_2}{l_2} = \frac{l_2 - x_2}{l_2}$ .

Находим значения изгибающих моментов в характерных точках:

при  $x_2 = 0$ ;  $\frac{l_2 - x_2}{l_2} = \frac{l_2 - 0}{l_2} = 1$ , т.е. груз расположен над шарниром Б также, как и на конце балки АБ и поэтому  $R_A = 1$ ;

при  $x_2 = l_2$ ;  $\frac{l_2 - x_2}{l_2} = \frac{l_2 - l_2}{l_2} = 0$ , т.е. когда груз расположен над опорой В, нагрузка полностью передается на эту опору, давление на шарнир Б равно 0 и, следовательно, величина опорной реакции  $R_A$  также равна нулю.

Соединив вершину ординаты 1 под точкой Б и точку 0 под опорой В, и продолжив прямую до пересечения с вертикалью, проходящей через центр шарнира Г, получим линию влияния опорной реакции  $R_A$  при движении груза от точки Б до точки Г. Ординату линии влияния под точкой Г определим из подобия треугольников (рис. 1.91)

$$\frac{a}{k} = \frac{b}{l_2}; a = \frac{b}{l_2} \cdot k \Leftrightarrow a = \frac{1}{3} \cdot 3 \Leftrightarrow a = 1.$$

Когда груз расположен на конце консоли ВГ опорная реакция  $R_A$  направлена вниз. Она отрицательная и равна  $R_A = -1$ .

Теперь установим груз на произвольном расстоянии  $x_3$  от фиктивной опоры Г (рис. 1.90). Когда груз находится в точке Г, опорная реакция  $R_A$  направлена по часовой стрелке. При движении груза по балке ГЕ на шарнир Г будет передаваться переменное давление  $P \frac{l_3 - x_3}{l_3} = 1 \cdot \frac{l_3 - x_3}{l_3} = \frac{l_3 - x_3}{l_3}$ .

Находим значения изгибающих моментов в характерных точках:

при  $x_3 = 0$ ;  $\frac{l_3 - x_3}{l_3} = \frac{l_3 - 0}{l_3} = 1$ , т.е. груз расположен над шарниром Г также, как и на конце консоли ВГ и поэтому  $R_A = -1$ ;

при  $x_3 = l_3$ ;  $\frac{l_3 - x_3}{l_3} = \frac{l_3 - l_3}{l_3} = 0$ , т.е. когда груз расположен над опорой Д, нагрузка полностью передается на эту опору, давление на шарнир Г равно 0 и, следовательно, величина опорной реакции  $R_A$  равна нулю.

Соединив вершину ординаты (-1) под точкой Г и точку 0 под опорой Д и, продолжив прямую до пересечения с вертикалью, проходящей через точку Е, получим линию влияния опорной реакции  $R_A$  при движении груза от точки Г до точки Е и окончательную линию влияния для опорной реакции  $R_A$  многопролетной шарнирно-консольной балки (рис. 1.92). Ординату линии влияния под точкой Е определим из подобия треугольников (рис. 1.91)

$$\frac{a}{m} = \frac{b}{l_3}; a = \frac{b}{l_3} \cdot m \Leftrightarrow a = \frac{1}{5} \cdot 2 \Leftrightarrow a = 0,4.$$

Следовательно, при расположении груза над точкой Е опорная реакция равна:  $R_A = 0,4$ .

Линии влияния опорных реакций  $R_B$  и  $R_D$  построены по вышеизложенной методике и показаны на рис. 1.92.

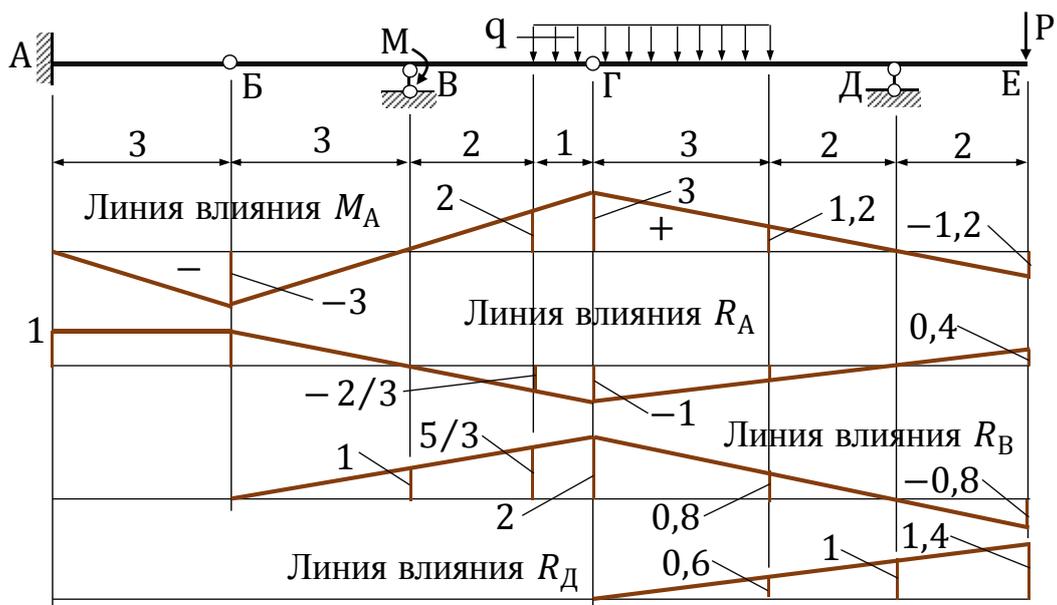


Рисунок 1.92.

## 2. Построение линий влияния поперечных сил.

### а) Построить линию влияния поперечной силы в сечении 1.

Из линий влияния опорных реакций заделки имеем:

$$M_A = x_1, R_A = 1.$$

Если подвижной груз расположен слева от сечения 1 (рис. 1.90) и передвигается от опоры А ( $x_1 = 0$ ) до сечения 1 ( $x_1 = a_1$ ), то консоль с сечением 1 и второстепенные балки БВГ и ГДЕ поворачиваются относительно шарниров В и Г, не изгибается и поперечных сил в ней не возникают. Значит, линия влияния до сечения 1 совпадает с осью балки.

Если подвижной груз расположен справа от сечения 1 (рис. 1.90) и передвигается от сечения 1 ( $x_1 = a_1$ ) до точки В ( $x_1 = l_1$ ), то рассматривая левую часть находим выражение поперечной силы из уравнения равновесия всех сил, действующих на левую часть балки (сумма проекций на вертикальную ось) с учетом правила знаков поперечных сил (поперечная сила  $Q_1$  в сечении 1 и опорная реакция  $R_A$ ) (рис. 1.93):

$$Q_1 = R_A \Leftrightarrow Q_1 = 1.$$

Следовательно, правая ветвь линии влияния параллельна оси балки АВ (рис. 1.93).

Теперь установим подвижной груз на произвольном расстоянии  $x_2$  от фиктивной опоры В (рис. 1.90). При движении груза по балке БВГ на шарнир В будет передаваться переменное давление, изменяющееся по линейному закону. Когда груз расположен над шарниром В то передает давление также, как и на конец балки АВ и поэтому  $Q_1 = 1$ . Когда груз расположен над опорой В, нагрузка полностью передается на эту опору, давление на шарнир В равно 0 и, следовательно, величина поперечной силы в сечении 1 также равна нулю:  $Q_1 = 0$ .

Отложим от горизонтальной оси балки под шарниром В ординату 1. Соединив вершину ординаты 1 и точку 0 под опорой В и продолжив прямую

до пересечения с вертикалью, проходящей через центр шарнира Г, получим линию влияния поперечной силы в сечении 1 при движении груза от точки Б до точки Г (рис. 1.90). Ординату линии влияния под точкой Г определим из подобия треугольников (рис. 1.91)

$$\frac{a}{k} = \frac{b}{l_2}; a = \frac{b}{l_2} \cdot k \Leftrightarrow a = \frac{1}{3} \cdot 3 \Leftrightarrow a = 1.$$

Следовательно, при расположении груза над точкой Г ордината линии влияния расположена снизу и поперечная сила равна:  $Q_1 = -1$ .

Теперь установим подвижной груз на произвольном расстоянии  $x_3$  от фиктивной опоры Г (рис. 1.90). При движении груза по балке ГДЕ на шарнир Г будет передаваться также переменное давление, изменяющееся по линейному закону. Когда груз расположен над шарниром Г то передает давление также, как и на конец балки БВГ и поэтому  $Q_1 = -1$ . Когда груз расположен над опорой Д, нагрузка полностью передается на эту опору, давление на шарнир Г равно 0 и, следовательно, величина поперечной силы в сечении 1 также равна нулю:  $Q_1 = 0$ .

Отложим от горизонтальной оси балки под шарниром Г ординату  $(-1)$ . Соединив вершину ординаты  $(-1)$  и точку 0 под опорой Д и продолжив прямую до пересечения с вертикалью, проходящей через точку Е, получим линию влияния поперечной силы в сечении 1 при движении груза от точки Г до точки Е балки и окончательную линию влияния поперечной силы в сечении 1 многопролетной шарнирно-консольной балки (рис. 1.93). Ординату линии влияния над точкой Е, определим из подобия треугольников (рис. 1.91)

$$\frac{a}{m} = \frac{b}{l_3}; a = \frac{b}{l_3} \cdot m \Leftrightarrow a = \frac{1}{5} \cdot 2 \Leftrightarrow a = 0,4.$$

Следовательно, при расположении груза над точкой Е ордината линии влияния расположена сверху и поперечная сила равна:  $Q_1 = 0,4$ .

**б) Построить линию влияния поперечной силы в сечении 2.**

Сечение 2 расположено между опорами Б и В второстепенной балки БВГ. При движении груза по главной балке АБ балка БВГ поворачивается по шарнирам Б и Г и поперечных сил в ней не возникают. Поперечные силы в сечении 2 возникают только в тех случаях, когда груз передвигается по балкам БВГ и ГДЕ. Пусть груз передвигается по балке БВГ. Отложим ординату 1 под опорой Б и ординату  $(-1)$  под опорой В. Проведем нижнюю прямую от точки 0 под опорой Б к вершине ординаты  $(-1)$  опоры В до пересечения с вертикалью, проходящей через сечение 2. Эта будет левая ветвь линии влияния  $Q_2$ . Затем проведем верхнюю прямую от вершины ординаты 1 опоры Б к точке 0 под опорой В и продолжим ее до пересечения с вертикалью, проходящей через центр шарнира Г. Правая ветвь линии влияния  $Q_2$  – от точки пересечения верхней прямой с вертикалью, проходящей через сечение 2 до точки пересечения с вертикалью, проходящей через точку Г. Окончательную линию влияния поперечной силы в сечении 2 многопролетной шарнирно-консольной балки построена на рис. 1.93.

Линии влияния поперечных сил  $Q_3$ ,  $Q_4$  и  $Q_5$  построены по вышеизложенной методике и показаны на рис. 1.93.

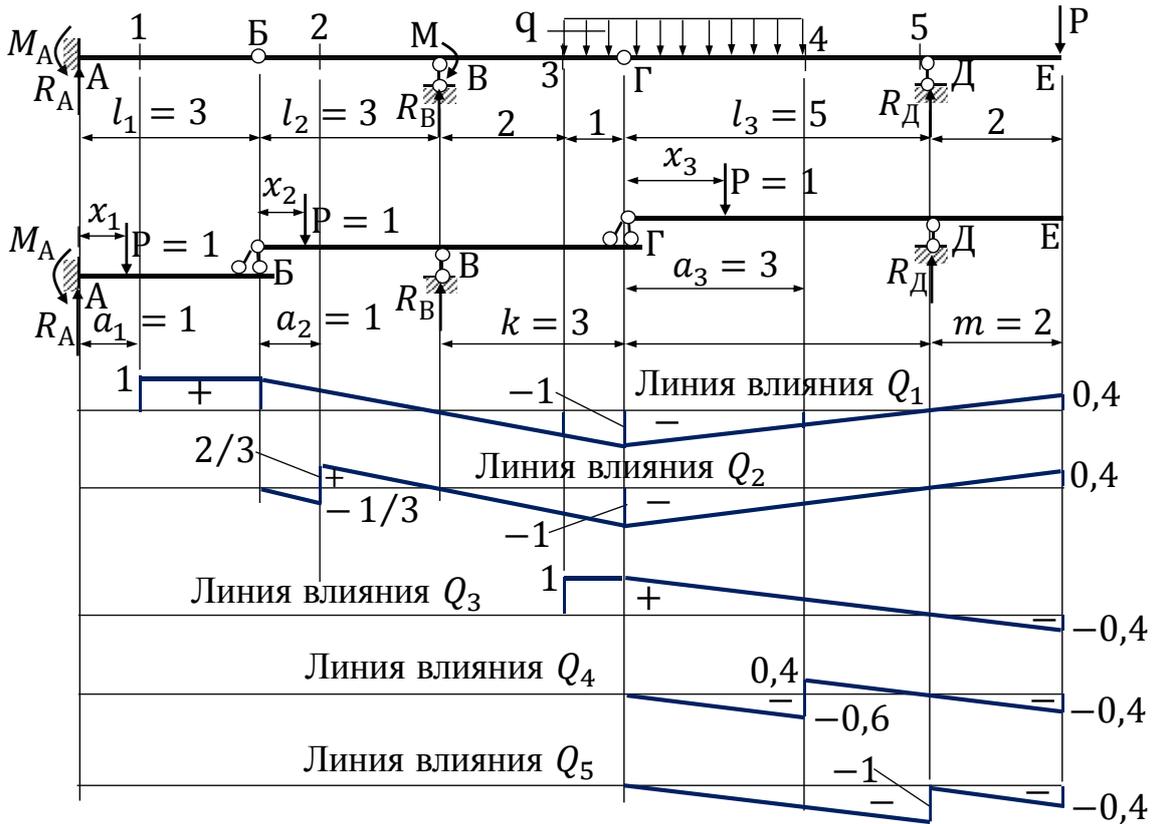


Рисунок 1.93.

### 3. Построение линий влияния изгибающих моментов.

#### а) Построить линию влияния изгибающего момента в сечении 1.

Сечение 1 расположено в защемленной балке АБ на расстоянии 1 м справа от заделки А (рис. 1.90). Если груз расположен слева от сечения 1 и передвигается от опоры А до этого сечения, то часть консоли с сечением 1 и второстепенные балки БВГ и ГДЕ поворачиваются относительно шарниров Б и Г, не изгибается и изгибающих моментов в ней не возникают. Следовательно, левая ветвь линии влияния сечения 1 совпадает с осью балки.

Если груз передвигается справа от сечения 1 ( $x = 0$ ) до точки Б ( $x = 2$ ), то, рассматривая равновесие правой части (рис. 1.90), получим:

$$M_1 = -P \cdot x.$$

Находим значения изгибающих моментов в характерных точках:

при  $x = 0$ ,  $M_1 = -P \cdot x \Leftrightarrow M_1 = 0$ ;

при  $x = 2$ ,  $M_1 = -P \cdot x \Leftrightarrow M_1 = -1 \cdot 2 \Leftrightarrow M_1 = -2$  м, т.е. когда груз расположен на конце балки АБ, изгибающий момент в сечении 1 равен:  $M_1 = -2$  м.

Отложим от горизонтальной оси балки под шарниром Б ординату  $-2$ . Соединив вершину этой ординаты и точку 0 под сечением 1, получим правую ветвь линии влияния изгибающего момента в сечении 1 при движении груза от сечения 1 до точки Б (рис. 1.94).

Пусть теперь груз передвигается по следующему ярусу – по балке БВГ (рис. 1.90). При движении груза по балке БВГ на шарнир Б, а значит и на балку АБ, где расположено сечение 1, будет передаваться переменное давление, изменяющееся по линейному закону. Когда груз расположен над шарниром Б и передает нагрузку на шарнир Б также, как и на конец заземленной балки АБ, изгибающий момент в сечении 1 будет равен:  $M_1 = -2$  м. Когда груз расположен над опорой В, нагрузка полностью передается на эту опору, давление на шарнир Б, а значит и на балку АБ, где расположено сечение 1, равно 0. Следовательно, в сечении 1 изгибающий момент не возникает:  $M_1 = 0$ .

Отложим от горизонтальной оси балки под шарниром Б ординату  $-2$ . Соединив вершину этой ординаты и точку 0 под опорой В и, продолжив прямую до пересечения с вертикалью, проходящей через центр шарнира Г, получим линию влияния изгибающего момента в сечении 1 при движении груза от точки Б до точки Г (рис. 1.94). Ординату линии влияния над точкой Г определим из подобия треугольников:  $a = 2$  (см. рис. 1.91). Следовательно, когда груз расположен на конце консоли ВГ изгибающий момент в сечении 1 равен:  $M_1 = 2$  м.

Пусть груз передвигается по следующему ярусу – по балке ГДЕ (рис. 1.90). При движении груза по балке ГДЕ на шарнир Г, а значит и на балки БВГ и АБ, где расположено сечение 1, будет передаваться переменное давление, изменяющееся по линейному закону. Когда груз расположен над шарниром Г и передает нагрузку на шарнир Г также, как и на конец заземленной балки АБ, изгибающий момент в сечении 1 будет равен:  $M_1 = 2$  м. Когда груз расположен над опорой Д, нагрузка полностью передается на эту опору, давление на шарнир Г, а значит и на балку АБ, где расположено сечение 1, равно 0. Следовательно, в сечении 1 изгибающий момент не возникает:  $M_1 = 0$ .

Отложим от горизонтальной оси балки под шарниром Г ординату 2. Соединив вершину этой ординаты и точку 0 под опорой Д и, продолжив прямую до пересечения с вертикалью, проходящей через точку Е, получим линию влияния изгибающего момента в сечении 1 при движении груза от точки Г до точки Е (рис. 1.94). Ординату линии влияния под точкой Е определим из подобия треугольников:  $a = -0,8$  (см. рис. 1.91). Следовательно, когда груз расположен на конце консоли ДЕ изгибающий момент в сечении 1 равен:  $M_1 = -0,8$  м.

**б) Построить линию влияния изгибающего момента в сечении 2.**

Сечение 2 расположено между опорами Б и В второстепенной балки второго яруса. Изгибающие моменты в нем возникают только в тех случаях, когда груз передвигается по балкам второго и третьего яруса. Линию влияния изгибающего момента в сечении 2 в отличие от методики, изложенной в примере 1.7, построим следующим образом. От горизонтальной оси балки под фиктивной опорой Б отложим ординату 1, равную расстоянию от точки Б до сечения 2, а под опорой В отложим ординату 2, равную расстоянию от

опоры В до сечения 2 (рис. 1.94). Вершину ординаты 2 соединим с точкой 0 под шарниром В прямой. Находим точку  $c_2$  пересечения этой прямой с вертикалью, проходящей через сечение 2, и левую ветвь линии влияния изгибающих моментов:  $bc_2$ .

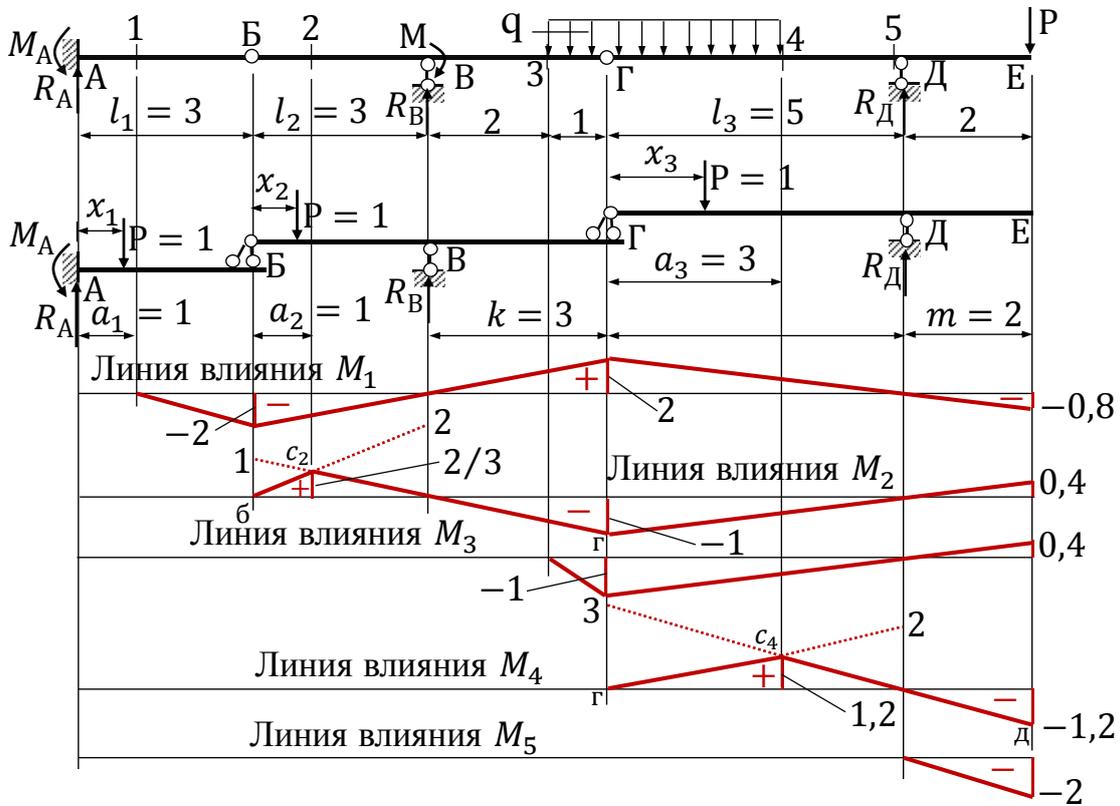


Рисунок 1.94.

Соединив вершину ординаты 1 с точкой 0 под шарниром В прямой и продолжив ее до пересечения с вертикалью, проходящей через центр шарнира Г, получим правую ветвь линии влияния изгибающих моментов:  $c_2г$ . Ординаты линии влияния под шарниром Г и под сечением 2 находим из подобия треугольников (рис. 1.86):

$$\frac{a}{k} = \frac{b}{l_2}; a = \frac{b}{l_2} \cdot k \Leftrightarrow a = \frac{1}{3} \cdot 3 \Leftrightarrow a = 1;$$

$$\frac{c_2}{l_2 - a_2} = \frac{b}{l_2}; c_2 = \frac{b}{l_2} \cdot (l_2 - a_2) \Leftrightarrow c_2 = \frac{1}{3} \cdot (3 - 1) \Leftrightarrow c_2 = \frac{2}{3}.$$

Следовательно, при расположении груза над точкой Г ордината линии влияния расположена снизу и изгибающий момент равен:  $M_2 = -1$  м, а при расположении груза над сечением 2 ордината равна:  $M_2 = 2/3$  м.

Когда груз расположен над опорой Д вся нагрузка передается на эту опору и изгибающий момент в сечении 2 равен нулю:  $M_2 = 0$ . Соединив вершину ординаты (-1) под шарниром Г с точкой 0 под опорой Д прямой и продолжив ее до пересечения с вертикалью, проходящей через точку Е, получим линию влияния при движении груза от точки Г до точки Е и окончательную линию влияния изгибающих моментов в сечении 2 многопролетной шарнирно-консольной балки (рис. 1.94). Ординату линии влияния под точкой Е находим из подобия треугольников:

$$\frac{a}{m} = \frac{b}{l_3}; a = \frac{b}{l_3} \cdot m \Leftrightarrow a = \frac{1}{5} \cdot 2 \Leftrightarrow a = 0,4.$$

Линии влияния изгибающих моментов  $M_3$ ,  $M_4$  и  $M_5$  построены по вышеизложенной методике и показаны на рис. 1.94.

#### 4. Определение по линиям влияния значения опорных реакций.

##### а) Определить по линии влияния значение опорного момента $M_A$ .

Для вычисления по линии влияния опорного момента  $M_A$  находим тангенс угла наклона  $\alpha_1$  линии влияния в месте приложения сосредоточенного момента, площади участков  $\omega_1$  и  $\omega_2$  линии влияния, загруженного равномерно распределенной нагрузкой и ординату  $y_1$  в месте приложения сосредоточенной силы (рис. 1.95):

$\operatorname{tg} \alpha_1 = \frac{2}{2} \Leftrightarrow \operatorname{tg} \alpha_1 = 1$ ; тангенс угла  $\alpha$  положительный, так как расположен в первой координатной четверти;

$\omega_1 = \frac{1}{2} \cdot (2 + 3) \cdot 1 \Leftrightarrow \omega_1 = 2,5$ ; площадь участка  $\omega_1$  линии влияния положительная;

$\omega_2 = \frac{1}{2} \cdot (1,2 + 3) \cdot 3 \Leftrightarrow \omega_2 = 6,3$ ; площадь участка  $\omega_2$  линии влияния положительная;

$y_1 = -1,2$ ; ордината  $y_1$  линии влияния отрицательная.

Сосредоточенный момент  $M$  положительный, так как направлен по ходу часовой стрелки.

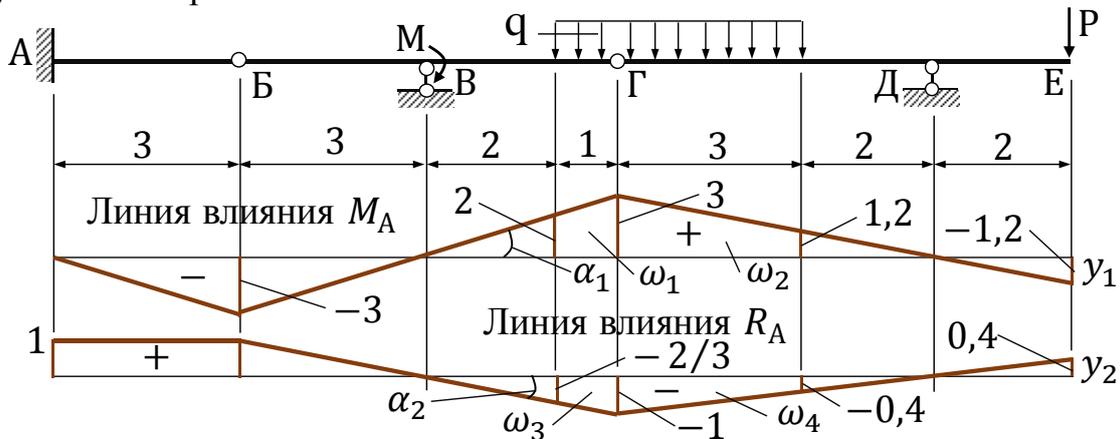


Рисунок 1.95.

Находим значение опорного момента:

$$M_A = M \cdot \operatorname{tg} \alpha_1 + q \cdot (\omega_1 + \omega_2) + P \cdot y_1 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow M_A = 4 \cdot 1 + 2 \cdot (2,5 + 6,3) + 1 \cdot (-1,2) \Leftrightarrow M_A = 20,4 \text{ кН.}$$

Полученный результат полностью совпадает с результатом расчета на неподвижную нагрузку.

##### б) Определить по линии влияния значение опорной реакции $R_A$ .

Находим тангенс угла наклона  $\alpha_2$  линии влияния в месте приложения сосредоточенного момента, площади участков  $\omega_3$  и  $\omega_4$  линии влияния, загруженного равномерно распределенной нагрузкой и ординату  $y_2$  в месте приложения сосредоточенной силы (рис. 1.95):

$tg\alpha_2 = -\frac{1}{3}$ ; тангенс угла  $\alpha_2$  отрицательный, так как расположен в четвертой координатной четверти;

$\omega_3 = \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{2}{3} - 1\right) \cdot 1 \Leftrightarrow \omega_3 = -\frac{5}{6}$ ; площадь участка  $\omega_3$  линии влияния отрицательная;

$\omega_4 = \frac{1}{2} \cdot (-1 - 0,4) \cdot 3 \Leftrightarrow \omega_4 = -2,1$ ; площадь участка  $\omega_4$  линии влияния отрицательная;

$y_2 = 0,4$ ; ордината  $y_2$  линии влияния положительная;

Сосредоточенный момент  $M$  положительный, так как направлен по ходу часовой стрелки.

Находим значение опорного момента:

$$R_A = M \cdot tg\alpha_1 + q \cdot (\omega_1 + \omega_2) + P \cdot y_1 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow R_A = 4 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) + 2 \cdot \left(-\frac{5}{6} - 2,1\right) + 1 \cdot 0,4 \Leftrightarrow R_A = -6,8 \text{ кН.}$$

Полученный результат полностью совпадает с результатом расчета на неподвижную нагрузку.

### 5. Определение по линиям влияния значения поперечных сил и изгибающих моментов.

а) Определить по линии влияния значение поперечной силы  $Q_1$ .

Сосредоточенный момент  $M$  положительный, так как действует по ходу часовой стрелки (рис. 1.96).

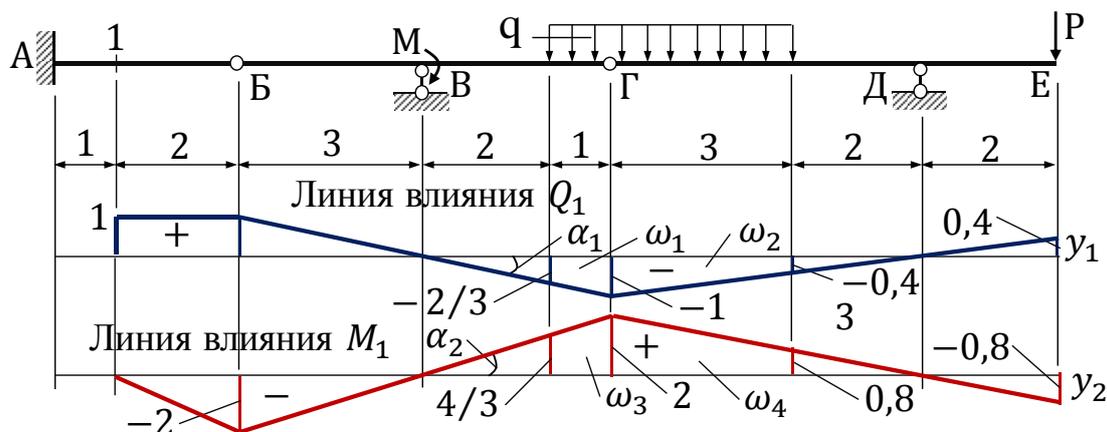


Рисунок 1.96.

Находим тангенс угла наклона  $\alpha_1$  линии влияния в месте приложения сосредоточенного момента, площади участков  $\omega_1$  и  $\omega_2$  линии влияния, загруженного равномерно распределенной нагрузкой и ординату  $y_1$  в месте приложения сосредоточенной силы (рис. 1.96):

$tg\alpha_1 = -\frac{1}{3}$ ; тангенс угла  $\alpha_1$  отрицательный, так как расположен в четвертой координатной четверти;

$\omega_1 = \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{2}{3} - 1\right) \cdot 1 \Leftrightarrow \omega_1 = -\frac{5}{6}$ ; площадь участка  $\omega_1$  линии влияния отрицательная;

$\omega_2 = \frac{1}{2} \cdot (-1 - 0,4) \cdot 3 \Leftrightarrow \omega_2 = -2,1$ ; площадь участка  $\omega_2$  линии влияния отрицательная;

$y_2 = 0,4$ ; ордината  $y_2$  линии влияния положительная;

Находим значение поперечной силы в сечении 1:

$$Q_1 = M \cdot tg\alpha_1 + q \cdot (\omega_1 + \omega_2) + P \cdot y_1 \Leftrightarrow Q_1 = \\ = 4 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) + 2 \cdot \left(-\frac{5}{6} - 2,1\right) + 1 \cdot 0,4 \Leftrightarrow Q_1 = -6,8 \text{ кН.}$$

Полученный результат полностью совпадает с результатом расчета на неподвижную нагрузку.

**б) Определить по линии влияния значение изгибающего момента  $M_1$ .**

Сосредоточенный момент  $M$  положительный, так как действует по ходу часовой стрелки (рис. 1.96). Находим тангенс угла наклона  $\alpha_2$  линии влияния в месте приложения сосредоточенного момента, площади участков  $\omega_3$  и  $\omega_4$  линии влияния, загруженного равномерно распределенной нагрузкой и ординату  $y_2$  в месте приложения сосредоточенной силы (рис. 1.96):

$tg\alpha_2 = \frac{2}{3}$ ; тангенс угла  $\alpha_2$  положительный, так как расположен в первой координатной четверти;

$\omega_3 = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{4}{3} + 2\right) \cdot 1 \Leftrightarrow \omega_3 = \frac{5}{3}$ ; площадь участка  $\omega_3$  линии влияния положительная;

$\omega_4 = \frac{1}{2} \cdot (2 + 0,8) \cdot 3 \Leftrightarrow \omega_4 = 4,2$ ; площадь участка  $\omega_4$  линии влияния положительная;

$y_2 = -0,8$ ; ордината  $y_2$  линии влияния отрицательная;

Находим значение изгибающего момента в сечении 1:

$$M_1 = M \cdot tg\alpha_1 + q \cdot (\omega_1 + \omega_2) + P \cdot y_1 \Leftrightarrow M_1 = \\ = 4 \cdot \frac{2}{3} + 2 \cdot \left(\frac{5}{3} + 4,2\right) + 1 \cdot (-0,8) \Leftrightarrow M_1 = 13,6 \text{ кНм.}$$

Полученный результат полностью совпадает с результатом расчета на неподвижную нагрузку.

**в) Определить по линии влияния значение поперечной силы  $Q_2$ .**

Сосредоточенный момент  $M$  положительный, так как действует по ходу часовой стрелки (рис. 1.97).

Находим тангенс угла наклона  $\alpha_2$  линии влияния в месте приложения сосредоточенного момента, площади участков  $\omega_3$  и  $\omega_4$  линии влияния, загруженного равномерно распределенной нагрузкой и ординату  $y_2$  в месте приложения сосредоточенной силы (рис. 1.97):

$tg\alpha_1 = -\frac{1}{3}$ ; тангенс угла  $\alpha_2$  отрицательный, так как расположен в четвертой координатной четверти;

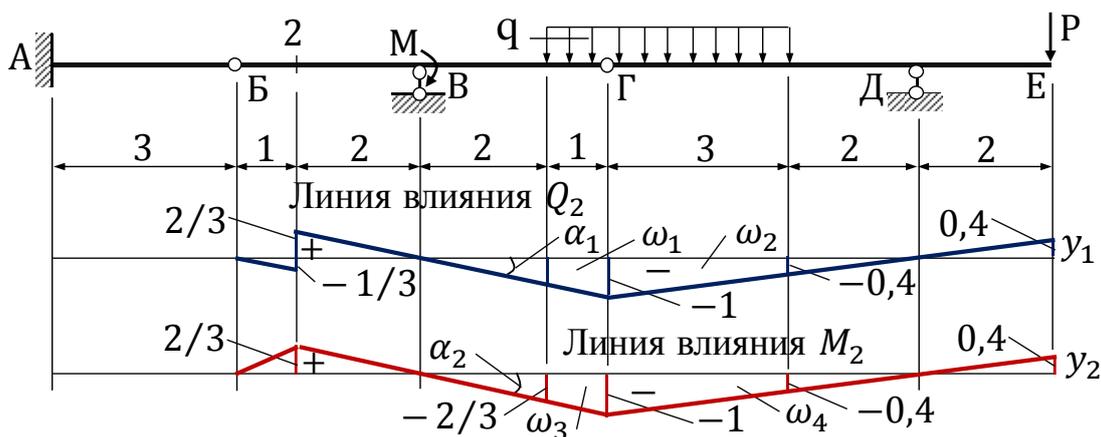


Рисунок 1.97.

$\omega_1 = \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{2}{3} - 1\right) \cdot 1 \Leftrightarrow \omega_1 = -\frac{5}{6}$ ; площадь участка  $\omega_1$  линии влияния отрицательная;

$\omega_2 = \frac{1}{2} \cdot (-1 - 0,4) \cdot 3 \Leftrightarrow \omega_2 = -2,1$ ; площадь участка  $\omega_2$  линии влияния отрицательная;

$y_1 = 0,4$ ; ордината  $y_1$  линии влияния положительная;

Находим значение поперечной силы в сечении 1:

$$Q_2 = M \cdot \operatorname{tg} \alpha_1 + q \cdot (\omega_1 + \omega_2) + P \cdot y_1 \Leftrightarrow Q_2 = 4 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) + 2 \cdot \left(-\frac{5}{6} - 2,1\right) + 1 \cdot 0,4 \Leftrightarrow Q_2 = -6,8 \text{ кН.}$$

Полученный результат полностью совпадает с результатом расчета на неподвижную нагрузку.

г) **Определить по линии влияния значение изгибающего момента  $M_2$ .**

Сосредоточенный момент  $M$  положительный, так как действует по ходу часовой стрелки (рис. 1.97). Находим тангенс угла наклона  $\alpha_2$  линии влияния в месте приложения сосредоточенного момента, площади участков  $\omega_3$  и  $\omega_4$  линии влияния, загруженного равномерно распределенной нагрузкой и ординату  $y_2$  в месте приложения сосредоточенной силы (рис. 1.97):

$\operatorname{tg} \alpha_2 = -\frac{1}{3}$ ; тангенс угла  $\alpha_2$  положительный, так как расположен в первой координатной четверти;

$\omega_3 = \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{2}{3} - 1\right) \cdot 1 \Leftrightarrow \omega_3 = -\frac{5}{6}$ ; площадь участка  $\omega_3$  линии влияния положительная;

$\omega_4 = \frac{1}{2} \cdot (-1 - 0,4) \cdot 3 \Leftrightarrow \omega_4 = -2,1$ ; площадь участка  $\omega_4$  линии влияния положительная;

$y_2 = 0,4$ ; ордината  $y_2$  линии влияния положительная;

Находим значение изгибающего момента в сечении 1:

$$M_2 = M \cdot \operatorname{tg} \alpha_2 + q \cdot (\omega_3 + \omega_4) + P \cdot y_2 \Leftrightarrow M_2 = 4 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) + 2 \cdot \left(-\frac{5}{6} - 2,1\right) + 1 \cdot 0,4 \Leftrightarrow M_2 = -6,8 \text{ кНм.}$$

Полученный результат полностью совпадает с результатом расчета на неподвижную нагрузку.

### **Примеры для самостоятельного решения:**

Для многопролетных шарнирно-консольных балок, приведенных на рис. 1.68 (исходные данные:  $M = 5$  кНм,  $q = 4$  кН/м,  $P = 2$  кН, размеры даны в метрах):

- 1) построить линии влияния для опорных реакций;
- 2) построить линии влияния поперечных сил для сечений «1, 2 и 3»;
- 3) построить линии влияния изгибающих моментов для сечений «1, 2 и 3»;
- 4) определить по линиям влияния значения опорных реакций  $R_A$ ,  $R_B$  и  $R_C$  и сравнить с результатами расчета на неподвижную нагрузку;
- 5) определить по линиям влияния значения поперечных сил и изгибающих моментов в сечениях «1, 2 и 3» и сравнить с результатами расчета на неподвижную нагрузку.

### **Вопросы для самоконтроля.**

1. Чем линия влияния отличается от эпюры?
2. Что называют линией влияния?
3. Что представляет собой ордината линии влияния?
4. Какова размерность линий влияния опорных реакций, поперечных сил и изгибающих моментов?
5. Как строятся левая и правая ветви линий влияния поперечных сил и изгибающих моментов?
6. Для чего и как используются линии влияния?
7. Как проверить правильность вычисления опорных реакций, поперечных сил и изгибающих моментов используя линии влияния?
8. В какой последовательности строят линии влияния опорных реакций, поперечных сил и изгибающих моментов в многопролетных шарнирно-консольных балках?
9. Как по линиям влияния определяют изгибающие моменты в многопролетных шарнирно-консольных балках?
10. Как по линиям влияния определяют опорные реакции в многопролетных шарнирно-консольных балках?
11. Как по линиям влияния определяют поперечные силы в многопролетных шарнирно-консольных балках?
12. Какой схемой удобно пользоваться для построения линий влияния усилий в многопролетных шарнирно-консольных балках?
13. Как определяется ордината под сечением линии влияния изгибающих моментов, построенной для этого сечения в многопролетной шарнирно-консольной балке?
14. Под какой точкой пересекаются левая и правая ветви линии влияния изгибающего момента, построенной для сечения  $k$  в многопролетной шарнирно-консольной балке?
15. От чего зависит величина и знак линии влияния поперечной силы?

16. В зависимости от расположения чего надо получить выражение момента для построения линии влияния изгибающего момента в некотором сечении  $s$ ?

17. В каком случае при построении линии влияния поперечная сила положительная?

18. По какому закону изменяется величина влияния единичного груза на консоль основной балки при его перемещении по второстепенным балкам многопролетной балки?

19. По каким точкам происходит передача нагрузки от единичного груза при его передвижении по верхним ярусам поэтажной схемы?

20. Как определит усилие по линии влияния если на балку действует только сосредоточенный груз?

21. Как определит усилие по линии влияния если на балку действует только распределенная нагрузка?

22. Как определит усилие по линии влияния если на балку действует только сосредоточенный момент?

23. Как определит усилие по линии влияния если на балку действуют распределенная нагрузка, сосредоточенный груз и момент одновременно?

24. Что является независимой переменной при построении линии влияния любого усилия?

25. Что является искомой функцией при построении линии влияния любого усилия?

26. Какой физический смысл имеет произвольная ордината на линии влияния усилия?

## ГЛАВА 2. СТАТИЧЕСКИ ОПРЕДЕЛИМЫЕ РАМЫ.

В методе Мора каждому виду нагрузки соответствует свое перемещение: сосредоточенной силе – горизонтальное или вертикальное линейное перемещение по направлению ее действия, сосредоточенному моменту – угол поворота поперечного сечения стержня, в котором приложен момент. Для определения любого перемещения в методе Мора рама рассматривается под действием внешних нагрузок и под действием единичной нагрузки. Направление единичной нагрузки выбирается по направлению искомого линейного перемещения или угла поворота поперечного сечения.

