МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«СЕВЕРО-КАВКАЗСКАЯ ГОСУДАРСТВЕННАЯ АКАДЕМИЯ»

СРЕДНЕПРОФЕССИОНАЛЬНЫЙ КОЛЛЕДЖ

И.В. Тарасенко

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ПРИКЛАДНЫХ ПРОФЕССИОНАЛЬНЫХ ЗАДАЧ

Практикум для обучающихся 2 курса специальности 35.02.16
Эксплуатация и ремонт сельскохозяйственной техники и оборудования

Черкесск, 2025

УДК 51-7
ББК 22.1
Т 19

Рассмотрено на заседании цикловой комиссии «Общеобразовательных дисциплин».
Протокол № 1 от «01» 09. 2024 г.
Рекомендовано к изданию редакционно-издательским советом СКГА.
Протокол № 27 от «07» 11. 2024 г.

Рецензенты: Моисеенко Е. В. **–** преподаватель высшей категории

Т19 **Тарасенко, И. В.** Математические методы решения прикладных профессиональных задач: практикум для обучающихся 2 курса специальности 35.02.16 Эксплуатация и ремонт сельскохозяйственной техники и оборудования / И.В. Тарасенко. – Черкесск: БИЦ СКГА, 2025.– 88 с.

Практикум разработан для специальности 35.02.16 «Эксплуатация и ремонт сельскохозяйственной техники и оборудования.» Практикум содержит все структурные элементы для организации проведения практических занятий. Практические задания представлены разнообразного характера и разной степени сложности. Некоторые содержат устные задания базового уровня («ответить на вопросы»), выполнение которых обязательны, для того чтобы приступить ко второму блоку – решение практических заданий. Организация выполнения и контроля практических работ по дисциплине «Математические методы решения прикладных профессиональных задач» является подготовительным этапом к сдаче дифференциального зачета по данной дисциплине.

УДК 51-7
ББК 22.1

СОДЕРЖАНИЕ

ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА

Практикум разработан для выполнения практических работ, представляет собой часть учебно-методического комплекта по учебной дисциплине «Математические методы решения прикладных профессиональных задач» и соответствует требованиям ФГОС и рабочей программе по дисциплине.

Целью создания разработки является оказание помощи студентам второго курса в освоении учебного материала по дисциплине в учреждениях среднего профессионального образования.

В связи с введением в образовательный процесс нового Федерального государственного образовательного стандарта, который ориентирован на выработку у студентов общих и профессиональных компетенций – набора знаний, умений, навыков и личностных качеств, все более актуальной становится задача организации практической работы студентов.

Практические занятия являются важной формой образовательного процесса и направлены на экспериментальное подтверждение теоретических положений и формирование учебных и профессиональных практических умений, они составляют важную часть теоретической и профессиональной практической подготовки.

Необходимым и структурным и элементами практического занятия, помимо самостоятельной деятельности студентов, являются инструктаж, проводимый преподавателем, а также анализ и оценка выполненных работ и степени овладения студентами запланированными умениями. Выполнению практических занятий предшествует проверка знаний студентов, их теоретической готовности к выполнению задания. Практические занятия носят репродуктивный характер. Работы, носящие репродуктивный характер, отличаются тем, что при их проведении студенты пользуются подробными инструкциями, в которых указаны: цель работы, пояснения (теория, основные характеристики), оборудование, порядок выполнения работы, контрольные вопросы, учебная и специальная литература.

При индивидуальной форме организации занятий каждый студент выполняет индивидуальное задание. Структура проведения сводится к следующему:

– сообщение темы и цели работы;

– актуализация теоретических знаний, которые необходимы для практической деятельности;

– разработка алгоритма проведения практической деятельности;

– непосредственное проведение практических работ;

– оформление работы в тетрадях для практических работ;

– обобщение и систематизация полученных результатов.

Практикум содержит все структурные элементы для организации проведения практических занятий. Практические задания представлены разнообразного характера и разной степени сложности. Некоторые содержат устные задания базового уровня («ответить на вопросы»), выполнение которых обязательны, для того чтобы приступить ко второму блоку– решение практических заданий.

Цели практических занятий:

– помочь студентам систематизировать, закрепить и углубить знания теоретического характера;

– научить студентов приемам решения практических задач, способствовать овладению навыкам и умениям и выполнения расчетов, графических и других видов заданий;

– научить их пользоваться справочной литературой;

– формировать умение учиться самостоятельно, т.е. овладевать методами, способами и приемами самообучения, саморазвития и самоконтроля.

В результате проведения практических занятий по дисциплине

«Математические методы решения прикладных профессиональных задач» студент должен:

знать:

– значение математической науки для решения задач, возникающих в теории и практике;

– широту и в тоже время ограниченность применения математических методов к анализу и исследованию процессов и явлений в природе и обществе;

– значение практики и вопросов, возникающих в самой математике для формирования и развития математической науки; историю развития понятия числа, создания математического анализа, возникновения и развития геометрии;

– универсальный характер законов логики математических рассуждений, их применимость во всех областях человеческой деятельности;

– вероятностный характер различных процессов окружающего мира.

уметь:

– находить значения корня, степени, логарифма, тригонометрических выражений на основе определения; выполнять преобразования выражений, применяя формулы, связанные со свойствами степеней, логарифмов, тригонометрических функций;

– вычислять значение функции по заданному значению аргумента; определять основные свойства числовых функций; строить графики изученных функций;

– находить производные элементарных функций; использовать производную для изучения свойств функций и построения графиков; применять производную для нахождения наибольшего и наименьшего значения;

– решать рациональные, показательные, логарифмические, тригонометрические уравнения, сводящиеся к линейным и квадратным, а так же аналогичные неравенства и системы; использовать графический метод решения уравнений и неравенств;

– решать простейшие комбинаторные задачи методом перебора, а также с использованием известных формул; вычислять вероятности событий на основе подсчета числа исходов;

– решать планиметрические и простейшие стереометрические задачи на нахождение геометрических величин; описывать взаимное расположение прямых и плоскостей в пространстве; изображать основные многогранники и круглые тела; выполнять чертежи по условиям задач; строить простейшие сечения куба, призмы, пирамиды;

вычисление объемов и площадей поверхностей пространственных тел.

Данную разработку могут использовать студенты для самостоятельной работы, а также преподаватели при проведении практических занятий по математике.

Критерии оценки практических заданий

Оценки за выполнение являются показателями текущей успеваемости студентов по дисциплине «Математические методы решения прикладных профессиональных задач».

Отметка «5» ставится, если:

работа выполнена полностью; в логических рассуждениях и обосновании решения нет пробелов ошибок; в решении нет математических ошибок (возможна одна неточность, описка, не являющаяся следствием незнания или непонимания учебного материала).

Отметка «4» ставится, если:

работа выполнена полностью, но обоснования шагов решения недостаточны (если умение обосновывать рассуждения не являлось специальным объектом проверки);

допущена одна существенная ошибка или два-три несущественных ошибки.

Отметка «3» ставится, если:

допущены более одной существенной ошибки или более двух-трех не существенных ошибок, но учащийся владеет обязательными умениями по проверяемой теме; при этом правильно выполнено не менее половины работы.

Отметка «2» ставится, если:

Допущены существенные ошибки, показавшие, что учащийся не владеет обязательными умениями по данной теме в полной мере.

К категории **существенных ошибок** следует отнести ошибки, связанные с незнанием, не пониманием учащимися основных положений теории и с неправильным применением методов, способов, приемов решения практических заданий, предусмотренных программой.

К категории **несущественных ошибок** следует отнести погрешности, связанные с небрежным выполнением записей, рисунков, графиков, чертежей, а так же погрешности и недочеты, которые не приводят к искажению смысла задания и его выполнения.

Обобщенные требования к студентам при выполнении практических работ:

а) теоретически подготовиться к выполнению работы;

б) выполнить работу в полном объеме с соблюдением необходимых требований к её выполнению;

в) оформить отчет правильно и аккуратно, выполнить расчеты;

г) самостоятельно выполнить индивидуальное задание, ответить на контрольные вопросы и сделать выводы;

д) при наличии пропуска соблюсти порядок выполнения пропущенных практических работ.

Порядок выполнения пропущенных работ:

а) при наличии пропуска студент обязан изучить материал самостоятельно, предварительно взяв задание у преподавателя;

б) подготовить отчёт о практической работе, соблюдая все требования, предъявляемые к выполнению практических работ;

в) сдать преподавателю практическую работу при следующей явке.

Организация выполнения и контроля практических работ по дисциплине «Математические методы решения прикладных профессиональных задач» является подготовительным этапом к сдаче дифференциального зачета по данной дисциплине.

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 1
Тема: Функции одной переменной и их свойства.

Цель: Сформировать умение использовать свойства функции для ее исследования, решать задачи и упражнения по данной теме.

Теоретические сведения к практической работе

Если каждому элементу x из множества X по некоторому правилу f поставлен в соответствие элемент y множестваY, то говорят, что на множестве X определена функция со значениями в множестве Y, и записывают y=f(x).

Множество X называется областью определения функции D(f), а множество Y – областью значений функции E(f).

Пример 1. Найти область определения функции

$$1)\, y=\frac{15}{x+6}$$

$$x+6\neq 0$$

$$x\neq -6$$

$$D(\text{y})=(-\infty;-6)\cup(-6;\infty)$$

$$2)\, y=\frac{x+13}{x^2-7x+12}$$

$$y=\frac{x+13}{x^2-7x+12}=\frac{x+13}{(x-3)(x-4)}$$

$$x-3\neq 0 \quad x-4\neq 0$$

$$x\neq 3 \quad x\neq 4$$

$$D(\text{y})=(-\infty;3)\cup(3;4)\cup(4;\infty)$$

$$3)\, y=\sqrt{x^2-81}$$

$$x^2-81\geq 0$$

$$(x-9)(x+9)\geq 0$$

$$D(\text{y})=(-\infty;-9]\cup[9;\infty)$$

Основные свойства функции:

1. Четность и нечетность. Функция y=f(x) называется четной, если для любых значений x из области определения f(-x)=f(x), и называется нечетной, если f(-x)=-f(x). В противном случае функция y=f(x) называется функцией общего вида.

Пример 2. Установить четность или нечетность функции.

$$1)\, y = x^2 + 6$$
$$y(-x) = (-x)^2 + 6 = x^2 + 6 = y(x)$$
$\Rightarrow$ *функция четная*
$$2)\, y = \sin x + 2x$$
$$y(-x) = \sin(-x) + 2(-x) = -\sin x - 2x = -(\sin x + 2x) = -y(x)$$
$\Rightarrow$ *функция нечетная*
$$3)\; y = \frac{x+2}{x^2-16}$$
$$y(-x) = \frac{(-x)+2}{(-x)^2-16} = \frac{-x+2}{x^2-16}$$
$\Rightarrow$ *функция общего вида*

2. Монотонность. Функция y=f(x) называется возрастающей (убывающей) на некотором промежутке X из области определения, если большему значению аргумента из этого промежутка соответствует большее (меньшее) значение функции.

3. Ограниченность. Функция y=f(x) называется ограниченной на некотором промежутке X из области определения, если существует число M>0, такое, что $|f(x)| \le M$ для любого $x \in X$.

4. Периодичность. Функция y=f(x) называется периодической с периодом T>0, если для любых значений x из области определения f(x+T)=f(x-T)=f(x).

Если каждому значению цены p за единицу товара поставлено в соответствие число q – количество товара, которое потребители готовы купить по данной цене за определенный промежуток времени, то говорят, что задана функция спроса, и пишут q=f(p).

Эта функция определена для тех значений $p \ge 0$, для которых $f(p) \ge 0$ и множество ее значений $q \ge 0$.

График функции спроса называют кривой спроса.