Под действием нагрузок (внешних или единичных) в поперечных сечениях рамы возникают три внутренних усилия – изгибающий момент  $M$ , поперечная  $Q$  и продольная сила  $N$ . Формула Мора для угла поворота  $\gamma$  и линейного перемещения  $\delta$  в искомом сечении принимает вид [7]:

$$\gamma(\delta) = \sum \frac{1}{EI} \int_0^l M_P M_1 dx + \sum \frac{1}{GF} \int_0^l Q_P Q_1 dx + \sum \frac{1}{EF} \int_0^l N_P N_1 dx, \quad (1)$$

где  $M_P$ ,  $Q_P$  и  $N_P$  – выражения внутренних усилий в стержнях рамы, возникающие под действием внешних нагрузок;

$M_1$ ,  $Q_1$  и  $N_1$  – выражения внутренних усилий в стержнях рамы, возникающие под действием единичного момента или единичной силы;

$E$  и  $G$  – модуль упругости материала стержня рамы при изгибе и при сдвиге соответственно;

$I$  и  $F$  – момент инерции и площадь поперечного сечения стержня рамы соответственно.

Так как под действием внешних и единичных нагрузок стержни рамы работают в основном на изгиб, то можно в расчетах использовать только часть формулы Мора с изгибающими моментами [7]:

$$\gamma(\delta) = \sum \frac{1}{EI} \int_0^l M_P M_1 dx. \quad (2)$$

Вместо интегрирования по формуле Мора в практике расчета часто используется способ «перемножения» эпюр по правилу Верещагина, которое применим при выполнении следующих условий:

1) изгибная жесткость стержневой системы рамы на рассматриваемом участке должна быть постоянной ( $EI = const$ );

2) одна из двух эпюр изгибающих моментов обязательно должна быть линейной.

По правилу Верещагин интеграл от произведения двух функций изгибающих моментов равен произведению площади графика криволинейной функции и ординаты прямолинейной, расположенной под центром тяжести графика криволинейной функции. Результат перемножения однозначных эпюр изгибающих моментов является положительным, а разнозначных – отрицательным.

## 2.1. Построение эпюр внутренних усилий и определение перемещений и углов поворота.

**Пример 2.1.** Для статически определимой трех шарнирной рамы, приведенной на рис. 2.1:

- 1) построить эпюры изгибающих моментов и поперечных сил:
  - а) определить реакции всех связей рамы от действия заданной нагрузки;
  - б) построить эпюру поперечных сил от действия заданной нагрузки;
  - в) построить эпюру изгибающих моментов от действия заданной нагрузки;
- 2) определить перемещения, используя способ Верещагина.
  - а) определить прогиб для сечения «1»;
  - б) определить горизонтальное перемещение для сечения «2»;
  - в) определить угол поворота для сечения «3».

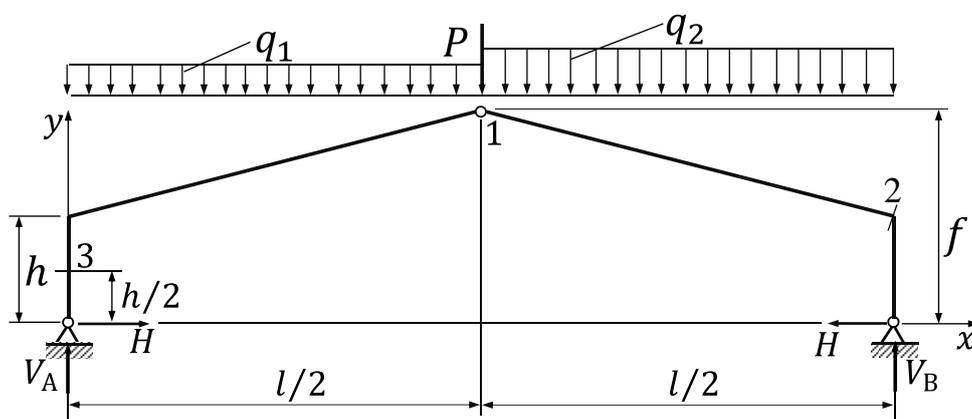


Рисунок 2.1– Схема статически определимой трех шарнирной рамы.

Исходные данные:  $l = 16.0$  м,  $h = 2.0$  м,  $f = 4.0$  м,  $q_1 = 0,4$  кН/м,  $q_2 = 0,7$  кН/м,  $P = 0,2$  кН.

### 1. Построить эпюры изгибающих моментов и поперечных сил.

**а) Определение реакций всех связей рамы от действия заданной нагрузки.**

Опорные реакции  $V_A$ ,  $V_B$  и  $H$  (рис. 2.1) определяем из уравнений равновесия. Сперва вспомним правила знаков при составлении уравнений моментов. Если сила (сосредоточенная, распределенная, момент сил, опорная реакция), действующая на балку, дает момент, направленный по часовой стрелке, то в уравнении суммы моментов ставят знак плюс, а если против часовой стрелки – знак минус.

$$\begin{aligned} \sum M_A = 0; & q_1 \cdot \frac{l}{2} \cdot \frac{l}{4} + q_2 \cdot \frac{l}{2} \cdot \left(\frac{l}{2} + \frac{l}{4}\right) + P \cdot \frac{l}{2} - V_B \cdot l = 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow V_B = & q_1 \cdot \frac{l}{8} + \frac{q_2}{2} \cdot \frac{3l}{4} + \frac{P}{2} \Leftrightarrow V_B = 0,4 \cdot \frac{16}{8} + \frac{0,7}{2} \cdot \frac{3 \cdot 16}{4} + \frac{0,2}{2} \Leftrightarrow V_B = 5,1 \text{ кН.} \\ \sum M_B = 0; & q_2 \cdot \frac{l}{2} \cdot \frac{l}{4} + q_1 \cdot \frac{l}{2} \cdot \left(\frac{l}{2} + \frac{l}{4}\right) + P \cdot \frac{l}{2} - V_A \cdot l = 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow V_A = & q_2 \cdot \frac{l}{8} + \frac{q_1}{2} \cdot \frac{3l}{4} + \frac{P}{2} \Leftrightarrow V_A = 0,7 \cdot \frac{16}{8} + \frac{0,4}{2} \cdot \frac{3 \cdot 16}{4} + \frac{0,2}{2} \Leftrightarrow V_A = 3,9 \text{ кН.} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Sigma M_C = 0; q_2 \cdot \frac{l}{2} \cdot \frac{l}{4} - V_B \cdot \frac{l}{2} + H \cdot f = 0 &\Leftrightarrow q_2 \cdot \frac{l^2}{8} - V_B \cdot \frac{l}{2} + H \cdot f = 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow H = \frac{V_B \cdot \frac{l}{2} - q_2 \cdot \frac{l^2}{8}}{f} &\Leftrightarrow H = \frac{5,1 \cdot \frac{16}{2} - 0,7 \cdot \frac{16^2}{8}}{4} \Leftrightarrow H = 4,6 \text{ кН}. \end{aligned}$$

Выполним проверку опорных реакций.

$$\begin{aligned} \Sigma y = 0; q_1 \cdot \frac{l}{2} + q_2 \cdot \frac{l}{2} + P - V_A - V_B = 0 &\Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 0,4 \cdot \frac{16}{2} + 0,7 \cdot \frac{16}{2} + 0,2 - 3,9 - 5,1 = 0 &\Leftrightarrow 0 = 0. \end{aligned}$$

Следовательно, значения опорных реакций определены верно.

**б) Построение эпюры поперечных сил рамы от действия заданной нагрузки.**

Вначале вспомним правило знаков для поперечных сил. Поперечная сила в сечении равна алгебраической сумме всех внешних сил (с учётом знака) по одну сторону от рассматриваемого сечения. Если внешняя сила, относительно рассматриваемого сечения, стремится повернуть по часовой стрелке, то поперечная сила принимается положительным, а против часовой стрелки – отрицательным.

Разделим раму на четыре участка: 1 участок – левая стойка; 2 участок – левая часть ригеля; 3 участок – правая стойка; 4 участок – правая часть ригеля.

Построение эпюры поперечных сил удобнее начинать с 1-го участка. Мысленно вырежем нижнюю часть стойки длиной  $x$  и рассмотрим ее равновесие (рис. 2.2, а). Переменная  $x$  изменяется от 0 до 2 м. Сила  $H$  стремится повернуть сечение против часовой стрелки, значит знак поперечной силы на первом участке принимаем отрицательным:

$$Q_x = -H \Leftrightarrow Q_x = -4,6 \text{ кН}.$$

Здесь значения поперечных сил не зависит от переменной  $x$ , поэтому эпюра поперечных сил на 1-ом участке параллельна оси стойки.

Рассмотрим 2-ой участок (рис. 2.2, б). Переменная  $x$  на 2-ом участке изменяется от левого жесткого узла до шарнира в замке рамы. Для определения поперечных сил в рассматриваемом сечении находим тригонометрические функции угла наклона ригеля рамы к горизонту

$$\begin{aligned} tg\alpha = \frac{f-h}{l/2} &\Leftrightarrow tg\alpha = \frac{4-2}{16/2} \Leftrightarrow tg\alpha = 0,25; \\ sin\alpha = \frac{tg\alpha}{\sqrt{1+tg^2\alpha}} &\Leftrightarrow sin\alpha = \frac{0,25}{\sqrt{1+0,25^2}} \Leftrightarrow sin\alpha = 0,2425; \\ cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{1+tg^2\alpha}} &\Leftrightarrow cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{1+0,25^2}} \Leftrightarrow cos\alpha = 0,9701. \end{aligned}$$

Силы  $H$  и  $q_1 \cdot x$  стремятся повернуть рассматриваемое сечение против часовой стрелки и по правилу знаков поперечные силы от этих сил принимаем отрицательными. Сила  $V_A$  стремятся повернуть рассматриваемое сечение по часовой стрелке и по правилу знаков поперечные силы от этой силы принимаем положительными. Находим значение поперечных сил как алгебраическую сумму всех действующих сил:

$$Q_x = -q_1 \cdot x \cdot cos\alpha - H \cdot sin\alpha + V_A \cdot cos\alpha.$$

Поперечные силы зависят от переменной  $x$ , поэтому находим их значения в характерных точках:

$$\text{при } x = 0; Q_x = -0,4 \cdot 0 \cdot 0,9701 - 4,6 \cdot 0,2425 + 3,9 \cdot 0,9701 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow Q_x = 2,67 \text{ кН};$$

$$\text{при } x = 8; Q_x = -0,4 \cdot 8 \cdot 0,9701 - 4,6 \cdot 0,2425 + 3,9 \cdot 0,9701 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow Q_x = -0,44 \text{ кН}.$$

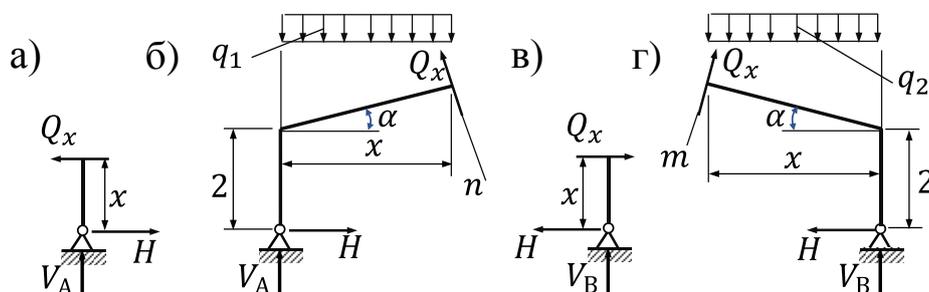


Рисунок 2.2– Схемы для определения поперечных сил.

Рассмотрим 3-ий участок. Также мысленно вырежем нижнюю часть стойки длиной  $x$  и рассмотрим ее равновесие (рис. 2.2, в). Переменная  $x$  изменяется от 0 до 2 м. Сила  $H$  стремится повернуть сечение по часовой стрелке, значит знак поперечной силы на третьем участке принимаем положительным:

$$Q_x = H \Leftrightarrow Q_x = 4,6 \text{ кН}.$$

Здесь также значения поперечных сил не зависит от переменной  $x$ , поэтому эпюра поперечных сил на 3-ем участке параллельна оси стойки.

Рассмотрим 4-ый участок (рис. 2.2, г). Переменная  $x$  на 4-ом участке изменяется от правого жесткого узла до шарнира в замке рамы.

Силы  $H$  и  $q_1 \cdot x$  стремятся повернуть рассматриваемое сечение по часовой стрелке и по правилу знаков поперечные силы от этих сил принимаем положительными. Сила  $V_B$  стремятся повернуть рассматриваемое сечение против часовой стрелки и по правилу знаков поперечные силы от этой силы принимаем отрицательными. Находим значение поперечных сил как алгебраическую сумму всех действующих сил:

$$Q_x = q_2 \cdot x \cdot \cos\alpha + H \cdot \sin\alpha - V_B \cdot \cos\alpha.$$

Поперечные силы зависят от переменной  $x$ , поэтому находим их значения в характерных точках:

$$\text{при } x = 0; Q_x = 0,7 \cdot 0 \cdot 0,9701 + 4,6 \cdot 0,2425 - 5,1 \cdot 0,9701 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow Q_x = -3,83 \text{ кН};$$

$$\text{при } x = 8; Q_x = 0,7 \cdot 8 \cdot 0,9701 + 4,6 \cdot 0,2425 - 5,1 \cdot 0,9701 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow Q_x = 1,6 \text{ кН}.$$

Окончательная эпюра поперечных сил  $Q$  построена на рис. 2.3.

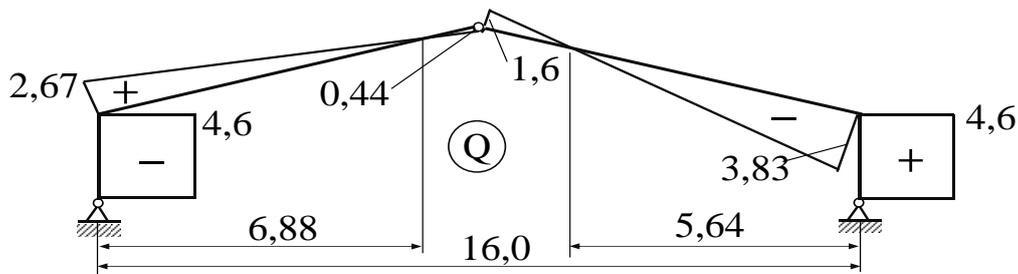


Рисунок 2.3– Эпюра поперечных сил.

в) **Построение эпюры изгибающих моментов рамы от действия заданной нагрузки.**

Построение эпюры изгибающих моментов удобнее также начинать с 1-го участка (рис. 2.4, а).

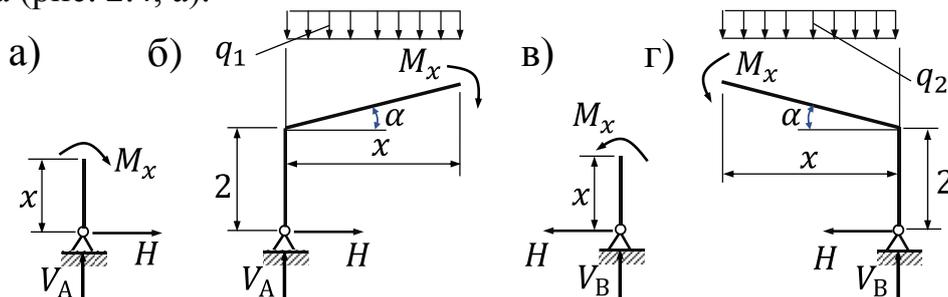


Рисунок 2.4– Схемы для определения изгибающих моментов.

Составим уравнение равновесия. Возьмем сумму моментов всех сил, действующих на вырезанную часть стойки, относительно рассматриваемого сечения:

$$\sum M = 0, M_x - H \cdot x = 0 \Leftrightarrow M_x = H \cdot x.$$

Находим значения изгибающих моментов в характерных точках:

при  $x = 0$ ,  $M_x = 0$  кНм;

при  $x = 2$  м,  $M_x = 4,6 \cdot 2 = 9,2$  кНм.

Рассмотрим 2-ой участок (рис. 2.4, б). Составим уравнение суммы моментов всех сил, действующих на 2-ой участок, относительно рассматриваемого сечения:

$$\begin{aligned} \sum M = 0, V_A \cdot x - q_1 \cdot x \cdot \frac{x}{2} - H \cdot (2 + x \cdot \operatorname{tg} \alpha) + M_x = 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow M_x = q_1 \cdot \frac{x^2}{2} + H \cdot (2 + x \cdot \operatorname{tg} \alpha) - V_A \cdot x. \end{aligned}$$

Находим значения изгибающих моментов в характерных точках:

при  $x = 0$ ,  $M_x = H \cdot (2 + 0 \cdot \operatorname{tg} \alpha) \Leftrightarrow M_x = 4,6 \cdot 2 \Leftrightarrow M_x = 9,2$  кНм;

при  $x = 8$ ,  $M_x = 0,4 \cdot \frac{8^2}{2} + 4,6 \cdot (2 + 8 \cdot 0,25) - 3,9 \cdot 8 \Leftrightarrow M_x = 0$  кНм.

Эпюра изгибающих моментов  $M$  принимает максимальное или минимальное значение в точке, где поперечные силы  $Q$  в этой точке равны нулю. Найдем эту точку, которая по смыслу должна быть меньше длины оси ригеля, т.е. меньше 8 м:

$$\begin{aligned} Q_x = q_1 \cdot x \cdot \operatorname{cosa} + H \cdot \operatorname{sina} - V_A \cdot \operatorname{cosa}; Q_x = 0; \\ q_1 \cdot x \cdot \operatorname{cosa} + H \cdot \operatorname{sina} - V_A \cdot \operatorname{cosa} = 0 \Leftrightarrow q_1 \cdot x \cdot \operatorname{cosa} = V_A \cdot \operatorname{cosa} - \\ - H \cdot \operatorname{sina} \Leftrightarrow 0,4 \cdot x \cdot 0,9701 = 3,9 \cdot 0,9701 - 4,6 \cdot 0,2425 \Leftrightarrow x = 6,88 \text{ м.} \end{aligned}$$

Так как  $x = 6,88$  м меньше 8 м, то эпюра поперечных сил  $Q$  пересекает ось ригеля рамы, и эпюра изгибающих моментов  $M$  имеет экстремальное значение. Находим его

$$\begin{aligned} M_x &= q_1 \cdot x \cdot \frac{x}{2} + H \cdot (2 + x \cdot \operatorname{tg} \alpha) - V_A \cdot x \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow M_x &= 0,4 \cdot \frac{6,88^2}{2} + 4,6 \cdot (2 + 6,88 \cdot 0,25) - 3,9 \cdot 6,88 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow M_x = -0,25 \text{ кНм.} \end{aligned}$$

Определяем точки пересечения эпюры изгибающих моментов  $M$  оси ригеля рамы

$$\begin{aligned} M_x = 0 \Leftrightarrow q_1 \cdot \frac{x^2}{2} + H \cdot (2 + x \cdot \operatorname{tg} \alpha) - V_A \cdot x = 0 \Leftrightarrow 0,4 \cdot \frac{x^2}{2} + \\ + 4,6 \cdot (2 + x \cdot 0,25) - 3,9 \cdot x = 0 \Leftrightarrow 0,2x^2 - 2,75x + 9,2 = 0; \\ x_1 = 5,75 \text{ м и } x_2 = 8,0 \text{ м.} \end{aligned}$$

Рассмотрим 3-ий участок (рис. 2.4, в). Составим уравнение равновесия. Возьмем сумму моментов всех сил, действующих на вырезанную часть стойки, относительно рассматриваемого сечения:

$$\sum M = 0; H \cdot x - M_x = 0 \Leftrightarrow M_x = H \cdot x.$$

Находим значения изгибающих моментов в характерных точках:

при  $x = 0$ ,  $M_x = 0$  кНм;

при  $x = 2$  м,  $M_x = 4,6 \cdot 2 = 9,2$  кНм.

Рассмотрим 4-ый участок (рис. 2.4, г). Возьмем сумму моментов всех сил, действующих на 4-ый участок, относительно рассматриваемого сечения:

$$\begin{aligned} \sum M = 0; q_2 \cdot x \cdot \frac{x}{2} + H \cdot (2 + x \cdot \operatorname{tg} \alpha) - M_x - V_B \cdot x = 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow M_x = q_2 \cdot x \cdot \frac{x}{2} + H \cdot (2 + x \cdot \operatorname{tg} \alpha) - V_B \cdot x. \end{aligned}$$

Находим значения изгибающих моментов в характерных точках:

при  $x = 0$ ,  $M_x = H \cdot (2 + 0 \cdot \operatorname{tg} \alpha) \Leftrightarrow M_x = 4,6 \cdot 2 \Leftrightarrow M_x = 9,2$  кНм;

при  $x = 8$ ,  $M_x = 0,7 \cdot \frac{8^2}{2} + 4,6 \cdot (2 + 8 \cdot 0,25) - 5,1 \cdot 8 \Leftrightarrow M_x = 0$  кНм.

Эпюра изгибающих моментов  $M$  принимает максимальное или минимальное значение в точке, где поперечные силы  $Q$  в этой точке равны нулю. Найдем эту точку, которая также должна быть меньше длины оси ригеля, т.е. меньше 8 м:

$$Q_x = 0; q_2 \cdot x \cdot \operatorname{cosa} + H \cdot \operatorname{sina} - V_B \cdot \operatorname{cosa} = 0 \Leftrightarrow q_2 \cdot x \cdot \operatorname{cosa} = V_B \cdot \operatorname{cosa} -$$

$$-H \cdot \operatorname{sina} \Leftrightarrow 0,7 \cdot x \cdot 0,9701 = 5,1 \cdot 0,9701 - 4,6 \cdot 0,2425 \Leftrightarrow x = 5,64$$

м.

Так как  $x = 5,64$  м меньше 8 м, то эпюра поперечных сил  $Q$  пересекает ось ригеля рамы, и эпюра изгибающих моментов  $M$  имеет экстремальное значение.

$$\begin{aligned} M_x = q_2 \cdot \frac{x^2}{2} + H \cdot (2 + x \cdot \operatorname{tg} \alpha) - V_B \cdot x \Leftrightarrow M_x = 0,7 \cdot \frac{5,64^2}{2} + \\ + 4,6 \cdot (2 + 5,64 \cdot 0,25) - 5,1 \cdot 5,64 \Leftrightarrow M_x = -1,94 \text{ кНм.} \\ M_x = 0 \Leftrightarrow q_2 \cdot \frac{x^2}{2} + H \cdot (2 + x \cdot \operatorname{tg} \alpha) - V_B \cdot x = 0 \Leftrightarrow 0,7 \cdot \frac{x^2}{2} + \\ + 4,6 \cdot (2 + x \cdot 0,25) - 5,1 \cdot x = 0 \Leftrightarrow 0,35x^2 - 3,95x + 9,2 = 0; \end{aligned}$$

$$x_1 = 3,29 \text{ м и } x_2 = 8,0 \text{ м.}$$

Окончательная эпюра изгибающих моментов  $M$  построена на рис. 2.5.

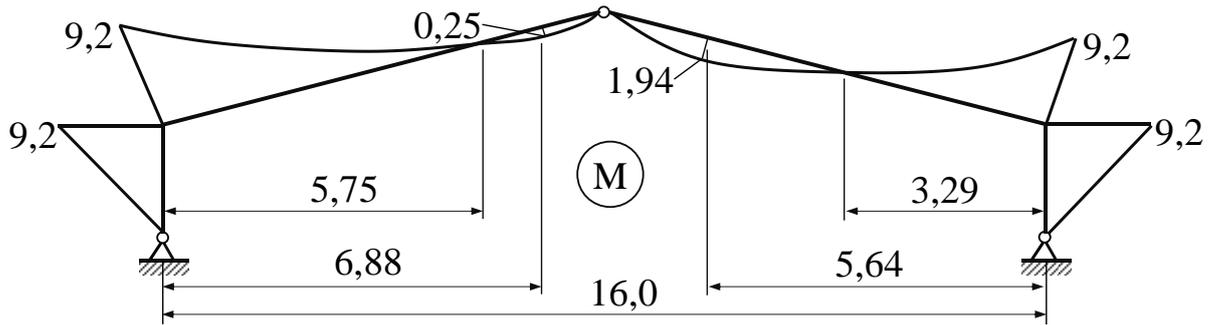


Рисунок 2.5. Эпюра изгибающих моментов

## 2. Определить перемещения.

### а) Определим прогиб сечения 1.

В сечении 1 по направлению ожидаемого прогиба прикладываем единичную сосредоточенную силу  $P = 1$  и находим реакции опорных связей также как при определении опорных реакций от действия заданных нагрузок (рис. 2.6). Составим суммы моментов всех сил, действующих на раму, относительно опорного шарнира В:

$$\sum M_B = 0; V_A l - P \frac{l}{2} = 0 \Leftrightarrow V_A = \frac{P l}{2} \Leftrightarrow V_A = \frac{1 \cdot 16}{2} \Leftrightarrow V_A = 8;$$

Из суммы проекций всех сил, действующих на раму, на вертикальную ось получим:

$$\sum y = 0; V_A + V_B - P = 0 \Leftrightarrow V_B = P - V_A \Leftrightarrow V_B = 1 - 8 \Leftrightarrow V_B = -7;$$

Из суммы моментов всех сил, действующих на левую часть рамы, относительно замкового шарнира получим:

$$\sum M_C = 0; V_A \frac{l}{2} - H f = 0 \Leftrightarrow H = \frac{V_A l}{2 f} \Leftrightarrow H = \frac{8 \cdot 16}{2 \cdot 2} \Leftrightarrow H = 64;$$

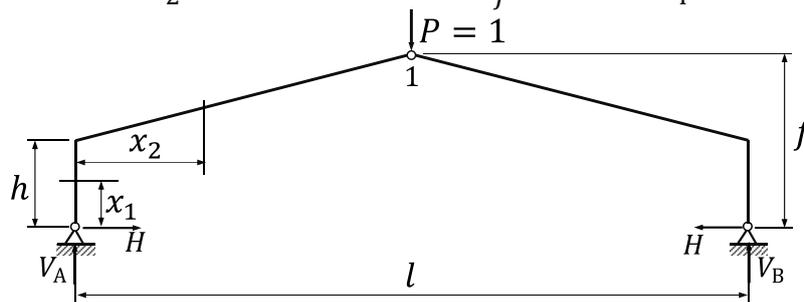


Рисунок 2.6.

Построим эпюру изгибающих моментов  $M_m$  от единичной силы  $P = 1$  (рис. 2.6):

а) от опоры А до левого жесткого узла

$$M_m = H x_1 \Leftrightarrow M_m = 64 \cdot x_1.$$

Находим значения изгибающих моментов в характерных точках:

$$\text{при } x_1 = 0, M_m = 0;$$

$$\text{при } x_1 = 2, M_m = 64 \cdot 2 = 128;$$

б) от левого жесткого узла до замкового шарнира

$$M_m = H(h + x_2 \operatorname{tg} \alpha) - V_A x_2 \Leftrightarrow M_m = 1(2 + x_2 \cdot 0,25) - \frac{1}{2} x_2.$$

Находим значения изгибающих моментов в характерных точках:

при  $x = 0$ ,  $M_m = 2$ ;

при  $x = 8$ ,  $M_m = 1(2 + 8 \cdot 0,25) - \frac{1}{2} \cdot 8 \Leftrightarrow M_m = 0$ .

Так как рама симметричная и значения опорных реакций  $V_A$  и  $V_B$  равны, то эпюра изгибающих моментов правой части рамы будет аналогичной левой части рамы (рис. 2.7).

Эпюра изгибающих моментов от заданной нагрузки  $M_n$  построена на рис. 2.5. Перенесем ее на рис. 2.8.

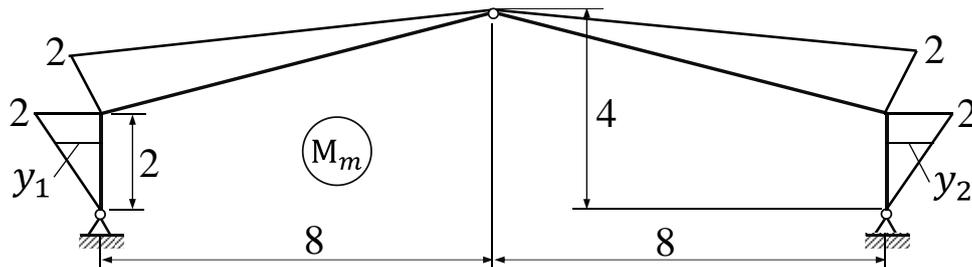


Рисунок 2.7.

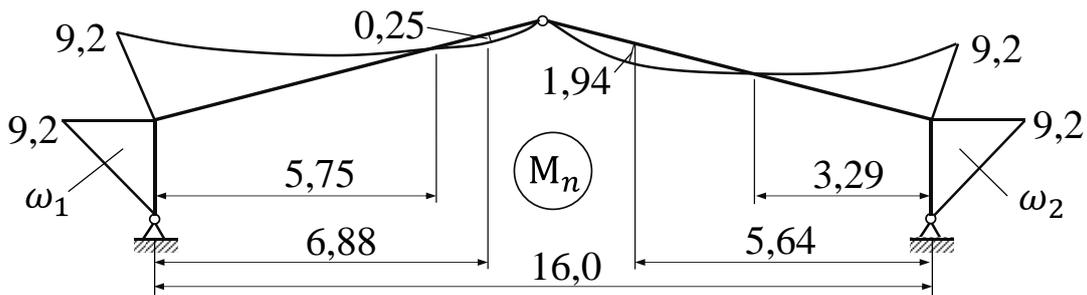


Рисунок 2.8.

Перемножим эпюры  $M_n$  и  $M_m$ . Эпюры  $M_n$  и  $M_m$  обеих стоек имеют треугольные формы и расположены с одной стороны от оси стойки. Площади эпюр  $M_n$  обеих стоек равны

$$\omega_1 = \omega_2 = \frac{1}{2} \cdot 9,2 \cdot 2 = 9,2.$$

Расстояние от опор А и В до центров тяжести треугольных эпюр равно  $\frac{2}{3} \cdot h = \frac{2}{3} \cdot 2 = \frac{4}{3}$ , тогда ординаты  $y_1$  и  $y_2$  из эпюры  $M_m$ , взятые под центром тяжести площадей  $\omega_1$  и  $\omega_2$  равны

$$y_1 = y_2 = \frac{2}{3} \cdot 2 = \frac{4}{3}.$$

Эпюра  $M_n$  левого ригеля имеет сложное очертание. Отыскание ее площади и центра тяжести затруднительно. Поэтому разложим ее на простые фигуры (табл. 2 приложения) – треугольник  $\omega_3$  и квадратная парабола  $\omega_4$  (рис. 2.9, а) – для вычисления площадей и центров тяжести, которых имеются готовые формулы (табл. 1 приложения).

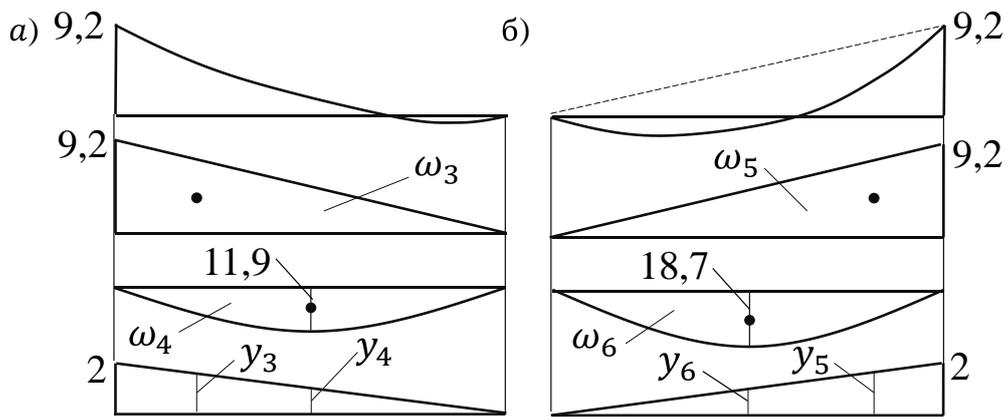


Рисунок 2.9.

Площадь треугольника  $\omega_3$  эпюры  $M_n$  равна

$$\omega_3 = \frac{1}{2} l_p a \Leftrightarrow \omega_3 = \frac{1}{2} \cdot 8,25 \cdot 9,2 \Leftrightarrow \omega_3 = 37,95,$$

где  $l_p$  – длина ригеля, определяемая по формуле

$$l_p = \frac{l/2}{\cos \alpha} \Leftrightarrow l_p = \frac{16/2}{0,9701} \Leftrightarrow l_p = 8,25 \text{ м.}$$

Расстояние от правой точки треугольника до его центра тяжести равно  $\frac{2}{3} \cdot 8,25 = 5,5$ , тогда ордината  $y_3$  из эпюры  $M_m$ , взятая под центром тяжести площади  $\omega_3$ , равна

$$y_3 = \frac{2}{3} \cdot 2 \Leftrightarrow y_3 = \frac{4}{3}.$$

Площадь квадратной параболы  $\omega_4$  эпюры  $M_n$  равна

$$\omega_4 = \frac{2}{3} l_p h \Leftrightarrow \omega_4 = \frac{2}{3} \cdot 8,25 \cdot 11,9 \Leftrightarrow \omega_4 = 65,45,$$

где высота параболы  $h = \frac{q_1 l_p^2}{8} \Leftrightarrow h = \frac{1,4 \cdot 8,25^2}{8} \Leftrightarrow h = 11,9$ .

Ордината  $y_4$  из эпюры  $M_m$ , взятая под центром тяжести площади  $\omega_5$ , равна

$$y_4 = \frac{1}{2} \cdot 2 \Leftrightarrow y_4 = 1.$$

Эпюра  $M_n$  правого ригеля имеет также сложное очертание. Поэтому разложим ее также на простые фигуры (табл. 2 приложения) – треугольник  $\omega_5$  и квадратная парабола  $\omega_6$  (рис. 2.9, б).

Площадь треугольника  $\omega_5$  эпюры  $M_n$  равна

$$\omega_5 = \frac{1}{2} l_p a \Leftrightarrow \omega_5 = \frac{1}{2} \cdot 8,25 \cdot 9,2 \Leftrightarrow \omega_5 = 37,95.$$

Расстояние от левой точки треугольника до его центра тяжести равно  $\frac{2}{3} \cdot 8,25 = 5,5$ , тогда ордината  $y_5$  из эпюры  $M_m$ , взятая под центром тяжести площади  $\omega_6$ , равна

$$y_5 = \frac{2}{3} \cdot 2 \Leftrightarrow y_5 = \frac{4}{3}.$$

Площадь квадратной параболы  $\omega_6$  эпюры  $M_n$  равна

$$\omega_6 = \frac{2}{3} l_p h \Leftrightarrow \omega_6 = \frac{2}{3} \cdot 8,25 \cdot 18,7 \Leftrightarrow \omega_6 = 102,85,$$

где высота параболы  $h = \frac{q_2 l_p^2}{8} \Leftrightarrow h = \frac{2,2 \cdot 8,25^2}{8} \Leftrightarrow h = 18,7$ .

Ордината  $y_6$  из эпюры  $M_m$ , взятая под центром тяжести площади  $\omega_6$ , равна

$$y_6 = \frac{1}{2} \cdot 2 \Leftrightarrow y_6 = 1.$$

Квадратные параболы эпюры  $M_n$  левого и правого ригеля и треугольные эпюры  $M_m$  расположены в разные стороны от оси ригеля, поэтому при определении прогиба их произведения вычитаем. Таким образом, прогиб рамы в сечении 1 равен

$$\begin{aligned} \delta &= \sum \frac{1}{EI} \omega_n y_m \Leftrightarrow \delta = \frac{1}{EI} \cdot (\omega_1 \cdot y_1 + \omega_2 y_2 + \omega_3 \cdot y_3 - \omega_4 y_4 + \omega_5 y_5 - \\ &- \omega_6 y_6) \Leftrightarrow \delta = \frac{1}{EI} \cdot \left( 9,2 \cdot \frac{4}{3} + 9,2 \cdot \frac{4}{3} + 37,95 \cdot \frac{4}{3} - 65,45 \cdot 1 + \right. \\ &\left. + 37,95 \cdot \frac{4}{3} - 102,85 \cdot 1 \right) \Leftrightarrow \delta = -\frac{42,6}{EI}. \end{aligned}$$

**б) Определим горизонтальное перемещение сечения 2.**

В сечении 2 по направлению ожидаемого перемещения прикладываем единичную сосредоточенную силу  $P = 1$  и находим реакции опорных связей также как при определении опорных реакций от действия заданных нагрузок (рис. 2.10). Составим суммы моментов всех сил, действующих на раму, относительно опорного шарнира В:

$$\sum M_B = 0; V_A l - Pf = 0 \Leftrightarrow V_A = \frac{Pf}{l} \Leftrightarrow V_A = \frac{1 \cdot 4}{16} \Leftrightarrow V_A = \frac{1}{4};$$

Из суммы проекций всех сил, действующих на раму, на вертикальную ось получим:

$$\sum y = 0; V_A - V_B = 0 \Leftrightarrow V_B = V_A \Leftrightarrow V_B = \frac{1}{4}.$$

Из суммы моментов всех сил, действующих на левую часть рамы, относительно замкового шарнира получим:

$$\sum M_C = 0; V_A \frac{l}{2} - Hf = 0 \Leftrightarrow H = \frac{V_A l}{f} \Leftrightarrow H = \frac{\frac{1}{4} \cdot 16}{4} \Leftrightarrow H = \frac{1}{2};$$

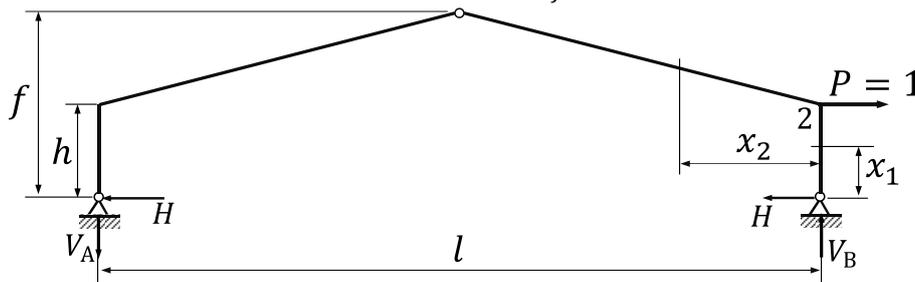


Рисунок 2.10.

Построим эпюру изгибающих моментов  $M_m$  от единичной силы  $P = 1$  (рис. 2.6):

а) от опоры В до правого жесткого узла

$$M_m = Hx_1 \Leftrightarrow M_m = \frac{1}{2} \cdot x_1.$$

Находим значения изгибающих моментов в характерных точках:

при  $x_1 = 0$ ,  $M_m = 0$ ;

при  $x_1 = 2$ ,  $M_m = \frac{1}{2} \cdot 2 \Leftrightarrow M_m = 1$ ;

б) от правого жесткого узла до замкового шарнира

$$M_m = H(h + x_2 \operatorname{tg} \alpha) - V_B x_2 \Leftrightarrow M_m = \frac{1}{2}(2 + x_2 \cdot 0,25) - \frac{1}{4} x_2.$$

Находим значения изгибающих моментов в характерных точках:

$$\text{при } x = 0, M_m = 1;$$

$$\text{при } x = 8, M_m = \frac{1}{2}(2 + 8 \cdot 0,25) - \frac{1}{4} \cdot 8 \Leftrightarrow M_m = 0;$$

Так как рама симметричная и значения опорных реакций  $V_A$  и  $V_B$  равны, но направлены в противоположные стороны, то эпюра изгибающих моментов левой части рамы будет аналогичной правой части рамы (рис. 2.11), построенная на растянутых волокнах рамы.

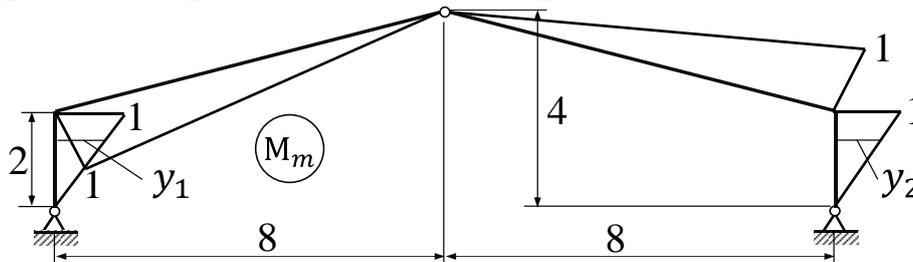


Рисунок 2.11.

Эпюра изгибающих моментов от заданной нагрузки  $M_n$  построена на рис. 2.8.