Пример 3. Функция спроса на некоторый товар имеет вид $q = 60 - \sqrt{100 + p}$, где q – количество товара (тыс. шт.); p – цена единицы товара (руб.). Требуется найти:

- Область определения и множество значений этой функции
- Функцию цены ввиде $p = f^{-1}(q)$
- Объем спроса при ценах на товар: $p_1 = 300; p_2 = 800$
- Цену за единицу товара, если $q_1 = 10; q_2 = 15$,
- Выручку продавцов в каждом из этих случаев.

Решение: 1) Получим систему неравенств:

$$\begin{cases} p \ge 0 \\ 100 + p \ge 0 \\ 60 - \sqrt{100+p} \ge 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p \ge 0 \\ p \ge -100 \\ \sqrt{100+p} \le 60 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p \ge 0 \\ p \ge -100 \\ 100+p \le 3600 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p \ge 0 \\ p \ge -100 \Rightarrow \quad 0 \le p \le 3500 \\ p \le 3500 \end{cases}$$

$$\mathrm{D}(f) = [0;3500]$$

Выразим значение p через q:

$$\sqrt{100+p} = 60 - q$$

$$100 + p = (60-q)^2$$

$$100 + p = 3600 - 120q + q^2$$

$$p = q^2 - 120q + 3500$$

$$p \ge 0, \quad q^2 - 120q + 3500 \ge 0$$

$$q \in (-\infty;50] \cup [70;\infty)$$

$$q \ge 0, \quad q \in [0;50] \cup [70;\infty)$$

Из закона спроса следует, что с увеличением цены p от нуля до 3500 руб. спрос должен падать. В нашем случае функция q убывает в промежутке $q \in [0;50]$, следовательно, множество значений функции $E(f) \in [0;50]$.

1) Функция цены имеет вид $p = q^2 - 120q + 3500$

2) $p_1 = 300 \Rightarrow q_1 = 60 - \sqrt{100+300} = 60 - 20 = 40 \quad (\textit{тыс.шт.});$
$p_2 = 800 \Rightarrow q_1 = 60 - \sqrt{100+800} = 60 - 30 = 30 \quad (\textit{тыс.шт.});$

3) $q_1 = 10 \Rightarrow p_1 = 100 - 120 \cdot 10 + 3500 = 2400 \quad (\textit{руб.});$
$q_2 = 15 \Rightarrow p_2 = 225 - 120 \cdot 15 + 3500 = 1925 \quad (\textit{руб.}).$

4) Выручка от продажи составляет $u = pq$, следовательно,

$$u_1 = p_1 \cdot q_1 = 2400 \cdot 10 = 24000(\text{руб.})$$

$$u_2 = p_2 \cdot q_2 = 1925 \cdot 15 = 28875(\text{руб.})$$

Если каждому значению цены p за единицу товара поставлено в соответствие число q – количество товара, которое производители готовы продать по данной цене за определенный промежуток времени, то говорят, что задана функция предложения, и пишут q=φ(p).

Эта функция определена для тех значений $p \ge 0$, для которых $\varphi(p) \ge 0$ и множество ее значений $q \ge 0$.

Пример 4. Функция предложения некоторого товара на рынке имеет вид $q = \frac{1}{9}(\text{p}-2)^2 - 1$, где q – количество предлагаемого товара (тыс. шт.); p – цена единицы товара (руб.). Требуется найти:

- Область определения и множество значений функции q
- Объем предложения при ценах за единицу товара: $p_1 = 11; p_2 = 20$
- Зависимость цены за единицу товара от объема спроса, т.е. функцию $p = \varphi^{-1}(\text{q})$

Решение: 1) Найдем область определения:

$$\frac{1}{9}(p-2)^2-1\geq 0$$
$$(p-2)^2-9\geq 0$$
$$(p-2-3)(p-2+3)\geq 0$$
$$(p-5)(p+1)\geq 0$$
$$p\in(-\infty;-1]\cup[5;\infty)$$
$$Т.к.\ p\geq 0\Rightarrow\quad p\in[5;\infty)$$
Множество значений функции q при $p\geq 5$ будет $q\in[0;+\infty)$.

1) При
$$p_1=11;q_1=\frac{1}{9}(11-2)^2-1=9-1=8(тыс.шт.)$$
$$p_2=20;q_2=\frac{1}{9}(20-2)^2-1=36-1=35(тыс.шт.)$$

2) Найдем функцию $p=\varphi^{-1}(q)$
$$q=\frac{1}{9}(p-2)^2-1$$
$$\frac{1}{9}(p-2)^2=q+1$$
$$(p-2)^2=9(q+1)$$
$$p-2=\pm\sqrt{9(q+1)}$$
$$p-2=\pm3\sqrt{(q+1)}$$
$$p=2+3\sqrt{(q+1)}\qquad p=2-3\sqrt{(q+1)}$$
$$Т.к.\ p\geq 5,\quad p=2+3\sqrt{(q+1)}$$

Содержание практической работы:

Задание 1. Найти область определения функции

$1)\ y=\dfrac{32+x}{(x-4)(x+9)}$

$2)\ y=\dfrac{29-x}{x^2+15x}$

$3)\ y=\dfrac{4x}{x^2-5x+6}$

$4)\ y=\sqrt{x^2-100}$

$5)\ y=\log_6(x-3)$

$6)\ y=\dfrac{\sqrt{x+2}}{(x-3)(x+1)}$

Задание 2. Установить четность или нечетность функции.

1) $y = x^4 - x^2 + 3$

2) $y = \dfrac{x^5 + 9}{x}$

3) $y = -\sin x - 4x$

4) $y = e^x + 12$

5) $\mathrm{y} = \dfrac{x^2 + 2}{x^2 - 16} \cdot \cos x$

6) $\mathrm{y} = \mathrm{tgx} - 2\,\mathrm{x}$

Задание 3. а) Функция спроса на некоторый товар имеет вид $q = 70 - \sqrt{250 + p}$, где q – количество товара (тыс. шт.); p – цена единицы товара (руб.). Требуется найти:

- Область определения и множество значений этой функции
- Функцию цены в виде $p = f^{-1}(\mathrm{q})$
- Объем спроса при ценах на товар: $p_1 = 150; p_2 = 650$
- Цену за единицу товара, если $q_1 = 15; q_2 = 20$,
- Выручку продавцов в каждом из этих случаев.

б) Функция спроса на некоторый товар имеет вид $q = 40 - \sqrt{50 + p}$, где q – количество товара (тыс. шт.); p – цена единицы товара (руб.). Требуется найти:

- Область определения и множество значений этой функции
- Функцию цены в виде $p = f^{-1}(\mathrm{q})$
- Объем спроса при ценах на товар: $p_1 = 175; p_2 = 350$
- Цену за единицу товара, если $q_1 = 10; q_2 = 30$,
- Выручку продавцов в каждом из этих случаев.

Задание 4. а) Функция предложения некоторого товара на рынке имеет вид $q = \dfrac{1}{4}(\mathrm{p} - 3)^2 - 1$, где q – количество предлагаемого товара (тыс. шт.); p – цена единицы товара (руб.). Требуется найти:

- Область определения и множество значений функции q
- Объем предложения при ценах за единицу товара: $p_1 = 7; p_2 = 11$
- Зависимость цены за единицу товара от объема спроса, т.е. функцию $p = \varphi^{-1}(\mathrm{q})$

б) Функция предложения некоторого товара на рынке имеет вид $q = \dfrac{1}{16}(\mathrm{p} - 5)^2 - 1$, где q – количество предлагаемого товара (тыс. шт.); p – цена единицы товара (руб.). Требуется найти:

- Область определения и множество значений функции q
- Объем предложения при ценах за единицу товара: $p_1 = 37; p_2 = 53$
- Зависимость цены за единицу товара от объема спроса, т.е. функцию $p = \varphi^{-1}(\mathrm{q})$

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 2

«Построение графиков реальных функций с помощью геометрических преобразований»

Цель работы:

1. закрепить навыки построения графиков функций с помощью геометрических преобразований
2. способствовать развитию аналитического мышления, внимания обучающихся;
3. воспитать интерес к предмету, трудолюбие, ответственность, самостоятельность и творческую активность.

Краткие теоретические и учебно-методические материалы по теме практической работы

Пусть задан график функции $y = f(x)$. Чтобы построить график функции

1. $y = mf(x)$, где $m > 0$ и $m \neq 1$, нужно ординаты точек заданного графика умножить на m. Такое преобразование называется растяжением от оси x с коэффициентом m, если $m > 1$, и сжатием к оси x, если $0 < m < 1$.

2. $y = -f(x)$ получается из графика функции $f(x)$ преобразованием симметрии относительно оси x. (Преобразование симметрии - зеркальное отражение относительно прямой.)

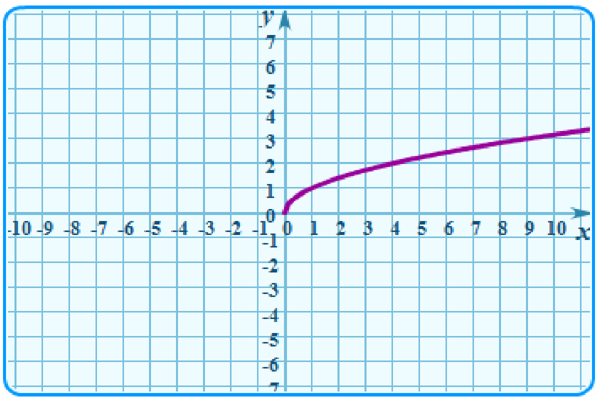
3. $y = f(x) + n$, получается из графика функции $f(x)$ параллельным переносом последнего вдоль оси ординат на n единиц вверх, если $n > 0$ и, соответственно на $|n|$ единиц вниз, если $n < 0$.

4. $y = f(kx)$, где $k > 0$ и $k \neq 1$. Искомый график функции получается из заданного сжатием с коэффициентом k к оси y (если $0 < k < 1$ указанное "сжатие" фактически является растяжением с коэффициентом $1/k$)

5. $y = f(-x)$ получается из графика функции $f(x)$ преобразованием симметрии относительно оси y

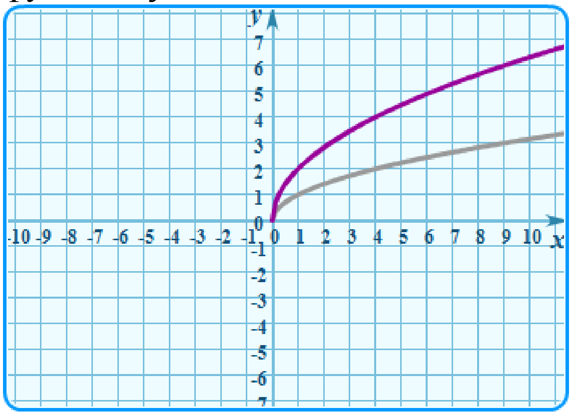
6. $y = f(x + l)$ получается из графика функции $f(x)$ параллельным переносом последнего на l единиц влево, если $l > 0$ и, соответственно на $|l|$ единиц вправо, если $m < 0$.

Например, пусть задан график функции $y = \sqrt{x}$.



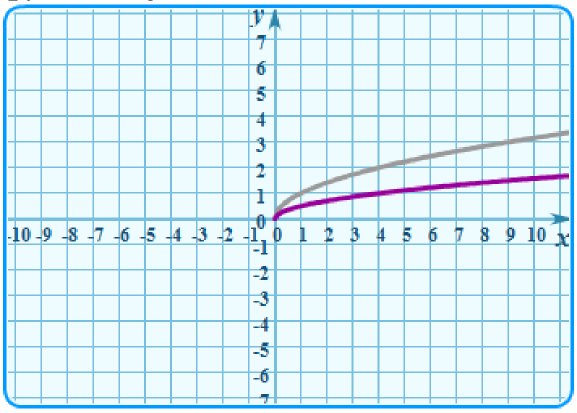
Чтобы построить графики других функций, содержащих аргумент (x) под знаком квадратного корня, воспользуемся перечисленными выше правилами. Заданный график повторим во вновь начерченных осях "карандашом бледно", требуемый график, который получится после преобразований, сделаем более интенсивным. В тетради лишнее можно будет удалить ластиком, останется только результат выполнения задания.