Перемножим эпюры  $M_n$  и  $M_m$ . Эпюры  $M_n$  и  $M_m$  обеих стоек имеют треугольные формы: на правой стойке расположены с одной стороны от оси стойки, а на левой стойке – с противоположных сторон. Площади эпюр  $M_n$  обеих стоек равны

$$\omega_1 = \omega_2 = \frac{1}{2} \cdot 9,2 \cdot 2 = 9,2.$$

Расстояние от опор А и В до центров тяжести треугольных эпюр равно  $\frac{2}{3} \cdot h = \frac{2}{3} \cdot 2 = \frac{4}{3}$ , тогда ординаты  $y_1$  и  $y_2$  из эпюры  $M_m$ , взятые под центром тяжести площадей  $\omega_1$  и  $\omega_2$  равны

$$y_1 = y_2 = \frac{2}{3} \cdot 1 = \frac{2}{3}.$$

Площади и центры тяжести эпюр  $M_n$  левого и правого ригеля определены при вычислении прогиба сечения 1. Перепишем их здесь

$$\omega_3 = \omega_5 = 37,95; \omega_4 = 65,45; \omega_6 = 102,85$$

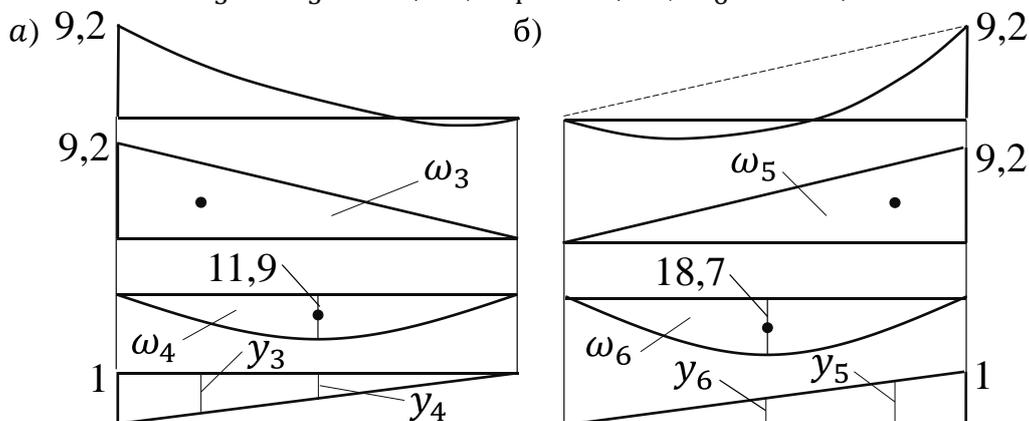


Рисунок 2.12.

Ординаты  $y_3, y_4, y_5$  и  $y_6$  из эпюры  $M_m$ , взятые под центрами тяжести площадей  $\omega_3, \omega_4, \omega_5$  и  $\omega_6$  равны

$$y_3 = \frac{2}{3} \cdot 1 \Leftrightarrow y_3 = \frac{2}{3}; y_4 = \frac{1}{2} \cdot 1 \Leftrightarrow y_4 = \frac{1}{2};$$

$$y_5 = \frac{2}{3} \cdot 1 \Leftrightarrow y_5 = \frac{2}{3} \text{ и } y_6 = \frac{1}{2} \cdot 1 \Leftrightarrow y_6 = \frac{1}{2}.$$

Квадратная парабола эпюры  $M_n$  правого ригеля и треугольная эпюра  $M_m$  и треугольные эпюры  $M_n$  и  $M_m$  левого ригеля расположены в разные стороны от оси ригеля, поэтому при определении прогиба их произведения вычитаем. Таким образом, горизонтальное перемещение сечения 2 равно

$$\delta = \sum \frac{1}{EI} \omega_n y_m \Leftrightarrow \delta = \frac{1}{EI} \cdot (-\omega_1 \cdot y_1 + \omega_2 y_2 - \omega_3 \cdot y_3 + \omega_4 y_4 + \omega_5 y_5 - \omega_6 y_6) \Leftrightarrow$$

$$\delta = \frac{1}{EI} \cdot \left( -9,2 \cdot \frac{2}{3} + 9,2 \cdot \frac{2}{3} - 37,95 \cdot \frac{2}{3} + 65,45 \cdot \frac{1}{2} + 37,95 \cdot \frac{2}{3} - 102,85 \cdot \frac{1}{2} \right) \Leftrightarrow \delta = -\frac{18,7}{EI}.$$

**в) Определим угол поворота сечения 3.**

В сечении 3 по направлению ожидаемого поворота прикладываем единичный момент  $m = 1$  и находим реакции опорных связей также как при определении опорных реакций от действия заданных нагрузок (рис. 2.13).

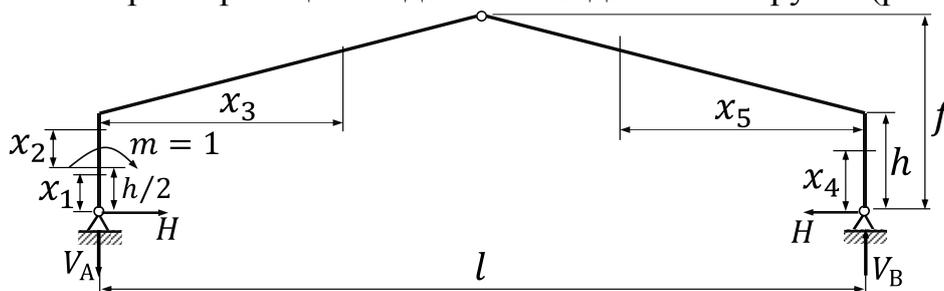


Рисунок 2.13.

Составим суммы моментов всех сил, действующих на раму, относительно опорного шарнира А:

$$\sum M_A = 0; m - V_B l = 0 \Leftrightarrow V_B = \frac{m}{l} \Leftrightarrow V_B = \frac{1}{16};$$

Из суммы проекций всех сил, действующих на раму, на вертикальную ось получим:

$$\sum y = 0; V_B - V_A = 0 \Leftrightarrow V_A = V_B \Leftrightarrow V_A = \frac{1}{16}.$$

Из суммы моментов всех сил, действующих на правую часть рамы, относительно замкового шарнира получим:

$$\sum M_C = 0; V_B \frac{l}{2} - H f = 0 \Leftrightarrow H = \frac{V_B l}{2 f} \Leftrightarrow H = \frac{\frac{1}{16} \cdot 16}{4} \Leftrightarrow H = \frac{1}{8};$$

Построим эпюру изгибающих моментов  $M_m$  от единичного момента  $m = 1$  (рис. 2.13), приложенного в сечении 3:

а) от опоры А до сечения 3

$$M_m = H x_1 \Leftrightarrow M_m = \frac{1}{8} \cdot x_1.$$

Находим значения изгибающих моментов в характерных точках:

при  $x_1 = 0, M_m = 0;$

при  $x_1 = 1$ ,  $M_m = \frac{1}{8} \cdot 1 \Leftrightarrow M_m = \frac{1}{8}$ ;

б) от сечения 3 до левого жесткого узла

$$M_m = H \left( \frac{h}{2} + x_2 \right) - t \Leftrightarrow M_m = \frac{1}{8} \left( \frac{2}{2} + x_2 \right) - 1.$$

Находим значения изгибающих моментов в характерных точках:

при  $x = 0$ ,  $M_m = \frac{1}{8} - 1 \Leftrightarrow M_m = -\frac{7}{8}$ ;

при  $x = 1$ ,  $M_m = \frac{1}{8} \left( \frac{2}{2} + 1 \right) - 1 \Leftrightarrow M_m = \frac{1}{4} - 1 \Leftrightarrow M_m = -\frac{3}{4}$ ;

в) от левого жесткого узла до замкового шарнира

$$M_m = H(h + x_3 \operatorname{tg} \alpha) - t + V_A x_3 \Leftrightarrow M_m = \frac{1}{8} (2 + x_3 \cdot 0,25) - 1 + \frac{1}{16} \cdot x_3 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow M_m = \frac{1}{8} (2 + x_3 \cdot 0,25) - 1 + \frac{1}{16} \cdot x_3.$$

Находим значения изгибающих моментов в характерных точках:

при  $x = 0$ ,  $M_m = \frac{1}{4} - 1 \Leftrightarrow M_m = -\frac{3}{4}$ ;

при  $x = 8$ ,  $M_m = \frac{1}{8} (2 + 8 \cdot 0,25) - 1 + \frac{1}{16} \cdot 8 \Leftrightarrow M_m = 0$ .

г) от опоры В до правого жесткого узла

$$M_m = H x_4 \Leftrightarrow M_m = \frac{1}{8} \cdot x_4.$$

Находим значения изгибающих моментов в характерных точках:

при  $x_4 = 0$ ,  $M_m = 0$ ;

при  $x_4 = 2$ ,  $M_m = \frac{1}{8} \cdot 2 \Leftrightarrow M_m = \frac{1}{4}$ ;

д) от правого жесткого узла до замкового шарнира

$$M_m = H(h + x_5 \operatorname{tg} \alpha) - V_B x_5 \Leftrightarrow M_m = \frac{1}{8} (2 + x_5 \cdot 0,25) - \frac{1}{16} \cdot x_5 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow M_m = \frac{1}{8} (2 + x_3 \cdot 0,25) - \frac{1}{16} \cdot x_3.$$

Находим значения изгибающих моментов в характерных точках:

при  $x = 0$ ,  $M_m = \frac{1}{8} \cdot 2 \Leftrightarrow M_m = \frac{1}{4}$ ;

при  $x = 8$ ,  $M_m = \frac{1}{8} (2 + 8 \cdot 0,25) - \frac{1}{16} \cdot 8 \Leftrightarrow M_m = 0$ .

Эпюра изгибающих моментов рамы от действия единичного момента, построенная на растянутых волокнах, показана на рис. 2.14.

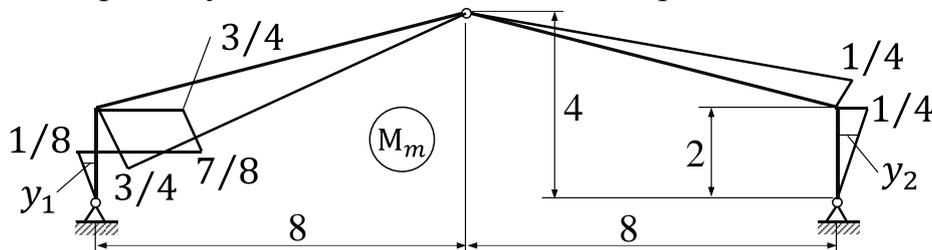


Рисунок 2.14.

Эпюра изгибающих моментов от заданной нагрузки  $M_n$  построена на рис. 2.8.

Перемножим эпюры  $M_n$  и  $M_m$ . Эпюры  $M_n$  и  $M_m$  правой стойки имеют треугольные формы и расположены с одной стороны от оси стойки. Площадь эпюр  $M_n$  правой стойки равна

$$\omega_2 = \frac{1}{2} \cdot 9,2 \cdot 2 \Leftrightarrow \omega_2 = 9,2.$$

Расстояние от опоры В до центра тяжести треугольной эпюры равно  $\frac{2}{3} \cdot h = \frac{2}{3} \cdot 2 = \frac{4}{3}$ , тогда ордината  $y_2$  из эпюры  $M_m$ , взятые под центром тяжести площади  $\omega_2$  равна

$$y_2 = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{4} \Leftrightarrow y_2 = \frac{1}{6}.$$

Эпюры  $M_n$  и  $M_m$  левой стойки разделим на два участка (рис. 2.15): 1 – от опоры А до сечения 3 длиной 1 м; 2 – от сечения 3 до жесткого узла длиной 1 м. Площадь эпюры первого участка равна

$$\omega_1 = \frac{1}{2} \cdot 4,6 \cdot 1 \Leftrightarrow \omega_1 = 2,3.$$

Ордината  $y_1$  из эпюры  $M_m$ , взятая под центром тяжести площади  $\omega_3$  равна

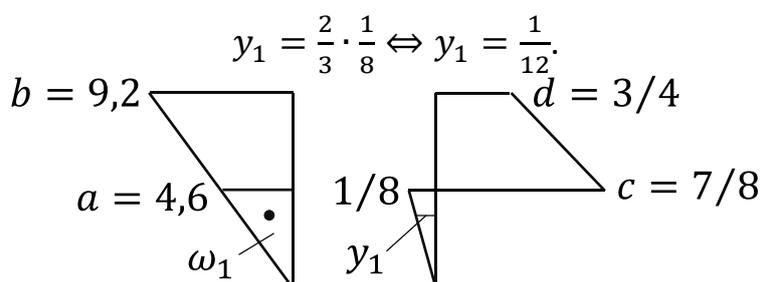


Рисунок 2.15.

Перемножение эпюр  $M_n$  и  $M_m$  верхней части левой стойки от сечения 3 до левого жесткого узла выполним по формуле трапеции

$$\begin{aligned} \omega_{\text{тр}} y_{\text{тр}} &= \frac{l}{6} [2(ac + bd) + ad + bc] \Leftrightarrow \omega_{\text{тр}} y_{\text{тр}} = \\ &= \frac{1}{6} \left[ 2 \left( 4,6 \cdot \frac{7}{8} + 9,2 \cdot \frac{3}{4} \right) + 4,6 \cdot \frac{3}{4} + 9,2 \cdot \frac{7}{8} \right] \Leftrightarrow \omega_{\text{тр}} y_{\text{тр}} = 5,6 \end{aligned}$$

Площади и центры тяжести эпюр  $M_n$  левого и правого ригеля определены при вычислении прогиба сечения 1. Перепишем их здесь

$$\omega_3 = \omega_5 = 37,95; \omega_4 = 65,45; \omega_6 = 102,85$$

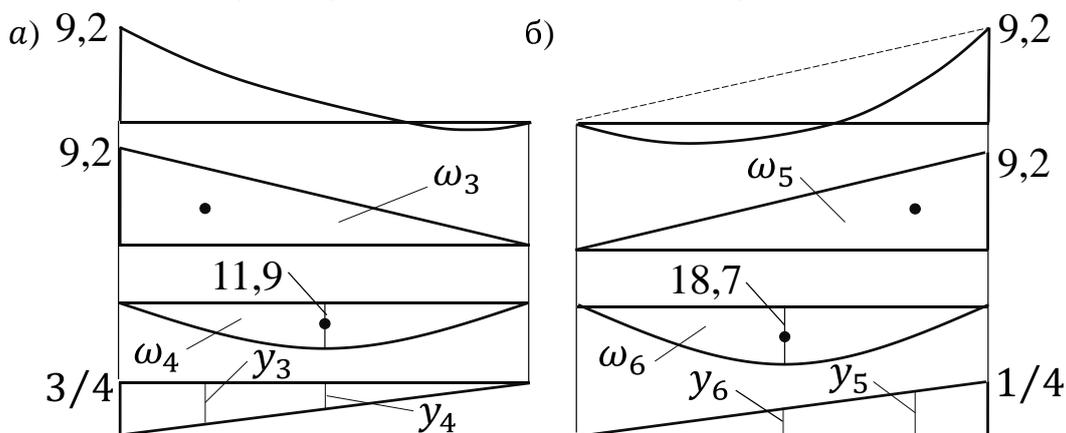


Рисунок 2.16.

Ординаты  $y_3$ ,  $y_4$ ,  $y_5$  и  $y_6$  из эпюры  $M_m$ , взятые под центрами тяжести площадей  $\omega_3$ ,  $\omega_4$ ,  $\omega_5$  и  $\omega_6$  равны

$$y_3 = \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} \Leftrightarrow y_3 = \frac{1}{2}; y_4 = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \Leftrightarrow y_4 = \frac{3}{8};$$

$$y_5 = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{4} \Leftrightarrow y_5 = \frac{1}{6} \text{ и } y_6 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} \Leftrightarrow y_6 = \frac{1}{8}.$$

Квадратная парабола эпюры  $M_n$  и треугольная эпюра  $M_m$  правого ригеля и треугольные эпюры  $M_n$  и  $M_m$  левого ригеля расположены в разные стороны от оси ригеля, поэтому при определении угла поворота их произведения вычитаем. Вычитаем также произведение  $\omega_{\text{тр}}y_{\text{тр}}$ . Таким образом, угол поворота сечения 3 равен

$$\delta = \sum \frac{1}{EI} \omega_n y_m \Leftrightarrow \delta = \frac{1}{EI} \cdot (\omega_1 \cdot y_1 - \omega_{\text{тр}} y_{\text{тр}} + \omega_2 y_2 - \omega_3 \cdot y_3 + \omega_4 y_4 +$$

$$+ \omega_5 y_5 - \omega_6 y_6) \Leftrightarrow \delta = \frac{1}{EI} \cdot \left( 2,3 \cdot \frac{1}{12} - 5,6 + 9,2 \cdot \frac{1}{6} - 37,95 \cdot \frac{1}{2} + \right.$$

$$\left. + 65,45 \cdot \frac{1}{8} + 37,95 \cdot \frac{1}{6} - 102,85 \cdot \frac{1}{8} \right) \Leftrightarrow \delta = -\frac{21,2}{EI}.$$

**Пример 2.2.** Для статически определимой рамы, приведенной на рис. 2.17:

- 1) построить эпюры изгибающих моментов и поперечных сил:
  - а) определить реакции всех связей рамы от действия заданной нагрузки;
  - б) построить эпюру поперечных сил от действия заданной нагрузки;
  - в) построить эпюру изгибающих моментов от действия заданной нагрузки;
- 2) определить перемещения используя формулу Мора и способ Верещагина.
  - а) определить угол поворота для сечений «2 и 3»;
  - б) определить прогиб для сечений «1 и 3».

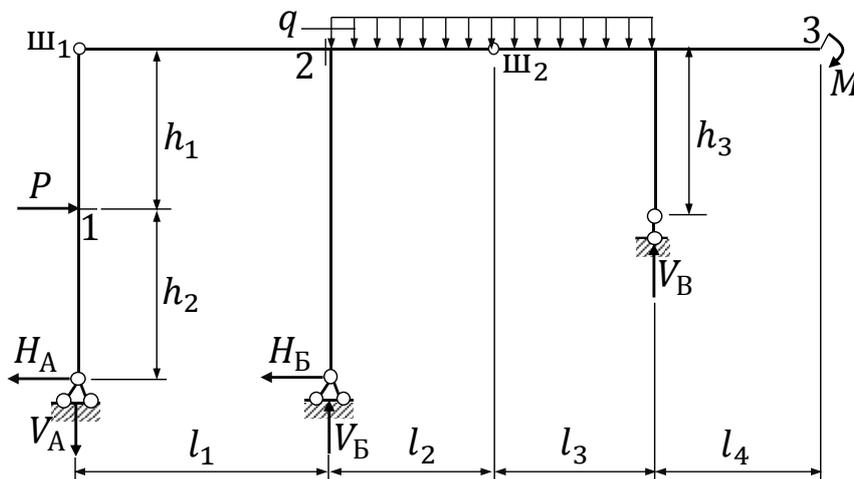


Рисунок 2.17– Статически определимая рама.

Исходные данные:  $h_1 = 2$  м,  $h_2 = 2$  м,  $h_3 = 2$  м,  $l_1 = 4$  м,  $l_2 = 2$  м,  $l_3 = 2$  м,  $l_4 = 2$  м,  $q = 2$  кН/м,  $M = 4$  кНм,  $P = 5$  кН.

1. Построить эпюры изгибающих моментов и поперечных сил.
  - а) Определение реакций всех связей рамы от действия заданной нагрузки.

Опорные реакции  $V_A$ ,  $H_A$ ,  $V_B$ ,  $H_B$  и  $V_B$  определяем из уравнений равновесия (рис. 2.17). Вначале вспомним правила знаков при составлении уравнения суммы моментов. Если сила (сосредоточенная, распределенная, момент сил, опорная реакция), действующая на балку, дает момент, направленный по часовой стрелке, то в уравнении суммы моментов ставят знак плюс, а если против часовой стрелки – знак минус.

$$\begin{aligned} \sum M_{ш_1} &= 0; H_A(h_1 + h_2) - Ph_1 = 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow H_A(2 + 2) - 5 \cdot 2 &= 0 \Leftrightarrow H_A = \frac{10}{4} \Leftrightarrow H_A = 2,5 \text{ кН.} \\ \sum x &= 0; P - H_A - H_B = 0 \Leftrightarrow H_B = P - H_A \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow H_B &= 5 - 2,5 \Leftrightarrow H_B = 2,5 \text{ кН.} \\ \sum M_{ш_2} &= 0; M + ql_3 \frac{l_3}{2} - V_B l_3 = 0 \Leftrightarrow 4 + 2 \cdot 2 \cdot \frac{2}{2} - V_B \cdot 2 = 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow V_B &= \frac{8}{2} \Leftrightarrow V_B = 4 \text{ кН.} \\ \sum M_B &= 0; M + Ph_2 - V_A l_1 + q(l_2 + l_3) \frac{l_2 + l_3}{2} - V_B (l_2 + l_3) = 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 4 + 5 \cdot 2 - V_A \cdot 4 + 2 \cdot (2 + 2) \cdot \frac{2+2}{2} - 4 \cdot (2 + 2) &= 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow V_A &= \frac{14}{4} \Leftrightarrow V_A = 3,5 \text{ кН.} \\ \sum y &= 0; -V_A + V_B - q(l_2 + l_3) + V_B = 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow -3,5 + V_B - 2(2 + 2) + 4 &= 0 \Leftrightarrow V_B = 7,5 \text{ кН.} \end{aligned}$$

**б) Построение эпюры поперечных сил рамы от действия заданной нагрузки.**

Разделим раму на шесть участков: 1 участок – левая стойка до точки приложения силы  $P$ ; 2 участок – верхняя часть левой стойки до шарнира  $ш_1$ ; 3 участок – левый ригель от шарнира  $ш_1$  до левого жесткой узла; 4 участок – от опоры Б до левого жесткой узла; 5 участок – от левого жесткой узла до шарнира  $ш_2$ ; 6 участок – от правого жесткой узла до шарнира  $ш_2$ .

Рассмотрим 1-ый участок. Мысленно вырежем нижнюю часть левой стойки длиной  $x$  и рассмотрим ее равновесие (рис. 2.18, а).

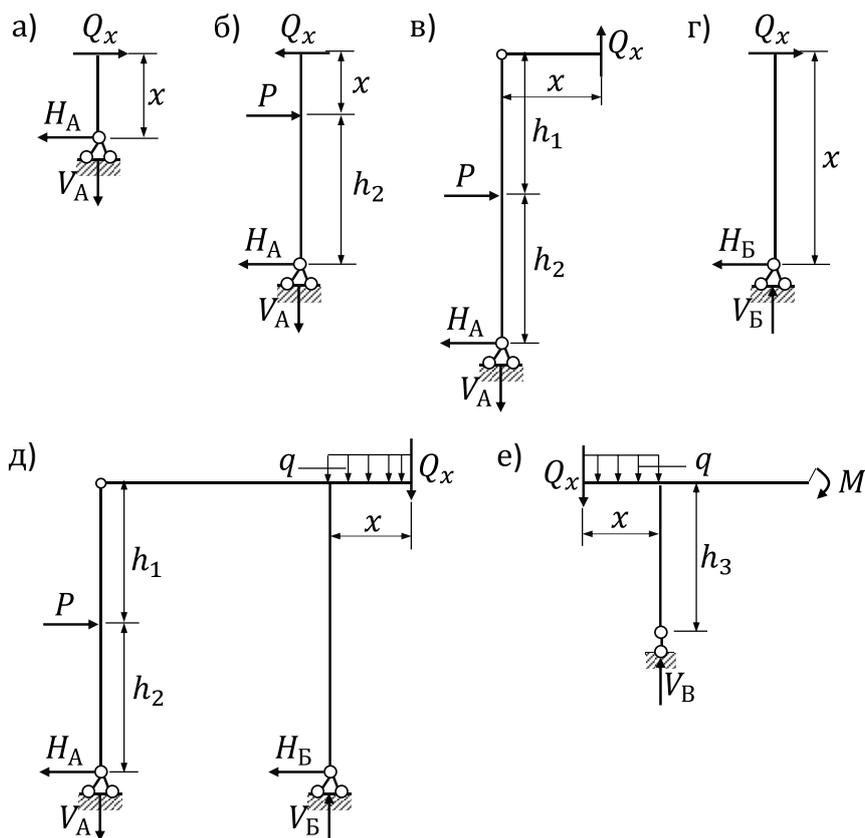


Рисунок 2.18. Схемы для определения поперечных сил.

Переменная  $x$  изменяется от 0 до 2. Сила  $H_A$  стремится повернуть сечение по часовой стрелке, значит по правилу знак поперечной силы на первом участке принимаем положительным:

$$Q_x = H_A \Leftrightarrow Q_x = 2,5 \text{ кН.}$$

Здесь значения поперечных сил не зависит от переменной  $x$ , поэтому эпюра поперечных сил на 1-ом участке параллельна оси стойки.

Рассмотрим 2-ой участок (рис. 2.18, б). Переменная  $x$  на 2-ом участке изменяется от точки приложения силы  $P$  до шарнира  $\pi_1$ .

Сила  $P$  стремится повернуть рассматриваемое сечение против часовой стрелки и по правилу знаков поперечные силы от этой силы принимаем отрицательными. Сила  $H_A$  стремится повернуть рассматриваемое сечение по часовой стрелке и по правилу знаков поперечные силы от этой силы принимаем положительными. Находим значение поперечных сил как алгебраическую сумму всех действующих сил:

$$Q_x = -P + H_A \Leftrightarrow Q_x = -5 + 2,5 \Leftrightarrow Q_x = -2,5 \text{ кН.}$$

Значения поперечных сил на втором участке также не зависит от переменной  $x$ , поэтому эпюра поперечных сил параллельна оси стойки.

Рассмотрим 3-ий участок (рис. 2.18, в). Переменная  $x$  на 3-ем участке изменяется от шарнира  $\pi_1$  до левого жесткой узла. Сила  $V_A$  стремится повернуть сечение против часовой стрелки (рис. 2.18, в), значит знак поперечной силы на третьем участке принимаем отрицательным:

$$Q_x = -V_A \Leftrightarrow Q_x = -3,5 \text{ кН.}$$

Поперечные силы на этом участке также не зависят от переменной  $x$ , поэтому эпюра параллельна оси стойки.

Рассмотрим 4-ый участок (рис. 2.18, г). Переменная  $x$  на 4-ом участке изменяется от опоры Б до левого жесткого узла. Сила  $H_B$  стремится повернуть сечение по часовой стрелке, значит знак поперечной силы на четвертом участке принимаем положительным:

$$Q_x = H_B \Leftrightarrow Q_x = 2,5 \text{ кН.}$$

Поперечные силы на 4-ом участке также не зависят от переменной  $x$ , поэтому эпюра параллельна оси второй стойки.

Рассмотрим 5-ый участок (рис. 2.18, д). Переменная  $x$  на 5-ом участке изменяется от левого жесткого узла до шарнира  $\Pi_2$ .

Силы  $V_A$  и  $qx$  стремятся повернуть рассматриваемое сечение против часовой стрелки и по правилу знаков поперечные силы от этих сил принимаем отрицательными. Сила  $V_B$  стремится повернуть рассматриваемое сечение по часовой стрелке и по правилу знаков поперечные силы от этой силы принимаем положительными. Находим значение поперечных сил как алгебраическую сумму всех действующих сил:

$$Q_x = V_B - V_A - qx \Leftrightarrow Q_x = 7,5 - 3,5 - 2x \Leftrightarrow Q_x = 4 - 2x.$$

Поперечные силы на 5-ом участке зависят от переменной  $x$  и изменяются по линейному закону. Находим значения поперечных сил в характерных точках:

$$\text{при } x = 0, Q_x = 4 \text{ кН;}$$

$$\text{при } x = 2, Q_x = 4 - 2 \cdot 2 \Leftrightarrow Q_x = 0.$$

Рассмотрим 6-ой участок (рис. 2.18, е). Переменная  $x$  на 6-ом участке изменяется от правого жесткого узла до шарнира  $\Pi_2$ .

Сила  $V_B$  стремится повернуть рассматриваемое сечение против часовой стрелки и по правилу знаков поперечные силы от этой силы принимаем отрицательными. Сила  $qx$  стремится повернуть рассматриваемое сечение по часовой стрелке и по правилу знаков поперечные силы от этой силы принимаем положительными. Находим значение поперечных сил как алгебраическую сумму всех действующих сил:

$$Q_x = -V_B + qx \Leftrightarrow Q_x = -4 + 2x.$$

Поперечные силы зависят от переменной  $x$ , поэтому находим их значения в характерных точках:

$$\text{при } x = 0, Q_x = -4 \text{ кН;}$$

$$\text{при } x = 2, Q_x = -4 + 2 \cdot 2 \Leftrightarrow Q_x = 0.$$

Окончательная эпюра поперечных сил  $Q$  построена на рис. 2.19.

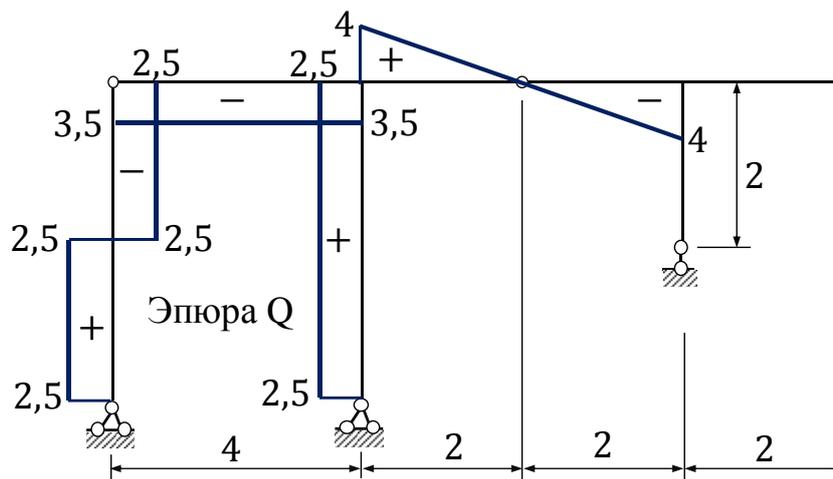


Рисунок 2.19– Эпюра поперечных сил.

**в) Построение эпюры изгибающих моментов рамы от действия заданной нагрузки.**

Рассмотрим 1-ый участок. Прикладываем внешнюю нагрузку и возникающий изгибающий момент  $M_x$  в месте сечения (рис. 2.20, а). Составим уравнение равновесия. Возьмем сумму моментов всех сил, действующих на мысленно вырезанную часть стойки, относительно сечения, расположенного на расстоянии  $x$  от опоры А. Определяем ординаты эпюры изгибающих моментов  $M$  нижней части левой стойки из уравнения равновесия:

$$\sum M_A = 0, H_A x - M_x = 0, M_x = H_A x \Leftrightarrow M_x = 2,5x.$$

Находим значения изгибающих моментов в характерных точках:

$$\text{при } x = 0, M_x = 0;$$

$$\text{при } x = 2, M_x = 2,5 \cdot 2 \Leftrightarrow M_x = 5 \text{ кНм.}$$

Рассмотрим теперь 2-ой участок. Прикладываем внешнюю нагрузку и возникающий изгибающий момент  $M_x$  в месте сечения (рис. 2.20, б). Возьмем сумму моментов всех сил, действующих на мысленно вырезанную часть стойки относительно сечения, расположенного на расстоянии  $x$  от точки приложения силы  $P$ . Определяем ординаты эпюры изгибающих моментов  $M$  верхней части левой стойки из уравнения равновесия:

$$\begin{aligned} \sum M = 0; H_A(x + h_2) - M_x - Px = 0 &\Leftrightarrow M_x = 2,5 \cdot (x + 2) - 5x \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow M_x = 5 - 2,5x. \end{aligned}$$

Находим значения изгибающих моментов в характерных точках:

$$\text{при } x = 0, M_x = 5;$$

$$\text{при } x = 2 \text{ м, } M_x = 5 - 2,5 \cdot 2 \Leftrightarrow M_x = 0.$$

Изгибающий момент в шарнире  $\text{ш}_1$  равен 0. Значит Эпюра на левой стойке построена правильно.

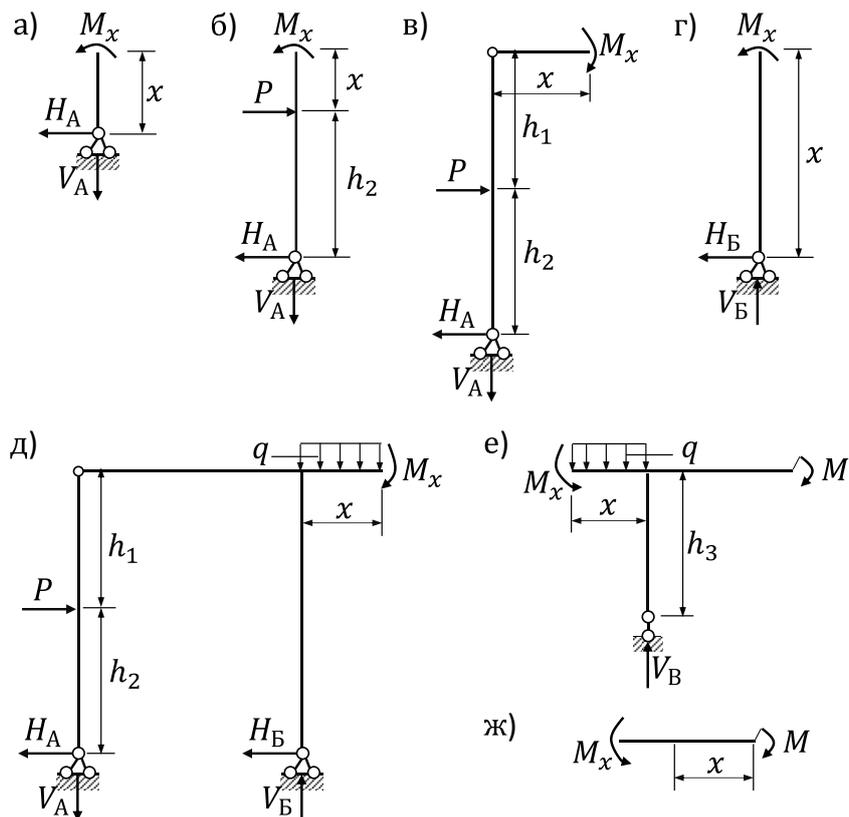


Рисунок 2.20.

Рассмотрим теперь 3-ий участок. Прикладываем внешнюю нагрузку и возникающий изгибающий момент  $M_x$  в месте сечения (рис. 2.20, в). Возьмем сумму моментов всех сил, действующих на мысленно вырезанную часть рамы относительно сечения, расположенного на расстоянии  $x$  от шарнира ш<sub>1</sub>. Определяем ординаты эпюры изгибающих моментов  $M$  ригеля до левого жесткого узла из уравнения равновесия:

$$\begin{aligned} \sum M = 0; H_A(h_1 + h_2) + M_x - Ph_1 - V_Ax = 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow M_x = 5 \cdot 2 + 3,5 \cdot x - 2,5 \cdot (2 + 2) \Leftrightarrow M_x = 3,5x. \end{aligned}$$

Находим значения изгибающих моментов в характерных точках:

при  $x = 0$ ,  $M_x = 0$ ;

при  $x = 4$  м,  $M_x = 3,5 \cdot 4 \Leftrightarrow M_x = 14$  кНм.

Рассмотрим 4-ый участок. Прикладываем внешнюю нагрузку и возникающий изгибающий момент  $M_x$  в месте сечения (рис. 2.20, г). Возьмем сумму моментов всех сил, действующих на мысленно вырезанную часть средней стойки относительно сечения, расположенного на расстоянии  $x$  от опоры Б. Определяем ординаты эпюры изгибающих моментов  $M$  стойки до левого жесткого узла из уравнения равновесия

$$\sum M = 0; H_Bx - M_x = 0 \Leftrightarrow M_x = 2,5 \cdot x.$$

Находим значения изгибающих моментов в характерных точках:

при  $x = 0$ ,  $M_x = 0$ ;

при  $x = 4$  м,  $M_x = 2,5 \cdot 4 \Leftrightarrow M_x = 10$  кНм.

Рассмотрим 5-ый участок. Прикладываем внешнюю нагрузку и возникающий изгибающий момент  $M_x$  в месте сечения (рис. 2.20, д).

Возьмем сумму моментов всех сил, действующих на мысленно вырезанную левую часть рамы относительно сечения, расположенного на расстоянии  $x$  от левого жесткого узла. Определяем ординаты эпюры изгибающих моментов  $M$  ригеля от левого жесткого узла до шарнира  $\pi_2$  из уравнения равновесия

$$\begin{aligned} \sum M = 0; H_A(h_1 + h_2) + M_x - Ph_1 - V_A(l_1 + x) + H_B(h_1 + h_2) + \\ + V_Bx - qx \frac{x}{2} = 0 \Leftrightarrow 2,5 \cdot (2 + 2) + M_x - 5 \cdot 2 - 3,5 \cdot (4 + x) + \\ + 2,5 \cdot (2 + 2) + 7,5 \cdot x - 2 \cdot x \frac{x}{2} = 0 \Leftrightarrow M_x = -10 + 10 + 14 - \\ -10 + 3,5x - 7,5x + x^2 \Leftrightarrow M_x = x^2 - 4x + 4. \end{aligned}$$

Находим значения изгибающих моментов в характерных точках:

при  $x = 0$ ,  $M_x = 4$  кНм;

при  $x = 2$  м,  $M_x = 0$ .

Рассмотрим 6-ой участок. Прикладываем внешнюю нагрузку и возникающий изгибающий момент  $M_x$  в месте сечения (рис. 2.20, е). Возьмем сумму моментов всех сил, действующих на мысленно вырезанную правую часть рамы относительно сечения, расположенного на расстоянии  $x$  от правого жесткого узла. Определяем ординаты эпюры изгибающих моментов  $M$  ригеля от правого жесткого узла до шарнира  $\pi_2$  из уравнения равновесия

$$\begin{aligned} \sum M = 0; M - M_x - V_Bx + qx \frac{x}{2} = 0 \Leftrightarrow 4 - M_x - 4x + 2 \cdot x \frac{x}{2} = 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow M_x = x^2 - 4x + 4. \end{aligned}$$

Находим значения изгибающих моментов в характерных точках:

при  $x = 0$ ,  $M_x = 4$  кНм;

при  $x = 2$  м,  $M_x = 0$ .

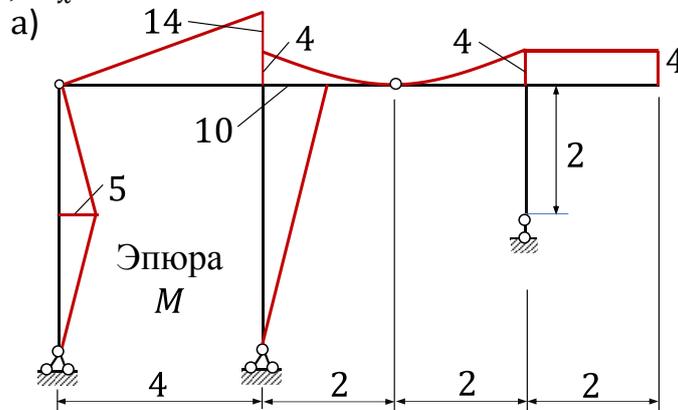


Рисунок 2.21– Эпюра изгибающих моментов.

Рассмотрим правую консоль. Прикладываем внешнюю нагрузку и возникающий изгибающий момент  $M_x$  в месте сечения (рис. 2.20, ж). Возьмем сумму моментов всех сил, действующих на мысленно вырезанную правую часть консоли относительно сечения, расположенного на расстоянии  $x$  от правого конца консоли. Определяем ординаты эпюры изгибающих моментов  $M$  консоли от правого конца ригеля из уравнения равновесия

$$\sum M = 0; M - M_x = 0 \Leftrightarrow M_x = M \Leftrightarrow M_x = 4.$$

Окончательная эпюра изгибающих моментов  $M$  построена на рис. 2.21.

## 2. Определить перемещения.

**Определение угла поворота сечения по формуле Мора.**

### а) Определим угол поворота сечения 2.

В сечении 2, расположенном на бесконечно близком расстоянии слева от жесткого узла (рис. 2.22, а), по направлению ожидаемого поворота прикладываем единичный сосредоточенный момент  $m = 1$  (рис. 2.22, б) и находим реакции опорных связей. Если возьмем сумму моментов всех сил, действующих на левую стойку, относительно шарнира  $\text{ш}_1$ , то получится, что опорная реакция  $H_A$  равна 0. Из уравнения равновесия всех сил, действующих на раму следует, что и опорная реакция  $H_B$  также равна 0. Если возьмем сумму моментов всех сил, действующих на правую часть рамы, относительно шарнира  $\text{ш}_2$ , то получится, что опорная реакция  $V_B$  равна 0. Следовательно, в стержнях правой части рамы изгибающие моменты равны 0. Тогда в сечениях стержня на участке от левого жесткого узла до шарнира  $\text{ш}_2$  изгибающие также равны 0. Оставшиеся опорные реакции  $V_A$  и  $V_B$  находим из уравнений равновесия относительно опорных шарниров А и Б:

$$\sum M_B = 0; m - V_A \cdot l_1 = 0 \Leftrightarrow V_A = \frac{m}{l_1} \Leftrightarrow V_A = \frac{1}{4};$$

$$\sum M_A = 0; m - V_B \cdot l_1 = 0 \Leftrightarrow V_B = \frac{m}{l_1} \Leftrightarrow V_B = \frac{1}{4}.$$

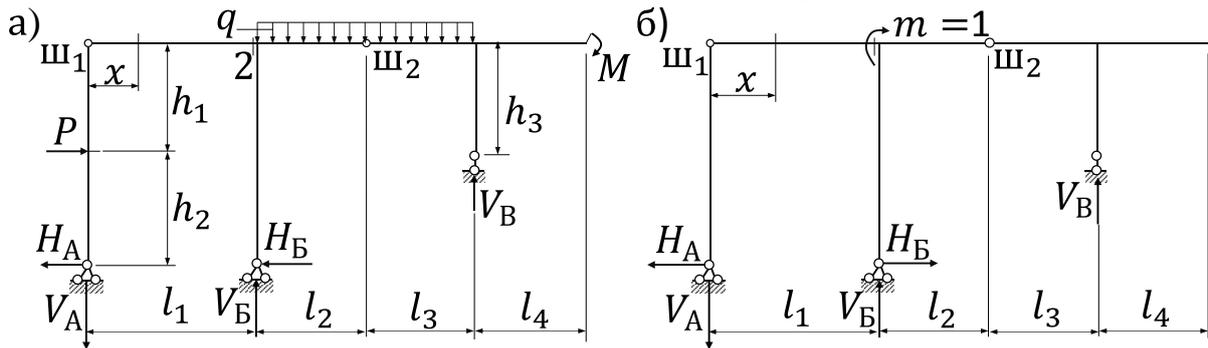


Рисунок 2.22– Схемы для определения угла поворота сечения 2.