Пример 1a. Построить график функции $y = 2\sqrt{x}$



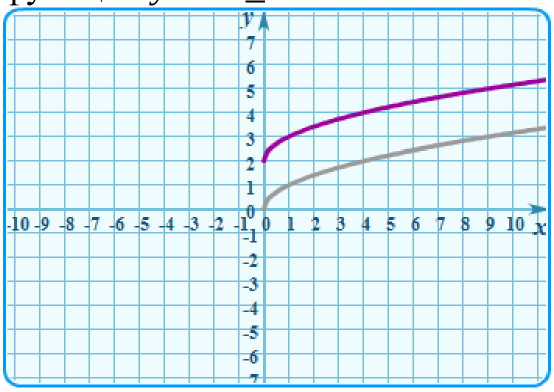
Растянули в 2 раза от оси x. Ордината каждой точки увеличилась в 2 раза.

Пример 1b. Построить график функции $y = \sqrt{x}/2$



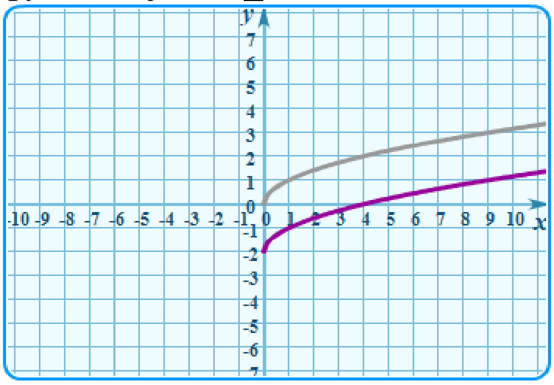
Сжали вдвое к оси x. Ордината каждой точки уменьшилась в 2 раза.

Пример 3a. Построить график функции $y = \sqrt{x} + 2$



Параллельно перенесли на 2 единицы вверх вдоль оси y. Ордината каждой точки увеличилась на 2.

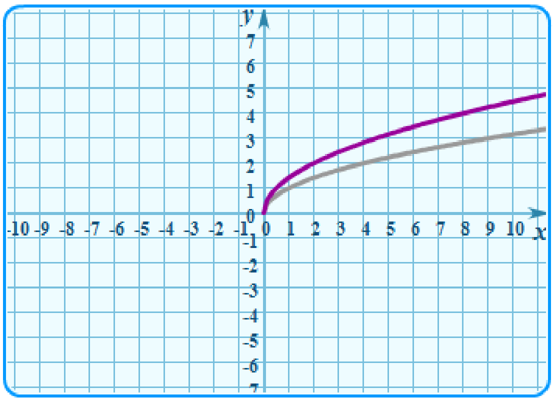
Пример 3b. Построить график функции $y = \sqrt{x} - 2$



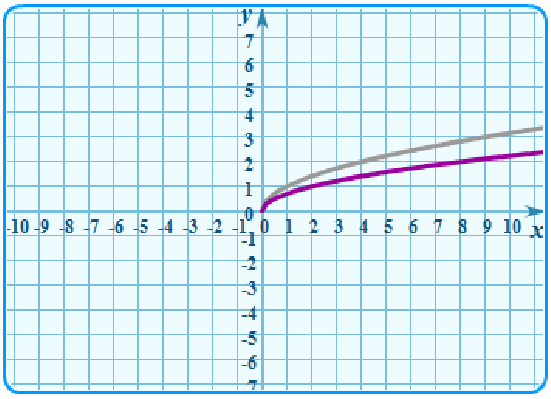
Параллельно перенесли на 2 единицы вниз вдоль оси y. Ордината каждой точки уменьшилась на 2 единицы.

Пример 4a. Построить график функции $y = \sqrt{2x}$

Пример 4b. Построить график функции $y = \sqrt{x/2}$

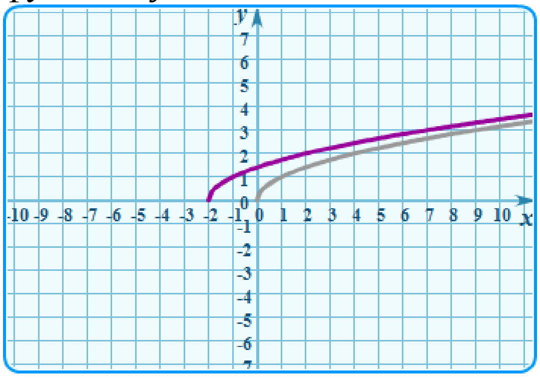


Сжали вдвое к оси *y*. Абсцисса каждой точки уменьшилась в 2 раза.



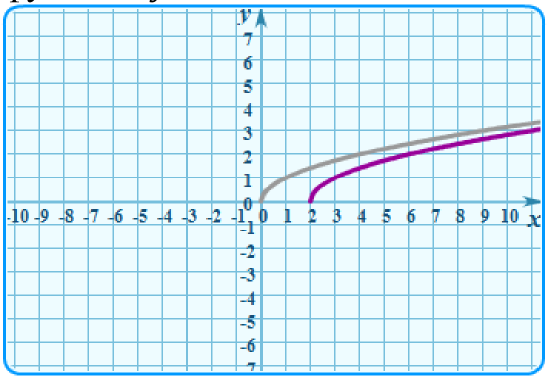
Растянули в 2 раза от оси *y*. Абсцисса каждой точки увеличилась в 2 раза.

Пример 6a. Построить график функции $y = \sqrt{x+2}$



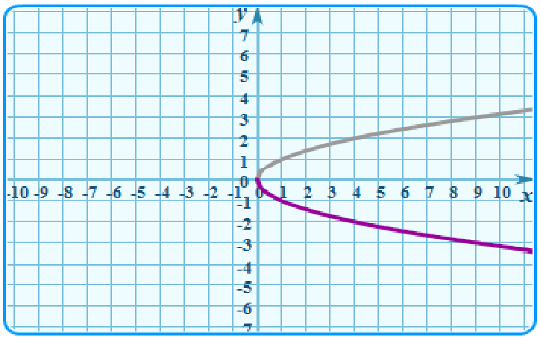
Параллельно перенесли на 2 единицы влево вдоль оси *x*. Абсцисса каждой точки уменьшилась на 2 единицы.

Пример 6b. Построить график функции $y = \sqrt{x-2}$



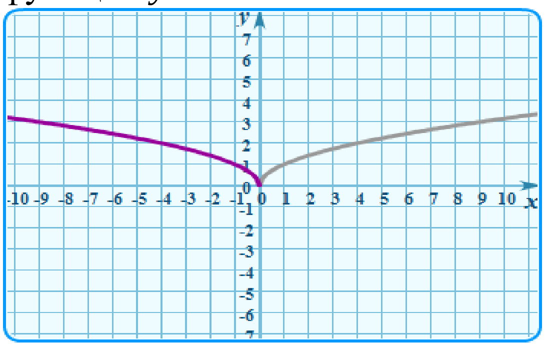
Параллельно перенесли на 2 единицы вправо вдоль оси *x*. Абсцисса каждой точки увеличилась на 2 единицы.

Пример 2. Построить график функции $y = -\sqrt{x}$



Применили преобразование симметрии – зеркально отразили относительно оси *x*.

Пример 5. Построить график функции $y = \sqrt{-x}$



Применили преобразование симметрии – зеркально отразили относительно оси *y*.

Заметим, что параллельный перенос графика относительно одной из осей в какую-либо сторону равносилен переносу этой оси относительно графика в противоположную сторону. Поэтому 3-е и 6-е правила можно объединить следующим образом: чтобы построить график функции $y = f(x - m) + n$ нужно выполнить параллельный перенос всей плоскости координат так, чтобы началом новой системы координат $x'y'$ была точка $O'(m;n)$. Очевидно, что вместо того, чтобы дважды перерисовывать график, проще перечертить оси.

Если нужно скомбинировать только параллельные переносы, чтобы построить график функции, то всё равно в каком порядке их выполнять, и всё равно, что переносить - оси или кривые. Но если нужно построить график сложной функции, используя и перенос, и растяжение-сжатие, и отражения, то следует тщательно соблюдать порядок выполнения операций.

Задания для практический части:

1 вариант Постройте график зависимости крутящего момента автомобильного двигателя от числа его оборотов в минуту, задаваемый формулой $y = -(x - 400)^2 + 140$ где y – крутящийся момент, x- число оборотов в минуту. На оси абсцисс отложите число оборотов в минуту; на оси ординат – крутящийся момент в Н м. По графику функции определите, какое наименьшее число оборотов двигателя в минуту достаточно, чтобы автомобиль начал движение (*крутящийся момент должен быть не менее 60 Нм*)?

2 вариант Постройте график зависимости процесса разогрева двигателя легкового автомобиля, задаваемого формулой $T = -(t - 8)^2 + 90$, где Т- температура двигателя, t- время. На оси абсцисс отложите время в минутах, прошедшее от запуска двигателя, на оси ординат — температуру двигателя в градусах Цельсия. Определите по графику, сколько минут двигатель нагревался от температуры 60°С до температуры 90 С.

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 3

Тема: Предел функции.

Цель: сформировать умение находить пределы функций.

Теоретические сведения к практической работе

Число A называют *пределом функции* $f(x)$ при $x \to x_0$ (и пишут $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$), если для любого $\varepsilon > 0$ найдется число $\delta > 0$, зависящее от , такое, что для всех $x \neq x_0$, удовлетворяющих условию $|x - x_0| < \delta$, выполняется неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$.

Теоремы о пределах:

1. $\lim\limits_{x\to x_0} c = c$ (c=const).

2. Если $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A,\ \lim\limits_{x\to x_0} \varphi(x) = B,$ то:

$$\lim_{x\to x_0}(f(x)\pm\varphi(x)) = \lim_{x\to x_0} f(x) \pm \lim_{x\to x_0}\varphi(x) = A\pm B;$$

$$\lim_{x\to x_0}(f(x)\cdot\varphi(x)) = \lim_{x\to x_0} f(x)\cdot\lim_{x\to x_0}\varphi(x) = A\cdot B;$$

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{\varphi(x)} = \frac{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)} = \frac{A}{B},\quad (B\neq 0).$$

Чтобы найти предел элементарной функции $\lim\limits_{x\to x_0} f(x),$ нужно предельное значение аргумента подставить в функцию и посчитать. При этом, если $x=x_0$ принадлежит области определения функции, то значение предела будет найдено, оно равно значению функции в точке $x=x_0$. При вычислении пределов полезно использовать следующие соотношения. Если $c=\text{const},\ \ c\neq 0,\ \ c\neq\infty,$ то, учитывая свойства б.б. и б.м. функций, получим:

$$\frac{0}{c}\to 0;\ \ \frac{c}{0}\to\infty;\ \ \frac{\infty}{c}\to\infty;\ c\cdot\infty\to\infty; c\cdot 0\to 0;\ \ a^{\infty}\to 0, \text{если}\, 0<a<1; a^{\infty}\to\infty, \text{если}$$

a>1.

Случаи, в которых подстановка предельного значения аргумента в функцию не дает значения предела, называют неопределенностями; к ним относятся неопределенности видов:

$$\left(\frac{\infty}{\infty}\right);\ \ \left(\frac{0}{0}\right);\ \ (0\cdot\infty);\ \ (\infty-\infty);\ (1^{\infty});\ (\infty^{0});\ (0^{0}).$$

Пример 5. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x^3+15}{10x^2-4}$

Решение $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x^3+15}{10x^2-4} = \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2\cdot 1^3+15}{10\cdot 1^2-4} = \dfrac{2+15}{10-4} = \dfrac{17}{6}$

Пример 6. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x^2-16}{x^2-5x+4}$

Решение $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x^2-16}{x^2-5x+4} \overset{\left[\frac{0}{0}\right]}{=} \lim\limits_{x\to 4}\dfrac{(x-4)(x+4)}{(x-4)(x-1)} = \lim\limits_{x\to 4}\dfrac{(x+4)}{(x-1)} = \lim\limits_{x\to 4}\dfrac{(4+4)}{(4-1)} = \dfrac{8}{3}$

Пример 7. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{\sqrt{2x+8}-\sqrt{23-x}}{x-5}$

Решение

$$\lim_{x\to 5}\frac{\sqrt{2x+8}-\sqrt{23-x}}{x-5}\overset{\left[\frac{0}{0}\right]}{=}\lim_{x\to 5}\frac{\left(\sqrt{2x+8}-\sqrt{23-x}\right)\left(\sqrt{2x+8}+\sqrt{23-x}\right)}{(x-5)\left(\sqrt{2x+8}+\sqrt{23-x}\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 5}\frac{\left(\left(\sqrt{2x+8}\right)^2-\left(\sqrt{23-x}\right)^2\right)}{(x-5)\left(\sqrt{2x+8}+\sqrt{23-x}\right)}=\lim_{x\to 5}\frac{\left((2x+8)-(23-x)\right)}{(x-5)\left(\sqrt{2x+8}+\sqrt{23-x}\right)}=\lim_{x\to 5}\frac{(2x+8-23+x)}{(x-5)\left(\sqrt{2x+8}+\sqrt{23-x}\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 5}\frac{(3x-15)}{(x-5)\left(\sqrt{2x+8}+\sqrt{23-x}\right)}=\lim_{x\to 5}\frac{3(x-5)}{(x-5)\left(\sqrt{2x+8}+\sqrt{23-x}\right)}=\lim_{x\to 5}\frac{3}{\left(\sqrt{2x+8}+\sqrt{23-x}\right)}=$$

$$=\frac{3}{\left(\sqrt{2\cdot 5+8}+\sqrt{23-5}\right)}=\frac{3}{\left(\sqrt{18}+\sqrt{18}\right)}=\frac{3}{2\sqrt{18}}=\frac{3}{2\cdot 3\sqrt{2}}=\frac{1}{2\sqrt{2}}=\frac{1\cdot 2\sqrt{2}}{2\sqrt{2}\cdot 2\sqrt{2}}=\frac{2\sqrt{2}}{4\cdot 2}=\frac{\sqrt{2}}{4}$$

Содержание практической работы

Задание 1. Вычислить пределы последовательностей:

1) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n+1}{3n+5}$ 2) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3-2n}{n+6}$ 3) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{10n+3}{1+2n}$

4) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{4n+16}{9n}$ 5) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(3-n)^2+(3+n)^2}{(3-n)^2-(3+n)^2}$ 6) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n+1)^2+(n-1)^2}{(n-1)^2-(n+1)^2}$

7) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt[3]{n^3+2n-1}}{n+2}$ 8) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^3-100n^2+1}{100n^2+16n}$ 9) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{4n-7}-\sqrt{n+2}\right)$

Задание 2. Вычислить пределы функций:

1) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^4+2x^2-3x}{x^3-3x^2+x}$ 2) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^3-3x-2}{x^2+x}$ 3) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\left(\sqrt{1+x}-1\right)}{x^2}$

4) $\lim\limits_{x\to 4}\frac{\left(\sqrt{1+2x}-3\right)}{\sqrt{x}-2}$ 5) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2-3x+2}{x^2-1}$ 6) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{(x+1)^2+(x-1)^2}{(x-1)^2-(x+1)^2}$

7) $\lim\limits_{x\to -2}\frac{\sqrt[3]{x^3+2x-1}}{x+2}$ 8) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^3-15x^2+x}{18x^2+15x}$ 9) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{\left(\sqrt{4x-7}-\sqrt{x+2}\right)}{x-2}$

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 4

«Нахождение пределов функций с помощью замечательных пределов»

Цель работы:

1. закрепить навыки нахождения пределов функций с помощью замечательных пределов
2. способствовать развитию аналитического мышления, внимания обучающихся;
3. воспитать интерес к предмету, трудолюбие, ответственность, самостоятельность и творческую активность.

Краткие теоретические и учебно-методические материалы по теме практической работы

Теорема. Предел отношения синуса бесконечно малой дуги к самой дуге, выраженной в радианах, равен единице, то есть $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$

Этот предел называют первым замечательным пределом. С его помощью вычисляют пределы выражений, содержащих тригонометрические функции.

Пример 1. Вычислить $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x}{x}$.

Решение. Преобразуем данное выражение: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x}{5x}\cdot 5=5\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=5.$

При вычислении пределов вида $\lim\limits_{x\to a}u(x)^{v(x)}$, где $\lim\limits_{x\to a}u(x)=1,\ \lim\limits_{x\to a}v(x)=\infty,$ используется второй замечательный предел: $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=e$ или $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$ или $\lim\limits_{\alpha(x)\to 0}(1+\alpha(x))^{\frac{1}{\alpha(x)}}=e$, $e=2{,}71828\,...,$

Пример 2. Найти $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{3}{x}\right)^x$.

Решение. Полагая $\dfrac{3}{x}=y$, получим: $x=\dfrac{3}{y}$ и $\lim\limits_{x\to\infty}(1+\dfrac{3}{x})^x=\lim\limits_{y\to 0}(1+y)^{\frac{3}{y}}=\lim\limits_{y\to 0}\left[(1+y)^{\frac{1}{y}}\right]^3=e^3.$

Пример 3. Найти $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+3}{x^2-5}\right)^{x^2}$.

Решение. Преобразуем выражение, стоящее под знаком предельного перехода.

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+3}{x^2-5}\right)^{x^2}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{x^2+3}{x^2-5}-1\right)^{x^2}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{x^2+3-x^2+5}{x^2-5}\right)^{x^2}=$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{8}{x^2-5}\right)^{\frac{x^2-5}{8}\cdot\frac{8}{x^2-5}\cdot x^2}=\lim_{x\to\infty}\left[(1+\frac{8}{x^2-5})^{\frac{x^2-5}{8}}\right]^{\frac{8}{x^2-5}\cdot x^2}.$$

Так как $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{8}{x^2-5}\right)^{\frac{x^2-5}{8}}=e$, а $\lim\limits_{x\to\infty}8\dfrac{x^2}{x^2-5}=8$, то $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+3}{x^2-5}\right)^{x^2}=e^8$.

Приведем еще несколько замечательных пределов:

1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x}\ln(1+x)=\lim\limits_{x\to 0}\ln(1+x)^{1/x}=\ln e,$ так как $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{1/x}=e$. Окончательно, $\lim\limits_{x\to 0}\ln(1+x)=1$;

2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\log_a(1+x)}{x}=\dfrac{1}{\ln a}$;

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=\begin{bmatrix} e^x-1=y\Rightarrow e^x=y+1 \\ \ln e^x=\ln(y+1)\Rightarrow x=\ln(y+1) \\ при \quad x\to 0\ y\to 0 \end{bmatrix}=$$

3)

$$\lim_{y\to 0}\frac{y}{\ln(y+1)}=\frac{1}{\lim\limits_{y\to 0}\frac{\ln(1+y)}{y}}=1;$$

=

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\ln a.$$

4)

Пример 4. Найти $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+5x)}{x}$.

Решение. Для решения воспользуемся формулой $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1$.
Преобразуем:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+5x)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+5x)}{5x}\cdot 5=5\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+5x)}{5x}=5\cdot 1=5.$$

Задания практической части:

Вычислить пределы

$\lim_{x\to 0}\frac{2\sin 3x}{x}$, $\lim_{x\to 0}\frac{7\sin 6x}{5x}$, $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x}\right)^x$, $\lim_{x\to\infty}(1+x)^{\frac{5}{x}}$, $\lim_{x\to\infty}(1+2x)^{\frac{4}{x}}$

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 5

Тема: Предел последовательности и предел функции. Замечательные пределы.

Цель: сформировать умение находить пределы последовательностей и пределы функций, использовать замечательные пределы для нахождения пределов.

Теоретические сведения к практической работе

Пусть существует последовательность действительных чисел $\{a_n\in R: n\geq 1\}$.

Число а называется пределом последовательности

$$\lim_{n\to\infty}a_n=a\in R\Leftrightarrow\forall\varepsilon>0\quad\exists n_0\in N$$

$$\forall n>n_0\quad |a_n-a|<\varepsilon$$

Пример 1. Вычислить предел $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^3+6n-5}{10n^3-8n^2+2}$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^3+6n-5}{10n^3-8n^2+2}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^3\left(1+\frac{6}{n^2}-\frac{5}{n^3}\right)}{n^3\left(10-\frac{8}{n}+\frac{2}{n^3}\right)}=\frac{1}{10}$$

Решение

Пример 2. Вычислить предел $\lim_{n\to\infty}\frac{n^2-2n+3}{12n^3+4n^2-1}$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^2-2n+3}{12n^3+4n^2-1}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^3\left(\frac{1}{n}-\frac{2}{n^2}+\frac{3}{n^3}\right)}{n^3\left(12+\frac{4}{n}-\frac{1}{n^3}\right)}=\frac{0}{12}=0$$

Решение

Пример 3. Вычислить предел $\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+6}{7n-8}$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+6}{7n-8}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2(1+\frac{6}{n^2})}{n^2(\frac{7}{n}-\frac{8}{n^2})}=\frac{1}{0}=\infty$$

Решение

Пример 4. Вычислить предел $\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{2n+8}-\sqrt{n-1}\right)$

Решение

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{2n+8}-\sqrt{n-1}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\sqrt{2n+8}-\sqrt{n-1}\right)\left(\sqrt{2n+8}+\sqrt{n-1}\right)}{\left(\sqrt{2n+8}+\sqrt{n-1}\right)}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\left(\sqrt{2n+8}\right)^2-\left(\sqrt{n-1}\right)^2\right)}{\left(\sqrt{2n+8}+\sqrt{n-1}\right)}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(2n+8)-(n-1)}{\left(\sqrt{2n+8}+\sqrt{n-1}\right)}=\lim_{n\to\infty}\frac{2n+8-n+1}{\left(\sqrt{2n+8}+\sqrt{n-1}\right)}=\lim_{n\to\infty}\frac{n+9}{\left(\sqrt{2n+8}+\sqrt{n-1}\right)}=\lim_{n\to\infty}\frac{n\left(1+\frac{9}{n}\right)}{\left(\sqrt{n^2\left(\frac{2}{n}+\frac{8}{n^2}\right)}+\sqrt{n^2\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}\right)}\right)}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n\left(1+\frac{9}{n}\right)}{n\left(\sqrt{\left(\frac{2}{n}+\frac{8}{n^2}\right)}+\sqrt{\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}\right)}\right)}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(1+\frac{9}{n}\right)}{\left(\sqrt{\left(\frac{2}{n}+\frac{8}{n^2}\right)}+\sqrt{\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}\right)}\right)}=\frac{1}{0}=\infty$$

Число A называют *пределом функции* $f(x)$ при $x\to x_0$ (и пишут $\lim_{x\to x_0}f(x)=A$), если для любого $\varepsilon>0$ найдется число $\delta>0,$ зависящее от , такое, что для всех $x\neq x_0$, удовлетворяющих условию $|x-x_0|<\delta$, выполняется неравенство $|f(x)-A|<\varepsilon.$

Теоремы о пределах:

1. $\lim_{x\to x_0}c=c$ (c=const).