Рассматриваем левую часть рамы. В ригеле, где расположено сечение 2, отмечаем произвольное сечение на расстоянии  $x$  от шарнира  $\text{ш}_1$  (рис. 2.22, а).

Находим выражения для изгибающих моментов от заданной нагрузки  $M_1$  как функции координат произвольного сечения  $x$  для ригеля до сечения 2 (рис. 2.22, а).

$$M_1 = H_A(h_1 + h_2) - Ph_1 - V_A x \Leftrightarrow M_1 = 2,5(2 + 2) - 5 \cdot 2 - 3,5x \Leftrightarrow M_1 = -3,5x.$$

Находим выражения для изгибающих моментов от единичного момента  $M_{11}$  как функции координат произвольного сечения  $x$ .

$$M_{11} = -V_A x \Leftrightarrow M_{11} = -\frac{1}{4}x.$$

Подставляем полученные выражения изгибающих моментов от заданной нагрузки и от единичного момента в формулу и интегрируем по участкам.

$$\gamma_2 = \frac{1}{EI} \int_0^4 M_{11} M_1 dx \Leftrightarrow \gamma_2 = \frac{1}{EI} \int_0^4 -\frac{1}{4} x (-3,5x) dx = \frac{1}{EI} \int_0^4 0,875 x^2 dx \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \gamma_2 = \frac{1}{EI} \cdot 0,875 \frac{x^3}{3} \Big|_0^4 \Leftrightarrow \gamma_2 = \frac{1}{EI} \cdot 0,875 \cdot \frac{64}{3} \Leftrightarrow \gamma_2 = \frac{56}{3EI}.$$

б) Определим угол поворота сечения 3.

В сечении 3 по направлению ожидаемого поворота (рис. 2.23, а) прикладываем единичный сосредоточенный момент  $m = 1$  (рис. 2.23, б) и находим реакции опорных связей. Опорные реакции  $H_A$ ,  $H_B$  и  $V_B$  равны 0 также, как и при определении угла поворота сечения 2.

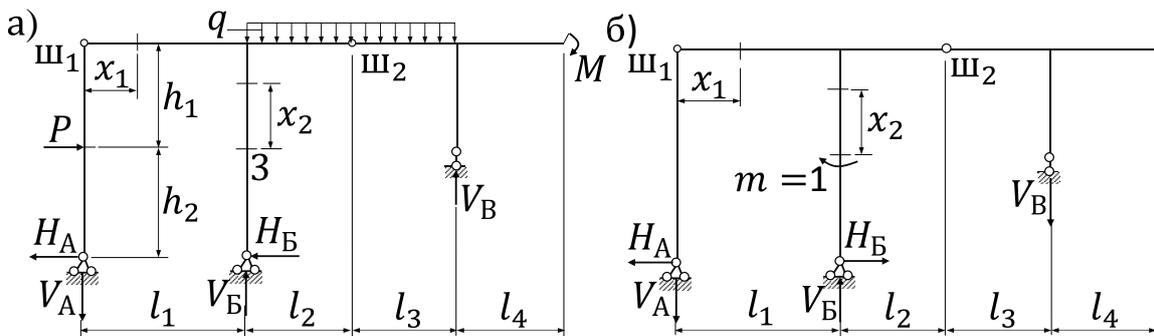


Рисунок 2.23– Схемы для определения угла поворота сечения 3.

Опорные реакции  $V_A$  и  $V_B$  находим из уравнений равновесия относительно опорных шарниров А и Б:

$$\sum M_B = 0; m - V_A \cdot l_1 = 0 \Leftrightarrow 1 - V_A \cdot 4 = 0 \Leftrightarrow V_A = \frac{1}{4};$$

$$\sum M_A = 0; m - V_B \cdot l_1 = 0 \Leftrightarrow 1 - V_B \cdot 4 = 0 \Leftrightarrow V_B = \frac{1}{4}.$$

Рассматриваем левую часть рамы. В ригеле отмечаем произвольные сечения на расстоянии  $x_1$  от шарнира ш<sub>1</sub>. В средней стойке – на расстоянии  $x_2$  от сечения 3 (рис. 2.23).

Находим выражения для изгибающих моментов  $M_1$  и  $M_2$  от заданной нагрузки как функций координат произвольных сечений  $x_1$  и  $x_2$  (рис. 2.23, а).

– для ригеля до левого жесткого узла

$$M_1 = H_A(h_1 + h_2) - Ph_1 - V_A x_1 \Leftrightarrow M_1 = 2,5(2 + 2) - 5 \cdot 2 - 3,5x_1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow M_1 = -3,5x_1;$$

– для средней стойки

$$M_2 = H_B(h_2 + x_2) \Leftrightarrow M_2 = 2,5(2 + x_2) \Leftrightarrow M_2 = 5 + 2,5x_2.$$

Находим выражения для изгибающих моментов  $M_{11}$  и  $M_{12}$  от единичного момента как функций координат произвольных сечений  $x_1$  и  $x_2$ .

$$M_{11} = -V_A x_1 \Leftrightarrow M_{11} = -\frac{1}{4} x_1;$$

$$M_{12} = m \Leftrightarrow M_{12} = 1.$$

Подставляем полученные выражения изгибающих моментов от заданной нагрузки  $M_1$  и  $M_2$  и от единичного момента  $M_{11}$  и  $M_{12}$  в формулу и интегрируем по участкам.

$$\gamma_3 = \frac{1}{EI} \int_0^4 M_{11} M_1 dx_1 + \frac{1}{EI} \int_0^2 M_{12} M_2 dx_2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \gamma_3 = \frac{1}{EI} \int_0^4 -\frac{1}{4} x_1 (-3,5x_1) dx_1 + \frac{1}{EI} \int_0^2 1(5 + 2,5x_2) dx_2 \Leftrightarrow$$

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow \gamma_3 &= \frac{1}{EI} \int_0^4 0,875x_1^2 dx_1 + \frac{1}{EI} \int_0^2 5dx_2 + \frac{1}{EI} \int_0^2 2,5x_2 dx_2 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \gamma_3 &= \frac{1}{EI} \left[ 0,875 \frac{x_1^3}{3} \Big|_0^4 + 5x_2 \Big|_0^2 + 2,5 \frac{x_2^2}{2} \Big|_0^2 \right] \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \gamma_3 &= \frac{1}{EI} \left( 0,875 \cdot \frac{4^3}{3} + 5 \cdot 2 + 2,5 \cdot \frac{2^2}{2} \right) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \gamma_3 &= \frac{1}{EI} \left( \frac{56}{3} + 10 + 5 \right) \Leftrightarrow \gamma_3 = \frac{101}{3EI}. \end{aligned}$$

**Определение прогиба сечения по формуле Мора.**

**а) Определим прогиб сечения 1.**

В сечении 1 по направлению ожидаемого прогиба прикладываем единичную сосредоточенную силу  $P = 1$  и находим реакции опорных связей. Если возьмем сумму моментов всех сил, действующих на правую часть рамы, относительно шарнира  $\text{ш}_2$ , то получится, что опорная реакция  $V_B$  равна 0. Следовательно, в стержнях правой части рамы изгибающие моменты равны 0. Тогда в сечениях стержня на участке от левого жесткого узла до шарнира  $\text{ш}_2$  изгибающие также равны 0. Из суммы моментов всех сил, действующих на левую стойку, относительно шарнира  $\text{ш}_1$  получим (рис. 2.24, б):

$$\begin{aligned} \sum M_{\text{ш}_1} &= 0; H_A(h_1 + h_2) - P \cdot h_1 = 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow H_A(2 + 2) - 1 \cdot 2 &= 0 \Leftrightarrow H_A = 1/2. \end{aligned}$$

Из суммы проекций на горизонтальную ось всех сил, действующих на раму следует, что и опорная реакция  $H_B$  также равна  $1/2$ . Опорные реакции  $V_A$  и  $V_B$  находим из уравнений равновесия относительно опорных шарниров А и Б:

$$\begin{aligned} \sum M_B = 0; P \cdot h_2 - V_A \cdot l_1 &= 0 \Leftrightarrow V_A = \frac{h_2}{l_1} \Leftrightarrow V_A = \frac{2}{4} \Leftrightarrow V_A = \frac{1}{2}; \\ \sum M_A = 0; P \cdot h_2 - V_B \cdot l_1 &= 0 \Leftrightarrow V_B = \frac{h_2}{l_1} \Leftrightarrow V_B = \frac{2}{4} \Leftrightarrow V_B = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

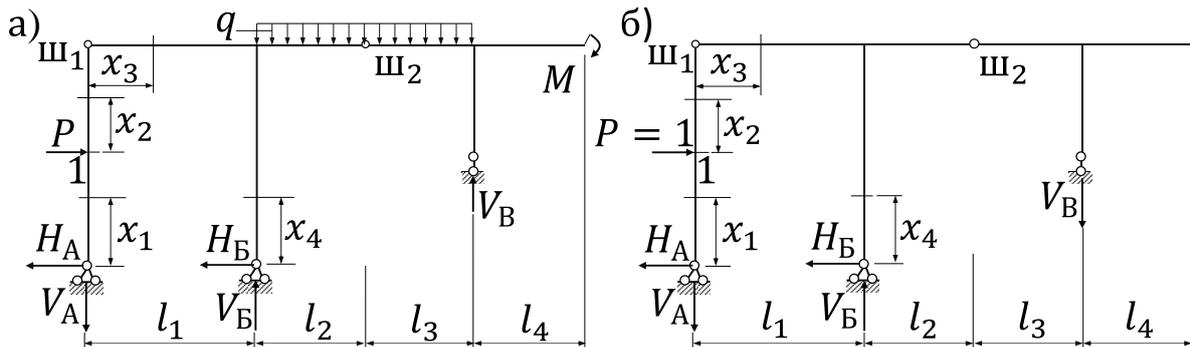


Рисунок 2.24– Схемы для определения прогиба сечения 1.

Рассматриваем левую часть рамы. В левой стойке на расстоянии  $x_1$  от опоры А отмечаем первое произвольное сечение и на расстоянии  $x_2$  от точки приложения силы  $P$  второе. В ригеле отмечаем произвольное сечение на расстоянии  $x_3$  от шарнира  $\text{ш}_1$ . В средней стойке – на расстоянии  $x_4$  от опоры Б (рис. 2.24).

Находим выражения для изгибающих моментов от заданной нагрузки  $M_1, M_2, M_3$  и  $M_4$  как функции координат произвольных сечений  $x_1, x_2, x_3$  и  $x_4$  (рис. 2.24, а).

$$M_1 = H_A x_1 \Leftrightarrow M_1 = 2,5x_1;$$

$$M_2 = H_A(x_2 + h_2) - P x_2 \Leftrightarrow M_2 = 5 - 2,5x_2;$$

$$M_3 = H_A(h_1 + h_2) - P h_1 - V_A x_3 \Leftrightarrow M_3 = -3,5x_3;$$

$$M_4 = H_B x_4 \Leftrightarrow M_4 = 2,5x_4;$$

Находим выражения для изгибающих моментов от единичной силы  $M_{11}, M_{12}, M_{13}$  и  $M_{14}$  как функции координат произвольных сечений  $x_1, x_2, x_3$  и  $x_4$  (рис. 2.24, б).

$$M_{11} = H_A x_1 \Leftrightarrow M_{11} = 0,5x_1;$$

$$M_{12} = H_A(x_2 + h_2) - P x_2 \Leftrightarrow M_{12} = 1 - 0,5x_2;$$

$$M_{13} = H_A(h_1 + h_2) - P h_1 - V_A x_3 \Leftrightarrow M_{13} = -0,5x_3;$$

$$M_{14} = H_B x_4 \Leftrightarrow M_{14} = 0,5x_4;$$

Подставляем полученные выражения изгибающих моментов от заданной нагрузки  $M_1, M_2, M_3$  и  $M_4$  и от единичной сосредоточенной силы  $M_{11}, M_{12}, M_{13}$  и  $M_{14}$  в формулу и интегрируем по участкам.

$$\begin{aligned} \delta_1 &= \frac{1}{EI} \int_0^2 M_{11} M_1 dx_1 + \frac{1}{EI} \int_0^2 M_{12} M_2 dx_2 + \frac{1}{EI} \int_0^2 M_{13} M_3 dx_3 + \\ &+ \frac{1}{EI} \int_0^4 M_{14} M_4 dx_4 \Leftrightarrow \delta_1 = \frac{1}{EI} \int_0^2 0,5x_1 2,5x_1 dx_1 + \\ &+ \frac{1}{EI} \int_0^2 (1 - 0,5x_2) \cdot (5 - 2,5x_2) dx_2 + \frac{1}{EI} \int_0^4 -0,5x_3 (-3,5x_3) dx_3 + \\ &+ \frac{1}{EI} \int_0^4 0,5x_4 2,5x_4 dx_4 \Leftrightarrow \delta_1 = \frac{1}{EI} \int_0^2 1,25x_1^2 dx_1 + \\ &+ \frac{1}{EI} \int_0^2 5 dx_2 - \frac{1}{EI} \int_0^2 2,5x_2 dx_2 - \frac{1}{EI} \int_0^2 2,5x_2 dx_2 + \\ &+ \frac{1}{EI} \int_0^2 1,25x_2^2 dx_2 + \frac{1}{EI} \int_0^4 1,75x_3^2 dx_3 + \frac{1}{EI} \int_0^4 1,25x_4^2 dx_4 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \delta_1 = \frac{1}{EI} \left( 1,25 \frac{x_1^3}{3} \Big|_0^2 + 5x_2 \Big|_0^2 - 2,5 \frac{x_2^2}{2} \Big|_0^2 - 2,5 \frac{x_2^2}{2} \Big|_0^2 + \right. \\ &\quad \left. + 1,25 \frac{x_2^3}{3} \Big|_0^2 + 1,75 \frac{x_3^3}{3} \Big|_0^4 + 1,25 \frac{x_4^3}{3} \Big|_0^4 \right) \Leftrightarrow \delta_1 = \\ &= \frac{1}{EI} \left( 1,25 \frac{8}{3} + 5 \cdot 2 - 2,5 \frac{4}{2} - 2,5 \frac{4}{2} + 1,25 \frac{8}{3} + 1,75 \frac{64}{3} + 1,25 \frac{64}{3} \right) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \delta_1 = \frac{1}{EI} \left( \frac{10}{3} + 10 - 5 - 5 + \frac{10}{3} + \frac{112}{3} + \frac{80}{3} \right) \Leftrightarrow \delta_1 = \frac{212}{3EI}. \end{aligned}$$

### б) Определим прогиб сечения 3.

В сечении 3 по направлению ожидаемого прогиба прикладываем единичную сосредоточенную силу  $P = 1$  и находим реакции опорных связей. Если возьмем сумму моментов всех сил, действующих на левую стойку и правую часть рамы, относительно шарниров  $\mathcal{H}_1$  и  $\mathcal{H}_2$ , то получим, что опорные реакции  $H_A$  и  $V_B$  равны 0. Следовательно, в стержнях правой части рамы изгибающие моменты равны 0.

Тогда в сечениях стержня на участке от левого жесткого узла до шарнира  $\mathcal{H}_2$  изгибающие также равны 0. Из суммы проекций всех сил, действующих на раму, на горизонтальную ось получим (рис. 2.25, б):

$$\sum x = 0; P - H_B = 0 \Leftrightarrow 1 - H_B = 0 \Leftrightarrow H_B = 1.$$

Опорные реакции  $V_A$  и  $V_B$  находим из уравнений равновесия относительно опорных шарниров А и Б:

$$\sum M_B = 0; P \cdot h_2 - V_A \cdot l_1 = 0 \Leftrightarrow V_A = \frac{h_2}{l_1} \Leftrightarrow V_A = \frac{2}{4} \Leftrightarrow V_A = \frac{1}{2};$$

$$\sum M_B = 0; P \cdot h_2 - V_B \cdot l_1 = 0 \Leftrightarrow V_B = \frac{h_2}{l_1} \Leftrightarrow V_B = \frac{2}{4} \Leftrightarrow V_B = \frac{1}{2}.$$

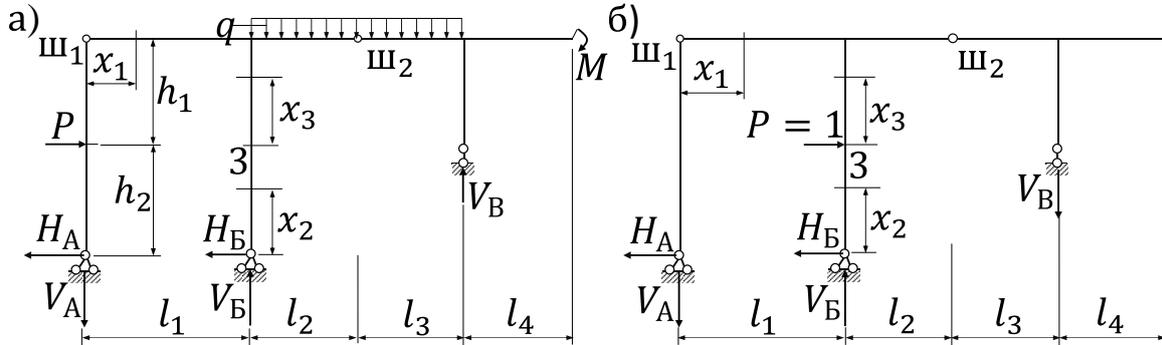


Рисунок. 2.25– Схемы для определения прогиба сечения 3.

Рассматриваем левую часть рамы. В ригеле отмечаем произвольное сечение на расстоянии  $x_1$  от шарнира ш<sub>1</sub>. В средней стойке на расстоянии  $x_2$  от опорного шарнира Б до сечения 3 и на расстоянии  $x_3$  от сечения 3 до верха средней стойки (рис. 2.25).

Находим выражения для изгибающих моментов  $M_1, M_2$  и  $M_3$  от заданной нагрузки как функции координат произвольных сечений  $x_1, x_2$  и  $x_3$  (рис. 2.25).

$$M_1 = H_A(h_1 + h_2) - Ph_1 - V_A x_1 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow M_1 = 2,5(2 + 2) - 5 \cdot 2 - 3,5x_1 \Leftrightarrow M_1 = -3,5x_1;$$

$$M_2 = H_B x_2 \Leftrightarrow M_2 = 2,5x_2 \Leftrightarrow M_2 = 2,5x_2;$$

$$M_3 = H_B(2 + x_3) \Leftrightarrow M_3 = 2,5(2 + x_3).$$

Находим выражения для изгибающих моментов  $M_{11}, M_{12}$  и  $M_{13}$  от единичной силы как функции координаты произвольных сечений  $x_1, x_2$  и  $x_3$  (рис. 2.25).

$$M_{11} = -V_A x_1 \Leftrightarrow M_{11} = -\frac{1}{2} x_1;$$

$$M_{12} = H_B x_2 \Leftrightarrow M_{12} = 1 \cdot x_2 \Leftrightarrow M_{12} = x_2;$$

$$M_{13} = H_B(h_2 + x_3) - P x_3 \Leftrightarrow M_{13} = 1 \cdot (2 + x_3) - 1 \cdot x_3 \Leftrightarrow M_{13} = 2.$$

Подставляем полученные выражения изгибающих моментов от заданной нагрузки и от единичной сосредоточенной силы в формулу и интегрируем по участкам.

$$\delta_3 = \frac{1}{EI} \int_0^4 M_{11} M_1 dx_1 + \frac{1}{EI} \int_0^2 M_{12} M_2 dx_2 + \frac{1}{EI} \int_0^2 M_{13} M_3 dx_3 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \delta_3 = \frac{1}{EI} \int_0^4 -\frac{1}{2} \cdot x_1 \cdot (-3,5 \cdot x_1) dx_1 + \frac{1}{EI} \int_0^2 x_2 \cdot 2,5x_2 dx_2 + \\ + \frac{1}{EI} \int_0^2 2 \cdot 2,5(2 + x_3) dx_3 \Leftrightarrow \delta_3 = \frac{1}{EI} \int_0^4 1,75x_1^2 dx_1 + \frac{1}{EI} \int_0^2 2,5x_2^2 dx_2 + \\ + \frac{1}{EI} \int_0^2 10 dx_3 + \frac{1}{EI} \int_0^2 5x_3 dx_3 \Leftrightarrow \delta_3 = \frac{1}{EI} \left( 1,75 \frac{x_1^3}{3} \Big|_0^4 + 2,5 \frac{x_2^3}{3} \Big|_0^2 + \right. \\ \left. + 10x_3 \Big|_0^2 + 5 \frac{x_3^2}{2} \Big|_0^2 \right) \Leftrightarrow \delta_3 = \frac{1}{EI} \left( 1,75 \cdot \frac{64}{3} + 2,5 \cdot \frac{8}{3} + \right.$$

$$+10 \cdot 2 + 5 \cdot 2) \Leftrightarrow \delta_3 = \frac{74}{EI}.$$

**Определение прогиба сечения способом Верещагина.**

**а) Определим прогиб сечения 1.**

Эпюра изгибающих моментов от заданной нагрузки  $M_n$  построена на рис. 2.21.

Опорные реакции всех связей от действия единичной силы найдены при определении прогиба сечения 1 по формуле Мора:

$$H_A = H_B \Leftrightarrow H_A = \frac{1}{2}; V_A = V_B \Leftrightarrow V_A = \frac{1}{2}.$$

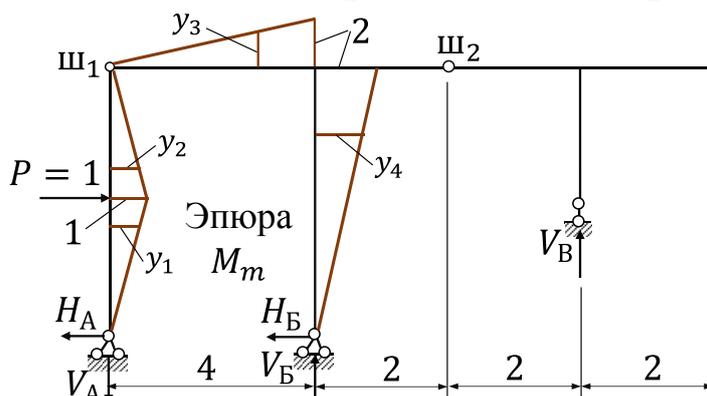


Рисунок 2.26– Эпюра для определения прогиба сечения 1.

Построим эпюру изгибающих моментов  $M_m$  от единичной силы  $P = 1$  (рис. 2.26):

1) От опоры А до точки приложения единичной силы

$$M_m = H_A x \Leftrightarrow M_m = h_2 x.$$

Находим значения изгибающих моментов в характерных точках:

при  $x = 0$ ,  $M_m = 0$ ;

при  $x = 2$ ,  $M_m = \frac{1}{2} \cdot 2 \Leftrightarrow M_m = 1$ ;

2) От точки приложения единичной силы до шарнира ш<sub>1</sub>

$$M_m = H_A(x + h_2) - Px \Leftrightarrow M_m = \frac{1}{2}(x + 2) - 1x \Leftrightarrow M_m = 1 - \frac{1}{2}x.$$

Находим значения изгибающих моментов в характерных точках:

при  $x = 0$ ,  $M_m = 1$ ;

при  $x = 2$ ,  $M_m = 1 - \frac{1}{2} \cdot 2 \Leftrightarrow M_m = 0$ ;

3) От шарнира ш<sub>1</sub> до левого жесткого узла

$$\begin{aligned} M_m &= H_A(h_1 + h_2) - Ph_1 - V_A x \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow M_m = \frac{1}{2}(2 + 2) - 1 \cdot 2 - \frac{1}{2}x \Leftrightarrow M_m = -\frac{1}{2}x. \end{aligned}$$

Находим значения изгибающих моментов в характерных точках:

при  $x = 0$ ,  $M_m = 0$ ;

при  $x = 4$ ,  $M_m = -\frac{1}{2} \cdot 4 \Leftrightarrow M_m = -2$ ;

4) От опоры Б до левого жесткого узла

$$M_m = -H_B x \Leftrightarrow M_m = -\frac{1}{2}x.$$

Находим значения изгибающих моментов в характерных точках:

при  $x = 0, M_m = 0$ ;  
 при  $x = 4, M_m = -\frac{1}{2} \cdot 4 \Leftrightarrow M_m = -2$ .

Эпюры изгибающих моментов  $M_n$  и  $M_m$  в сечениях ригеля и стоек имеют треугольные формы. Разделим их на 4 участка и определим площади ( $\omega_1$  и  $\omega_2$  – левой стойки,  $\omega_3$  – левого ригеля и  $\omega_4$  – средней стойки) участков эпюры  $M_n$  (рис. 2.21) и ординаты под их центрами тяжести на эпюрах  $M_m$  (рис. 2.27):

$$\omega_1 = \omega_2 = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 2 = 5, \omega_3 = \frac{1}{2} \cdot 14 \cdot 4 = 28, \omega_4 = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 4 = 20;$$

$$y_1 = y_2 = \frac{2}{3} \cdot 1 = \frac{2}{3}, y_3 = y_4 = \frac{2}{3} \cdot 2 = \frac{4}{3}.$$

Таким образом, прогиб сечения 1 равен

$$\delta_1 = \sum \frac{1}{EI} \omega_n y_m \Leftrightarrow \delta_1 = \frac{1}{EI} \cdot (\omega_1 \cdot y_1 + \omega_2 \cdot y_2 + \omega_3 \cdot y_3 + \omega_4 \cdot y_4) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \delta_1 = \frac{1}{EI} \cdot \left( 5 \cdot \frac{2}{3} + 5 \cdot \frac{2}{3} + 28 \cdot \frac{4}{3} + 20 \cdot \frac{4}{3} \right) \Leftrightarrow \delta_1 = \frac{212}{3EI}.$$

Результаты, полученные по формуле Мора и способом Верещагина, совпадают.

### б) Определим прогиб сечения 3.

Эпюра изгибающих моментов от заданной нагрузки  $M_n$  построена на рис. 2.21. Опорные реакции связей от действия единичной силы найдены при определении прогиба сечения 3 по формуле Мора:

$$H_A = 0, V_B = 0, H_B = 1, V_A = V_B = \frac{1}{2}.$$

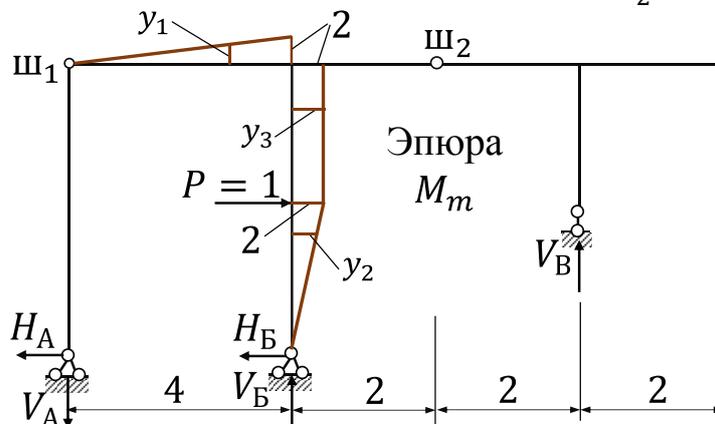


Рисунок 2.27– Эпюра для определения прогиба сечения 3.

Построим эпюру изгибающих моментов  $M_m$  от единичной силы  $P = 1$  (рис. 2.27):

1) От шарнира  $\text{ш}_1$  до левого жесткого узла

$$M_m = -V_A x \Leftrightarrow M_m = -\frac{1}{2} x.$$

Находим значения изгибающих моментов в характерных точках:

при  $x = 0, M_m = 0$ ;

при  $x = 4, M_m = -\frac{1}{2} \cdot 4 \Leftrightarrow M_m = -2$ ;

2) От опоры Б до точки приложения единичной силы

$$M_m = -H_B x \Leftrightarrow M_m = -1 \cdot x \Leftrightarrow M_m = -x.$$

Находим значения изгибающих моментов в характерных точках:

при  $x = 0, M_m = 0$ ;

при  $x = 2, M_m = -1 \cdot 2 \Leftrightarrow M_m = -2$ ;

3) От точки приложения единичной силы до левого жесткого узла

$$M_m = -H_B(x + h_2) + Px \Leftrightarrow M_m = -1 \cdot (x + 2) + 1 \cdot x \Leftrightarrow M_m = -2.$$

На данном участке средней стойки значения изгибающих моментов от единичной силы не зависят от переменной  $x$ , поэтому эпюра параллельна оси стойки.

Эпюры изгибающих моментов  $M_n$  и  $M_m$  разделим на 3 участка и определим площади ( $\omega_1$  – левого ригеля,  $\omega_2$  и  $\omega_3$  – нижней и верхней части средней стойки соответственно) участков эпюры  $M_n$  (рис. 2.21) и ординаты под их центрами тяжести на эпюрах  $M_m$  (рис. 2.27):

$$\omega_1 = \frac{1}{2} \cdot 14 \cdot 4 \Leftrightarrow \omega_1 = 28; \omega_2 = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 2 \Leftrightarrow \omega_2 = 5;$$

$$\omega_3 = \frac{1}{2} \cdot (10 + 5) \cdot 2 \Leftrightarrow \omega_3 = 15;$$

$$y_1 = \frac{2}{3} \cdot 2 \Leftrightarrow y_1 = \frac{4}{3}, y_2 = \frac{2}{3} \cdot 2 \Leftrightarrow y_2 = \frac{4}{3}, y_3 = 2.$$

Таким образом, прогиб сечения 1 равен

$$\begin{aligned} \delta_1 &= \sum \frac{1}{EI} \omega_n y_m \Leftrightarrow \delta_1 = \frac{1}{EI} \cdot (\omega_1 \cdot y_1 + \omega_2 \cdot y_2 + \omega_3 \cdot y_3) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \delta_1 = \frac{1}{EI} \cdot \left( 28 \cdot \frac{4}{3} + 5 \cdot \frac{4}{3} + 15 \cdot 2 \right) \Leftrightarrow \delta_1 = \frac{74}{EI}. \end{aligned}$$

Результаты, полученные по формуле Мора и способом Верещагина, совпадают.

**Определение угол поворота сечения способом Верещагина.**

**а) Определим угол поворота сечения 2.**

Эпюра изгибающих моментов от заданной нагрузки  $M_n$  построена на рис. 2.21. Опорные реакции связей от действия единичного момента найдены при определении угол поворота сечения 2 по формуле Мора:

$$H_A = H_B = 0; V_B = 0; V_A = V_B = \frac{1}{4}.$$

Изгибающие моменты в сечениях левой и средней стойках и стержнях правой части рамы не возникают в силу равенства нулю опорных реакций  $H_A, H_B$  и  $V_B$ . Построим эпюру изгибающих моментов  $M_m$  в ригеле от шарнира  $\pi_1$  до левого жесткого узла от действия единичного момента  $m = 1$ :

$$M_m = -V_A x \Leftrightarrow M_m = -\frac{1}{4} x.$$

Находим значения изгибающих моментов в характерных точках:

при  $x = 0, M_m = 0$ ;

при  $x = 4, M_m = -\frac{1}{4} \cdot 4 \Leftrightarrow M_m = -1.$

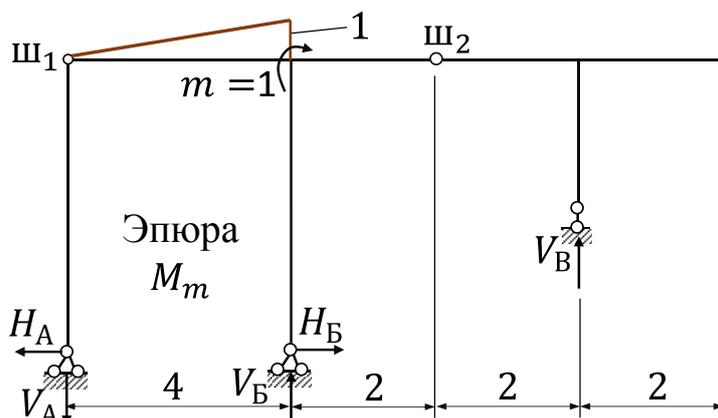


Рисунок 2.28– Эпюра для определения угла поворота сечения 2.

Эпюры изгибающих моментов  $M_n$  и  $M_m$  в ригеле имеют треугольные формы. Определим площадь эпюры ( $\omega$  – левого ригеля)  $M_n$  и ординату под ее центром тяжести на эпюре  $M_m$ :

$$\omega = \frac{1}{2} \cdot 14 \cdot 4 \Leftrightarrow \omega = 28 \text{ и } y = \frac{2}{3} \cdot 1 \Leftrightarrow y = \frac{2}{3}.$$

Таким образом, угол поворота сечения 2 равен

$$\gamma_3 = \sum \frac{1}{EI} \omega_n y_m \Leftrightarrow \gamma_3 = \frac{1}{EI} \cdot \omega \cdot y \Leftrightarrow \gamma_3 = \frac{1}{EI} \cdot 28 \cdot \frac{2}{3} \Leftrightarrow \gamma_3 = \frac{56}{3EI}.$$

Результаты, полученные по формуле Мора и способом Верещагина, совпадают.

### б) Определим угол поворота сечения 3.

Эпюра изгибающих моментов от заданной нагрузки  $M_n$  построена на рис. 2.21. Опорные реакции связей от действия единичного момента найдены при определении угол поворота сечения 3 по формуле Мора:  $H_A = H_B = 0$ ,  $V_B = 0$ ,  $V_A = V_B = \frac{1}{4}$ .

Изгибающие моменты в сечениях левой и нижней части средней стойки и стержнях правой части рамы не возникают в силу равенства нулю опорных реакций  $H_A$ ,  $H_B$  и  $V_B$ . Построим эпюру изгибающих моментов  $M_m$  в ригеле от шарнира  $\text{ш}_1$  до левого жесткого узла и в верхней части средней стойки от действия единичного момента  $m = 1$ :

$$M_m = -V_A x \Leftrightarrow M_m = -\frac{1}{4} x.$$

Находим значения изгибающих моментов в характерных точках:

при  $x = 0$ ,  $M_m = 0$ ;

при  $x = 4$ ,  $M_m = -\frac{1}{4} \cdot 4 \Leftrightarrow M_m = -1$ .

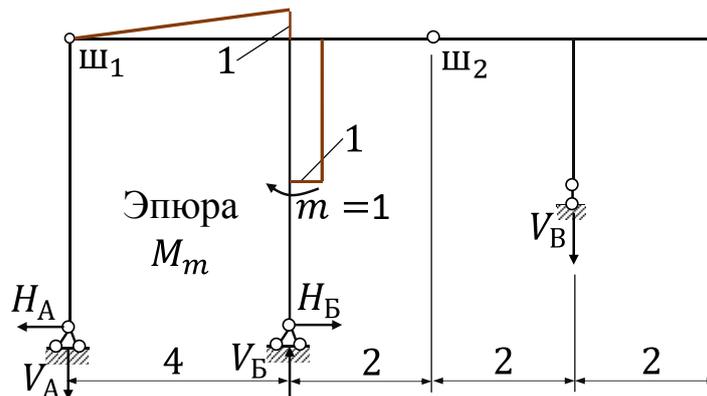


Рисунок 2.29– Эпюра для определения угла поворота сечения 3.

Эпюры изгибающих моментов  $M_n$  и  $M_m$  в ригеле имеют треугольные формы. Определим площадь эпюры ( $\omega_1$ )  $M_n$  и ординату под ее центром тяжести на эпюре  $M_m$ :

$$\omega_1 = \frac{1}{2} \cdot 14 \cdot 4 \Leftrightarrow \omega_1 = 28 \text{ и } y_1 = \frac{2}{3} \cdot 1 \Leftrightarrow y_1 = \frac{2}{3}.$$

Эпюры изгибающих моментов  $M_n$  в верхней части средней стойки ( $\omega_2$ ) имеет форму трапеции, а эпюра  $M_m$  – прямоугольную. Определим площадь эпюры ( $\omega_2$ )  $M_n$  и ординату под ее центром тяжести на эпюре  $M_m$ :

$$\omega_2 = \frac{1}{2} \cdot (10 + 5) \cdot 2 \Leftrightarrow \omega_2 = 15 \text{ и } y_2 = 1.$$

Таким образом, угол поворота сечения 2 равен

$$\begin{aligned} \gamma_3 &= \sum \frac{1}{EI} \omega_n y_m \Leftrightarrow \gamma_3 = \frac{1}{EI} (\omega_1 y_1 + \omega_2 y_2) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \gamma_3 = \frac{1}{EI} \left( 28 \cdot \frac{2}{3} + 15 \cdot 1 \right) \Leftrightarrow \gamma_3 = \frac{101}{3EI}. \end{aligned}$$

Результаты, полученные по формуле Мора и способом Верещагина, совпадают.

**Пример 2.3.** Для статически определимой рамы, приведенной на рис. 2.30:

- 1) построить эпюры изгибающих моментов и поперечных сил:
  - а) определить реакции всех связей рамы от действия заданной нагрузки;
  - б) построить эпюру поперечных сил от действия заданной нагрузки;
  - в) построить эпюру изгибающих моментов от действия заданной нагрузки;
- 2) определить перемещения используя формулу Мора и способ Верещагина.
  - а) определить угол поворота для сечений «2 и 3»;
  - б) определить прогиб для сечений «1 и 2».

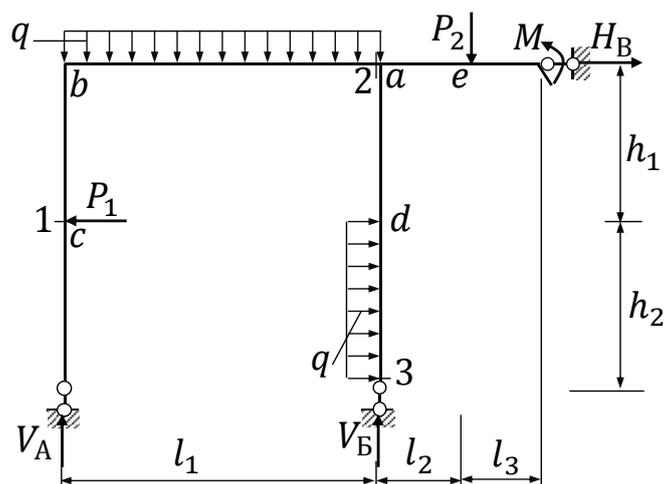


Рисунок 2.30– Схема статически определимой рамы.

Исходные данные:  $h_1 = 2$  м,  $h_2 = 2$  м,  $l_1 = 4$  м,  $l_2 = 1$  м,  $l_3 = 1$  м,  $q = 2$  кН/м,  $M = 8$  кНм,  $P_1 = 5$  кН,  $P_2 = 4$  кН.

**1. Построить эпюры изгибающих моментов и поперечных сил.**

**а) Определение реакций всех связей рамы от действия заданной нагрузки.**

Опорные реакции  $V_A$ ,  $V_B$  и  $H_B$  определяем из уравнений равновесия (рис. 2.30):

$$\begin{aligned} \sum x = 0; H_B - P_1 + qh_2 = 0 &\Leftrightarrow H_B = P_1 - qh_2 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow H_B = 5 - 2 \cdot 2 \Leftrightarrow H_B = 1 \text{ кН.} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum M_A = 0; -M - P_1h_2 + P_2(l_1 + l_2) - V_B l_1 + ql_1 \frac{l_1}{2} + qh_2 \frac{h_2}{2} + \\ + H_B (h_1 + h_2) = 0 &\Leftrightarrow -8 - 5 \cdot 2 + 4 \cdot (4 + 1) - V_B \cdot 4 + 2 \cdot 4 \cdot \frac{4}{2} + \\ + 2 \cdot 2 \cdot \frac{2}{2} + 1 \cdot (2 + 2) = 0 &\Leftrightarrow V_B = \frac{26}{4} \Leftrightarrow V_B = 6,5 \text{ кН;} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum y = 0; -V_A - V_B + ql_1 + P_2 = 0 &\Leftrightarrow -V_A - 6,5 + \\ + 2 \cdot 4 + 4 = 0 &\Leftrightarrow V_A = 5,5 \text{ кН.} \end{aligned}$$

**б) Построение эпюры поперечных сил рамы от действия заданной нагрузки.**

Разделим раму на семь участков: 1 участок  $Ac$  – левая стойка от опоры А до точки  $c$ , где приложена сила  $P_1$ ; 2 участок  $cb$  – верхняя часть левой стойки от точки  $c$  до жесткого узла  $b$ ; 3 участок  $ba$  – ригель от точки  $b$  до правого жесткого узла  $a$ ; 4 участок  $Bd$  – от опоры В до точки  $d$ ; 5 участок  $da$  – от точки  $d$  до жесткого узла  $a$ ; 6 участок  $eB$  – от точки  $e$  до опоры В; 7 участок  $ae$  – от узла  $a$  до точки  $e$ .

На 1-ом и 6-ом участках опоры А и В являются шарнирно-подвижными и имеют возможность горизонтального (опора А) и вертикального (опора В) перемещения. Поэтому в сечениях этих участков поперечные силы не возникают.

Рассмотрим 2-ой участок (рис. 2.31, а). Переменная  $x$  на 2-ом участке изменяется от точки приложения силы  $P_1$  до жесткого узла  $b$ .