2. Если $\lim_{x\to x_0}f(x)=A,\ \lim_{x\to x_0}\varphi(x)=B,$ то:

$\lim_{x\to x_0}(f(x)\pm\varphi(x))=\lim_{x\to x_0}f(x)\pm\lim_{x\to x_0}\varphi(x)=A\pm B;$

$$\lim_{x\to x_0}(f(x)\cdot\varphi(x))=\lim_{x\to x_0} f(x)\cdot\lim_{x\to x_0}\varphi(x)=A\cdot B;$$

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{\varphi(x)}=\frac{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)}=\frac{A}{B},\quad (B\neq 0).$$

Первый замечательный предел: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1.$

Второй замечательный предел (число e = 2,718…):

$$\lim_{x\to\infty}(1+1/x)^x=e \quad \text{или} \quad \lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e.$$

Замечательные пределы:

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\ln a \qquad \lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1 \qquad \lim_{x\to 0}\frac{\log_a(1+\mathrm{x})}{x}=\log_a e$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^{\alpha}-1}{x}=\alpha$$

Пример 5. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to 0}\frac{5\sin 8x}{6x}$

Решение $\lim\limits_{x\to 0}\frac{5\sin 8x}{6x}\overset{\left[\frac{0}{0}\right]}{=}\lim\limits_{x\to 0}\frac{5\sin 8x\cdot 8}{6\cdot 8x}=\frac{5\cdot 8}{6}=\frac{40}{6}=\frac{20}{3}$

Пример 6. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+5x)}{x}$

Решение $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+5x)}{x}\overset{\left[\frac{0}{0}\right]}{=}\lim\limits_{x\to 0}\frac{5\ln(1+5x)}{5x}=5$

Пример 7. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to 0}(1+5x)^{\frac{1}{3x}}$

Решение $\lim\limits_{x\to 0}(1+5x)^{\frac{1}{3x}}\overset{\left[1^{\infty}\right]}{=}\lim\limits_{x\to 0}(1+5x)^{\frac{1}{5x}\cdot 5x\cdot\frac{1}{3x}}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\left(5x\cdot\frac{1}{3x}\right)}=e^{\frac{5}{3}}$

Пример 8. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+4}{x^2+1}\right)^x$

Решение

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+4}{x^2+1}\right)^x \overset{\left[1^\infty\right]}{=} \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+1+3}{x^2+1}\right)^x = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{3}{x^2+1}\right)^x =$$

$$= \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{x^2+1}{3}}\right)^x = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{x^2+1}{3}}\right)^{\frac{x^2+1}{3}\cdot\frac{3}{x^2+1}\cdot x} = e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3}{x^2+1}\cdot x} = e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x}{x^2+1}} = e^0 = 1$$

Чтобы найти предел элементарной функции $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$, нужно предельное значение аргумента подставить в функцию и посчитать. При этом, если $x=x_0$ принадлежит области определения функции, то значение предела будет найдено, оно равно значению функции в точке $x=x_0$. При вычислении пределов полезно использовать следующие соотношения. Если $c=\text{const},\ \ c\neq 0,\ \ c\neq\infty,$ то, учитывая свойства б.б. и б.м. функций, получим:

$\frac{0}{c}\to 0;\ \ \frac{c}{0}\to\infty;\ \ \frac{\infty}{c}\to\infty;\ c\cdot\infty\to\infty; c\cdot 0\to 0;\ \ a^\infty\to 0,$ если $0<a<1; a^\infty\to\infty,$ если $a>1$.

Случаи, в которых подстановка предельного значения аргумента в функцию не дает значения предела, называют неопределенностями; к ним относятся неопределенности видов:

$$\left(\frac{\infty}{\infty}\right);\ \ \left(\frac{0}{0}\right);\ \ (0\cdot\infty);\ \ (\infty-\infty);\ (1^\infty);\ (\infty^0);\ (0^0).$$

Пример 9. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to 1}\frac{2x^3+15}{10x^2-4}$

Решение $\lim\limits_{x\to 1}\frac{2x^3+15}{10x^2-4} = \lim\limits_{x\to 1}\frac{2\cdot 1^3+15}{10\cdot 1^2-4} = \frac{2+15}{10-4} = \frac{17}{6}$

Пример 10. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to 4}\frac{x^2-16}{x^2-5x+4}$

Решение $\lim\limits_{x\to 4}\frac{x^2-16}{x^2-5x+4} \overset{\left[\frac{0}{0}\right]}{=} \lim\limits_{x\to 4}\frac{(x-4)(x+4)}{(x-4)(x-1)} = \lim\limits_{x\to 4}\frac{(x+4)}{(x-1)} = \lim\limits_{x\to 4}\frac{(4+4)}{(4-1)} = \frac{8}{3}$

Пример 11. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to 5}\frac{\sqrt{2x+8}-\sqrt{23-x}}{x-5}$

Решение

$$\lim_{x\to 5}\frac{\sqrt{2x+8}-\sqrt{23-x}}{x-5}\overset{\left[\frac{0}{0}\right]}{=}\lim_{x\to 5}\frac{\left(\sqrt{2x+8}-\sqrt{23-x}\right)\left(\sqrt{2x+8}+\sqrt{23-x}\right)}{(x-5)\left(\sqrt{2x+8}+\sqrt{23-x}\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 5}\frac{\left(\left(\sqrt{2x+8}\right)^2-\left(\sqrt{23-x}\right)^2\right)}{(x-5)\left(\sqrt{2x+8}+\sqrt{23-x}\right)}=\lim_{x\to 5}\frac{\left((2x+8)-(23-x)\right)}{(x-5)\left(\sqrt{2x+8}+\sqrt{23-x}\right)}=\lim_{x\to 5}\frac{(2x+8-23+x)}{(x-5)\left(\sqrt{2x+8}+\sqrt{23-x}\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 5}\frac{(3x-15)}{(x-5)\left(\sqrt{2x+8}+\sqrt{23-x}\right)}=\lim_{x\to 5}\frac{3(x-5)}{(x-5)\left(\sqrt{2x+8}+\sqrt{23-x}\right)}=\lim_{x\to 5}\frac{3}{\left(\sqrt{2x+8}+\sqrt{23-x}\right)}=$$

$$=\frac{3}{\left(\sqrt{2\cdot 5+8}+\sqrt{23-5}\right)}=\frac{3}{\left(\sqrt{18}+\sqrt{18}\right)}=\frac{3}{2\sqrt{18}}=\frac{3}{2\cdot 3\sqrt{2}}=\frac{1}{2\sqrt{2}}=\frac{1\cdot 2\sqrt{2}}{2\sqrt{2}\cdot 2\sqrt{2}}=\frac{2\sqrt{2}}{4\cdot 2}=\frac{\sqrt{2}}{4}$$

Содержание практической работы

Задание 1. Вычислить пределы последовательностей:

1) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n+1}{3n+5}$ 2) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3-2n}{n+6}$ 3) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{10n+3}{1+2n}$

4) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{4n+16}{9n}$ 5) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(3-n)^2+(3+n)^2}{(3-n)^2-(3+n)^2}$ 6) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n+1)^2+(n-1)^2}{(n-1)^2-(n+1)^2}$

7) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt[3]{n^3+2n-1}}{n+2}$ 8) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^3-100n^2+1}{100n^2+16n}$ 9) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{4n-7}-\sqrt{n+2}\right)$

Задание 2. Вычислить пределы функций:

1) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^4+2x^2-3x}{x^3-3x^2+x}$ 2) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^3-3x-2}{x^2+x}$ 3) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\left(\sqrt{1+x}-1\right)}{x^2}$

4) $\lim\limits_{x\to 4}\frac{\left(\sqrt{1+2x}-3\right)}{\sqrt{x}-2}$ 5) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2-3x+2}{x^2-1}$ 6) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{(x+1)^2+(x-1)^2}{(x-1)^2-(x+1)^2}$

7) $\lim\limits_{x\to -2}\frac{\sqrt[3]{x^3+2x-1}}{x+2}$ 8) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^3-15x^2+x}{18x^2+15x}$ 9) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{\left(\sqrt{4x-7}-\sqrt{x+2}\right)}{x-2}$

Задание 3. Вычислить пределы функций, используя замечательные пределы:

1) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+3}{x^2}\right)^{x^2+1}$ 2) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^{x}$ 3) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x+3}{2x+1}\right)^{x+1}$

4) $\lim\limits_{x\to 0}\left(1+10x^2\right)^{x^3\cdot\frac{1}{x}}$ 5) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+\sin x)}{\sin 4x}$ 6) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{3x^2-5x}{\sin 4x}$

7) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{tg3x}{tgx}$ 8) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{9\ln(1-2x)}{4arctg3x}$ 9) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\arcsin 7x}{\sin x\cdot x^2}$

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 6
«Основы дифференциального исчисления»

Учебная цель: уметь находить производные элементарных и сложных функций, производные произведения и частного.

Учебные задачи:

1) провести устный опрос по теоретическим вопросам

2) провести письменный опрос по формулам и правилам дифференцирования

3) выполнить задания на дифференцирование функций

Задачи практической работы

1. Повторение теоретического материала
2. Проверка знаний формул и правил дифференцирования
3. Выполнение заданий на дифференцирование функций.

Содержание работы:

Формулы дифференцирования	
1. $(x^n)'=nx^{n-1}$	13. $(x^u)'=ux^{u-1}\cdot u'$
2. $(e^x)'=e^x$	14. $(e^u)'=e^u\cdot u'$
3. $(a^x)'=a^x\cdot\ln a$	15. $(a^u)'=a^u\cdot\ln a\cdot u'$
4. $(\ln x)'=\dfrac{1}{x}$	16. $(\ln u)'=\dfrac{1}{u}\cdot u'$
5. $(\log_a x)'=\dfrac{1}{x\cdot\ln a}$	17. $(\log_a u)'=\dfrac{1}{u\cdot\ln a}\cdot u'$
6. $(\sin x)'=\cos x$	18. $(\sin u)'=\cos u\cdot u'$
7. $(\cos x)'=-\sin x$	19. $(\cos u)'=-\sin u\cdot u'$
8. $(tgx)'=\dfrac{1}{\cos^2 x}$	20. $(tgu)'=\dfrac{1}{\cos^2 u}\cdot u'$
9. $(ctgx)'=-\dfrac{1}{\sin^2 x}$	21. $(ctgu)'=-\dfrac{1}{\sin^2 u}\cdot u'$
10. $(arctgx)'=\dfrac{1}{1+x^2}$	22. $(arcctgu)'=-\dfrac{1}{1+u^2}\cdot u'$
11. $(\arcsin x)'=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	23. $(\arcsin u)'=\dfrac{1}{\sqrt{1-u^2}}\cdot u'$
12. $(\arccos x)'=-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	24. $(\arccos u)'=-\dfrac{1}{\sqrt{1-u^2}}\cdot u'$

Правила дифференцирования
1. $(c)' = 0, (cu)' = cu';$
2. $x' = 1$
3. $(u+v)' = u' + v';$
4. $(uv)' = u'v + v'u;$
5. $(\frac{u}{v})' = \frac{u'v - v'u}{v^2}$

Примеры вычислений :

1) $f(x)=3x^4+2x^2-5x+3$; используя формулы $(x^n)'=nx^{n-1}$, $x'=1$, $c'=0$ и правила $(cu)'=cu'$, $(u+v)' = u' + v'$; получаем

$f'(x)=(3x^4+2x^2-5x+3)')=(3x^4)'+(2x^2)'-(5x)'+(3)'=3(x^4)'+2(x^2)'-5(x)'+(3)'=3\cdot 4x^3+2\cdot 2x^1-5\cdot 1+0=\underline{12x^3+4x-5}$

2) $f(x)=x^3\cos x$; используя формулы $(x^n)'=nx^{n-1}$ *и* $(\cos x)'=-\sin x$ и правило $(uv)' = u'v + v'u;$ получаем

$f'(x)=(x^3\cos x)'= (x^3)'\cos x+ x^3 (\cos x)'=3x^2\cos x+x^3(-\sin x) =\underline{3x^2\cos x-x^3\sin x}$

3) $f(x)=x^4 /\cos x$; используя формулы $(x^n)'=nx^{n-1}$ *и* $(\cos x)'=-\sin x$ и правило $(\frac{u}{v})' = \frac{u'v - v'u}{v^2}$ получаем

$f'(x)=(x^4 /\cos x)'= ((x^4)'\cos x- x^4 (\cos x)')/\cos^2x=(4x^3\cos x-x^4(-\sin x))/ \cos^2x =\underline{(4x^3\cos x+x^4\sin x)/ \cos^2x}$

4) $f(x)=\cos(3x^2+2)$; используя формулы $(\cos u)' = -\sin u \cdot u'$,

а потом $(x^n)'=nx^{n-1}$, $x'=1$, $c'=0$

получаем $f'(x) =\cos'(3x^2+2)\cdot (3x^2+2)'= -\sin(3x^2+2)\cdot 6x=\underline{-6x\cdot \sin(3x^2+2)}$

5) $f(x)=e^{7x+8}$; используя формулы ($(e^u)' = e^u \cdot u'$, а потом $(x^n)'=nx^{n-1}$, $x'=1$, $c'=0$

получаем $f'(x) = (e^{7x+8})'= e^{7x+8}\cdot(7x+8)'= e^{7x+8}\cdot 7=\underline{7e^{7x+8}}\cdot$

Вариант 1.	***Вариант 2.***
Найдите производную **1.** $f(x)=3x^8+6x^3-7x+1;$ **2.** $f(x)=5x^3\sin x;$ **3.** $f(x)=6x^2\ln x$ **4.** $f'(x) = \frac{x^2+2x}{x-1};$ **5.** $f(x) = \sin(2x^2 - 3x + 1);$ **6.** $f(x) = \cos^3(2x - 1);$ **7.** $f(x)=6^{4x+1}$ **8.** $f(x)=(5x+7)^3$ **9.** $f(x)=\log_2^4 x$ **10.** $f(x)=\ln^3 x$	***Найдите производную*** **1.** $f(x)=2x^6-9x^2+5x-8;$ **2.** $f(x)=6x^4\cos x;$ **3.** $f(x)=2x^3\ln x$ **4.** $f'(x) = \frac{3x-x^2}{x+2};$ **5.** $f(x) = \cos(3x^2 - 4x + 2);$ **6.** $f(x) = \sin^3(2 - 3x)$ **7.** $f(x)=6^{4x+1}$ **8.** $f(x)=(5x+7)^3$ **9.** $f(x)=\log_2^4 x$ **10.** $f(x)=\ln^3 x$

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 7

Тема: Дифференцирование простых и сложных функций

Цель: отработка умений и навыков дифференцирования простых и сложных функций.

Учебное оборудование:

1. Методические указания по выполнению практических работ по дисциплине «Математика».

Информационные источники:

2. Григорьев В.П., Дубинский Ю.А. Элементы высшей математики: учебник для студ. учреждений сред.проф. образования. – 6-е. изд., стер. – М.: Издательский центр «Академия», 2011. – 320 с.
3. Григорьев В.П., Сабурова Т.Н. Сборник задач по высшей математике: учеб.пособие для студ. учреждений сред. проф. Образования. – М.: Издательский центр «Академия», 2013. – 160 с.

Основные теоретические сведения

Определение. **Производной** функции *f(x)* в точке $x = x_0$ называется предел отношения приращения функции в этой точке к приращению аргумента, если он существует.

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Основные правила дифференцирования

Обозначим *f(x) = u, g(x) = v* – функции, дифференцируемые в точке *x*.

1) $(c)' = 0$; 2) $(x)' = 1$; 3) $(\boldsymbol{u} \pm \boldsymbol{v})' = \boldsymbol{u}' \pm \boldsymbol{v}'$;

4) $(\boldsymbol{cu})' = \boldsymbol{c} \cdot \boldsymbol{u}'$; 5) $\left(\frac{\boldsymbol{u}}{\boldsymbol{v}}\right)' = \frac{\boldsymbol{u}'\boldsymbol{v} - \boldsymbol{u}\boldsymbol{v}'}{\boldsymbol{v}^2}$; $(\boldsymbol{v} \neq 0)$

6) $\left(\frac{\boldsymbol{c}}{\boldsymbol{v}}\right)' = -\frac{\boldsymbol{c}}{\boldsymbol{v}^2} \cdot \boldsymbol{v}'$; $(\boldsymbol{v} \neq 0)$ 7) $(\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v})' = \boldsymbol{u}'\boldsymbol{v} + \boldsymbol{u}\boldsymbol{v}'$.

Производные основных элементарных функций

1) $C' = 0$;

2) $(x^m)' = mx^{m-1}$;

3) $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

4) $\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$

5) $(e^x)' = e^x$

9) $(\sin x)' = \cos x$

10) $(\cos x)' = -\sin x$

11) $(tgx)' = \frac{1}{\cos^2 x}$

12) $(ctgx)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$

13) $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

6) $\left(a^x\right)' = a^x \ln a$

7) $\left(\ln x\right)' = \dfrac{1}{x}$

8) $\left(\log_a x\right)' = \dfrac{1}{x \ln a}$

14) $\left(\arccos x\right)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

15) $\left(arctgx\right)' = \dfrac{1}{1+x^2}$

16) $\left(arcctgx\right)' = -\dfrac{1}{1+x^2}$

Производная сложной функции

Теорема. *Пусть y = f(x); u = g(x), причем область значений функции u входит в область определения функции f.*

Тогда $y' = f'(u)\cdot u'$

Если $\boldsymbol{y = f(u),\ u = \varphi(x)}$, т.е. $\boldsymbol{y = f(\varphi(x))}$- сложная функция, то $\boldsymbol{y'_x = f'(u)\cdot u'}$.

На основании определения производной и правил дифференцирования составлена таблица производных сложных функций.

1 $\left(\boldsymbol{u}^{\alpha}\right)' = \alpha\cdot \boldsymbol{u}^{\alpha-1}\cdot \boldsymbol{u}'\ \left(\alpha\in \boldsymbol{R}\right)$,

2 $\left(\boldsymbol{a^u}\right)' = \boldsymbol{a^u}\cdot\ln \boldsymbol{a}\cdot \boldsymbol{u}'$,

3 $\left(\boldsymbol{e^u}\right)' = \boldsymbol{e^u}\cdot \boldsymbol{u}'$,

4 $(\log_a u)' = \dfrac{1}{u\cdot\ln a}\cdot u'$,

5 $\left(\ln \boldsymbol{u}\right)' = \dfrac{1}{\boldsymbol{u}}\cdot \boldsymbol{u}'$,

6 $\left(\sin \boldsymbol{u}\right)' = \cos \boldsymbol{u}\cdot \boldsymbol{u}'$,

7 $\left(\cos \boldsymbol{u}\right)' = -\sin \boldsymbol{u}\cdot \boldsymbol{u}'$,

8 $\left(\boldsymbol{tgu}\right)' = \dfrac{1}{\cos^2 \boldsymbol{u}}\cdot \boldsymbol{u}'$,

9 $\left(\boldsymbol{ctgu}\right)' = -\dfrac{1}{\sin^2 \boldsymbol{u}}\cdot \boldsymbol{u}'$,

10 $\left(\arcsin \boldsymbol{u}\right)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-\boldsymbol{u}^2}}\cdot \boldsymbol{u}'$,

11 $\left(\arccos \boldsymbol{u}\right)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-\boldsymbol{u}^2}}\cdot \boldsymbol{u}'$,

12 $\left(\boldsymbol{arctg\ u}\right)' = \dfrac{1}{1+\boldsymbol{u}^2}\cdot \boldsymbol{u}'$,

13 $\left(\boldsymbol{arcctg\ u}\right)' = -\dfrac{1}{1+\boldsymbol{u}^2}\cdot \boldsymbol{u}'$.

Примеры дифференцирования функций

Пример 1. Найти производную функции:
$$\boldsymbol{y} = \frac{1}{\sqrt[3]{\boldsymbol{x}}} + \frac{1}{6\boldsymbol{x}^6} - \frac{1}{2\sqrt{\boldsymbol{x}}} = \boldsymbol{x}^{-\frac{1}{3}} + \frac{1}{6}\boldsymbol{x}^{-6} - \frac{1}{2}\boldsymbol{x}^{-\frac{1}{2}}.$$

$$\boldsymbol{y}' = \left(\boldsymbol{x}^{-\frac{1}{3}} + \frac{1}{6}\boldsymbol{x}^{-6} - \frac{1}{2}\boldsymbol{x}^{-\frac{1}{2}}\right)' = \left(\boldsymbol{x}^{-\frac{1}{3}}\right)' + \frac{1}{6}\left(\boldsymbol{x}^{-6}\right)' - \frac{1}{2}\left(\boldsymbol{x}^{-\frac{1}{2}}\right)' = -\frac{1}{3}\boldsymbol{x}^{-\frac{4}{3}} + \frac{1}{6}(-6)\boldsymbol{x}^{-7} - \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)\boldsymbol{x}^{-\frac{3}{2}} =$$
$$= -\frac{1}{3\sqrt[3]{\boldsymbol{x}^4}} - \frac{1}{\boldsymbol{x}^7} + \frac{1}{4\sqrt{\boldsymbol{x}^3}}.$$

Ответ: $\boldsymbol{y}' = -\dfrac{1}{3\sqrt[3]{\boldsymbol{x}^4}} - \dfrac{1}{\boldsymbol{x}^7} + \dfrac{1}{4\sqrt{\boldsymbol{x}^3}}.$

Пример 2. Найти производную функции $y = (x^3 \ - 3x^2 \ + 1)^3$.

Решение:

Используем формулу $(u(x)^n)' = n \times u(x)^{n-1} \times (u(x))'$

$$y' = 3(x^3 \ - 3x^2 \ + 1)^2 \times (x^3 \ - 3x^2 \ + 1)' = 3(x^3 \ - 3x^2 \ + 1)^2 \times (3x^2 - 6x)$$

Пример 3. Найти производную функции $y = \cos(4 - 2x)$.

Решение:

Используем формулу $(\cos(u(x)))' = -\sin(u(x)) \times (u(x))'$

$$y' = -\sin(4 - 2x) \times (4 - 2x)' = -\sin(4 - 2x) \times (0 - 2) = 2\sin(4 - 2x)$$

Пример 4. Найти производную функции $y(x) = 3^{\cos x}$.

Решение:

Поскольку $\left(a^x\right)' = a^x \cdot \ln a$, то по правилу производной сложной функции получаем

$$y'(x) = \left(3^{\cos x}\right)' = 3^{\cos x} \cdot \left(\cos x\right)' = -\sin x \cdot 3^{\cos x}.$$

Пример 5. Найти производную функции $y = \sqrt{2 - 3x^2}$.

Решение:

Используем формулу $\left(\sqrt{u(x)}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{u(x)}} \times (u(x))'$

$$y' = \frac{1}{2\sqrt{2 - 3x^2}} \times (2 - 3x^2)' = \frac{1}{2\sqrt{2 - 3x^2}} \times (0 - 6x) = \frac{-6x}{2\sqrt{2 - 3x^2}}$$
$$= \frac{-3x}{\sqrt{2 - 3x^2}}$$

Пример 6. Найти производную функции $g(x) = \operatorname{tg}\sqrt{1-x}$.

Решение:

Здесь мы имеем дело с композицией трех функций. Производная тангенса равна $\left(\operatorname{tg} x\right)' = \frac{1}{\cos^2 x}$.

Тогда

$$g'(x) = \left(\operatorname{tg}\sqrt{1-x}\right)' = \frac{1}{\cos^2\sqrt{1-x}} \cdot \left(\sqrt{1-x}\right)' = \frac{1}{\cos^2\sqrt{1-x}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{1-x}} \cdot (1-x)' =$$

$$= \frac{1}{\cos^2\sqrt{1-x}} \cdot \frac{(-1)}{2\sqrt{1-x}} = -\frac{1}{2\sqrt{1-x}\cos^2\sqrt{1-x}}.$$

Задание для практической работы № 1

Вариант 1.

1. Пользуясь формулами и правилами дифференцирования, найдите производные функций:

а) $5x^4 - 3{,}5x^2 + x + 6$; б) $\left(\frac{8}{x} + x^2\right)\sqrt{x}$; в) $\frac{1+x}{4-x^2}$.

Вариант 2.

1. Пользуясь формулами и правилами дифференцирования, найдите производные функций:

а) $\frac{5}{x} - x^3 + \sqrt{x} + 3$; б) $(x^2 - 3x - 2)\sqrt{x}$; в) $\frac{1-x^2}{1-x^3}$.