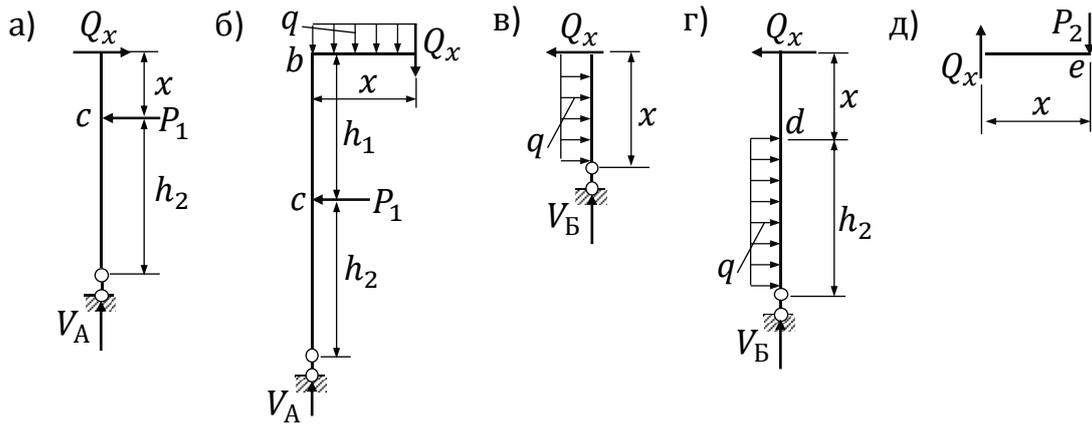


Рисунок 2.31– Схемы для определения поперечных сил.

Сила  $P_1$  стремится повернуть рассматриваемое сечение по часовой стрелке и по правилу знаков поперечные силы от этой силы принимаем положительными:

$$Q_x = P_1 \Leftrightarrow Q_x = 5 \text{ кН.}$$

Значения поперечных сил на втором участке не зависит от переменной  $x$ , поэтому эпюра поперечных сил параллельна оси стойки.

Рассмотрим 3-ий участок (рис. 2.31, б). Переменная  $x$  на 3-ем участке изменяется от точки  $b$  до правого жесткой узла  $a$ .

Сила  $qx$  стремится повернуть рассматриваемое сечение против часовой стрелки и по правилу знаков поперечные силы от этой силы принимаем отрицательными. Сила  $V_A$  стремится повернуть рассматриваемое сечение по часовой стрелке и по правилу знаков поперечные силы от этой силы принимаем положительными. Находим значение поперечных сил как алгебраическую сумму всех действующих сил:

$$Q_x = V_A - qx \Leftrightarrow Q_x = 5,5 - 2x.$$

Поперечные силы зависят от переменной  $x$ , поэтому находим их значения в характерных точках:

$$\text{при } x = 0, Q_x = 5,5 \text{ кН;}$$

$$\text{при } x = 4, Q_x = 5,5 - 2 \cdot 4 \Leftrightarrow Q_x = -2,5 \text{ кН.}$$

Рассмотрим 4-ый участок (рис. 2.31, в). Переменная  $x$  на 4-ом участке изменяется от опоры Б до точки  $d$ .

Сила  $qx$  стремится повернуть рассматриваемое сечение против часовой стрелки и по правилу знаков поперечные силы от этой силы принимаем отрицательными:

$$Q_x = -qx \Leftrightarrow Q_x = -2x.$$

Поперечные силы на 4-ом участке зависят от переменной  $x$ , поэтому находим их значения в характерных точках:

$$\text{при } x = 0, Q_x = 0;$$

$$\text{при } x = 2, Q_x = 2 \cdot 2 \Leftrightarrow Q_x = 4 \text{ кН.}$$

Рассмотрим 5-ый участок (рис. 2.31, г). Переменная  $x$  на 5-ом участке изменяется от точки  $d$  до узла  $a$ .

Сила  $qx$  стремится повернуть рассматриваемое сечение против часовой стрелки и по правилу знаков поперечные силы от этой силы принимаем отрицательными:

$$Q_x = qh_2 \Leftrightarrow Q_x = 2 \cdot 2 \Leftrightarrow Q_x = 4 \text{ кН.}$$

Поперечные силы на 5-ом участке не зависят от переменной  $x$  и эпюра поперечных сил параллельна оси стойки.

Рассмотрим 7-ой участок (рис. 2.31, д). Переменная  $x$  на 7-ом участке изменяется от точки  $e$  до узла  $a$ .

Сила  $P_2$  стремится повернуть рассматриваемое сечение против часовой стрелки и по правилу знаков поперечные силы от этой силы принимаем отрицательными:

$$Q_x = -P_2 \Leftrightarrow Q_x = -4 \text{ кН.}$$

Поперечные силы на 6-ом участке не зависят от переменной  $x$  и эпюра поперечных сил параллельна оси ригеля.

Окончательная эпюра поперечных сил  $Q$  построена на рис. 2.32.

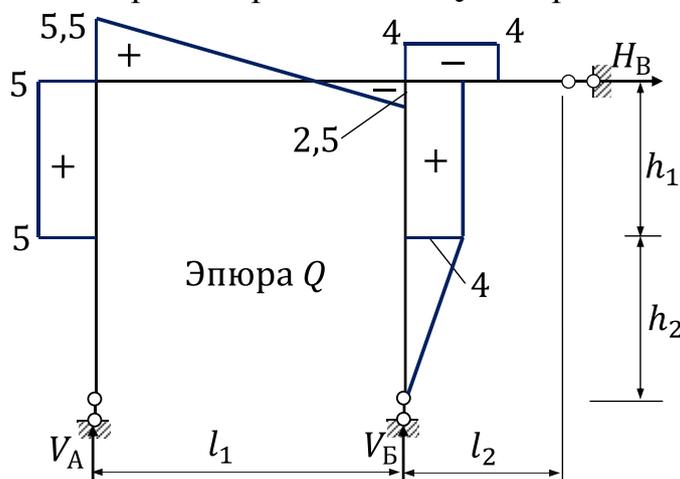


Рисунок 2.32– Эпюра поперечных сил от заданной нагрузки.

**в) Построение эпюры изгибающих моментов рамы от действия заданной нагрузки.**

Рассмотрим 2-ой участок. Прикладываем внешнюю нагрузку и возникающий изгибающий момент  $M_x$  в месте сечения (рис. 2.33, а). Составим уравнение равновесия. Возьмем сумму моментов всех сил, действующих на мысленно вырезанную часть стойки, относительно сечения, расположенного на расстоянии  $x$  от точки  $c$ . Определяем ординаты эпюры изгибающих моментов  $M$ :

$$\sum M_A = 0, P_1x - M_x = 0 \Leftrightarrow M_x = P_1x \Leftrightarrow M_x = 5x.$$

Находим значения изгибающих моментов в характерных точках:

при  $x = 0, M_x = 0$ ;

при  $x = 2, M_x = 5 \cdot 2 \Leftrightarrow M_x = 10 \text{ кНм.}$

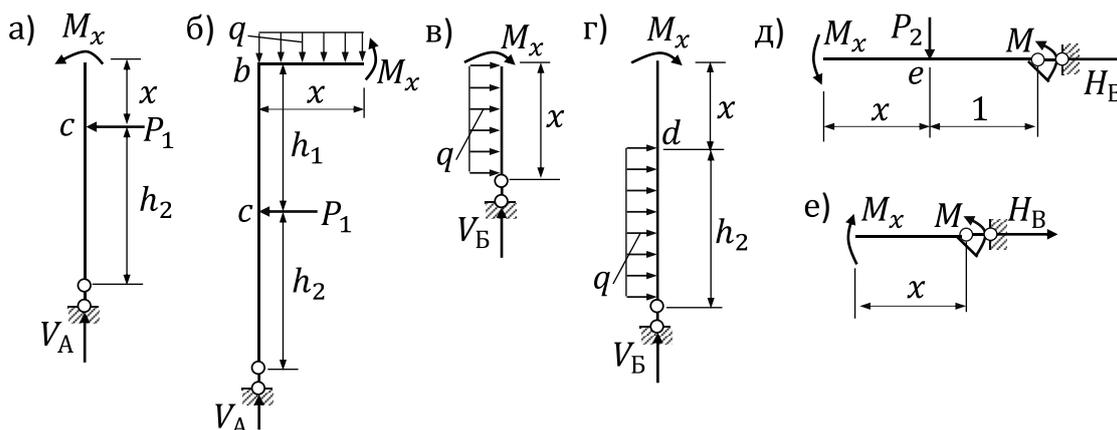


Рисунок 2.33– Схемы для определения изгибающих моментов.

Рассмотрим теперь 3-ий участок. Прикладываем внешнюю нагрузку и возникающий изгибающий момент  $M_x$  в месте сечения (рис. 2.33, б). Возьмем сумму моментов всех сил, действующих на мысленно вырезанную часть стойки с ригелем относительно сечения, расположенного на расстоянии  $x$  от левого жесткого узла  $a$ . Определяем ординаты эпюры изгибающих моментов  $M$ :

$$\begin{aligned} \sum M = 0; P_1 h_1 + V_A x - qx \frac{x}{2} - M_x = 0 &\Leftrightarrow M_x = 5 \cdot 2 + 5,5x - 2 \frac{x^2}{2} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow M_x = 10 - x^2 + 5,5x. \end{aligned}$$

Находим значения изгибающих моментов в характерных точках:

при  $x = 0$ ,  $M_x = 10$  кНм;

при  $x = 4$  м,  $M_x = 10 - 4^2 + 5,5 \cdot 4 \Leftrightarrow M_x = 16$  кНм.

Рассмотрим теперь 4-ый участок. Прикладываем внешнюю нагрузку и возникающий изгибающий момент  $M_x$  в месте сечения (рис. 2.33, в). Возьмем сумму моментов всех сил, действующих на мысленно вырезанную часть правой стойки относительно сечения, расположенного на расстоянии  $x$  от опоры Б. Определяем ординаты эпюры изгибающих моментов  $M$ :

$$\sum M = 0; M_x - qx \frac{x}{2} = 0 \Leftrightarrow M_x = 2 \cdot \frac{x^2}{2} \Leftrightarrow M_x = x^2.$$

Находим значения изгибающих моментов в характерных точках:

при  $x = 0$ ,  $M_x = 0$ ;

при  $x = 2$  м,  $M_x = 2^2 \Leftrightarrow M_x = 4$  кНм.

Рассмотрим 5-ый участок. Прикладываем внешнюю нагрузку и возникающий изгибающий момент  $M_x$  в месте сечения (рис. 2.33, г). Возьмем сумму моментов всех сил, действующих на мысленно вырезанную часть правой стойки относительно сечения, расположенного на расстоянии  $x$  от точки  $d$ . Определяем ординаты эпюры изгибающих моментов  $M$ :

$$\sum M = 0; M_x - qh_2 \left( \frac{h_2}{2} + x \right) = 0 \Leftrightarrow M_x = 2 \cdot 2 \cdot \left( \frac{2}{2} + x \right) \Leftrightarrow M_x = 4 + 4x.$$

Находим значения изгибающих моментов в характерных точках:

при  $x = 0$ ,  $M_x = 4$  кНм;

при  $x = 2$  м,  $M_x = 4 + 4 \cdot 2 \Leftrightarrow M_x = 12$  кНм.

Рассмотрим 6-ый участок. Прикладываем внешнюю нагрузку и возникающий изгибающий момент  $M_x$  в месте сечения (рис. 2.33, д). Возьмем сумму моментов всех сил, действующих на мысленно вырезанную левую часть рамы относительно сечения, расположенного на расстоянии  $x$  от точки  $e$ . Определяем ординаты эпюры изгибающих моментов  $M$ :

$$\sum M = 0; P_2x - M - M_x = 0 \Leftrightarrow M_x = P_2x - M \Leftrightarrow M_x = 4x - 8.$$

Находим значения изгибающих моментов в характерных точках:

при  $x = 0$ ,  $M_x = -8$  кНм;

при  $x = 1$  м,  $M_x = -4$  кНм.

Окончательная эпюра изгибающих моментов  $M$  построена на рис. 2.34.

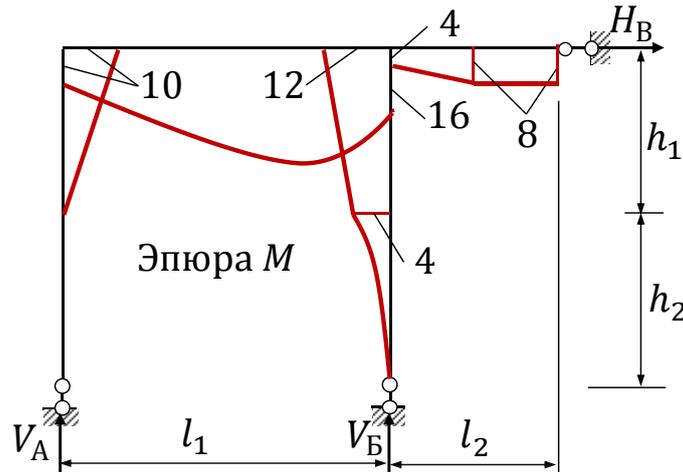


Рисунок 2.34— Эпюра изгибающих моментов от заданной нагрузки.

## 2. Определение перемещений по формуле Мора и способом Верещагина.

**Определение угла поворота сечения по формуле Мора.**

**б) Определим угол поворота сечения 1.**

В сечении 1 по направлению ожидаемого поворота прикладываем единичный сосредоточенный момент  $m = 1$  (рис. 2.35, б) и находим реакции опорных связей. Если спроектировать все силы, действующих на раму на горизонтальную ось, то получится, что опорная реакция  $H_B$  равна 0. Опорные реакции  $V_A$  и  $V_B$  находим из уравнений равновесия относительно опорных шарниров А и Б:

$$\sum M_B = 0; m - V_A \cdot l_1 = 0 \Leftrightarrow V_A = \frac{m}{l_1} \Leftrightarrow V_A = \frac{1}{4};$$

$$\sum M_A = 0; m - V_B \cdot l_1 = 0 \Leftrightarrow V_B = \frac{m}{l_1} \Leftrightarrow V_B \Leftrightarrow V_B = \frac{1}{4}.$$

В стойке, где расположено сечение 1, и в ригеле отмечаем произвольные сечения на расстоянии  $x_1$  и  $x_2$  от точки  $c$ , где приложен единичный момент, и точки  $b$  соответственно (рис. 2.35).

Находим выражения для изгибающих моментов  $M_1$  и  $M_2$  от заданной нагрузки как функции координат произвольных сечений  $x_1$  и  $x_2$  (рис. 2.35, а):

– для стойки от точки  $c$  до узла  $b$

$$M_1 = P_1x_1 \Leftrightarrow M_1 = 5x_1;$$

– для ригеля от точки  $b$  до узла  $a$

$$M_2 = P_1 h_1 + V_A x_2 - q x_2 \frac{x_2}{2} \Leftrightarrow M_2 = 5 \cdot 2 + 5,5 x_2 - 2 \cdot \frac{x_2^2}{2} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow M_2 = 10 + 5,5 x_2 - x_2^2.$$

Находим выражения для изгибающих моментов  $M_{11}$  и  $M_{12}$  от единичного момента как функции координат произвольных сечений  $x_1$  и  $x_2$  (рис. 2.35, б).

$$M_{11} = m = 1;$$

$$M_{12} = m - V_A x_2 \Leftrightarrow M_{12} = 1 - \frac{1}{4} x_2.$$

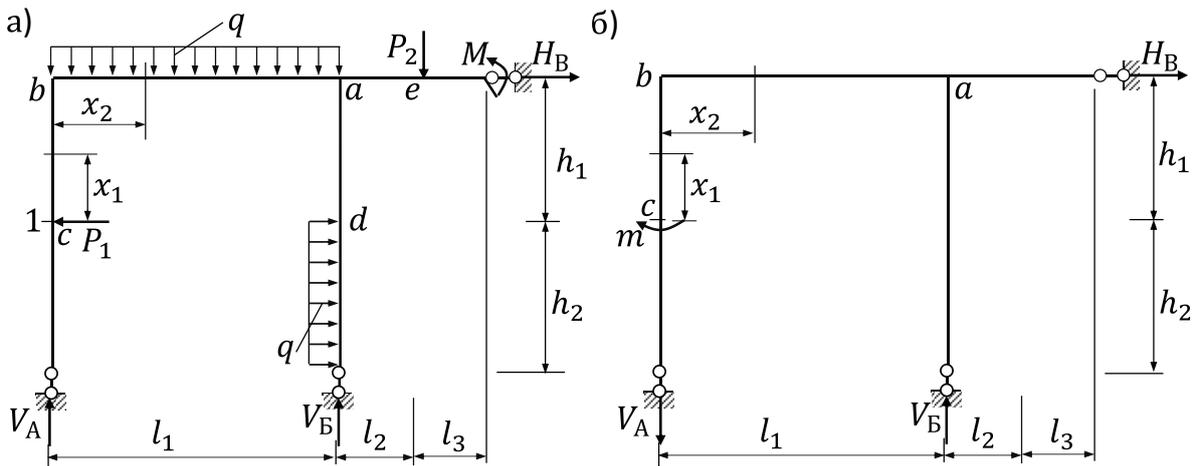


Рисунок 2.35– Схемы для определения угла поворота сечения 1.

Подставляем полученные выражения изгибающих моментов от заданной нагрузки и от единичного момента в формулу и интегрируем по участкам.

$$\gamma_1 = \frac{1}{EI} \int_0^2 M_{11} M_1 dx + \frac{1}{EI} \int_0^4 M_{12} M_2 dx \Leftrightarrow \gamma_1 = \frac{1}{EI} \int_0^2 1 \cdot 5x_1 dx_1 + \\ + \frac{1}{EI} \int_0^4 \left(1 - \frac{1}{4} x_2\right) \cdot (10 + 5,5 x_2 - x_2^2) dx_2 \Leftrightarrow \gamma_1 = \frac{1}{EI} \int_0^2 5x_1 dx_1 + \\ + \frac{1}{EI} \int_0^4 10 dx_2 + \frac{1}{EI} \int_0^4 5,5 x_2 dx_2 - \frac{1}{EI} \int_0^4 x_2^2 dx_2 - \frac{1}{EI} \int_0^4 2,5 x_2 dx_2 - \\ - \frac{1}{EI} \int_0^4 1,375 x_2^2 dx_2 + \frac{1}{EI} \int_0^4 0,25 x_2^3 dx_2 \Leftrightarrow \gamma_1 = \frac{1}{EI} \left(5 \int_0^2 x_1 dx_1 + \right. \\ \left. + 10 \int_0^4 dx_2 + 5,5 \int_0^4 x_2 dx_2 - \int_0^4 x_2^2 dx_2 - \frac{10}{4} \int_0^4 x_2 dx_2 - \right. \\ \left. - \frac{5,5}{4} \int_0^4 x_2^2 dx_2 + \frac{1}{4} \int_0^4 x_2^3 dx_2\right) \Leftrightarrow \gamma_1 = \frac{1}{EI} \left(5 \frac{x_1^2}{2} \Big|_0^2 + 10 x_2 \Big|_0^4 + \right. \\ \left. + 5,5 \frac{x_2^2}{2} \Big|_0^4 - \frac{x_2^3}{3} \Big|_0^4 - 2,5 \frac{x_2^2}{2} \Big|_0^4 - 1,375 \frac{x_2^3}{3} \Big|_0^4 + 0,25 \frac{x_2^4}{4} \Big|_0^4\right) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \gamma_1 = \frac{1}{EI} \left(5 \frac{2^2}{2} + 10 \cdot 4 + 5,5 \frac{4^2}{2} - \frac{4^3}{3} - 2,5 \frac{4^2}{2} - \right. \\ \left. - 1,375 \frac{4^3}{3} + 0,25 \frac{4^4}{4}\right) \Leftrightarrow \gamma_1 = \frac{118}{3EI}.$$

### б) Определим угол поворота сечения 2.

В сечении 2 по направлению ожидаемого поворота прикладываем единичный сосредоточенный момент  $m = 1$  (рис. 2.35, б) и находим реакции опорных связей. Если спроектировать все силы, действующих на раму на горизонтальную ось, то получится, что опорная реакция  $H_B$  равна 0. Опорные

реакции  $V_A$  и  $V_B$  находим из уравнений равновесия относительно опорных шарниров А и Б:

$$\begin{aligned}\sum M_B = 0; m - V_A \cdot l_1 = 0 &\Leftrightarrow V_A = \frac{m}{l_1} \Leftrightarrow V_A = \frac{1}{4}; \\ \sum M_A = 0; m - V_B \cdot l_1 = 0 &\Leftrightarrow V_B = \frac{m}{l_1} \Leftrightarrow V_B = \frac{1}{4}.\end{aligned}$$

В ригеле, где расположено сечение 2, отмечаем произвольное сечение на расстоянии  $x$  от жесткого узла  $b$ , (рис. 2.36).

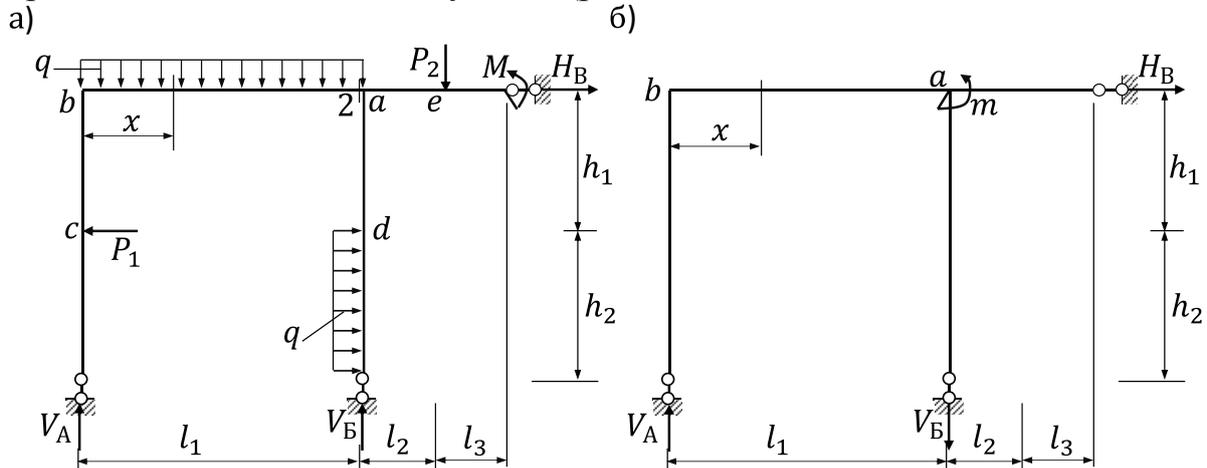


Рисунок 2.36– Схемы для определения угла поворота сечения 1.

Находим выражения для изгибающего момента  $M_1$  от заданной нагрузки как функции координат произвольного сечения  $x$  для ригеля от точки  $b$  до узла  $a$  (рис. 2.36, а).

$$\begin{aligned}M_1 = P_1 h_1 + V_A x - q x \frac{x}{2} &\Leftrightarrow M_1 = 5 \cdot 2 + 5,5x - 2 \cdot \frac{x^2}{2} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow M_1 = 10 + 5,5x - x^2.\end{aligned}$$

Находим выражения для изгибающего момента  $M_{11}$  от единичного момента как функции координат произвольного сечения  $x$  (рис. 2.36, б).

$$M_{11} = V_A x \Leftrightarrow M_{11} = \frac{1}{4} x.$$

Подставляем полученные выражения изгибающих моментов изгибающего момента  $M_1$  от заданной нагрузки изгибающего момента  $M_{11}$  и от единичного момента в формулу и интегрируем по участкам.

$$\begin{aligned}\gamma_2 &= \frac{1}{EI} \int_0^2 M_{11} M_1 dx = \frac{1}{EI} \int_0^4 \frac{1}{4} x \cdot (10 + 5,5x - x^2) dx \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \gamma_2 = \frac{1}{EI} \int_0^4 2,5x dx + \frac{1}{EI} \int_0^4 1,375x^2 dx - \frac{1}{EI} \int_0^4 0,25x^3 dx \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \gamma_2 = \frac{1}{EI} \left( 2,5 \int_0^4 x dx + 1,375 \int_0^4 x^2 dx - 0,25 \int_0^4 x^3 dx \right) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \gamma_2 = \frac{1}{EI} \left( 2,5 \frac{x^2}{2} \Big|_0^4 + 1,375 \frac{x^3}{3} \Big|_0^4 - 0,25 \frac{x^4}{4} \Big|_0^4 \right) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \gamma_2 = \frac{1}{EI} \left( 2,5 \frac{4^2}{2} + 1,375 \frac{4^3}{3} - 0,25 \frac{4^4}{4} \right) \Leftrightarrow \gamma_2 = \frac{100}{3EI}.\end{aligned}$$

**Определение прогиба сечения по формуле Мора.**

**а) Определим прогиб сечения 1.**

В сечении 1 по направлению ожидаемого прогиба прикладываем единичную сосредоточенную силу  $P = 1$  и находим реакции опорных связей.

Из суммы проекций на горизонтальную ось всех сил, действующих на раму следует, что опорная реакция  $H_B$  равна 1. Опорные реакции  $V_A$  и  $V_B$  находим из уравнений равновесия относительно опорных шарниров А и Б:

$$\begin{aligned} \sum M_B = 0; H_B(h_1 + h_2) - V_A l_1 - P h_2 &= 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 1 \cdot (2 + 2) - V_A \cdot 4 - 1 \cdot 2 = 0 \Leftrightarrow V_A = \frac{2}{4} \Leftrightarrow V_A = \frac{1}{2}; \\ \sum M_A = 0; H_B(h_1 + h_2) - V_B l_1 - P h_2 &= 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 1 \cdot (2 + 2) - V_B \cdot 4 - 1 \cdot 2 = 0 \Leftrightarrow V_B = \frac{2}{4} \Leftrightarrow V_B = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

В левой стойке на расстоянии  $x_1$  от точки с отмечаем первое произвольное сечение и на расстоянии  $x_2$  от левого жесткого узла  $b$  – второе (рис. 2.37).

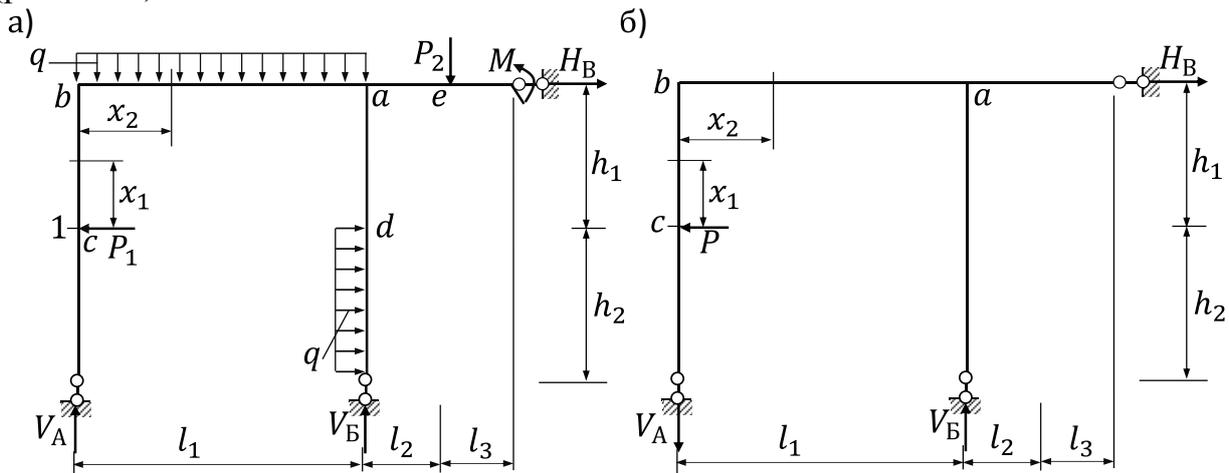


Рисунок 2.37.

Находим выражения для изгибающих моментов  $M_1$  и  $M_2$  от заданной нагрузки как функции координат произвольных сечений  $x_1$  и  $x_2$  (рис. 2.37, а).

$$M_1 = P_1 x_1 \Leftrightarrow M_1 = 5x_1;$$

$$\begin{aligned} M_2 = P_1 h_1 - V_A x_2 - q x_2 \frac{x_2}{2} \Leftrightarrow M_2 = 5 \cdot 2 - 5,5x_2 - 2 \frac{x_2^2}{2} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow M_2 = 10 - 5,5x_2 - x_2^2. \end{aligned}$$

Находим выражения для изгибающих моментов  $M_{11}$  и  $M_{12}$  от единичной силы как функции координат произвольных сечений  $x_1$  и  $x_2$  (рис. 2.37, б).

$$M_{11} = P x_1 \Leftrightarrow M_{11} = 1 \cdot x_1 \Leftrightarrow M_{11} = x_1;$$

$$M_{12} = -V_A x_2 + P h_1 \Leftrightarrow M_{12} = -\frac{1}{2} x_2 + 1 \cdot 2 \Leftrightarrow M_{12} = 2 - 0,5x_2.$$

Подставляем полученные выражения изгибающих моментов от заданной нагрузки  $M_1$  и  $M_2$  и от единичной сосредоточенной силы  $M_{11}$  и  $M_{12}$  в формулу и интегрируем по участкам.

$$\begin{aligned} \delta_1 = \frac{1}{EI} \int_0^2 M_{11} M_1 dx_1 + \frac{1}{EI} \int_0^4 M_{12} M_2 dx_2 = \frac{1}{EI} \int_0^2 x_1 \cdot 5x_1 dx_1 + \\ + \frac{1}{EI} \int_0^4 (2 - 0,5x_2) \cdot (10 + 5,5x_2 - x_2^2) dx_2 \Leftrightarrow \delta_1 = \frac{1}{EI} \int_0^2 5x_1^2 dx_1 + \\ + \frac{1}{EI} \int_0^4 20 dx_2 + \frac{1}{EI} \int_0^4 11x_2 dx_2 - \frac{1}{EI} \int_0^4 2x_2^2 dx_2 - \frac{1}{EI} \int_0^4 5x_2 dx_2 - \\ - \frac{1}{EI} \int_0^4 2,75x_2^2 dx_2 + \frac{1}{EI} \int_0^4 0,5x_2^3 dx_2 \Leftrightarrow \delta_1 = \frac{1}{EI} \left( 5 \frac{x_1^3}{3} \Big|_0^2 + 20x_2 \Big|_0^4 + \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +11 \frac{x_2^2}{2} \Big|_0^4 - 2 \frac{x_2^3}{3} \Big|_0^4 - 5 \frac{x_2^2}{2} \Big|_0^4 - 2,75 \frac{x_3^3}{3} \Big|_0^4 + 0,5 \frac{x_4^4}{4} \Big|_0^4 \Leftrightarrow \\
\Leftrightarrow \delta_1 &= \frac{1}{EI} \left( 5 \frac{8}{3} + 20 \cdot 4 + 11 \frac{4^2}{2} - 2 \frac{4^3}{3} - 5 \frac{4^2}{2} - 2,75 \frac{4^3}{3} + 0,5 \frac{4^4}{4} \right) \Leftrightarrow \\
\Leftrightarrow \delta_1 &= \frac{1}{EI} \left( \frac{40}{3} + 80 + 88 - \frac{128}{3} - 40 - \frac{176}{3} + 32 \right) \Leftrightarrow \delta_1 = \frac{72}{EI}.
\end{aligned}$$

**б) Определим прогиб сечения 3.**

В сечении 3 по направлению ожидаемого прогиба прикладываем единичную сосредоточенную силу  $P = 1$  и находим реакции опорных связей. Из суммы проекций на горизонтальную ось всех сил, действующих на раму следует, что опорная реакция  $H_B$  равна 1. Опорные реакции  $V_A$  и  $V_B$  находим из уравнений равновесия относительно опорных шарниров А и Б:

$$\begin{aligned}
\sum M_B = 0; V_A l_1 - H_B(h_1 + h_2) &= 0 \Leftrightarrow V_A \cdot 4 - 1 \cdot (2 + 2) = 0 \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow V_A = \frac{4}{4} \Leftrightarrow V_A = 1; \\
\sum M_A = 0; V_B l_1 - H_B(h_1 + h_2) &= 0 \Leftrightarrow V_B \cdot 4 - 1 \cdot (2 + 2) = 0 \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow V_B = \frac{4}{4} \Leftrightarrow V_B = 1.
\end{aligned}$$

В ригеле на расстоянии  $x_1$  от левого жесткого узла  $b$  отмечаем первое произвольное сечение. На правой стойке на расстоянии  $x_2$  от опоры Б отмечаем второе сечение, а на расстоянии  $x_3$  от точки  $d$  отмечаем третье сечение (рис. 2.38).

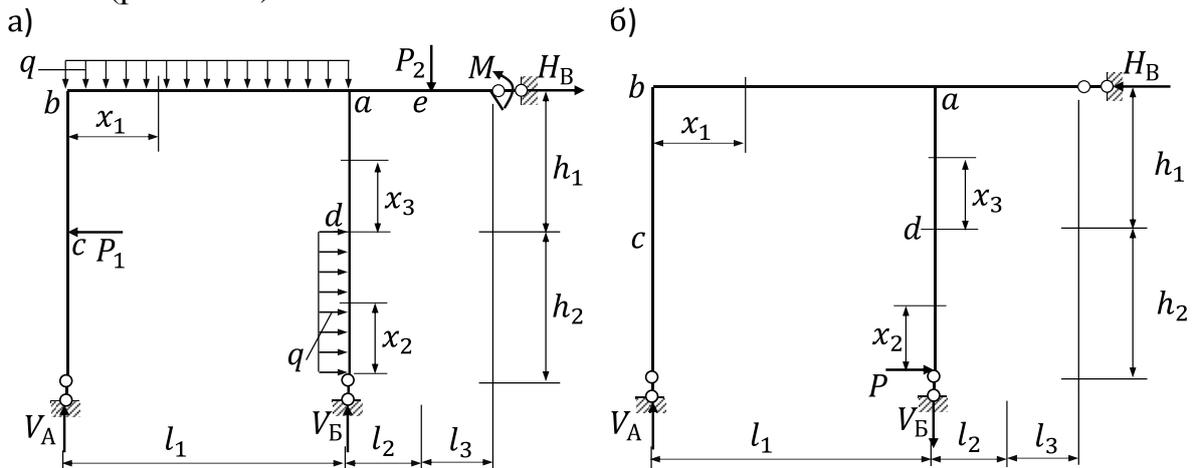


Рисунок 2.38.

Находим выражения для изгибающих моментов  $M_1$ ,  $M_2$  и  $M_3$  от заданной нагрузки как функции координат произвольных сечений  $x_1$ ,  $x_2$  и  $x_3$  (рис. 2.38, а).

$$\begin{aligned}
M_1 &= P_1 h_1 + V_A x_1 - q x_1 \frac{x_1}{2} \Leftrightarrow M_1 = 5 \cdot 2 + 5,5 x_1 - 2 \frac{x_1^2}{2} \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow M_1 = 10 + 5,5 x_1 - x_1^2;
\end{aligned}$$

$$M_2 = -q x_2 \frac{x_2}{2} \Leftrightarrow M_2 = -2 \frac{x_2^2}{2} \Leftrightarrow M_2 = -x_2^2;$$

$$M_3 = -q h_2 \left( \frac{h_2}{2} + x_3 \right) \Leftrightarrow M_3 = -2 \cdot 2 \left( \frac{2}{2} + x_3 \right) \Leftrightarrow M_3 = -4 x_3 - 4.$$

Находим выражения для изгибающих моментов  $M_{11}$ ,  $M_{12}$  и  $M_{13}$  от единичной силы как функции координат произвольных сечений  $x_1$ ,  $x_2$  и  $x_3$  (рис. 2.38, б).

$$M_{11} = V_A x_1 \Leftrightarrow M_{11} = 1 \cdot x_1 \Leftrightarrow M_{11} = x_1;$$

$$M_{12} = -P x_2 \Leftrightarrow M_{12} = -1 \cdot x_2 \Leftrightarrow M_{12} = -x_2;$$

$$M_{13} = -P(2 + x_3) \Leftrightarrow M_{12} = -1 \cdot (2 + x_3) \Leftrightarrow M_{12} = -2 - x_3.$$

Подставляем полученные выражения изгибающих моментов от заданной нагрузки  $M_1$ ,  $M_2$  и  $M_3$  и от единичной сосредоточенной силы  $M_{11}$ ,  $M_{12}$  и  $M_{13}$  в формулу и интегрируем по участкам.

$$\begin{aligned} \delta_3 &= \frac{1}{EI} \int_0^4 M_{11} M_1 dx_1 + \frac{1}{EI} \int_0^2 M_{12} M_2 dx_2 + \frac{1}{EI} \int_0^2 M_{13} M_3 dx_3 \Leftrightarrow \delta_3 = \\ &= \frac{1}{EI} \int_0^4 x_1 (10 + 5,5x_1 - x_1^2) dx_1 + \frac{1}{EI} \int_0^2 (-x_2) \cdot (-x_2^2) dx_2 + \\ &\quad + \frac{1}{EI} \int_0^2 (-2 - x_3) (-4x_3 - 4) dx_3 \Leftrightarrow \delta_3 = \frac{1}{EI} \int_0^4 10x_1 dx_1 + \\ &\quad + \frac{1}{EI} \int_0^4 5,5x_1^2 dx_1 - \frac{1}{EI} \int_0^4 x_1^3 dx_1 + \frac{1}{EI} \int_0^2 x_2^3 dx_2 + \frac{1}{EI} \int_0^2 12x_3 dx_3 + \\ &\quad + \frac{1}{EI} \int_0^2 4x_3^2 dx_3 + \frac{1}{EI} \int_0^2 8dx_3 \Leftrightarrow \delta_3 = \frac{1}{EI} \left( 10 \frac{x_1^2}{2} \Big|_0^4 + 5,5 \frac{x_1^3}{3} \Big|_0^4 - \right. \\ &\quad \left. - \frac{x_1^4}{4} \Big|_0^4 + \frac{x_2^4}{4} \Big|_0^2 + 12 \frac{x_3^2}{2} \Big|_0^2 + 4 \frac{x_3^3}{3} \Big|_0^2 + 8x_3 \Big|_0^2 \right) \Leftrightarrow \delta_3 = \frac{1}{EI} \left( 10 \cdot \frac{4^2}{2} + \right. \\ &\quad \left. + 5,5 \cdot \frac{4^3}{3} - \frac{4^4}{4} + \frac{2^4}{4} + 12 \cdot \frac{2^2}{2} + 4 \cdot \frac{2^3}{3} + 8 \cdot 2 \right) \Leftrightarrow \delta_3 = \frac{188}{EI}. \end{aligned}$$

**Определение угла поворота сечения способом Верещагина.**

**а) Определим угол поворота сечения 1.**

Эпюра изгибающих моментов от заданной нагрузки  $M_n$  построена на рис. 2.34. Опорные реакции связей от действия единичного момента найдены при определении угла поворота сечения 1 по формуле Мора:

$$H_B = 0, V_A = V_B = \frac{1}{4}.$$

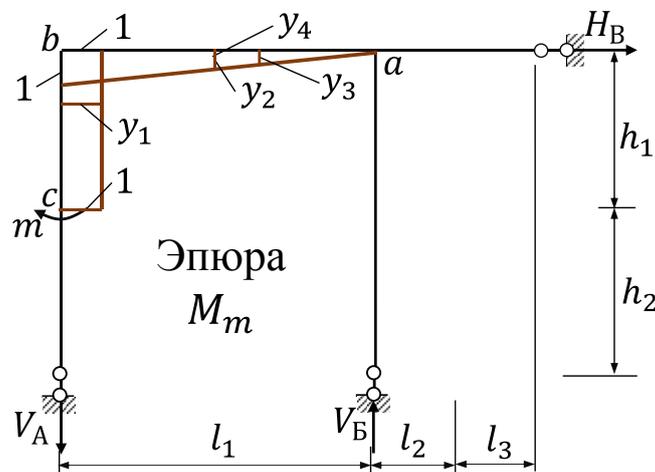


Рисунок 2.39– Эпюры для определения угла поворота сечения 1.

Изгибающие моменты в сечениях левой стойки от опоры А до точки с не возникают в силу отсутствия опорной реакции  $H_A$ . Построим эпюру изгибающих моментов  $M_m$  в левой стойке от точки с до левого жесткого узла  $b$  от действия единичного момента  $m = 1$ :

$$M_m = m \Leftrightarrow M_m = 1.$$

Изгибающие моменты в сечениях этого участка не зависят от переменной  $x$  и эпюра параллельна оси стойки.

Построим эпюру изгибающих моментов  $M_m$  в ригеле от узла  $b$  до правого жесткого узла  $a$  от действия единичного момента  $m = 1$ :

$$M_m = m - V_A x \Leftrightarrow M_m = 1 - \frac{1}{4}x.$$

Находим значения изгибающих моментов в характерных сечениях:

при  $x = 0$ ,  $M_m = 1$ ;

при  $x = 4$ ,  $M_m = 1 - \frac{1}{4} \cdot 4 \Leftrightarrow M_m = 0$ .

Эпюры изгибающих моментов  $M_n$  и  $M_m$  в стойке имеют треугольную и прямоугольную формы соответственно. Определим площадь эпюры  $\omega_1 M_n$  и ординату  $y_1$  под ее центром тяжести на эпюре  $M_m$ :

$$\omega_1 = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 2 \Leftrightarrow \omega_1 = 10 \text{ и } y_1 = 1.$$

Эпюра  $M_n$  ригеля имеет сложное очертание. Разложим ее на простые фигуры (табл. 2 приложения) – квадратную параболу (с высотой  $h = 4$  и длиной  $l = 4$ ), треугольник (с катетами  $h = 6$  и  $l = 4$ ) и прямоугольник (с размерами  $h = 10$  и  $l = 4$ ) (рис. 2.39, а), для вычисления площадей и центров тяжести которых имеются готовые формулы (табл. 1 приложения).