Вариант 3.

1. Пользуясь формулами и правилами дифференцирования, найдите производные функций:

а) $0{,}7x^5 - \frac{2}{3}x^3 + 0{,}75x^2 + \frac{1}{10}$; б) $(x+2)\sin x$; в) $\frac{x^2}{x+3}$.

Вариант 4.

1. Пользуясь формулами и правилами дифференцирования, найдите производные функций:

а) $2x^{10} + 0{,}05x^4 - \frac{1}{7}x + 0{,}3$; б) $(4 - x^2)\cos x$; в) $\frac{\sin x}{2 - x^3}$.

Вариант 5.

1. Пользуясь формулами и правилами дифференцирования, найдите производные функций:

а) $\frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - x + 5$; б) $x^2 \cdot 5^x$; в) $\frac{x^3 - 3x}{1 - 2x}$.

Вариант 6.

1. Пользуясь формулами и правилами дифференцирования, найдите производные функций:

а) $2^x + \lg x - 3$; б) $(2 - \sqrt{x}) \cdot tgx$; в) $\frac{2x^2}{3 - x}$.

Вариант 7.

1. Пользуясь формулами и правилами дифференцирования, найдите производные функций:

а) $\frac{3}{x^3} - \sqrt[5]{x} + \frac{5}{\sqrt[3]{x}}$; б) $x \cdot \lg x$; в) $\frac{x}{4 - x}$.

Вариант 8.

1. Пользуясь формулами и правилами дифференцирования, найдите производные функций:

а) $-\frac{1}{3}x^3 + 4x^2 - 7x + 18$; б) $\sqrt{x} \cdot \ln x$; в) $\frac{e^x}{x}$.

Задание для практической работы № 2

Вариант 1.

Вычислите производные сложных функций:

а) $f(x)=\sqrt[4]{1+x^2}$; б) $f(x)=5^{2x}$; в) $f(x)=\sin 3x$; г) $f(x)=\dfrac{\ln x}{e^x+e^{-x}}$; д) $f(x)=2tg^3 4x$.

Вариант 2.

Вычислите производные сложных функций:

а) $f(x)=\dfrac{1}{(2x-1)^2}$; б) $f(x)=e^{-3x}$; в) $f(x)=\cos 5x$; г) $f(x)=(3x+4)\cdot \log_5\left(x+1+x^2\right)$;

д) $f(x)=4ctg^3 2x$.

Вариант 3.

Вычислите производные сложных функций:

а) $f(x)=(3-x)^4$; б) $f(x)=2\log_3 2x$; в) $f(x)=3tg\left(2x-\dfrac{\pi}{4}\right)$; г) $f(x)=\left(x^2+4\right)\cdot e^{-x^2}$;

д) $f(x)=2\sin^3 4x$.

Вариант 4.

Вычислите производные сложных функций:

а) $f(x)=\sqrt[5]{x+\sqrt{x}}$; б) $f(x)=\lg(3x)$; в) $f(x)=3\cos\dfrac{x}{3}$; г) $f(x)=x\cdot 2^{3x+x^2}$;

д) $f(x)=\log_3^2(2x+1)$.

Вариант 5.

Вычислите производные сложных функций:

а) $f(x)=\left(3-2x^3\right)^5$; б) $f(x)=0{,}3^{3x^2-7x+2}$; в) $f(x)=\cos\left(x^2+4x+12\right)$;

г) $f(x)=\left(3x+5x^2+x^3\right)\cdot 4^{x^2}$; д) $f(x)=3\sin^2 5x$.

Вариант 6.

Вычислите производные сложных функций:

а) $f(x)=\dfrac{1}{\left(x^2+5\right)^3}$; б) $f(x)=e^{-4x}$; в) $f(x)=tgx^3$; г) $f(x)=\dfrac{5x}{\sin 6x}$; д) $f(x)=(\ln(2x+1))^6$.

Вариант7.

Вычислите производные сложных функций:

а) $f(x)=x^2\cdot e^{x^2+3x}$; б) $f(x)=tg^2 2x$; в) $f(x)=\sin(5-x)$; г) $f(x)=2^{5x-x^2}$;

д) $f(x)=\left(3x^3+x^7\right)^5$;

Вариант 8.

а) $f(x)=\sqrt{2x-1}$; б) $f(x)=e^{-x^3}$; в) $f(x)=tg\sqrt{x}$; г) $f(x)=\frac{sin5x}{x}$; д) $f(x)=\sqrt[3]{ln(1-x)}$.

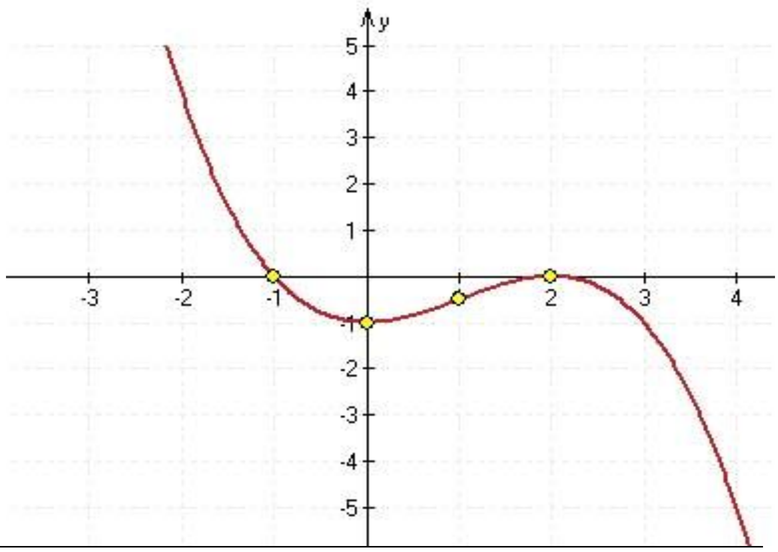
ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 8

Тема: Исследование функции средствами дифференциального исчисления и построение графиков. Определение наибольшего и наименьшего значения функции на отрезке.

Цель: отработка умений и навыков исследования функции средствами дифференциального исчисления и определения наибольшего и наименьшего значения функции на отрезке.

Пример выполнения задания 1

План исследования функции	**Пример** **Исследовать функцию средствами дифференциального исчисления и построить ее график** $$\boldsymbol{y=\frac{-1}{4}(x^3-3x^2+4)}$$
1. Область определения функции (множество возможных значений переменной х)	D(y)=(-∞;+∞)
2. Координаты точки пересечения с осью Оу	$$y(0)=\frac{-1}{4}(0^3-3\times 0^2+4)=-1$$ Точка пересечения с осью Оу : (0;-1)
3. Исследование функции на монотонность	$y^{/}=\frac{-1}{4}(3x^2-6x)$ $\frac{-3}{4}x^2+\frac{3}{2}x=0$ $x\left(\frac{-3}{4}x+\frac{3}{2}\right)=0$ Х=0 или $\frac{-3}{4}x+\frac{3}{2}=0$ $\frac{-3}{4}$х=$\frac{-3}{2}$; х=2 (-∞;0)U(2;+∞) – функция убывает (0;2) – функция возрастает

4. Определение точек экстремума функции	$y(0) = \frac{-1}{4}(0^3 - 3 \times 0^2 + 4) = -1$ (0;-1) – точка минимума $y(2) = \frac{-1}{4}(2^3 - 3 \times 2^2 + 4) = 0$ (2;0) – точка максимума
5. Исследование функции на выпуклость и вогнутость	$y'' = \frac{-3}{4} \times 2x + \frac{3}{2} = 0$ $y''=\frac{-3}{2}x+\frac{3}{2} = 0$; x=1
6. Определение точек перегиба функции	$y(1) = \frac{-1}{4}(1^3 - 3 \times 1^2 + 4) = -0{,}5$ (1;-0,5) – точка перегиба
7. Определение координат дополнительных точек	$y(-1) = \frac{-1}{4}((-1)^3 - 3 \times (-1)^2 + 4) = 0$; (-1;0) $y(3) = \frac{-1}{4}(3^3 - 3 \times 3^2 + 4) = -1$; (3;-1)
8. Построение графика	

Пример выполнения задания 2

Пример 1. Найти наибольшее и наименьшее значения функций $y = f(x)$ на заданном отрезке.

$\boldsymbol{y = \frac{x}{x-1}}$, $[2, 4]$.

Решение:

1) Находим производную заданной функции:

$$\left(\frac{x}{x-1}\right)' = \frac{x' \times (x-1) - (x-1)' \times x}{(x-1)^2} = \frac{x-1-x}{(x-1)^2} = \frac{-1}{(x-1)^2}$$

2) Решаем уравнение $y'(x) = 0$:

$$\frac{-1}{(x-1)^2}=0$$

Данное уравнение корней не имеет, так как числитель не может быть равен нулю.

3) Находим значение функции на границах интервала:

$$y(2)=\frac{2}{2-1}=2$$
$$y(4)=\frac{4}{4-1}=\frac{4}{3}=1\frac{1}{3}$$

Следовательно, $y_{\text{наиб}}=2$, $\text{y}_{\text{наим}}=1\frac{1}{3}$.

Пример 2. Найти наибольшее и наименьшее значения функций $y=f(x)$ на заданном отрезке.

$\boldsymbol{y=\frac{-1}{4}(x^3-3x^2+4),\ [1,4].}$

Решение:

1) Находим производную заданной функции:

$$y^{/}=\frac{-1}{4}(3x^2-6x)$$

2) Решаем уравнение $y^{\cdot}(x)=0$:

$$\frac{-3}{4}x^2+\frac{3}{2}x=0$$
$$x\left(\frac{-3}{4}x+\frac{3}{2}\right)=0$$

X=0 или $\frac{-3}{4}x+\frac{3}{2}=0$

$\frac{-3}{4}$x=$\frac{-3}{2}$;

x=2

3) Так как найденное значение принадлежит заданному отрезку, то находим значения функции на границах отрезка и в найденной точке:

$$y(2)=\frac{-1}{4}(2^3-3\times 2^2+4)=0$$
$$y(1)=\frac{-1}{4}(1^3-3\times 1^2+4)=-0.5$$
$$y(4)=\frac{-1}{4}(4^3-3\times 4^2+4)=-5$$

Следовательно, $y_{\text{наиб}}=0$, $\text{y}_{\text{наим}}=-5$.

Пример выполнения задания 3

Из квадратного листа жести со стороной a надо изготовить открытую сверху коробку, вырезав по углам квадратики и загнув образовавшиеся кромки. Какой должна быть сторона основания коробки, чтобы ее объем был максимальным?

Решение:

Обозначим через x длину стороны основания коробки. Тогда длины сторон вырезанных квадратиков равны $\frac{1}{2}(a-x)$, а объем коробки равен $\frac{1}{2}(a-x)\times x^2$. По смыслу задачи число ч удовлетворяет неравенству $0<x<a$, т.е. принадлежит интервалу (0;a). Таким образом, задача сводится к нахождению наибольшего значения функции $V(x)=\frac{1}{2}(a-x)\times x^2$ на интервале (0; a).

$$V'(x)=ax-\frac{3}{2}x^2=0$$

$$a\left(x-\frac{3}{2}x\right)=0$$

x=0 или $x=\frac{3}{2}a$

Так как $V(0)=\frac{1}{2}(a-a)\times 0^2=0$ и $V(a)=0$, то ни одно из этих значений не может быть наибольшим.

Так как $V\left(\frac{2}{3}a\right)=\frac{1}{2}\left(a-\frac{2}{3}a\right)\times(\frac{2}{3}a)^2=\frac{2}{27}a^3$, то, следовательно, максимальный объем имеет та коробка, сторона основания которой равна $\frac{2}{3}$.

Задание 1. Исследовать средствами дифференциального исчисления функцию ***y=f(x)*** и построить ее график.