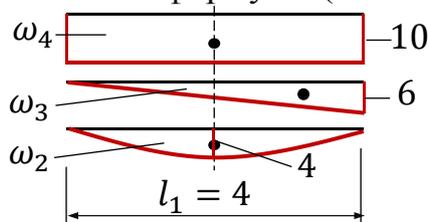


Рисунок 2.40– Разложение эпюр  $M_n$  на простые фигуры.

Площадь квадратной параболы  $\omega_{\text{КВП}}$  эпюры  $M_n$  равна

$$\omega_2 = \frac{2lh}{3} \Leftrightarrow \omega_2 = \frac{2 \cdot 4 \cdot 4}{3} \Leftrightarrow \omega_2 = \frac{32}{3}.$$

Эпюра  $M_m$  имеет форму треугольника, поэтому ордината под центром тяжести квадратной параболы равна (рис. 2.39, б):  $y_2 = \frac{1}{2} \cdot 1 \Leftrightarrow y_2 = 0,5$ .

Площадь треугольника  $\omega_3$  эпюры  $M_n$  и ордината  $y_3$  эпюры  $M_m$  равны

$$\omega_3 = \frac{1}{2}lh \Leftrightarrow \omega_3 = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 6 \Leftrightarrow \omega_3 = 12;$$

$$y_3 = \frac{1}{3} \cdot 1 \Leftrightarrow y_3 = \frac{1}{3}.$$

Площадь прямоугольника  $\omega_4$  эпюры  $M_n$  и ордината  $y_4$  эпюры  $M_m$  равны

$$\omega_4 = lh \Leftrightarrow \omega_4 = 4 \cdot 10 \Leftrightarrow \omega_4 = 40;$$

$$y_4 = \frac{1}{2} \cdot 1 \Leftrightarrow y_4 = 0,5.$$

Эпюра  $M_n$  и  $M_m$  рамы расположены с одной стороны оси ригеля поэтому их произведение будет положительным (рис. 2.39, а, б)

Таким образом, угол поворота ригеля в сечении 1 равен

$$\begin{aligned} \gamma_1 &= \sum \frac{1}{EI} \omega_n y_m \Leftrightarrow \gamma_1 = \frac{1}{EI} (\omega_1 y_1 + \omega_2 y_2 + \omega_3 y_3 + \omega_4 y_4) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \gamma_1 = \frac{1}{EI} \cdot \left( 10 \cdot 1 + \frac{32}{3} \cdot \frac{1}{2} + 12 \cdot \frac{1}{3} + 40 \cdot \frac{1}{2} \right) \Leftrightarrow \gamma_1 = \frac{118}{3EI}. \end{aligned}$$

Результаты, полученные по формуле Мора и способом Верещагина, совпадают.

**б) Определим угол поворота сечения 2.**

Эпюра изгибающих моментов от заданной нагрузки  $M_n$  построена на рис. 2.34. Перенесем ее на рис. 2.41, а. Опорные реакции связей от действия единичного момента найдены при определении угол поворота сечения 2 по формуле Мора:  $H_B = 0, V_A = V_B = \frac{1}{4}$ .

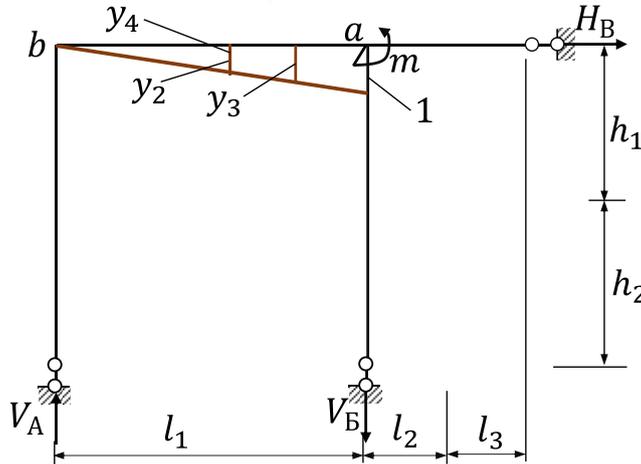


Рисунок 2.41– Эпюры для определения угла поворота сечения 2.

Изгибающие моменты в сечениях обеих стоек и правой части ригеля от узла  $a$  до опоры  $B$  не возникают в силу отсутствия опорных реакций  $H_A, H_B$  и  $V_B$ . Построим эпюру изгибающих моментов  $M_m$  в ригеле от левого жесткого узла  $b$  до правого жесткого узла  $a$  от действия единичного момента  $m = 1$ :

$$M_m = V_A x \Leftrightarrow M_m = \frac{1}{4} x.$$

Находим значения изгибающих моментов в характерных сечениях:

при  $x = 0, M_m = 0$ ;

при  $x = 4, M_m = \frac{1}{4} \cdot 4 \Leftrightarrow M_m = 1$ .

Эпюра  $M_n$  ригеля раскладывается на простейшие фигуры аналогично эпюре, построенной на рис. 2.40. Площади простых фигур перенесем сюда:

$$\omega_2 = \frac{32}{3}; \omega_3 = 12; \omega_4 = 40.$$

Ординаты под центрами тяжести простых фигур на эпюре  $M_m$  (рис. 2.41, б) равны

$$y_2 = \frac{1}{2} \cdot 1 \Leftrightarrow y_2 = 0,5; y_3 = \frac{2}{3} \cdot 1 \Leftrightarrow y_3 = \frac{2}{3}; y_4 = \frac{1}{2} \cdot 1 \Leftrightarrow y_4 = 0,5.$$

Эпюра  $M_n$  и  $M_m$  рамы расположены с одной стороны оси ригеля поэтому их произведение будет положительным (рис. 2.41, а, б)

Таким образом, угол поворота ригеля в сечении 1 равен

$$\begin{aligned} \gamma_1 &= \sum \frac{1}{EI} \omega_n y_m = \frac{1}{EI} (\omega_2 y_2 + \omega_3 y_3 + \omega_4 y_4) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \gamma_1 = \frac{1}{EI} \cdot \left( \frac{32}{3} \cdot \frac{1}{2} + 12 \cdot \frac{2}{3} + 40 \cdot \frac{1}{2} \right) \Leftrightarrow \gamma_1 = \frac{100}{3EI}. \end{aligned}$$

Результаты, полученные по формуле Мора и способом Верещагина, совпадают.

## Определение прогиба сечения способом Верещагина.

### а) Определим прогиб сечения 1.

Эпюра изгибающих моментов от заданной нагрузки  $M_n$  построена на рис. 2.34.

Опорные реакции всех связей от действия единичной силы найдены при определении прогиба сечения 1 по формуле Мора:  $H_B = 1$ ,  $V_A = V_B = \frac{1}{2}$ .

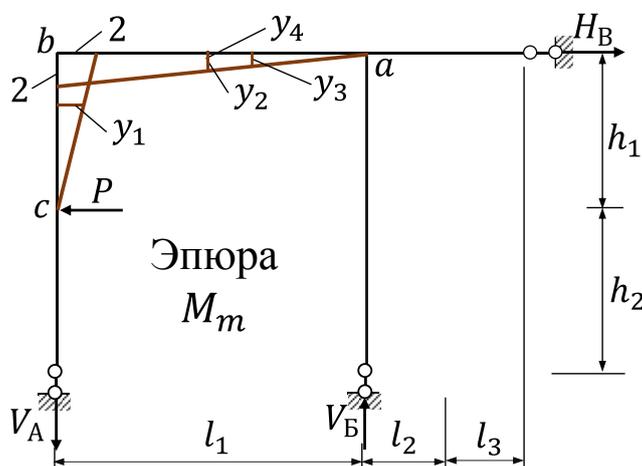


Рисунок 2.42– Эпюры для определения прогиба сечения 1.

Построим эпюру изгибающих моментов  $M_m$  от единичной силы  $P = 1$  (рис. 2.42):

а) От точки приложения единичной силы  $c$  до левого жесткого узла  $b$   
 $M_m = Px \Leftrightarrow M_m = 1 \cdot x$ .

Находим значения изгибающих моментов в характерных сечениях:

при  $x = 0$ ,  $M_m = 0$ ;

при  $x = 2$ ,  $M_m = 2$ .

б) От левого жесткого узла  $b$  до правого жесткого узла  $a$

$M_m = Ph_1 - V_A x \Leftrightarrow M_m = 1 \cdot 2 - \frac{1}{2} \cdot x \Leftrightarrow M_m = 2 - \frac{1}{2}x$ ;

Находим значения изгибающих моментов в характерных сечениях:

при  $x = 0$ ,  $M_m = 2$ ;

при  $x = 4$ ,  $M_m = 0$ .

Эпюры изгибающих моментов  $M_n$  и  $M_m$  в сечениях левой стойки имеют треугольные формы. Определим площадь участка  $\omega_1$  эпюры  $M_n$  правой стойки и ординату  $y_1$  под центром тяжести на эпюре  $M_m$ :

$$\omega_1 = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 2 \Leftrightarrow \omega_1 = 10;$$

$$y_1 = \frac{2}{3} \cdot 2 \Leftrightarrow y_1 = \frac{4}{3}.$$

Эпюра  $M_n$  ригеля раскладывается на простейшие фигуры аналогично эпюре, построенной на рис. 2.40. Площади простых фигур перенесем сюда:

$$\omega_2 = \frac{32}{3}; \omega_3 = 12; \omega_4 = 40.$$

Ординаты под центрами тяжести простых фигур на эпюре  $M_m$  (рис. 2.42) равны

$$y_2 = \frac{1}{2} \cdot 2 \Leftrightarrow y_2 = 1;$$

$$y_3 = \frac{1}{3} \cdot 2 \Leftrightarrow y_3 = \frac{2}{3};$$

$$y_4 = \frac{1}{2} \cdot 2 \Leftrightarrow y_4 = 1.$$

Эпюра  $M_n$  и  $M_m$  рамы расположены с одной стороны оси стойки и ригеля поэтому их произведение будет положительным.

Таким образом, прогиб сечения 1 равен

$$\delta_1 = \sum \frac{1}{EI} \omega_n y_m \Leftrightarrow \delta_1 = \frac{1}{EI} \cdot (\omega_1 \cdot y_1 + \omega_2 \cdot y_2 + \omega_3 \cdot y_3 + \omega_4 \cdot y_4) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \delta_1 = \frac{1}{EI} \left( 10 \cdot \frac{4}{3} + \frac{32}{3} \cdot 1 + 12 \cdot \frac{2}{3} + 40 \cdot 1 \right) \Leftrightarrow \delta_1 = \frac{72}{EI}.$$

Результаты, полученные по формуле Мора и способом Верещагина, совпадают.

### б) Определим прогиб сечения 3.

Эпюра изгибающих моментов от заданной нагрузки  $M_n$  построена на рис. 2.34.

Опорные реакции всех связей от действия единичной силы найдены при определении прогиба сечения 1 по формуле Мора:  $H_B = 1$ ,  $V_A = V_B = 1$ .

Построим эпюру изгибающих моментов  $M_m$  от единичной силы  $P = 1$  (рис. 2.43):

а) от опоры Б до правого жесткого узла  $a$

$$M_m = Px \Leftrightarrow M_m = 1 \cdot x.$$

Находим значения изгибающих моментов в характерных сечениях:

при  $x = 0$ ,  $M_m = 0$ ;

при  $x = 4$ ,  $M_m = 4$ ;

б) от левого жесткого узла  $b$  до правого жесткого узла  $a$

$$M_m = V_A x \Leftrightarrow M_m = 1 \cdot x \Leftrightarrow M_m = x.$$

Находим значения изгибающих моментов в характерных сечениях:

при  $x = 0$ ,  $M_m = 0$ ;

при  $x = 4$ ,  $M_m = 4$ .

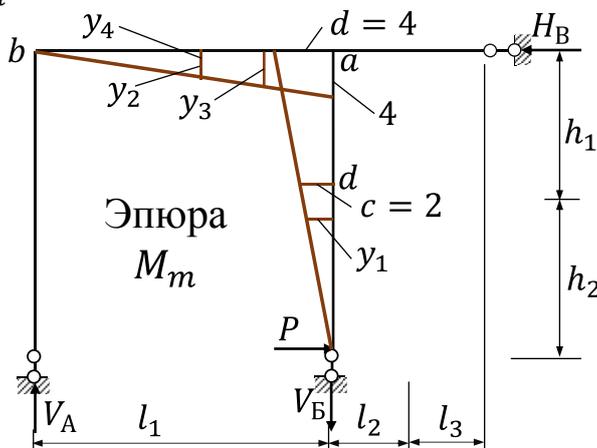


Рисунок 2.43– Эпюры для определения прогиба сечения 3.

Разделим эпюру изгибающих моментов  $M_n$  на второй стойке на два участка: 1) квадратная парабола – от опоры Б до точки  $d$ ; 2) трапеция – от

точки  $d$  до правого жесткого узла  $a$ . Определим площадь  $\omega_1$  квадратной параболы  $M_n$  и ординату  $y_1$  под ее центром тяжести на эюре  $M_m$ :

$$\omega_1 = \frac{1}{3}lh \Leftrightarrow \omega_1 = \frac{1}{3} \cdot 2 \cdot 4 \Leftrightarrow \omega_1 = \frac{8}{3};$$

$$y_1 = \frac{3}{4} \cdot 2 \Leftrightarrow y_1 = \frac{3}{2}.$$

Перемножение эюр  $M_n$  и  $M_m$  верхней части правой стойки от точки  $d$  до правого жесткого узла  $a$  выполним по формуле трапеции

$$\omega_{\text{тр}}y_{\text{тр}} = \frac{l}{6}[2(ac + bd) + ad + bc] \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \omega_{\text{тр}}y_{\text{тр}} = \frac{2}{6}[2(4 \cdot 2 + 12 \cdot 4) + 4 \cdot 4 + 12 \cdot 2] \Leftrightarrow \omega_{\text{тр}}y_{\text{тр}} = \frac{152}{3}.$$

Эюра  $M_n$  ригеля раскладывается на простейшие фигуры аналогично эюре, построенной на рис. 2.40. Площади простых фигур перенесем сюда:

$$\omega_2 = \frac{32}{3}; \omega_3 = 12; \omega_4 = 40.$$

Ординаты под центрами тяжести простых фигур на эюре  $M_m$  (рис. 2.43) равны

$$y_2 = \frac{1}{2} \cdot 4 \Leftrightarrow y_2 = 2;$$

$$y_3 = \frac{2}{3} \cdot 4 \Leftrightarrow y_3 = \frac{8}{3};$$

$$y_4 = \frac{1}{2} \cdot 4 \Leftrightarrow y_4 = 2.$$

Эюра  $M_n$  и  $M_m$  рамы расположены с одной стороны оси стойки и ригеля поэтому их произведение будет положительным.

Таким образом, прогиб сечения 3 равен

$$\delta_3 = \sum \frac{1}{EI} \omega_n y_m \Leftrightarrow \delta_3 = \frac{1}{EI} (\omega_1 y_1 + \omega_{\text{тр}} y_{\text{тр}} + \omega_2 y_2 + \omega_3 y_3 + \omega_4 y_4) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \delta_3 = \frac{1}{EI} \left( \frac{8}{3} \cdot \frac{3}{2} + \frac{152}{3} + \frac{32}{3} \cdot 2 + 12 \cdot \frac{8}{3} + 40 \cdot 2 \right) \Leftrightarrow \delta_3 = \frac{188}{EI}.$$

Результаты, полученные по формуле Мора и способом Верещагина, совпадают.

**Примеры для самостоятельного решения:**

Для статически определимых рам, приведенных на рис. 2.44 (исходные данные:  $M = 4$  кНм,  $q = 2$  кН/м,  $P = 2$  кН, размеры даны в метрах):

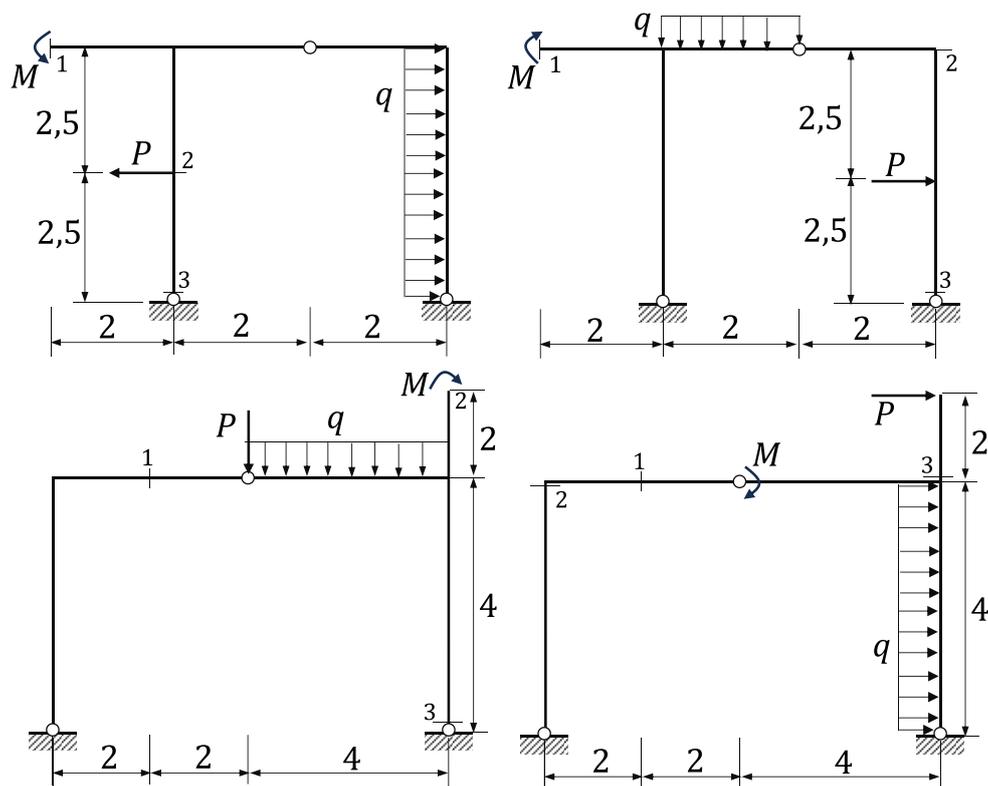


Рисунок 2.44– Схемы рам.

1) построить эпюры внутренних усилий рамы от действия заданной нагрузки:

- а) определить реакции всех связей рамы;
- б) построить эпюру поперечных сил;
- в) построить эпюру изгибающих моментов.

2) определить перемещения, используя формулу Мора и способ Верещагина:

- а) вертикальное перемещение для сечений «1»;
- б) горизонтальное перемещение для сечений «2»;
- в) угол поворота для сечения «3».

**Вопросы для самоконтроля.**

- 1) Из каких уравнений определяются опорные реакции рамы?
- 2) Когда в уравнении суммы моментов ставится знак плюс?
- 3) Когда в уравнении суммы моментов ставится знак минус?
- 4) Для определения чего в поперечном сечении стержня рамы прикладывают единичный сосредоточенный момент?
- 5) Для определения чего в поперечном сечении стержня рамы прикладывают единичную сосредоточенную силу?
- 6) Как поступают со сложными эпюрами изгибающих моментов в способе Верещагина?
- 7) Как в способе Верещагина легче перемножать эпюры изгибающих моментов квадратной параболы и прямоугольника?
- 8) Как в способе Верещагина поступают со скрученной трапецией эпюры изгибающих моментов при определении ее площади?

9) Когда в способе Верещагина произведение двух эпюр изгибающих моментов будет положительным?

10) Как в способе Верещагина при перемножении двух эпюр изгибающих моментов определяют ординату под площадью сложной эпюры?

11) Как устанавливается статическая определимость рамы?

12) Для чего при построении эпюр раму делят на несколько участков?

13) Какому виду единичной нагрузки соответствует угол поворота сечения стержня?

14) Какому виду единичной нагрузки соответствует прогиб стержня?

15) Какому виду единичной нагрузки соответствует горизонтальное перемещение стержня?

16) Как выбирается направление действия единичной нагрузки?

17) Какие внутренние усилия возникают в поперечных сечениях стержней рамы под действием нагрузок?

18) В каких случаях применим способ Верещагина?

19) Чему равен интеграл от произведения двух функций изгибающих моментов?

20) На что по правилу Верещагина умножается площадь графика криволинейной функции?

## ГЛАВА 3. СТАТИЧЕСКИ ОПРЕДЕЛИМЫЕ АРКИ.

### 3.1. Геометрические характеристики трехшарнирных арок.

В строительной практике в качестве статически определимой конструкции с криволинейным очертанием оси несущей части, применяются трехшарнирные арки. Отличительной особенностью таких строительных конструкций является возможность перекрывать сравнительно большие пролеты, что является весьма важным при строительстве различных ангаров, хранилищ продуктов сельскохозяйственного производства, складских помещений, спортивных залов и др.

Расчетная схема трехшарнирной арки (рис. 3.1), как правило, состоит из двух одинаковых криволинейных стержней, опирающихся на основание с помощью неподвижных шарнирных опор, расположенных на одном уровне. Редко встречаются также так называемые «ползучие» трехшарнирные арки с опорами на разных уровнях.

Расстояние между левой  $A$  и правой  $B$  опорами  $l$  называют пролетом арки. Стрелой подъема  $f$  трехшарнирной арки называют расстояние от прямой, соединяющей опорные шарниры, до промежуточного шарнира  $C$ . Сечение арки в точке  $C$  в строительной практике называют замковым, ключевым [6]. В силу своей конструктивной схемы арка является распорной системой с выпуклостью вверх для наиболее эффективного восприятия нагрузок. На опорах возникают по две реакции: вертикальные  $V_A$ ,  $V_B$  и горизонтальные (называемые распором)  $H_A$  и  $H_B$ . Опорные сечения называются пятами. В зависимости от величины отношения стрелы подъема к пролету арки ( $f/l$ ) разделяют на пологие и крутые.

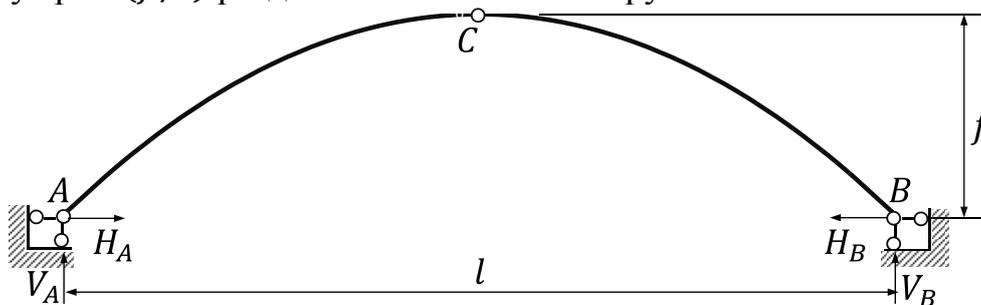


Рисунок 3.1– Трехшарнирная арка.

Криволинейное очертание арки (рис. 3.2) может быть параболическим, круговым, эллиптическим, синусоидальным, стрельчатым или описываться более сложной зависимостью.

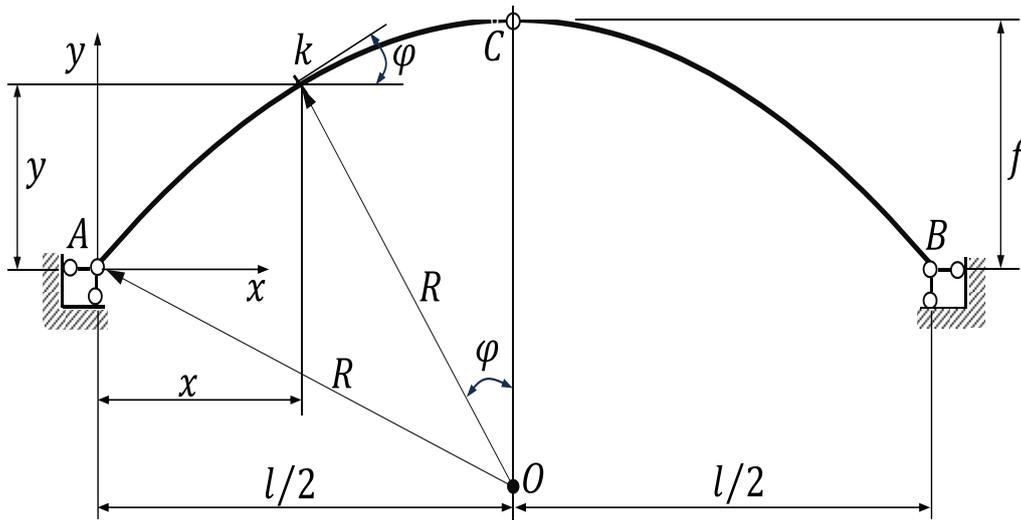


Рисунок 3.2– Геометрические характеристики трехшарнирных арок.

При параболическом очертании арки уравнение кривой с началом координат в точке шарнира A имеет вид

$$y = \frac{4f}{l^2} x(l - x). \quad (3.1)$$

Ордината  $y$  произвольной точки  $k$  на расстоянии  $x$  от начала координат определяется из уравнения параболы (3.1). Тангенс угла  $\varphi$  определяется дифференцированием уравнения параболы

$$tg\varphi = \frac{dy}{dx} \Leftrightarrow tg\varphi = \frac{4f}{l^2} (l - 2x). \quad (3.2)$$

Для определения методом сечений внутренних усилий в сечениях параболической арки вычисляются функции синуса и косинуса угла  $\varphi$  (рис. 3.2)

$$\sin\varphi = \frac{tg\varphi}{\sqrt{1+tg^2\varphi}} \text{ и } \cos\varphi = \frac{1}{\sqrt{1+tg^2\varphi}}. \quad (3.3)$$

При круговом очертании арки ордината  $y$  произвольной точки  $k$  на расстоянии  $x$  от начала координат (рис. 3.2) определяется из уравнения окружности (3.4)

$$y = \sqrt{R^2 - \left(\frac{l}{2} - x\right)^2} - R + f, \quad (3.4)$$

где  $R$  – радиус круговой окружности, определяемый по формуле

$$R = \frac{l^2 + 4f^2}{8f}. \quad (3.5)$$

Для определения методом сечений внутренних усилий в сечениях круговой арки также вычисляются функции синуса и косинуса угла  $\varphi$  (рис. 3.2) по формулам

$$\sin\varphi = \frac{l-2x}{2R} \text{ и } \cos\varphi = \frac{R-(f-y)}{R}. \quad (3.6)$$

При синусоидальном очертании арки ордината  $y$  произвольной точки  $k$  на расстоянии  $x$  от начала координат (рис. 3.2) определяется из уравнения синусоидальной кривой (3.7)

$$y = f \sin\left(\frac{\pi x}{l}\right), \quad (3.7)$$

Для определения методом сечений внутренних усилий в сечениях синусоидальной арки также вычисляются функции тангенса угла  $\varphi$  (рис. 3.2) по формулам

$$tg\varphi = \frac{dy}{dx} \Leftrightarrow tg\varphi = f \frac{\pi}{l} \cos\left(\frac{\pi x}{l}\right). \quad (3.8)$$

При эллиптическом очертании арки ордината  $y$  произвольной точки  $k$  на расстоянии  $x$  от начала координат (рис. 3.2) определяется из уравнения эллиптической кривой (3.9)

$$y = \frac{2f}{l} \sqrt{x(l-x)}, \quad (3.9)$$

Для определения методом сечений внутренних усилий в сечениях эллиптической арки также вычисляются функции тангенса угла  $\varphi$  по формулам

$$tg\varphi = \frac{dy}{dx} \Leftrightarrow tg\varphi = \frac{f(l-2x)}{l\sqrt{x(l-x)}}. \quad (3.10)$$

Определение изгибающих моментов  $M_i$ , поперечных  $Q_i$  и продольных  $N_i$  сил в сечениях арки при вертикальной нагрузке производится по формулам:

$$M_i = M_{o,i} - H \cdot y_i; \quad (3.11)$$

$$Q_i = Q_{o,i} \cdot \cos\varphi_i - H \cdot \sin\varphi_i; \quad (3.12)$$

$$N_i = -Q_{o,i} \cdot \sin\varphi_i - H \cdot \cos\varphi_i, \quad (3.13)$$

где  $M_{o,i}$  – балочный изгибающий момент в соответствующем сечении простой балки;

$Q_{o,i}$  – балочная поперечная сила в соответствующем сечении простой балки;

$y_i$  – ордината центра тяжести  $i$ -того сечения трехшарнирной арки, где определяется изгибающий момент  $M_i$ ;

$\varphi_i$  – угол между касательной к оси арки в  $i$ -том сечении, где определяется поперечная  $Q_i$  и продольная  $N_i$  силы, и осью  $x$ .

### 3.2. Расчет трехшарнирных арок на неподвижную нагрузку.

**Пример 3.1.** Для трехшарнирной параболической арки, схема нагружения которой приведена на рис. 3.3, требуется:

1) вычислить аналитически внутренние усилия в указанных сечениях и построить эпюры изгибающих моментов  $M_x$ , поперечных  $Q_x$  и продольных  $N_x$  сил;

2) для заданного сечения  $k$  построить линии влияния изгибающего момента, продольной и поперечной силы;

3) для заданного сечения  $k$  определить по линиям влияния изгибающий момент, продольную и поперечную силу.

Исходные данные:  $P = 20$  кН,  $q_1 = 1,4$  кН/м,  $q_2 = 2,2$  кН/м,  $f = 4$  м,  $l = 16$  м,  $x_k = 5$  м,  $x_c = 8$  м.

1. Вычислить аналитически внутренние усилия в указанных сечениях и построить эпюры изгибающих моментов, поперечных и продольных сил.

**Кинематический анализ арки.**

Для плоской трехшарнирной арки (рис. 3.3) число степеней свободы определяем по формуле (1.1)

$$W = 3Д - 2Ш - C_0 \Leftrightarrow W = 3 \cdot 2 - 2 \cdot 1 - 4 \Leftrightarrow W = 0.$$

Следовательно, трехшарнирная арка является геометрически неизменяемой и статически определимой системой.

**Составление расчетной схемы арки.**

Параболическую арку вычерчиваем в произвольном масштабе (рис. 3.3). На оси арки наряду с сечениями в точках А, С и В отмечаем 6 дополнительных сечений для определения изгибающих моментов  $M_x$ , поперечных  $Q_x$  и продольных  $N_x$  сил. К заданной точке  $k$  проводим касательную и перпендикулярную к ней прямую.

**Определение опорных реакций арки.**

Составляем сумму проекций всех сил, действующих на всю арку, на горизонтальную ось  $x$ :

$$\sum x = 0 \Leftrightarrow H_A - H_B = 0 \Leftrightarrow H_A = H_B.$$

Составляем сумму моментов всех сил, действующих на всю арку, относительно опорного шарнира А:

$$\begin{aligned} \sum M_A = 0 &\Leftrightarrow q_1 \cdot \frac{l}{2} \cdot \frac{l}{4} + q_2 \cdot \frac{l}{2} \cdot \left(\frac{l}{2} + \frac{l}{4}\right) + P \cdot \frac{l}{2} - V_B \cdot l = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 1,4 \cdot \frac{16}{2} \cdot \frac{16}{4} + 2,2 \cdot \frac{16}{2} \cdot \left(\frac{16}{2} + \frac{16}{4}\right) + 20 \cdot \frac{16}{2} - V_B \cdot 16 = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 1,4 \cdot 8 \cdot 4 + 2,2 \cdot 8 \cdot (8 + 4) + 20 \cdot 8 - V_B \cdot 16 = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 44,8 + 153,6 + 160 - V_B \cdot 16 = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow V_B = \frac{44,8 + 211,2 + 160}{16} \Leftrightarrow V_B = 26 \text{ кН}. \end{aligned}$$

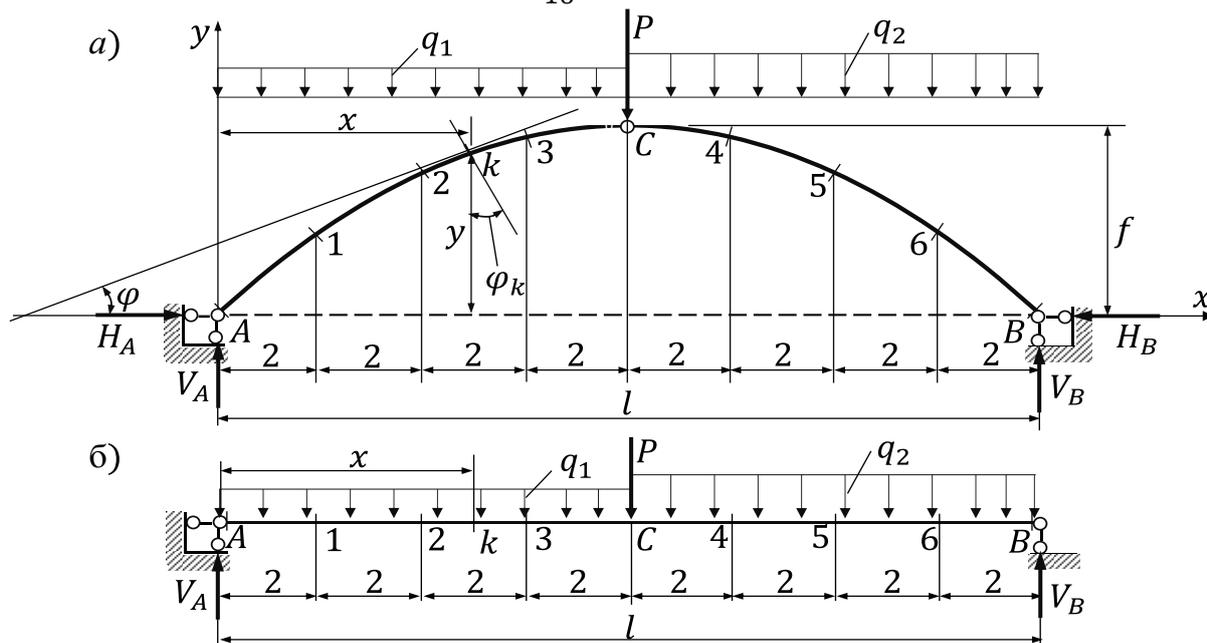


Рисунок 3.3– Расчетные схемы: а – параболической трехшарнирной арки, б – простой балки.

Составляем сумму моментов всех сил, действующих на всю арку, относительно опорного шарнира  $B$ :

$$\begin{aligned} \sum M_B = 0 &\Leftrightarrow -q_2 \cdot \frac{l}{2} \cdot \frac{l}{4} - q_1 \cdot \frac{l}{2} \cdot \left(\frac{l}{2} + \frac{l}{4}\right) - P \cdot \frac{l}{2} + V_A \cdot l = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow -2,2 \cdot \frac{16}{2} \cdot \frac{16}{4} - 1,4 \cdot \frac{16}{2} \cdot \left(\frac{16}{2} + \frac{16}{4}\right) - 20 \cdot \frac{16}{2} + V_A \cdot 16 = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow -2,2 \cdot 8 \cdot 4 - 1,4 \cdot 8 \cdot (8 + 4) - 20 \cdot 8 + V_A \cdot 16 = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow -70,4 - 134,4 - 160 + V_A \cdot 16 = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow V_A = \frac{70,4 + 134,4 + 160}{16} \Leftrightarrow V_A = 22,8 \text{ кН}. \end{aligned}$$

Арку разделим на две составные равные полуарки и рассмотрим равновесие левой части параболы (рис. 3.4) в виде равенства нулю суммы моментов сил, действующих на полуарку, относительно точки  $C$ .

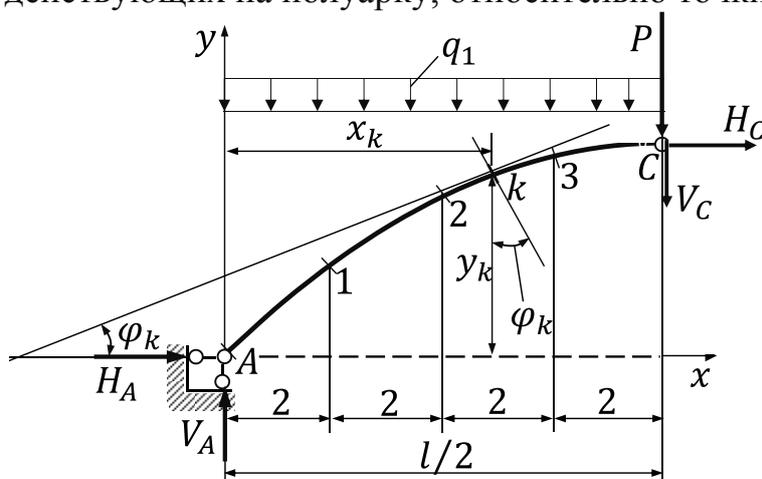


Рисунок 3.4– Расчетная схема полуарки.

$$\begin{aligned} \sum M_C = 0 &\Leftrightarrow q_1 \cdot \frac{l}{2} \cdot \frac{l}{4} - V_A \cdot \frac{l}{2} + H_A \cdot f = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 1,4 \cdot \frac{16}{2} \cdot \frac{16}{4} - 22,8 \cdot \frac{16}{2} + H_A \cdot 4 = 0 \Leftrightarrow 44,8 - 182,4 + H_A \cdot 4 = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow H_A = \frac{182,4 - 44,8}{4} \Leftrightarrow H_A = H_B = 34,4 \text{ кН}. \end{aligned}$$

### **Определение внутренних усилий в поперечных сечениях арки.**

Подробно покажем, как определить арочные усилия в нескольких сечениях арки.

#### **Сечение А.**

Рассмотрим равновесие левой части простой балки (рис. 3.5, а) и арки (рис. 3.5, б) от сечения  $A$  и находим балочный изгибающий момент  $M_{o,A}$  и балочную поперечную силу  $Q_{o,A}$  из уравнений равновесия

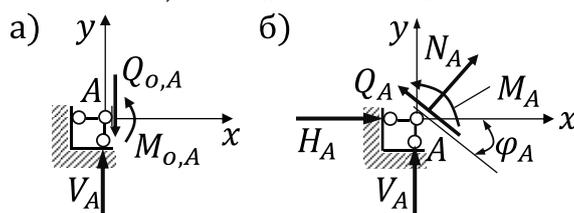


Рисунок 3.5– Узел в сечении  $A$ : а – простой балки; б – арки.

$$\sum M_A = 0 \Leftrightarrow M_{o,A} = 0;$$

$$\sum y = 0 \Leftrightarrow V_A - Q_{o,A} = 0 \Leftrightarrow Q_{o,A} = V_A \Leftrightarrow Q_{o,A} = 22,8 \text{ кН.}$$

Координаты сечения A:  $x_A = 0, y_A = 0$ .

Тангенс, синус и косинус угла  $\varphi_A$  наклона сечения A к оси  $x$  определяем по формулам (3.2) и (3.3)

$$tg\varphi_A = \frac{4f}{l^2}(l - 2x_A) = \frac{4 \cdot 4}{16^2}(16 - 2 \cdot 0) = 1;$$

$$\sin\varphi_A = \frac{tg\varphi_A}{\sqrt{1+tg^2\varphi_A}} = \frac{1}{\sqrt{1+1^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}};$$

$$\cos\varphi_A = \frac{1}{\sqrt{1+tg^2\varphi_A}} = \frac{1}{\sqrt{1+1^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Изгибающий момент  $M_A$ , поперечную  $Q_A$  и продольную  $N_A$  силу в сечении A определяем по формулам (3.11), (3.12) и (3.13) соответственно:

$$M_A = M_{o,A} - H_A \cdot y_A \Leftrightarrow M_A = 0 - 34,4 \cdot 0 \Leftrightarrow M_A = 0;$$

$$Q_A = Q_{o,A} \cdot \cos\varphi_A - H_A \cdot \sin\varphi_A \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow Q_A = 22,8 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} - 34,4 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow Q_A = -8,2 \text{ кН};$$

$$N_A = -Q_{o,A} \cdot \sin\varphi_A - H_A \cdot \cos\varphi_A \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow N_A = -22,8 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} - 34,4 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow N_A = -40,5 \text{ кН.}$$

### Сечение 1.

Находим координаты сечения 1:

$$x_1 = 2;$$

$$y_1 = \frac{4f}{l^2}x_1(l - x_1) \Leftrightarrow y_1 = \frac{4 \cdot 4}{16^2} \cdot 2 \cdot (16 - 2) \Leftrightarrow y_1 = 1,75 \text{ м.}$$

Находим тангенс, синус и косинус угла  $\varphi_1$  наклона сечения 1 к оси  $x$  по формулам (3.2) и (3.3)

$$tg\varphi_1 = \frac{4f}{l^2}(l - 2x_1) \Leftrightarrow tg\varphi_1 = \frac{4 \cdot 4}{16^2}(16 - 2 \cdot 2) \Leftrightarrow tg\varphi_1 = 0,75;$$

$$\sin\varphi_1 = \frac{tg\varphi_1}{\sqrt{1+tg^2\varphi_1}} \Leftrightarrow \sin\varphi_1 = \frac{0,75}{\sqrt{1+0,75^2}} \Leftrightarrow \sin\varphi_1 = 0,6;$$

$$\cos\varphi_1 = \frac{1}{\sqrt{1+tg^2\varphi_1}} \Leftrightarrow \cos\varphi_1 = \frac{1}{\sqrt{1+0,75^2}} \Leftrightarrow \cos\varphi_1 = 0,8.$$

Рассмотрим равновесие левой части простой балки (рис. 3.6, а) от сечения 1 и находим балочный изгибающий момент  $M_{o,1}$  и балочную поперечную силу  $Q_{o,1}$  из уравнений равновесия:

$$\sum M_1 = 0 \Leftrightarrow V_A \cdot x_1 - q_1 \cdot x_1 \cdot \frac{x_1}{2} - M_{o,1} = 0 \Leftrightarrow M_{o,1} = V_A \cdot x_1 -$$

$$-q_1 \cdot x_1 \cdot \frac{x_1}{2} \Leftrightarrow M_{o,1} = 22,8 \cdot 2 - 1,4 \cdot 2 \cdot \frac{2}{2} = 0 \Leftrightarrow M_{o,1} = 42,8 \text{ кНм};$$

$$\sum y = 0 \Leftrightarrow V_A - q_1 \cdot x_1 - Q_{o,1} \Leftrightarrow Q_{o,1} = V_A - q_1 \cdot x_1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow Q_{o,1} = 22,8 - 1,4 \cdot 2 \Leftrightarrow Q_{o,1} = 20 \text{ кН.}$$

В качестве примера покажем последовательность определения изгибающего момента, поперечной и продольной силы из уравнений равновесия  $\sum M = 0$ ,  $\sum t = 0$  и  $\sum n = 0$  левой части арки (рис. 3.6, б, в) от сечения 1.

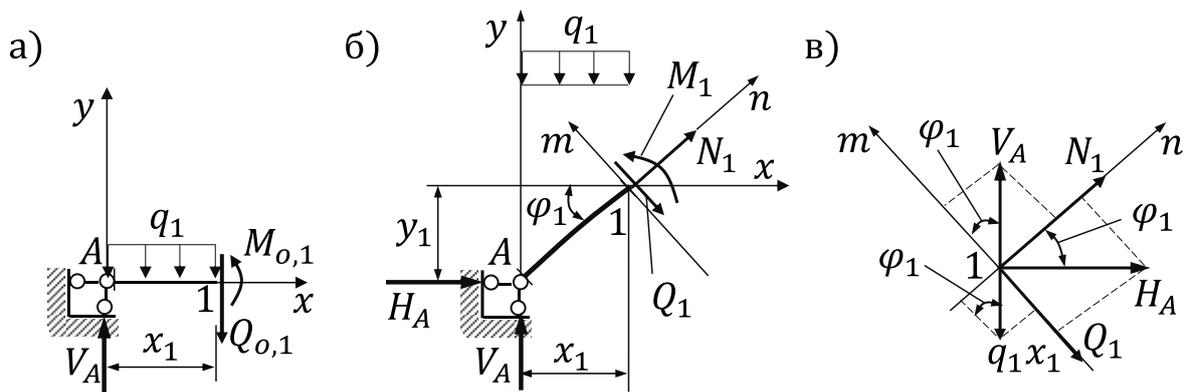


Рисунок 3.6– Узел сечения 1: а – простой балки; б – арки; в – сил.

Изгибающий момент  $M_1$  в сечении 1 арки численно равен алгебраической сумме моментов всех сил, расположенных по одну сторону от сечения, относительно центра тяжести этого сечения:

$$\begin{aligned} \sum M = 0 &\Leftrightarrow M_1 + q_1 \cdot x_1 \cdot \frac{x_1}{2} + H_A \cdot y_1 - V_A \cdot x_1 = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow M_1 = V_A \cdot x_1 - q_1 \cdot x_1 \cdot \frac{x_1}{2} - H_A \cdot y_1 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow M_1 = 22,8 \cdot 2 - 1,4 \cdot 2 \cdot \frac{2}{2} - 34,4 \cdot 1,75 \Leftrightarrow M_1 = -17,4 \text{ кНм}. \end{aligned}$$

Поперечная сила  $Q_1$  в сечении 1 арки численно равен алгебраической сумме проекций всех сил на ось  $m$ , перпендикулярную касательной к оси арки в данном сечении:

$$\begin{aligned} \sum m = 0 &\Leftrightarrow V_A \cdot \cos\varphi_1 - q_1 \cdot x_1 \cdot \cos\varphi_1 - H_A \cdot \sin\varphi_1 + Q_1 = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow Q_1 = q_1 \cdot x_1 \cdot \cos\varphi_1 + H_A \cdot \sin\varphi_1 - V_A \cdot \cos\varphi_1 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow Q_1 = 1,4 \cdot 2 \cdot 0,8 + 34,4 \cdot 0,6 - 22,8 \cdot 0,8 \Leftrightarrow Q_1 = 4,64 \text{ кН}. \end{aligned}$$

Продольная сила  $N_1$  в сечении 1 арки численно равен алгебраической сумме проекций всех сил на ось  $n$ , параллельную касательной к оси арки в данном сечении:

$$\begin{aligned} \sum n = 0 &\Leftrightarrow -V_A \cdot \sin\varphi_1 + q_1 \cdot x_1 \cdot \sin\varphi_1 - H_A \cdot \cos\varphi_1 - N_1 = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow N_1 = -V_A \cdot \sin\varphi_1 + q_1 \cdot x_1 \cdot \sin\varphi_1 - H_A \cdot \cos\varphi_1 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow N_1 = -(V_A - q_1 \cdot x_1) \cdot \sin\varphi_1 - H_A \cdot \cos\varphi_1 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow N_1 = -(22,8 - 1,4 \cdot 2) \cdot 0,6 - 34,4 \cdot 0,8 \Leftrightarrow N_1 = -39,52 \text{ кН}. \end{aligned}$$

Изгибающий момент  $M_1$ , поперечную  $Q_1$  и продольную  $N_1$  силу в сечении 1 арки также могут быть вычислены по формулам (3.11), (3.12) и (3.13) соответственно:

$$\begin{aligned} M_1 &= M_{o,1} - H_A \cdot y_1 \Leftrightarrow M_1 = 42,8 - 34,4 \cdot 1,75 \Leftrightarrow M_1 = -17,4 \text{ кНм}; \\ Q_1 &= Q_{o,1} \cdot \cos\varphi_1 - H_A \cdot \sin\varphi_1 \Leftrightarrow Q_1 = 20 \cdot 0,8 - 34,4 \cdot 0,6 \Leftrightarrow Q_1 = -4,64 \text{ кН}; \\ N_1 &= -Q_{o,1} \cdot \sin\varphi_1 - H_A \cdot \cos\varphi_1 \Leftrightarrow N_1 = -20 \cdot 0,6 - 34,4 \cdot 0,8 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow N_1 = -39,52 \text{ кН}. \end{aligned}$$

### Сечение 2.

Рассмотрим равновесие левой части простой балки (рис. 3.7, а) и арки (рис. 3.7, б, в) от сечения 2 и находим балочный изгибающий момент  $M_{o,2}$  и балочную поперечную силу  $Q_{o,2}$  из уравнений равновесия

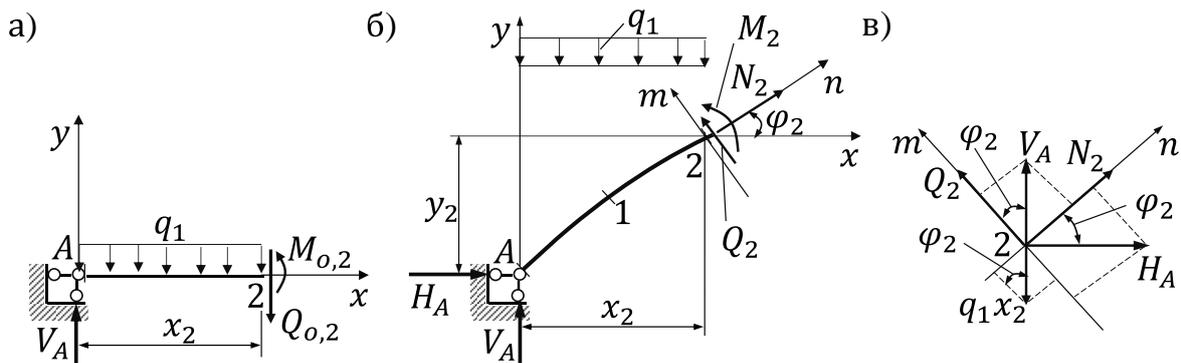


Рисунок 3.7– Узел сечения 2: а – простой балки; б – арки; в – сил.

$$\begin{aligned} \sum M_2 = 0 &\Leftrightarrow V_A \cdot x_2 - q_1 \cdot x_2 \cdot \frac{x_2}{2} - M_{o,2} = 0 \Leftrightarrow M_{o,2} = V_A \cdot x_2 - \\ &- q_1 \cdot x_2 \cdot \frac{x_2}{2} \Leftrightarrow M_{o,2} = 22,8 \cdot 4 - 1,4 \cdot 4 \cdot \frac{4}{2} = 80 \text{ кНм}; \\ \sum y = 0 &\Leftrightarrow V_A - q_1 \cdot x_2 - Q_{o,2} \Leftrightarrow Q_{o,2} = V_A - q_1 \cdot x_2 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow Q_{o,2} = 22,8 - 1,4 \cdot 4 \Leftrightarrow Q_{o,2} = 17,2 \text{ кН}. \end{aligned}$$

Координаты сечения 2:  $x_2 = 4$ ,  $y_2 = \frac{4f}{l^2} x_2(l - x_2) \Leftrightarrow y_2 = \frac{4 \cdot 4}{16^2} \cdot 4 \cdot (16 - 4) \Leftrightarrow y_2 = 3 \text{ м}$ .

Тангенс, синус и косинус угла  $\varphi_2$  наклона сечения 2 к оси  $x$  определяем по формулам (3.2) и (3.3)

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \varphi_2 &= \frac{4f}{l^2} (l - 2x_2) \Leftrightarrow \operatorname{tg} \varphi_2 = \frac{4 \cdot 4}{16^2} (16 - 2 \cdot 4) \Leftrightarrow \operatorname{tg} \varphi_2 = 0,5; \\ \sin \varphi_2 &= \frac{\operatorname{tg} \varphi_2}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi_2}} \Leftrightarrow \sin \varphi_2 = \frac{0,5}{\sqrt{1 + 0,5^2}} \Leftrightarrow \sin \varphi_2 = 0,447; \\ \cos \varphi_2 &= \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi_2}} \Leftrightarrow \cos \varphi_2 = \frac{1}{\sqrt{1 + 0,5^2}} \Leftrightarrow \cos \varphi_2 = 0,894. \end{aligned}$$

Изгибающий момент  $M_2$ , поперечную  $Q_2$  и продольную  $N_2$  силу в сечении 2 определяем по формулам (3.11), (3.12) и (3.13) соответственно:

$$\begin{aligned} M_2 &= M_{o,2} - H_A \cdot y_2 \Leftrightarrow M_2 = 80 - 34,4 \cdot 3 \Leftrightarrow M_2 = -23,2 \text{ кНм}; \\ Q_2 &= Q_{o,2} \cdot \cos \varphi_2 - H_A \cdot \sin \varphi_2 \Leftrightarrow Q_2 = 17,2 \cdot 0,894 - \\ &\quad - 34,4 \cdot 0,447 \Leftrightarrow Q_2 = 0 \text{ кН}; \\ N_2 &= -Q_{o,2} \cdot \sin \varphi_2 - H_A \cdot \cos \varphi_2 \Leftrightarrow N_2 = -17,2 \cdot 0,447 - \\ &\quad - 34,4 \cdot 0,894 \Leftrightarrow N_2 = -38,44 \text{ кН}. \end{aligned}$$

### Сечение к.

Рассмотрим равновесие левой части простой балки (рис. 3.8, а) и арки (рис. 3.8, б, в) от сечения  $k$  и находим балочный изгибающий момент  $M_{o,k}$  и балочную поперечную силу  $Q_{o,k}$  из уравнений равновесия

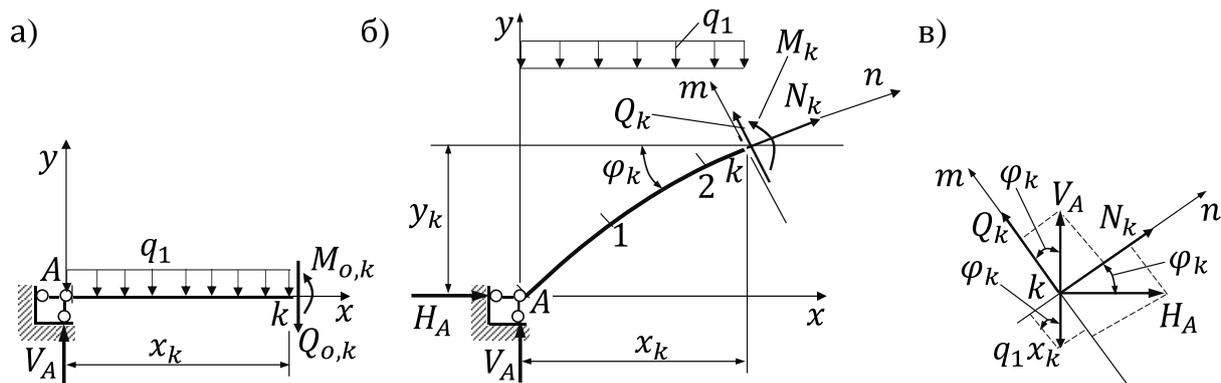


Рисунок 3.8– Узел сечения k: а – простой балки; б – арки; в – сил.

$$\begin{aligned} \sum M_k = 0 &\Leftrightarrow V_A \cdot x_k - q_1 \cdot x_k \cdot \frac{x_k}{2} - M_{o,k} = 0 \Leftrightarrow M_{o,k} = V_A \cdot x_k - q_1 \cdot x_k \cdot \frac{x_k}{2} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow M_{o,k} = 22,8 \cdot 5 - 1,4 \cdot 5 \cdot \frac{5}{2} \Leftrightarrow M_{o,k} = 96,5 \text{ кНм}; \\ \sum y = 0 &\Leftrightarrow V_A - q_1 \cdot x_k - Q_{o,k} \Leftrightarrow Q_{o,k} = V_A - q_1 \cdot x_k \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow Q_{o,k} = 22,8 - 1,4 \cdot 5 \Leftrightarrow Q_{o,k} = 15,8 \text{ кН}. \end{aligned}$$

Координаты сечения k:

$$x_k = 5;$$

$$y_k = \frac{4f}{l^2} x_k (l - x_k) \Leftrightarrow y_k = \frac{4 \cdot 4}{16^2} \cdot 5 \cdot (16 - 5) \Leftrightarrow y_k = 3,44 \text{ м}.$$

Тангенс, синус и косинус угла  $\varphi_k$  наклона сечения k к оси x определяем по формулам (3.2) и (3.3):

$$\operatorname{tg} \varphi_k = \frac{4f}{l^2} (l - 2x_k) \Leftrightarrow \operatorname{tg} \varphi_k = \frac{4 \cdot 4}{16^2} (16 - 2 \cdot 5) \Leftrightarrow \operatorname{tg} \varphi_k = 0,375;$$

$$\sin \varphi_k = \frac{\operatorname{tg} \varphi_k}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi_k}} \Leftrightarrow \sin \varphi_k = \frac{0,375}{\sqrt{1 + 0,375^2}} \Leftrightarrow \sin \varphi_k = 0,351;$$

$$\cos \varphi_k = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi_k}} \Leftrightarrow \cos \varphi_k = \frac{1}{\sqrt{1 + 0,375^2}} \Leftrightarrow \cos \varphi_k = 0,936.$$

Изгибающий момент  $M_3$ , поперечную  $Q_3$  и продольную  $N_3$  силу в сечении 3 определяем по формулам (3.11), (3.12) и (3.13) соответственно:

$$M_k = M_{o,k} - H_A \cdot y_k \Leftrightarrow M_k = 96,5 - 34,4 \cdot 3,44 \Leftrightarrow M_k = -21,8 \text{ кНм};$$

$$\begin{aligned} Q_k &= Q_{o,k} \cdot \cos \varphi_k - H_A \cdot \sin \varphi_k \Leftrightarrow Q_k = 15,8 \cdot 0,936 - 34,4 \cdot 0,351 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow Q_k = 2,71 \text{ кН}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} N_k &= -Q_{o,k} \cdot \sin \varphi_k - H_A \cdot \cos \varphi_k \Leftrightarrow N_k = -15,8 \cdot 0,351 - 34,4 \cdot 0,936 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow N_k = -37,74 \text{ кН}. \end{aligned}$$

### Сечение 3.

Рассмотрим равновесие левой части простой балки (рис. 3.3, б) и арки (рис. 3.3, а) от сечения 3 и находим балочный изгибающий момент  $M_{o,3}$  и балочную поперечную силу  $Q_{o,3}$  из уравнений равновесия

$$\begin{aligned} \sum M_3 = 0 &\Leftrightarrow V_A \cdot x_3 - q_1 \cdot x_3 \cdot \frac{x_3}{2} - M_{o,3} = 0 \Leftrightarrow M_{o,3} = V_A \cdot x_3 - \\ &- q_1 \cdot x_3 \cdot \frac{x_3}{2} \Leftrightarrow M_{o,3} = 22,8 \cdot 6 - 1,4 \cdot 6 \cdot \frac{6}{2} = 0 \Leftrightarrow M_{o,3} = 111,6 \text{ кНм}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum y = 0 &\Leftrightarrow V_A - q_1 \cdot x_3 - Q_{o,3} \Leftrightarrow Q_{o,3} = V_A - q_1 \cdot x_3 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow Q_{o,3} = 22,8 - 1,4 \cdot 6 \Leftrightarrow Q_{o,3} = 14,4 \text{ кН}. \end{aligned}$$

Координаты сечения 3:

$$x_3 = 6;$$

$$y_3 = \frac{4f}{l^2} x_3(l - x_3) \Leftrightarrow y_3 = \frac{4 \cdot 4}{16^2} \cdot 6 \cdot (16 - 6) \Leftrightarrow y_3 = 3,75 \text{ м.}$$

Тангенс, синус и косинус угла  $\varphi_3$  наклона сечения 3 к оси  $x$  определяем по формулам (3.2) и (3.3)

$$tg\varphi_3 = \frac{4f}{l^2} (l - 2x_3) \Leftrightarrow tg\varphi_3 = \frac{4 \cdot 4}{16^2} (16 - 2 \cdot 6) \Leftrightarrow tg\varphi_3 = 0,25;$$

$$\sin\varphi_3 = \frac{tg\varphi_3}{\sqrt{1+tg^2\varphi_3}} \Leftrightarrow \sin\varphi_3 = \frac{0,25}{\sqrt{1+0,25^2}} \Leftrightarrow \sin\varphi_3 = 0,243;$$

$$\cos\varphi_3 = \frac{1}{\sqrt{1+tg^2\varphi_3}} \Leftrightarrow \cos\varphi_3 = \frac{1}{\sqrt{1+0,25^2}} \Leftrightarrow \cos\varphi_3 = 0,97.$$

Изгибающий момент  $M_3$ , поперечную  $Q_3$  и продольную  $N_3$  силу в сечении 3 определяем по формулам (3.11), (3.12) и (3.13) соответственно:

$$M_3 = M_{o,3} - H_A \cdot y_3 \Leftrightarrow M_3 = 111,6 - 34,4 \cdot 3,75 \Leftrightarrow M_3 = -17,4 \text{ кНм;}$$

$$Q_3 = Q_{o,3} \cdot \cos\varphi_3 - H_A \cdot \sin\varphi_3 \Leftrightarrow Q_3 = 14,4 \cdot 0,97 - 34,4 \cdot 0,243 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow Q_3 = 5,61 \text{ кН;}$$

$$N_3 = -Q_{o,3} \cdot \sin\varphi_3 - H_A \cdot \cos\varphi_3 \Leftrightarrow N_3 = -14,4 \cdot 0,243 - 34,4 \cdot 0,97 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow N_3 = -36,87 \text{ кН.}$$

### **Сечение С (слева).**

Рассмотрим равновесие левой части простой балки (рис. 3.3, б) и арки (рис. 3.3, а) от сечения С и находим балочный изгибающий момент  $M_{o,c}$  и балочную поперечную силу  $Q_{o,c}$  из уравнений равновесия

$$\sum M_C = 0 \Leftrightarrow V_A \cdot x_c - q_1 \cdot x_c \cdot \frac{x_c}{2} - M_{o,c} = 0 \Leftrightarrow M_{o,c} = V_A \cdot x_c - \\ - q_1 \cdot x_c \cdot \frac{x_c}{2} \Leftrightarrow M_{o,c} = 22,8 \cdot 8 - 1,4 \cdot 8 \cdot \frac{8}{2} = 0 \Leftrightarrow M_{o,c} = 137,6 \text{ кНм;}$$

$$\sum y = 0 \Leftrightarrow V_A - q_1 \cdot x_c - Q_{o,c} \Leftrightarrow Q_{o,c} = V_A - q_1 \cdot x_c \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow Q_{o,c} = 22,8 - 1,4 \cdot 8 \Leftrightarrow Q_{o,c} = 11,6 \text{ кН.}$$

Координаты сечения С (слева):

$$x_c = 8;$$

$$y_c = \frac{4f}{l^2} x_c(l - x_c) \Leftrightarrow y_c = \frac{4 \cdot 4}{16^2} \cdot 8 \cdot (16 - 8) \Leftrightarrow y_c = 4 \text{ м.}$$

Тангенс, синус и косинус угла  $\varphi_c$  наклона сечения С к оси  $x$  определяем по формулам (3.2) и (3.3)

$$tg\varphi_c = \frac{4f}{l^2} (l - 2x_c) \Leftrightarrow tg\varphi_c = \frac{4 \cdot 4}{16^2} (16 - 2 \cdot 8) \Leftrightarrow tg\varphi_c = 0;$$

$$\sin\varphi_c = \frac{tg\varphi_c}{\sqrt{1+tg^2\varphi_c}} \Leftrightarrow \sin\varphi_c = \frac{0}{\sqrt{1+0^2}} \Leftrightarrow \sin\varphi_c = 0;$$

$$\cos\varphi_c = \frac{1}{\sqrt{1+tg^2\varphi_c}} \Leftrightarrow \cos\varphi_c = \frac{1}{\sqrt{1+0^2}} \Leftrightarrow \cos\varphi_c = 1.$$

Изгибающий момент  $M_c$ , поперечную  $Q_c$  и продольную  $N_c$  силу в сечении С определяем по формулам (3.11), (3.12) и (3.13) соответственно:

$$M_c = M_{o,c} - H_A \cdot y_c \Leftrightarrow M_c = 137,6 - 34,4 \cdot 4 \Leftrightarrow M_c = 0 \text{ кНм;}$$

$$Q_c = Q_{o,c} \cdot \cos\varphi_c - H_A \cdot \sin\varphi_c \Leftrightarrow Q_c = 11,6 \cdot 1 - 32,8 \cdot 0 \Leftrightarrow Q_c = 11,6 \text{ кН;}$$

$$N_c = -Q_{o,c} \cdot \sin\varphi_c - H_A \cdot \cos\varphi_c \Leftrightarrow N_c = -11,6 \cdot 0 - 34,4 \cdot 1 \Leftrightarrow N_c = -34,4 \\ \text{кН.}$$

### Сечение С (справа).

Рассмотрим равновесие правой части простой балки (рис. 3.3, б) и арки (рис. 3.3, а) от сечения С и находим балочный изгибающий момент  $M_{o,c}$  и балочную поперечную силу  $Q_{o,c}$  из уравнений равновесия

$$\begin{aligned} \sum M_c = 0 &\Leftrightarrow V_B \cdot (l - x_c) - q_2 \cdot (l - x_c) \cdot \frac{l - x_c}{2} - M_{o,c} = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow M_{o,c} = V_B \cdot (l - x_c) - q_2 \cdot (l - x_c) \cdot \frac{l - x_c}{2} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow M_{o,c} &= 26 \cdot (16 - 8) - 2,2 \cdot (16 - 8) \cdot \frac{16 - 8}{2} = 0 \Leftrightarrow M_{o,c} = 137,6 \text{ кНм}; \\ \sum y = 0 &\Leftrightarrow V_B - q_2 \cdot (l - x_c) + Q_{o,c} \Leftrightarrow Q_{o,c} = V_B - q_2 \cdot (l - x_c) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow Q_{o,c} = -26 + 2,2 \cdot (16 - 8) \Leftrightarrow Q_{o,c} = -8,4 \text{ кН}. \end{aligned}$$

Координаты сечения С (справа):  $x_c = 8$ ,  $y_c = \frac{4f}{l^2} x_c(l - x_c) \Leftrightarrow y_c = \frac{4 \cdot 4}{16^2} \cdot 8 \cdot (16 - 8) \Leftrightarrow y_c = 4,0 \text{ м}$ .

Тангенс, синус и косинус угла  $\varphi_c$  наклона сечения С к оси  $x$  определяем по формулам (3.2) и (3.3)

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \varphi_c &= \frac{4f}{l^2} (l - 2x_c) \Leftrightarrow \operatorname{tg} \varphi_c = \frac{4 \cdot 4}{16^2} (16 - 2 \cdot 8) \Leftrightarrow \operatorname{tg} \varphi_c = 0; \\ \sin \varphi_c &= \frac{\operatorname{tg} \varphi_c}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi_c}} \Leftrightarrow \sin \varphi_c = \frac{0}{\sqrt{1 + 0^2}} \Leftrightarrow \sin \varphi_c = 0; \\ \cos \varphi_c &= \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi_c}} \Leftrightarrow \cos \varphi_c = \frac{1}{\sqrt{1 + 0^2}} \Leftrightarrow \cos \varphi_c = 1. \end{aligned}$$

Изгибающий момент  $M_c$ , поперечную  $Q_c$  и продольную  $N_c$  силу в сечении С определяем по формулам (3.11), (3.12) и (3.13) соответственно:

$$\begin{aligned} M_c &= M_{o,c} - H_B \cdot y_c \Leftrightarrow M_c = 137,6 - 34,4 \cdot 4 \Leftrightarrow M_c = 0 \text{ кНм}; \\ Q_c &= Q_{o,c} \cdot \cos \varphi_c - H_B \cdot \sin \varphi_c \Leftrightarrow Q_c = -8,4 \cdot 1 - 34,4 \cdot 0 \Leftrightarrow Q_c = -8,4 \text{ кН}; \\ N_c &= -Q_{o,c} \cdot \sin \varphi_c - H_B \cdot \cos \varphi_c \Leftrightarrow N_c = -(-8,4) \cdot 0 - 34,4 \cdot 1 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow N_c = -34,4 \text{ кН}. \end{aligned}$$

### Сечение 4.

Рассмотрим равновесие правой части простой балки (рис. 3.9, б) и арки (рис. 3.9, а) от сечения 4 и находим балочный изгибающий момент  $M_{o,4}$  и балочную поперечную силу  $Q_{o,4}$  из уравнений равновесия

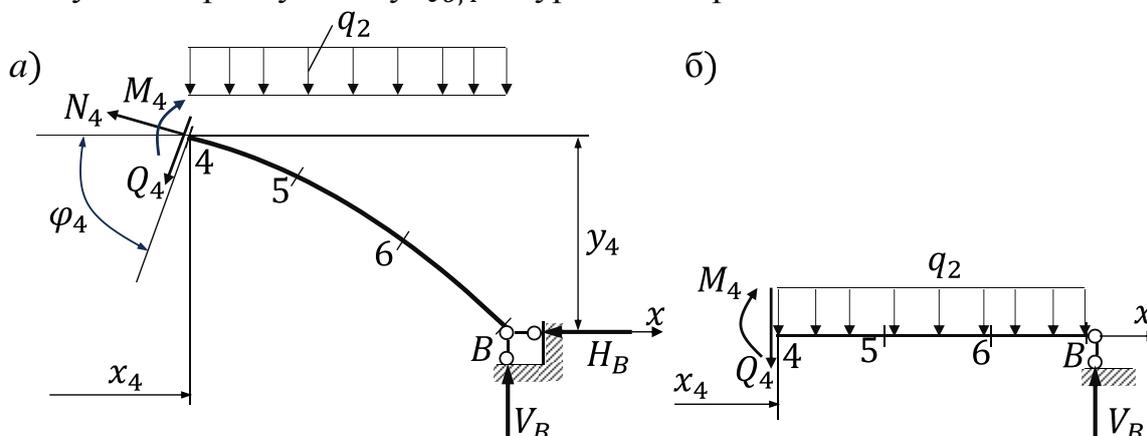


Рисунок 3.9– Узел в сечении 4: а – арки; б – простой балки.

$$\begin{aligned} \sum M_4 = 0 &\Leftrightarrow -V_B \cdot (l - x_4) + q_2 \cdot (l - x_4) \cdot \frac{l - x_4}{2} + M_{o,4} = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow M_{o,4} = V_B \cdot (l - x_4) - q_2 \cdot (l - x_4) \cdot \frac{l - x_4}{2} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow M_{o,4} &= 26 \cdot (16 - 10) - 2,2 \cdot (16 - 10) \cdot \frac{16 - 10}{2} \Leftrightarrow M_{o,4} = 116,4 \text{ кНм}; \\ \sum y = 0 &\Leftrightarrow -V_B + q_2 \cdot (l - x_4) - Q_{o,4} \Leftrightarrow Q_{o,4} = -V_B + q_2 \cdot (l - x_4) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow Q_{o,4} = -26 + 2,2 \cdot (16 - 10) \Leftrightarrow Q_{o,4} = -12,8 \text{ кН}. \end{aligned}$$

Координаты сечения 4:

$$x_4 = 10;$$

$$y_4 = \frac{4f}{l^2} x_4 (l - x_4) \Leftrightarrow y_4 = \frac{4 \cdot 4}{16^2} \cdot 10 \cdot (16 - 10) \Leftrightarrow y_4 = 3,75 \text{ м}.$$

Тангенс, синус и косинус угла  $\varphi_4$  наклона сечения 4 к оси  $x$  определяем по формулам (3.2) и (3.3)

$$tg \varphi_4 = \frac{4f}{l^2} (l - 2x_4) \Leftrightarrow tg \varphi_4 = \frac{4 \cdot 4}{16^2} (16 - 2 \cdot 10) \Leftrightarrow tg \varphi_4 = -0,25;$$

$$\sin \varphi_4 = \frac{tg \varphi_4}{\sqrt{1 + tg^2 \varphi_4}} \Leftrightarrow \sin \varphi_4 = \frac{-0,25}{\sqrt{1 + (-0,25)^2}} \Leftrightarrow \sin \varphi_4 = -0,243;$$

$$\cos \varphi_4 = \frac{1}{\sqrt{1 + tg^2 \varphi_4}} \Leftrightarrow \cos \varphi_4 = \frac{1}{\sqrt{1 + (-0,25)^2}} \Leftrightarrow \cos \varphi_4 = 0,97.$$

Изгибающий момент  $M_4$ , поперечную  $Q_4$  и продольную  $N_4$  силу в сечении 4 определяем по формулам (3.11), (3.12) и (3.13) соответственно:

$$M_4 = M_{o,4} - H_B \cdot y_4 \Leftrightarrow M_4 = 116,4 - 34,4 \cdot 3,75 \Leftrightarrow M_4 = -12,6 \text{ кНм};$$

$$\begin{aligned} Q_4 &= Q_{o,4} \cdot \cos \varphi_4 - H_B \cdot \sin \varphi_4 \Leftrightarrow Q_4 = -12,8 \cdot 0,97 - 34,4 \cdot (-0,243) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow Q_4 = -4,06 \text{ кН}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} N_4 &= -Q_{o,4} \cdot \sin \varphi_4 - H_B \cdot \cos \varphi_4 \Leftrightarrow N_4 = -(-12,8 \cdot (-0,243)) - \\ &- 34,4 \cdot 0,97 \Leftrightarrow N_4 = -36,48 \text{ кН}. \end{aligned}$$

### Сечение 5.

Рассмотрим равновесие правой части простой балки (рис. 3.10, б) и арки (рис. 3.10, а) от сечения 5 и находим балочный изгибающий момент  $M_{o,5}$  и балочную поперечную силу  $Q_{o,5}$  из уравнений равновесия

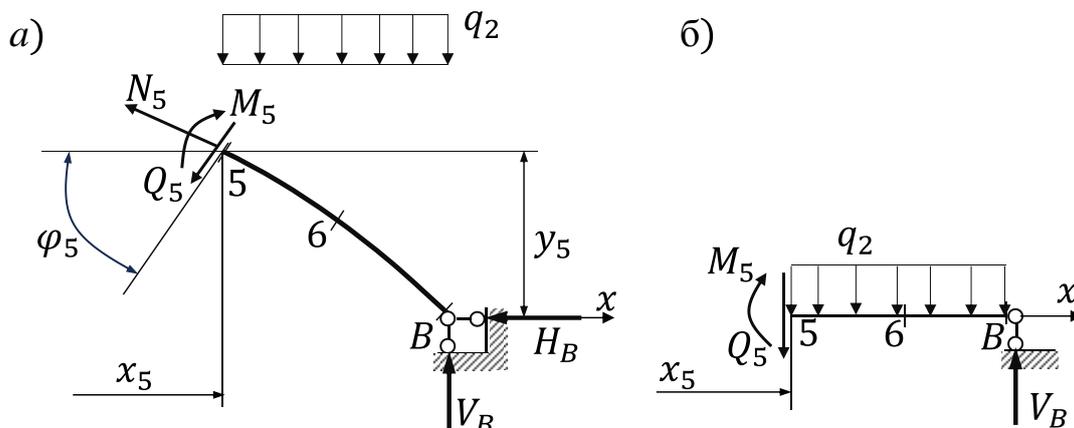


Рисунок 3.10– Узел в сечении 5: а – арки; б – простой балки.

$$\begin{aligned} \sum M_5 = 0 &\Leftrightarrow -V_B \cdot (l - x_5) + q_2 \cdot (l - x_5) \cdot \frac{l - x_5}{2} + M_{o,5} = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow M_{o,5} = V_B \cdot (l - x_5) - q_2 \cdot (l - x_5) \cdot \frac{l - x_5}{2} \Leftrightarrow \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow M_{o,5} = 26 \cdot (16 - 12) - 2,2 \cdot (16 - 12) \cdot \frac{16-12}{2} = 0 \Leftrightarrow M_{o,5} = 86,4 \text{ кНм};$$

$$\sum y = 0 \Leftrightarrow V_B - q_2 \cdot (l - x_5) + Q_{o,5} \Leftrightarrow Q_{o,5} = -V_B + q_2 \cdot (l - x_5) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow Q_{o,5} = -26 + 2,2 \cdot (16 - 12) \Leftrightarrow Q_{o,5} = -17,2 \text{ кН}.$$

Координаты сечения 5:

$$x_5 = 12;$$

$$y_5 = \frac{4f}{l^2} x_5 (l - x_5) \Leftrightarrow y_5 = \frac{4 \cdot 4}{16^2} \cdot 12 \cdot (16 - 12) \Leftrightarrow y_5 = 3,0 \text{ м}.$$

Тангенс, синус и косинус угла  $\varphi_5$  наклона сечения 5 к оси  $x$  определяем по формулам (3.2) и (3.3)

$$tg\varphi_5 = \frac{4f}{l^2} (l - 2x_5) \Leftrightarrow tg\varphi_5 = \frac{4 \cdot 4}{16^2} (16 - 2 \cdot 12) \Leftrightarrow tg\varphi_5 = -0,447;$$

$$\sin\varphi_5 = \frac{tg\varphi_5}{\sqrt{1+tg^2\varphi_5}} \Leftrightarrow \sin\varphi_5 = \frac{-0,447}{\sqrt{1+(-0,447)^2}} \Leftrightarrow \sin\varphi_5 = -0,408;$$

$$\cos\varphi_5 = \frac{1}{\sqrt{1+tg^2\varphi_5}} \Leftrightarrow \cos\varphi_5 = \frac{1}{\sqrt{1+(-0,447)^2}} \Leftrightarrow \cos\varphi_5 = 0,913.$$

Изгибающий момент  $M_5$ , поперечную  $Q_5$  и продольную  $N_5$  силу в сечении 4 определяем по формулам (3.11), (3.12) и (3.13) соответственно:

$$M_5 = M_{o,5} - H_B \cdot y_5 \Leftrightarrow M_5 = 86,4 - 34,4 \cdot 3,0 \Leftrightarrow M_5 = -16,8 \text{ кНм};$$

$$Q_5 = Q_{o,5} \cdot \cos\varphi_5 - H_B \cdot \sin\varphi_5 \Leftrightarrow Q_5 = -17,2 \cdot 0,913 -$$

$$-34,4 \cdot (-0,408) \Leftrightarrow Q_5 = -1,67 \text{ кН};$$

$$N_5 = -Q_{o,5} \cdot \sin\varphi_5 - H_B \cdot \cos\varphi_5 \Leftrightarrow N_5 = -(-17,2 \cdot (-0,408)) -$$

$$-34,4 \cdot 0,913 \Leftrightarrow N_5 = -38,42 \text{ кН}.$$

### Сечение 6.

Рассмотрим равновесие правой части простой балки (рис. 3.3, б) и арки (рис. 3.3, а) от сечения 6 и находим балочный изгибающий момент  $M_{o,6}$  и балочную поперечную силу  $Q_{o,6}$  из уравнений равновесия

$$\sum M_6 = 0 \Leftrightarrow -V_B \cdot (l - x_6) + q_2 \cdot (l - x_6) \cdot \frac{l-x_6}{2} + M_{o,6} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow M_{o,6} = V_B \cdot (l - x_6) - q_2 \cdot (l - x_6) \cdot \frac{l-x_6}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow M_{o,6} = 26 \cdot (16 - 14) - 2,2 \cdot (16 - 14) \cdot \frac{16-14}{2} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow M_{o,6} = 47,6 \text{ кНм};$$

$$\sum y = 0 \Leftrightarrow -V_B + q_2 \cdot (l - x_6) + Q_{o,6} \Leftrightarrow Q_{o,6} = V_B - q_2 \cdot (l - x_6) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow Q_{o,6} = 26 - 2,2 \cdot (16 - 14) \Leftrightarrow Q_{o,6} = 21,6 \text{ кН}.$$

Координаты сечения 6:

$$x_6 = 14;$$

$$y_6 = \frac{4f}{l^2} x_6 (l - x_6) \Leftrightarrow y_6 = \frac{4 \cdot 4}{16^2} \cdot 14 \cdot (16 - 14) \Leftrightarrow y_6 = 1,75 \text{ м}.$$

Тангенс, синус и косинус угла  $\varphi_6$  наклона сечения 6 к оси  $x$  определяем по формулам (3.2) и (3.3)

$$tg\varphi_6 = \frac{4f}{l^2} (l - 2x_6) \Leftrightarrow tg\varphi_6 = \frac{4 \cdot 4}{16^2} (16 - 2 \cdot 14) \Leftrightarrow tg\varphi_6 = -0,75;$$

$$\sin\varphi_6 = \frac{tg\varphi_6}{\sqrt{1+tg^2\varphi_6}} \Leftrightarrow \sin\varphi_6 = \frac{-0,75}{\sqrt{1+(-0,75)^2}} \Leftrightarrow \sin\varphi_6 = -0,6;$$

$$\cos\varphi_6 = \frac{1}{\sqrt{1+tg^2\varphi_6}} \Leftrightarrow \cos\varphi_6 = \frac{1}{\sqrt{1+(-0,75)^2}} \Leftrightarrow \cos\varphi_6 = 0,8.$$

Изгибающий момент  $M_6$ , поперечную  $Q_6$  и продольную  $N_6$  силу в сечении б определяем по формулам (3.11), (3.12) и (3.13) соответственно:

$$M_6 = M_{o,6} - H_B \cdot y_6 \Leftrightarrow M_6 = 47,6 - 34,4 \cdot 1,75 \Leftrightarrow M_6 = -12,6 \text{ кНм};$$

$$Q_6 = Q_{o,6} \cdot \cos\varphi_6 - H_B \cdot \sin\varphi_6 \Leftrightarrow Q_6 = -21,6 \cdot 0,8 - 34,4 \cdot (-0,6) \Leftrightarrow Q_6 = 3,36 \text{ кН};$$

$$N_6 = -Q_{o,6} \cdot \sin\varphi_6 - H_B \cdot \cos\varphi_6 \Leftrightarrow N_6 = -(-21,6 \cdot (-0,6)) - 34,4 \cdot 0,8 \Leftrightarrow N_6 = -40,48 \text{ кН}.$$

По полученным данным строим балочные  $M_o$  и арочные  $M$  эпюры изгибающих моментов, балочные  $Q_o$  и арочные  $Q$  эпюры поперечных сил и арочные  $N$  эпюры продольных сил (рис 3.9).

### Сечение В.

Рассмотрим равновесие правой части простой балки (рис. 3.11, а) и арки (рис. 3.11, б) от сечения В и находим балочный изгибающий момент  $M_{o,B}$  и балочную поперечную силу  $Q_{o,A}$  из уравнений равновесия

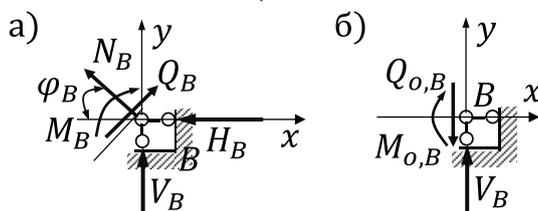


Рисунок 3.11– Узел в сечении В: а – арки; б – простой балки.

$$\sum M_B = 0 \Leftrightarrow M_{o,B} = 0;$$

$$\sum y = 0 \Leftrightarrow V_B - Q_{o,B} = 0 \Leftrightarrow Q_{o,B} = V_B \Leftrightarrow Q_{o,B} = 26 \text{ кН}.$$

Координаты сечения А:  $x_A = 16$ ,  $y_A = 0$ .

Тангенс, синус и косинус угла  $\varphi_B$  наклона сечения В к оси  $x$  определяем по формулам (3.2) и (3.3)

$$\operatorname{tg}\varphi_B = \frac{4f}{l^2}(l - 2x_B) = \frac{4 \cdot 4}{16^2}(16 - 2 \cdot 16) = -1;$$

$$\sin\varphi_B = \frac{\operatorname{tg}\varphi_B}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\varphi_B}} = \frac{-1}{\sqrt{1+(-1)^2}} = -\frac{1}{\sqrt{2}};$$

$$\cos\varphi_B = \frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\varphi_B}} = \frac{1}{\sqrt{1+(-1)^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Изгибающий момент  $M_B$ , поперечную  $Q_B$  и продольную  $N_B$  силу в сечении В определяем по формулам (3.11), (3.12) и (3.13) соответственно:

$$M_A = M_{o,B} - H_B \cdot y_B \Leftrightarrow M_B = 0 - 34,4 \cdot 0 \Leftrightarrow M_B = 0;$$

$$Q_B = -Q_{o,B} \cdot \cos\varphi_B - H_B \cdot \sin\varphi_B \Leftrightarrow \Leftrightarrow Q_B = -26 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} - 34,4 \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \Leftrightarrow Q_B = 5,94 \text{ кН};$$

$$N_B = Q_{o,B} \cdot \sin\varphi_B - H_B \cdot \cos\varphi_B \Leftrightarrow \Leftrightarrow N_B = 26 \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) - 34,4 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow N_A = -42,7 \text{ кН}.$$

Сводные эпюры балочных  $M_o$  и арочных  $M$  изгибающих моментов, балочных  $Q_o$  и арочных  $Q$  поперечных сил и арочных  $N$  продольных сил представлены на рисунке 3.12.

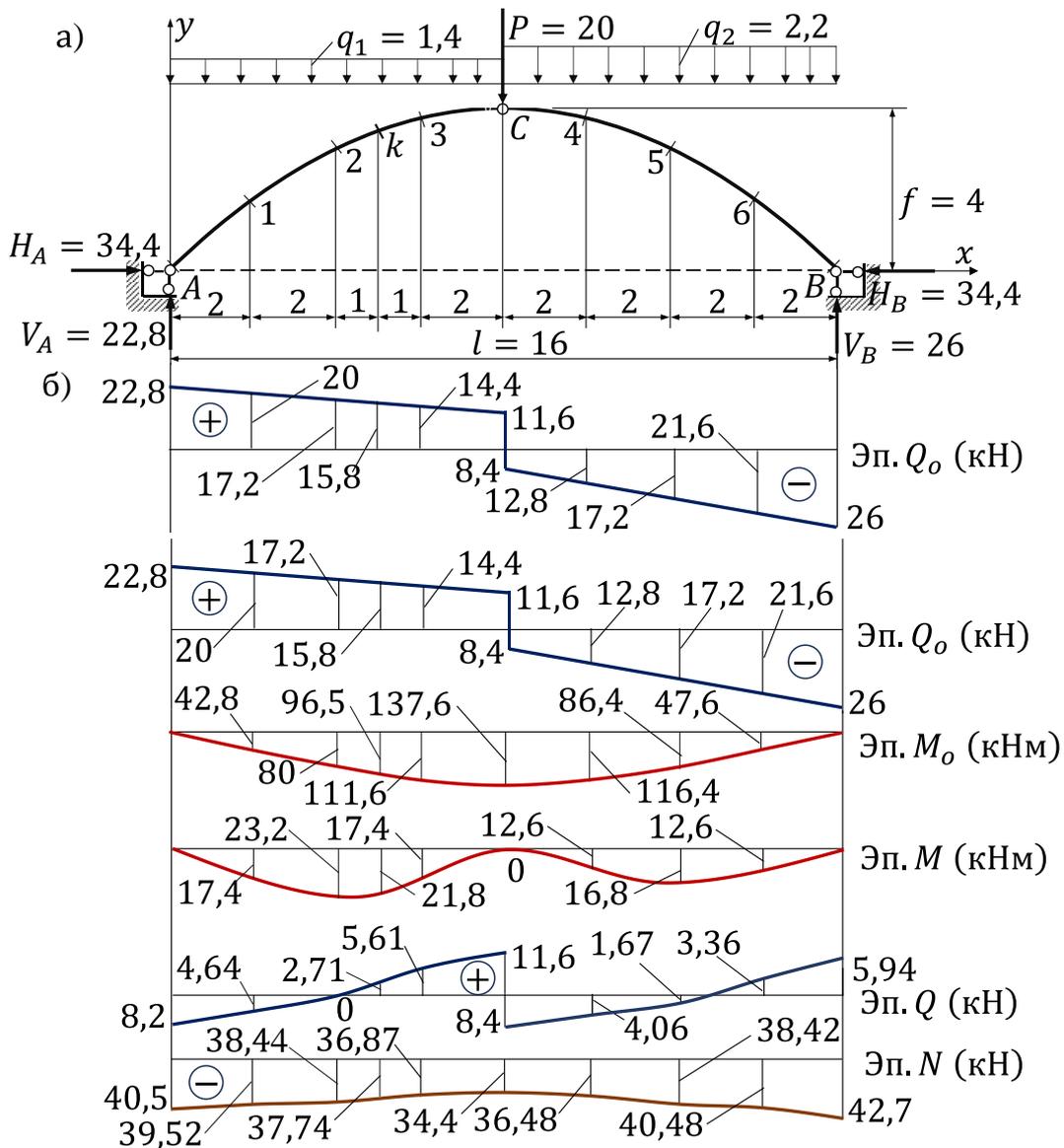


Рисунок 3.12– Эпюры балочных  $M_o$  и арочных  $M$  изгибающих моментов, балочных  $Q_o$  и арочных  $Q$  поперечных сил и арочных  $N$  продольных сил.

### 3.3. Построение линий влияния и определение усилий по линиям влияния.

#### Построение линий влияния опорных реакций.

Рассмотрим трехшарнирную арку под действием подвижной нагрузки  $P = 1$  и вначале строим линии влияния опорных реакций (рис. 3.13).

Характер изменения (линии влияния) опорных реакций  $V_A$  и  $V_B$  в зависимости от положения единичной силы при ее перемещении по арке находим из уравнений равновесия также как и для простой балки (см. п. 1.3, рис. 1.71):

$$\sum M_A = 0 \Leftrightarrow P \cdot x - V_B \cdot l = 0 \Leftrightarrow 1 \cdot x - V_B \cdot l = 0 \Leftrightarrow V_B = \frac{x}{l};$$

$$\sum M_B = 0 \Leftrightarrow V_A \cdot l - P \cdot (l - x) = 0 \Leftrightarrow V_A \cdot l - 1 \cdot (l - x) = 0 \Leftrightarrow V_A = \frac{l-x}{l}.$$

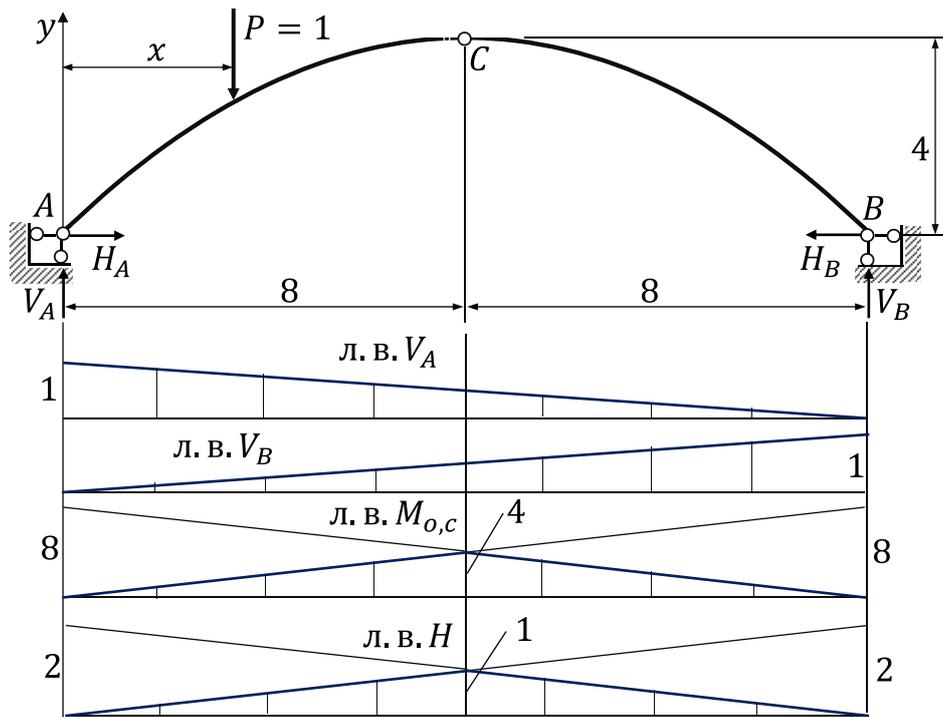


Рисунок 3.13– Линии влияния опорных реакций арки.

Линии влияния равных опорных реакций  $H_A$  и  $H_B$  (распора  $H$ ) находим из уравнений моментов соответственно левой и правой половины арки относительно шарнира  $C$ , например, для левой половины:

$$\begin{aligned} \sum M_C^{\text{лев}} = 0 &\Leftrightarrow V_A \cdot \frac{l}{2} - P \cdot \left(\frac{l}{2} - x\right) - H_A \cdot f = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow V_A \cdot \frac{l}{2} - 1 \cdot \left(\frac{l}{2} - x\right) - H_A \cdot f = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow H_A = H = \left[ V_A \cdot \frac{l}{2} - 1 \cdot \left(\frac{l}{2} - x\right) \right] / f \Leftrightarrow H = \frac{M_{o,c}}{f}. \end{aligned}$$

**Построение линий влияния изгибающих моментов.**

Выражение  $\left[ V_A \cdot \frac{l}{2} - 1 \cdot \left(\frac{l}{2} - x\right) \right]$  соответствует изгибающему моменту в сечении  $C$  простой балки (см. п. 1.3, рис. 1.70, 1.71), т.е. линия влияния распора соответствует линии влияния изгибающего момента в сечении  $C$  левой половины простой балки  $M_{o,c}$ , ординаты которой поделены на величину стрелы подъема  $f = 4$  (рис. 3.12).

В соответствии с формулой (3.11) для построения линии влияния изгибающего момента  $M_k$  в сечении  $k$  вначале построим линию влияния изгибающего момента в этом сечении для простой балки  $M_{o,k}$  (рис. 3.14), последовательность построения которой подробно изложена в п. 1.3 (рис. 1.71). Умножив ординаты эпюры линии влияния  $H$  (рис. 3.13) на ординату  $y_k = 3,44$  сечения  $k$  арки, строим линию влияния  $H(-y_k)$ . Затем, линия влияния изгибающего момента  $M_k$  в сечении  $k$  строится простым суммированием ординат линии влияния простой балки  $M_{o,k}$  и линии влияния  $H(-y_k)$  (табл. 1).

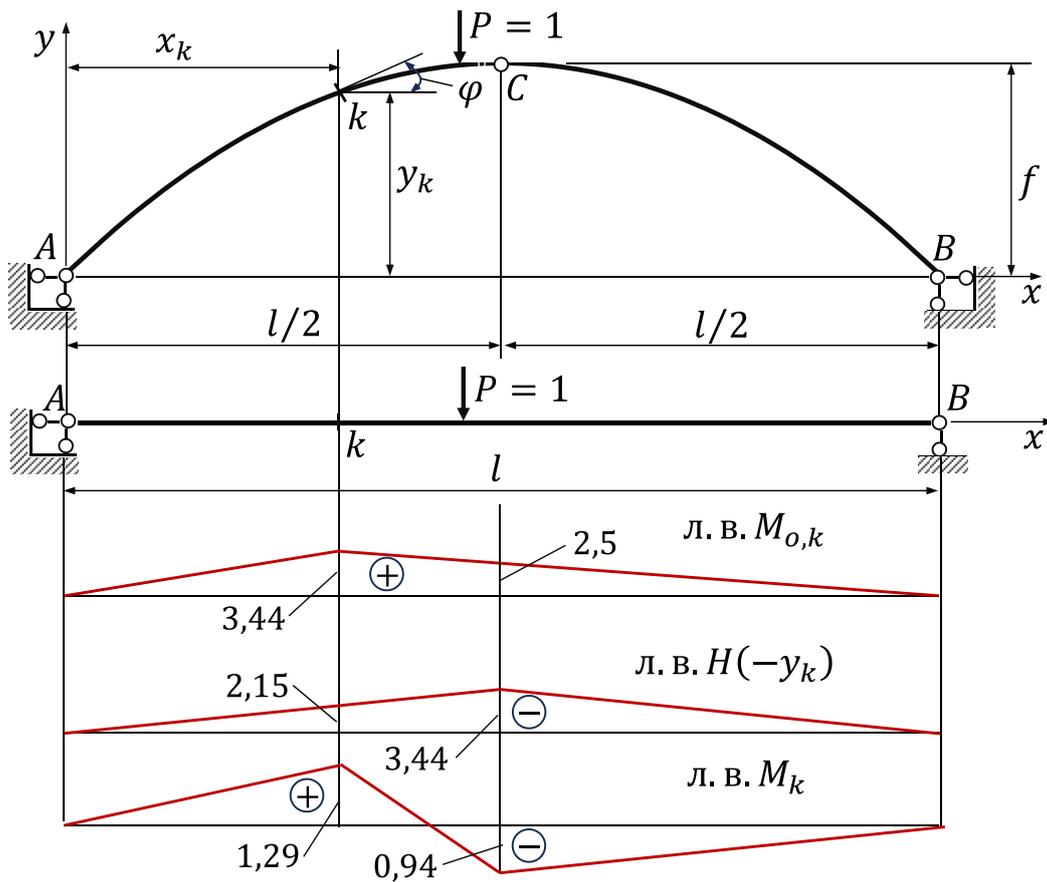


Рисунок 3.14– Линия влияния изгибающего момента в сечении  $k$ .

Таблица 1.

Таблица ординат линий влияния.

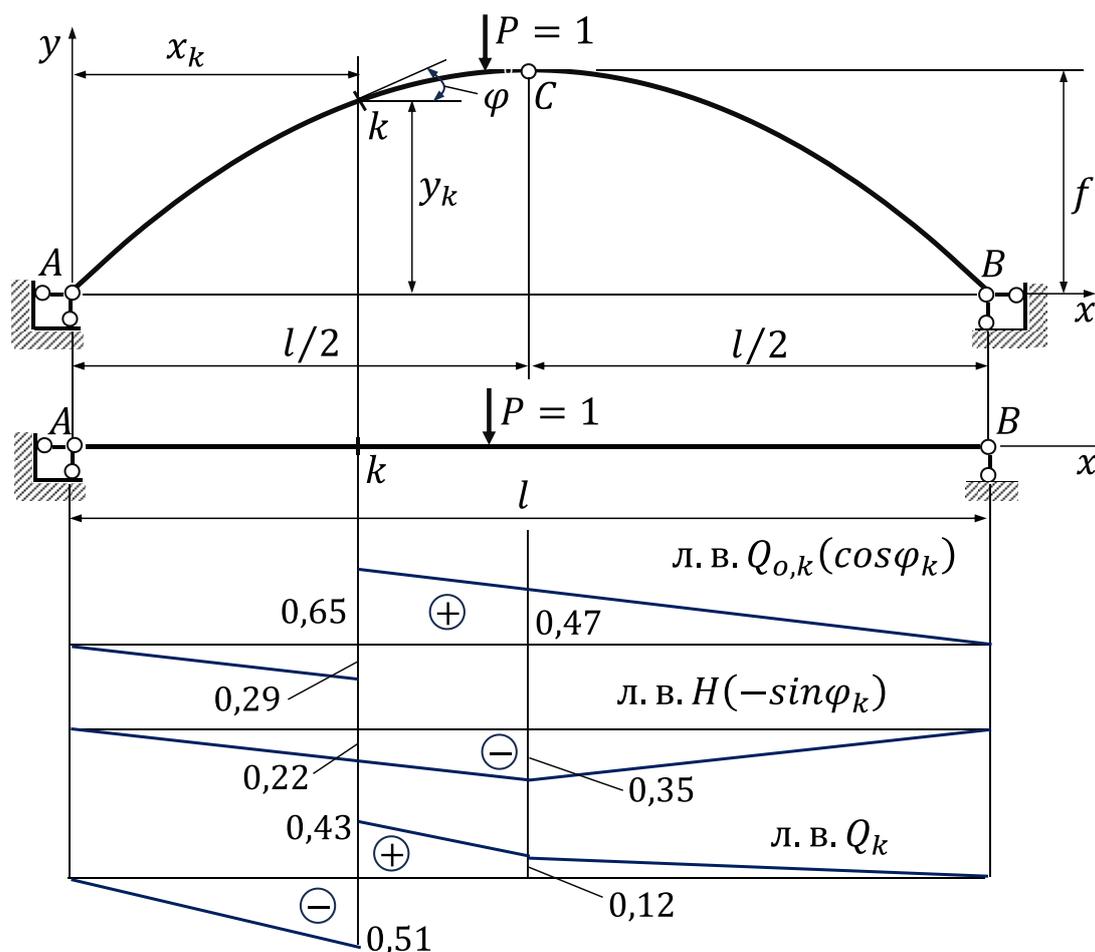
| Линии влияния  | Ординаты точки $k$      | Ординаты точки $c$      |
|----------------|-------------------------|-------------------------|
| л.в. $M_{o,k}$ | 3,44                    | 2,5                     |
| л.в. $H(-y_k)$ | -2,15                   | -3,44                   |
| л.в. $M_k$     | $3,44 + (-2,15) = 1,29$ | $2,5 + (-3,44) = -0,94$ |

### Построение линий влияния поперечных сил.

В соответствии с формулой (3.12) для построения линии влияния поперечной силы  $Q_k$  в сечении  $k$  вначале строим линию влияния поперечной силы в этом сечении для простой балки  $Q_{o,k}$ , последовательность построения которой также подробно изложена в п. 1.3 (рис. 1.71). Умножив ординаты эпюры линии влияния  $Q_{o,k}$  на величину косинуса угла наклона сечения  $k$  к оси  $x$ , строим эпюру линии влияния  $Q_{o,k} \cos \varphi_k$  (рис. 3.15). Умножив ординаты эпюры линии влияния  $H$  на величину синуса угла наклона сечения  $k$  к оси  $x$ , строим эпюру линии влияния  $H(-\sin \varphi_k)$  (рис. 3.15). Затем, линия влияния поперечной силы  $Q_k$  в сечении  $k$  строится простым суммированием ординат линии влияния  $Q_{o,k} \cos \varphi_k$  и линии влияния  $H(-\sin \varphi_k)$  (табл. 2).

Таблица ординат линий влияния.

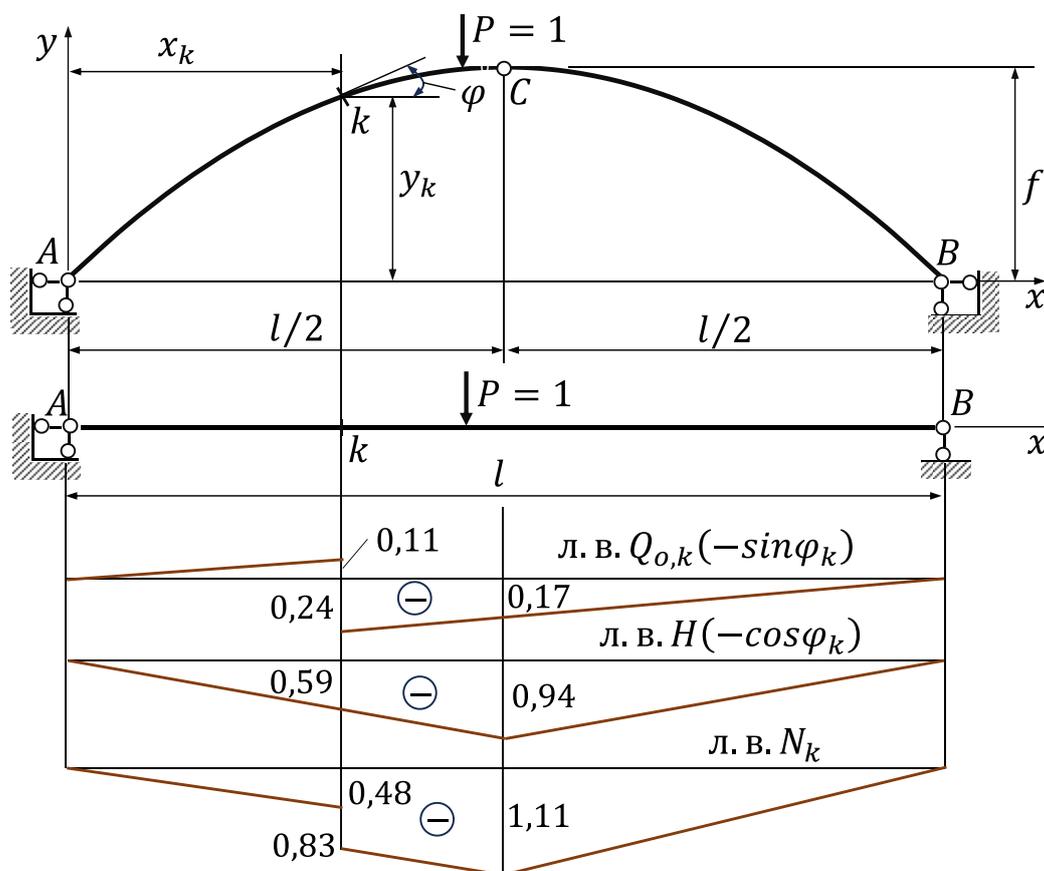
| Линии влияния                             | Ординаты точки $k$        | Ординаты точки $c$      |
|---|---------------------------|-------------------------|
| л.в. $Q_{o,k} \cos \varphi_k$ (слева)     | -0,29                     | 0,47                    |
| л.в. $Q_{o,k} \cos \varphi_k$<br>(справа) | 0,65                      |                         |
| л.в. $H(-\sin \varphi_k)$                 | -0,22                     | -0,35                   |
| л.в. $Q_k$ (слева)                        | $-0,29 + (-0,22) = -0,51$ | $0,47 + (-0,35) = 0,12$ |
| л.в. $Q_k$ (справа)                       | $0,65 + (-0,22) = 0,43$   |                         |

Рисунок 3.15– Линия влияния поперечной силы в сечении  $k$ .**Построение линий влияния продольных сил.**

В соответствии с формулой (3.13) для построения линии влияния продольной силы  $N_k$  в сечении  $k$  вначале ординаты эпюры линии влияния  $Q_{o,k}$  умножаем на величину синуса угла  $\varphi_k$  наклона сечения  $k$  к оси  $x$  и строим эпюру линии влияния  $Q_{o,k}(-\sin \varphi_k)$  (рис. 3.16). Умножив ординаты эпюры линии влияния  $H$  на величину косинуса угла наклона сечения  $k$  к оси  $x$ , строим эпюру линии влияния  $H(-\cos \varphi_k)$  (рис. 3.16). Затем, линия влияния продольной силы  $N_k$  в сечении  $k$  строится простым суммированием ординат линии влияния  $Q_{o,k}(-\sin \varphi_k)$  и линии влияния  $H(-\cos \varphi_k)$  (табл. 3).

Таблица ординат линий влияния.

| Линии влияния                              | Ординаты точки $k$        | Ординаты точки $c$        |
|--|---------------------------|---------------------------|
| Л.В. $Q_{o,k}(-\sin\varphi_k)$<br>(слева)  | 0,11                      | - 0,17                    |
| Л.В. $Q_{o,k}(-\sin\varphi_k)$<br>(справа) | - 0,24                    |                           |
| Л.В. $H(-\cos\varphi_k)$                   | - 0,59                    | - 0,94                    |
| Л.В. $N_k$ (слева)                         | $0,11 + (-0,59) = -0,48$  | $-0,17 + (-0,94) = -1,11$ |
| Л.В. $N_k$ (справа)                        | $-0,24 + (-0,59) = -0,83$ |                           |

Рисунок 3.16– Линия влияния продольной силы в сечении  $k$ .**Определение усилий в сечении  $k$  арки по линиям влияния.**

Строим сводную эпюру усилий в сечении  $k$  арки.

Изгибающий момент в поперечном сечении  $k$  определяется по формуле

$$M_k = \sum q_i \omega_i + \sum P_i y_i,$$

где  $q_i$  – интенсивность  $i$ -той распределенной нагрузки, знак принимается положительным если направлена вниз;

$\omega_i$  – площадь  $i$ -того участка линии влияния  $M_k$ , распределенного в пределах  $i$ -той распределенной нагрузки, знак соответствует знаку линии влияния;

$P_i$  – значение  $i$ -той сосредоточенной силы, знак принимается положительным если направлена вниз;

$y_i$  – ордината линии влияния в точке приложения  $i$ -той сосредоточенной силы, знак соответствует знаку линии влияния.

$$M_k = 1,4 \cdot \frac{1,29 \cdot 5}{2} + 1,4 \cdot \frac{1,29 - 0,94}{2} \cdot 3 + 2,2 \cdot \left( -\frac{0,94 \cdot 8}{2} \right) + 20 \cdot (-0,94) \Leftrightarrow M_k = -21,6 \text{ кНм.}$$

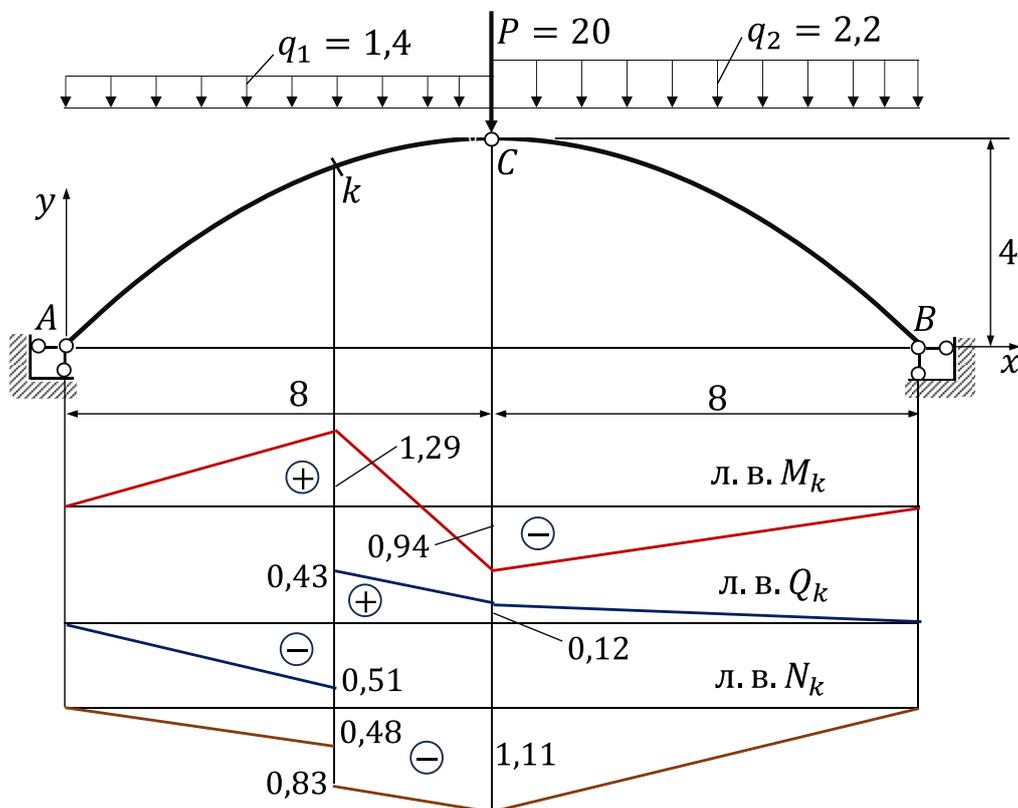


Рисунок 3.17– Сводная эпюра линий влияния внутренних усилий в сечении  $k$ .

Поперечная сила в сечении  $k$  определяется по формуле

$$Q_k = \sum q_i \omega_i + \sum P_i y_i \Leftrightarrow Q_k = 1,4 \cdot \left( -\frac{0,51 \cdot 5}{2} \right) + 1,4 \cdot \frac{0,43 + 0,12}{2} \cdot 3 + 2,2 \cdot \frac{0,12 \cdot 8}{2} + 20 \cdot 0,12 \Leftrightarrow Q_k = 2,8 \text{ кН.}$$

Продольная сила в сечении  $k$  определяется по формуле

$$N_k = \sum q_i \omega_i + \sum P_i y_i \Leftrightarrow N_k = 1,4 \cdot \left( -\frac{0,48 \cdot 5}{2} \right) + 1,4 \cdot \left( -\frac{0,83 + 1,11}{2} \right) \cdot 3 + 2,2 \cdot \left( -\frac{1,11 \cdot 8}{2} \right) + 20 \cdot (-1,11) \Leftrightarrow N_k = -37,7 \text{ кН.}$$

Результаты, полученные аналитическим способом и с помощью линий влияния, показали хорошую сходимость с минимальным отклонением до 0,9%:

$$\Delta(\%)_{M_k} = \left| \frac{21,8 - 21,6}{21,8} \right| \cdot 100\% \Leftrightarrow \Delta(\%)_{M_k} = 0,9\%;$$

$$\Delta(\%)_{Q_k} = \left| \frac{2,8 - 2,8}{2,8} \right| \cdot 100\% \Leftrightarrow \Delta(\%)_{Q_k} = 0\%;$$

$$\Delta(\%)_{N_k} = \left| \frac{37,9 - 37,7}{37,9} \right| \cdot 100\% \Leftrightarrow \Delta(\%)_{N_k} = 0,5\%.$$

**Примеры для самостоятельного решения:**

Для статически определимых параболических арок, приведенных на рис. 3.18 (исходные данные:  $P = 22$  кН,  $q = 2,4$  кН/м, размеры даны в метрах):

- 1) вычислить аналитически внутренние усилия и построить эпюры изгибающих моментов  $M_x$ , поперечных  $Q_x$  и продольных  $N_x$  сил;
- 2) для заданного сечения  $k$ :
  - а) построить линии влияния  $M_k$ ,  $Q_k$  и  $N_k$ ;
  - б) определить по линиям влияния  $M_k$ ,  $Q_k$  и  $N_k$ .

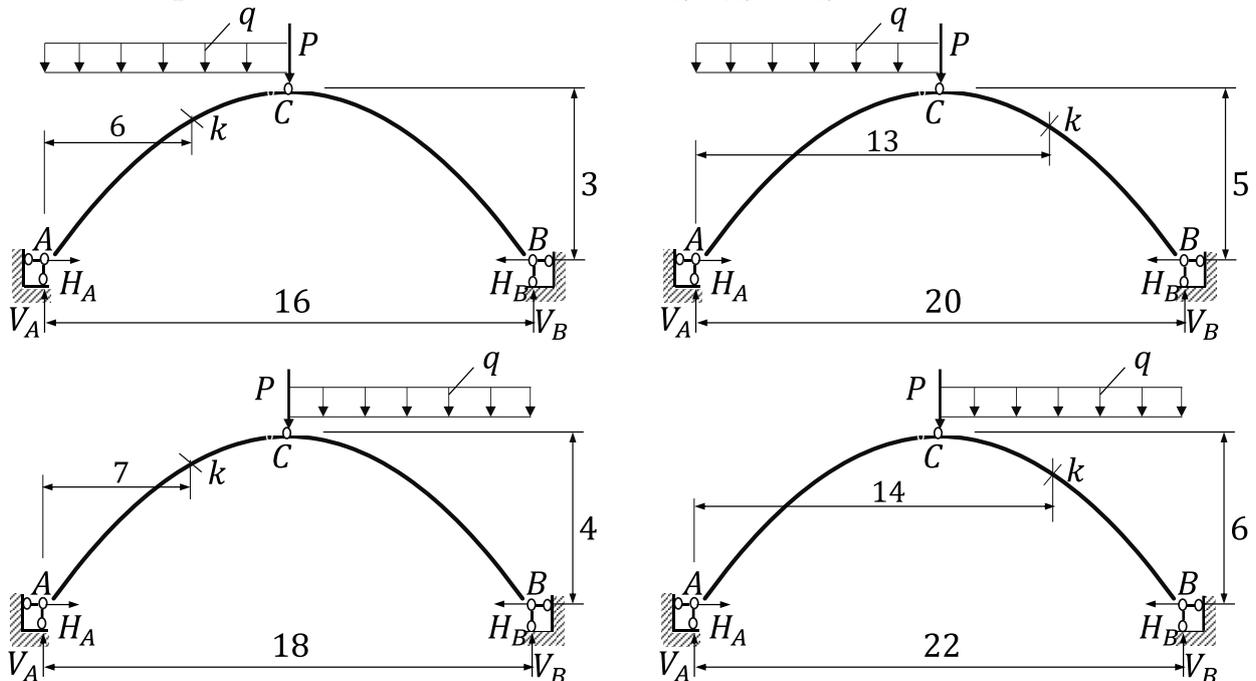


Рисунок 3.18– Схемы арок.

### Вопросы для самоконтроля.

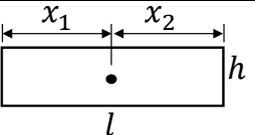
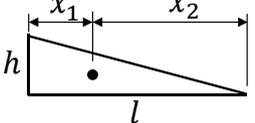
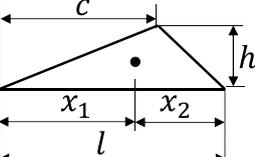
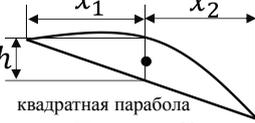
- 1) Что является статическим признаком трехшарнирной арки?
- 2) Что называют замком симметричной трехшарнирной арки?
- 3) Что называют стрелой подъема симметричной трехшарнирной арки?
- 4) В связи, с чем при всех равных условиях изгибающие моменты, возникающие в арке, меньше, чем изгибающие моменты, возникающие в балке?
- 5) В связи, с чем при всех равных условиях поперечные силы, возникающие в арке, меньше, чем поперечные силы, возникающие в балке?
- 6) В связи, с чем продольные силы, возникающие в арке, увеличиваются по модулю в направлении от замка к пятам арки?
- 7) Что называют пятой симметричной трехшарнирной арки?
- 8) Какая стержневая система называется аркой?
- 9) Какого вида арка называется трехшарнирной аркой?
- 10) Какое основное преимущество арки по сравнению с балкой?
- 11) Какие основные параметры определяют геометрию арки?
- 12) Какие арки считаются "пологими", а какие "подъемистыми"?
- 13) Что такое распор в трехшарнирной арке, как он определяется?

- 14) Каков порядок расчета трехшарнирной арки?
- 15) Как определяются функции угла наклона касательной в арке?
- 16) Когда горизонтальные составляющие реакций опор трехшарнирной арки равны?
- 17) Когда вертикальные составляющие реакций опор трехшарнирной арки равны соответствующим реакциям простой балки?
- 18) Как определяется величина распора трехшарнирной арки?
- 19) Значения каких величин требуется для определения внутренних сил в сечениях арки?
- 20) Что является отличительной особенностью трехшарнирных арок?
- 21) Из каких элементов состоит расчетная схема трехшарнирной арки?
- 22) Для чего трехшарнирные арки устраивают выпуклостью вверх?
- 23) Какими могут быть криволинейное очертание трехшарнирной арки?
- 24) Какие элементы расчетной схемы входят в уравнение параболического очертания арки?
- 25) Какие элементы расчетной схемы входят в формулу определения тангенса угла  $\varphi$  наклона касательной в точке поперечного сечения параболического очертания арки к горизонту?
- 26) Как определяется ордината произвольной точки параболической арки?
- 27) Какие элементы расчетной схемы входят в уравнение кругового очертания арки?
- 28) Какие элементы расчетной схемы входят в уравнение синусоидального очертания арки?
- 29) Какие элементы расчетной схемы входят в уравнение эллиптического очертания арки?

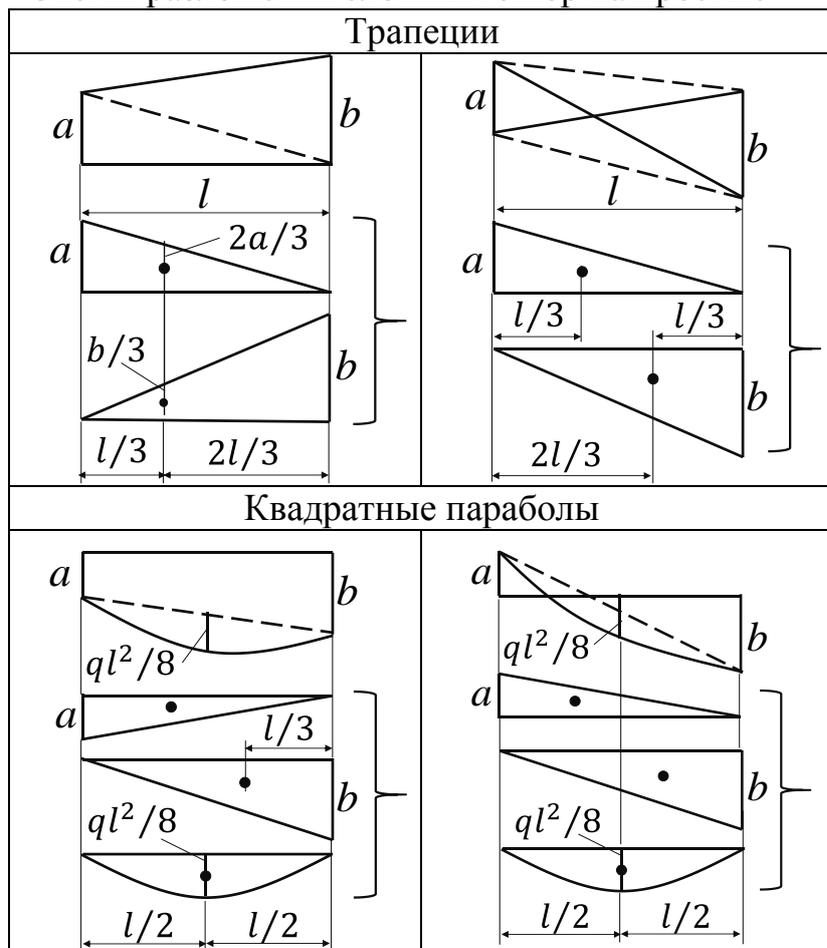
## Список использованной литературы.

1. Дарков А.В. Строительная механика: учебник для строит. спец. вузов / А.В. Дарков, Н.Н. Шапошников. – 10-е изд., стер. – СПб.: Лань, 2005. – 656 с.
2. Борисевич А.А. Строительная механика: учебник для вузов / А.А. Борисевич, Е.М. Сидорович, В.И. Игнатюк. – Мн.: БНТУ, 2007. – 821 с.
3. Межецкий Г.Д. Сопротивление материалов: Учебник / Г.Д. Межецкий, Г.Г. Загребин, Н.Н. Решетник; под общ. ред. Г.Д. Межецкого, Г.Г. Загребина. – 5-е изд., – М.: 2016. – 432с.
4. Тухфатуллин Б.А. Строительная механика. Расчет статически определимых систем. Варианты заданий и примеры решения для студентов заочной формы обучения [Текст]: учебное пособие / Б.А. Тухфатуллин, Л.Е. Путеева. – Томск: Изд-во Том. гос. архит.-строит. ун-та, 2014. – 108 с.
5. Анохин Н.Н. Строительная механика в примерах и задачах. Ч. 1. Статически определимые системы: М.: Изд-во АСВ, 1999. – 335 с.
6. Расчет трехшарнирной арки: метод. указания к выполнению расчетно-проектировочной работы по дисциплине «Строительная механика» / Владим. гос. ун-т; сост. И. А. Черноусова. – Владимир: Изд-во Владим. гос. ун-та, 2007. – 24 с.
7. Сопротивление материалов: Методические указания к практическим занятиям и самостоятельной работе по направлению подготовки 08.03.01 Строительство / сост. Ж.Г. Могилюк. – Москва: Издательство МГСУ, 2020. – 32 с. Режим доступа: <http://lib.mgsu.ru/>

Площади и положения центров тяжести участков эюр

|   | Площадь<br>$\omega$ | Абсциссы центра тяжести |                     |
|---|---------------------|-------------------------|---------------------|
|   |                     | $x_1$                   | $x_2$               |
|    | $lh$                | $\frac{l}{2}$           | $\frac{l}{2}$       |
|    | $\frac{lh}{2}$      | $\frac{l}{3}$           | $\frac{2l}{3}$      |
|    | $\frac{lh}{2}$      | $\frac{1}{3}(l+c)$      | $\frac{1}{3}(2l-c)$ |
|    | $\frac{lh}{3}$      | $\frac{l}{4}$           | $\frac{3l}{4}$      |
|   | $\frac{lh}{4}$      | $\frac{l}{5}$           | $\frac{4l}{5}$      |
|  | $\frac{2lh}{3}$     | $\frac{3l}{8}$          | $\frac{5l}{8}$      |
|  | $\frac{2lh}{3}$     | $\frac{l}{2}$           | $\frac{l}{2}$       |

## Схемы разложения сложных эпюр на простые



КЯТОВ Нурби Хусинович

# **СТРОИТЕЛЬНАЯ МЕХАНИКА**

## **СТАТИЧЕСКИ ОПРЕДЕЛИМЫЕ СТЕРЖНЕВЫЕ СИСТЕМЫ**

Учебное пособие для бакалавров направления подготовки  
08.03.01 Строительство

Корректор Чагова О.Х.

Редактор Чагова О.Х.

Сдано в набор 18.02.2024 г.

Формат 60x84/16

Бумага офсетная

Печать офсетная

Усл.печ. 10,23

Заказ № 5042

Тираж 100 экз.

Оригинал–макет подготовлен  
В библиотечно-издательском центре СКГА  
369000, г. Черкесск, ул. Ставропольская, 36