1 $y = x^3 - 9x^2 + 24x - 16$
2 $y = x^3 -11x^2 + 39x - 45$
3 $y = x^3 + 6x^2 + 9x + 4$
4 $y = x^3 + x^2 - 5x + 3$
5 $y = x^3 + 10x^2 +32x + 32$
6 $y = x^3 + 9x^2 + 24x + 20$
7 $y = x^3 - 14x^2 + 60x - 72$
8 $y = x^3 - 12x^2 + 45x - 54$
9 $y = x^3 - 18x^2 + 105x -196$
10 $y = x^3 - 10x^2 + 28x - 24$

Задание 2. Найти наибольшее и наименьшее значения функций $y=f(x)$ на заданном отрезке.

1	$y=2x^3-3x^2-12x+1$, $[-2;4]$	2	$y=\dfrac{2x+1}{x^2+6}$, $[-3;4]$
3	$y=-2x^3-9x^2+6$, $[-2;1]$	4	$y=x^3+3x$, $[0;2]$
5	$y=\dfrac{3x+4}{x^2+1}$, $[-1;4]$	6	$y=\dfrac{x+1}{x^2+3}$, $[0;3]$
7	$y=x^4-2x^2+3$, $[-4;3]$	8	$y=1+\cos x$, $\left[\dfrac{\pi}{3};\dfrac{\pi}{2}\right]$

9	$y=\dfrac{4x-1}{x^2+3}$, $[-1;3]$	10	$y=2\sin x-1$, $\left[0;\dfrac{\pi}{6}\right]$

Задание 3

1 Кусок проволоки длиной 48 см сгибают так, чтобы образовался прямоугольник. Какую длину должны иметь стороны прямоугольника, что его площадь была наибольшей?

2 Площадь прямоугольника 64 кв. см. Какую длину должны иметь его стороны, чтобы периметр был наименьшим?

3 Открытый бак, имеющий форму прямоугольного параллелепипеда с квадратным основанием, должен вмещать 13,5 литров жидкости. При каких размерах бака на его изготовление потребуется наименьшее количество металла?

4 Из круглого бревна вырезают балку с прямоугольным сечением наибольшей площади. Найдите размеры сечения балки, если радиус сечения бревна равен 20 см.

5 Буровая вышка расположена в поле в 9 км от ближайшей точки шоссе. С буровой направить курьера в пункт, расположенный по шоссе в 15 км от упомянутой точки (считаем шоссе прямолинейным). Скорость курьера на велосипеде по полю 8 км/ч, а по шоссе 10 км/ч. К какой точке шоссе ему надо ехать, чтобы в кратчайшее время достичь пункта?

6 Разность двух чисел равна 8. Каковы должны быть эти числа, чтобы произведение куба первого числа на второе было наименьшим?

7 Для стоянки машин выделили площадку прямоугольной формы, примыкающую одной стороной к стене здания. Площадку обнесли с трех сторон металлической сеткой длиной 200 метров, и площадь ее при этом оказалась наибольшей. Каковы размеры площадки?

Контрольные вопросы

1 Сформулируйте необходимое условие существования экстремума функции.

2 Какие точки называются критическими?

3 Сформулируйте признак возрастания (убывания) функции.

4 Сформулируйте признак максимума (минимума) функции.

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 9

Тема: Интегрирование по частям.

Цель: сформировать умение вычислять неопределенный интеграл методом интегрирования по частям.

Теоретические сведения к практической работе

Некоторые виды интегралов, вычисляемых по частям

Если производные функций $U=U(x)$ и $V=V(x)$ непрерывны, то справедлива формула:

$$\int UdV = UV - \int VdU, \qquad (3)$$

называемая *формулой интегрирования по частям.*

В качестве $U(x)$ обычно выбирают функцию, которая упрощается при дифференцировании.

Некоторые стандартные случаи функций, интегрируемых по частям, указаны в таблице 1. Там же дается способ выбора множителей U и dV.

Таблица 1

Вид интеграла	$U \to dU$	$dV \to V$
$\int P_n(x)\sin kx\,dx$ $\int P_n(x)\cos kx\,dx$ $\int P_n(x)e^{kx}\,dx$ $n=1,2,...$	$U=P_n(x)\to$ $\to dU=P_n'(x)dx$	$dV=\sin kx\,dx \to V=-\frac{1}{k}\cos kx$ $dV=\cos kx\,dx \to V=\frac{1}{k}\sin kx$ $dV=e^{kx}dx \to V=\frac{1}{k}e^{kx}$

Вид интеграла	$U \to dU$	$dV \to V$
$\int \ln kx\,P_n(x)dx$	$U=\ln kx \to dU=\frac{dx}{x}$	$dV=P_n(x)dx\to$ $\to V=\int P_n(x)dx$
$\int \arcsin kx\,P_n(x)dx$	$U=\arcsin kx \to dU=\frac{kdx}{\sqrt{1-k^2x^2}}$	
$\int \arccos kx\,P_n(x)dx$	$U=\arccos kx \to dU=-\frac{kdx}{\sqrt{1-k^2x^2}}$	
$\int \mathrm{arctg}\,kx\,P_n(x)dx$	$U=\mathrm{arctg}\,kx \to dU=\frac{kdx}{1+k^2x^2}$	
$\int \mathrm{arcctg}\,kx\,P_n(x)dx$	$U=\mathrm{arcctg}\,kx \to dU=-\frac{kdx}{1+k^2x^2}$	
$n=0,1,2,...$		

$P_n(x)$ — многочлен от x степени n, т. е. $P_n(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+...+a_n$, где $a_0\neq 0$.

Пример: Проинтегрировать по частям.

а) $\int (3x-1)\sin 2x dx$; *б*) $\int (1+2x)\ln x dx$.

Решение.

$$\text{а)}\ \int (3x-1)\sin 2x dx = \left| \begin{array}{l} U = 3x-1 \to dU = 3dx \\ dV = \sin 2x dx \to V = -\dfrac{\cos 2x}{2} \end{array} \right| = (3x-1)(-\frac{\cos 2x}{2}) + \int \frac{\cos 2x}{2} dx =$$

$$= -\frac{1}{2}(3x-1)\cos 2x + \frac{3}{2}\int \cos 2x dx = -\frac{1}{2}(3x-1)\cos 2x + \frac{3}{4}\sin 2x + C.$$

$$\text{б)}\ \int (1+2x)\ln x dx = \left| \begin{array}{l} U = \ln x \to dU = \dfrac{dx}{x} \\ dV = (1+2x)dx \to \\ V = \int (1+2x)dx = x + x^2 \end{array} \right| = \ln x(x+x^2) - \int (x+x^2)\frac{dx}{x} =$$

$$= \ln x(x+x^2) - \int (1+x)dx = \ln x(x+x^2) - x - \frac{x^2}{2} + C.$$

Содержание практической работы

Задание: Проинтегрировать по частям.

1) $\int (7x-1)\cos x\, dx$ $\int \mathrm{arctg}\, x\, dx$

2) $\int (6-5x)e^x\, dx$ $\int (7x+5)\ln x\, dx$

3) $\int x\cos x\, dx$ $\int \mathrm{arcctg}\, x\, dx$

4) $\int (1+2x)\cos x\, dx$ $\int \arcsin x\, dx$

5) $\int (8x-1)\sin 5x\, dx$ $\int (6+5x)\ln x\, dx$

6) $\int xe^x\, dx$ $\int (3x+2)\ln x\, dx$

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 10

Тема: Вычисление определенных интегралов.

Цель: сформировать умение вычислять определенные интегралы, используя основные свойства и различные методы интегрирования.

Теоретические сведения к практической работе

Определенный интеграл, его вычисление и свойства

Определенный интеграл от функции $f(x)$, непрерывной на отрезке $[a,b]$, вычисляется по формуле:

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a), \qquad (1)$$

где $F(x)$— первообразная для функции $f(x)$, т. е. $F'(x) = f(x)$.

Формула (1) называется *формулой Ньютона — Лейбница.*

Свойства определенного интеграла:

1) $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx;$ 2) $\int_a^a f(x)dx = 0;$

3) $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx;$

4) $\int_a^b (f(x) + g(x))dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx;$

5) $\int_a^b Cf(x)dx = C\int_a^b f(x)dx,\ C - \mathrm{const};$

6) Если $f(x) \le g(x)$ для всех $x \in [a,b]$, то $\int_a^b f(x)dx \le \int_a^b g(x)dx;$

7) Если $m \le f(x) \le M$ для всех $x \in [a,b]$, то

$m(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a).$

При вычислении определенного интеграла для нахождения первообразной используют те же методы, что и для нахождения неопределенного интеграла, т. е. замену переменной, интегрирование по частям и т. д. Однако есть ряд особенностей. При замене переменной по формуле (1) необходимо в соответствии с заменой менять пределы интегрирования:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dx, \qquad (2)$$

где $\alpha = \psi(a),\ \beta = \psi(b),\ t = \psi(x)$ — обратная к $x = \varphi(t)$ функция.

Формула интегрирования по частям (1) приобретает вид:

$$\int_a^b UdV = UV\Big|_a^b - \int_a^b VdU, \qquad (3)$$

Пример 4. Вычислить определенный интеграл $\int_1^3 (x^2 - 16x + 3)dx$

Решение.

$$\int_1^3 \left(x^2-16x+3\right)dx=\left(\frac{x^3}{3}-16\cdot\frac{x^2}{2}+3x\right)\Bigg|_1^3=\left(\frac{x^3}{3}-8x^2+3x\right)\Bigg|_1^3=$$

$$=\left(\frac{3^3}{3}-8\cdot 3^2+3\cdot 3\right)-\left(\frac{1^3}{3}-8\cdot 1^2+3\cdot 1\right)=\left(\frac{27}{3}-72+9\right)-\left(\frac{1}{3}-8+3\right)=$$

$$=(9-63)-\left(\frac{1}{3}-5\right)=-54-\frac{1}{3}+5=-49-\frac{1}{3}=-49\frac{1}{3}$$

Содержание практической работы

Задание: Вычислить определенный интеграл.

1) $\int_1^2 \left(x^3+10x\right)dx$ 2) $\int_{-2}^3 \left(3x^2+6x-2\right)dx$

3) $\int_1^3 \left(x^2-16x+3\right)dx$ 4) $\int_0^8 \left(21x-19\right)dx$

5) $\int_{-4}^0 \left(x^3+8\right)dx$ 6) $\int_{10}^{13} \left(2x+7\right)dx$

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 11

Тема: Применение определенного интеграла для вычисления площади фигур.

Цель: сформировать умение применять определенный интеграл для вычисления площади фигур.

Теоретические сведения к практической работе

Площади плоских фигур

1. Вычисление площадей плоских фигур в декартовой системе координат

Если плоская фигура (рис. 1) ограничена линиями $y=f_1(x)$, $y=f_2(x)$, где $f_2(x)\geq f_1(x)$ для всех $x\in[a,b]$, и прямыми $x=a$, $x=b$, то ее площадь вычисляется по формуле:

$$S=\int_a^b \left(f_2(x)-f_1(x)\right)dx. \qquad (1)$$

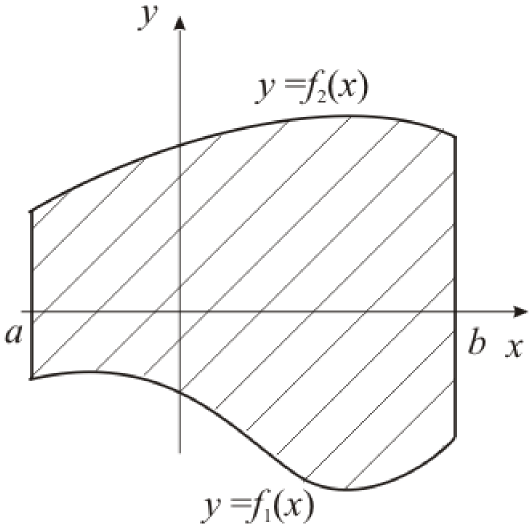


Рис. 1

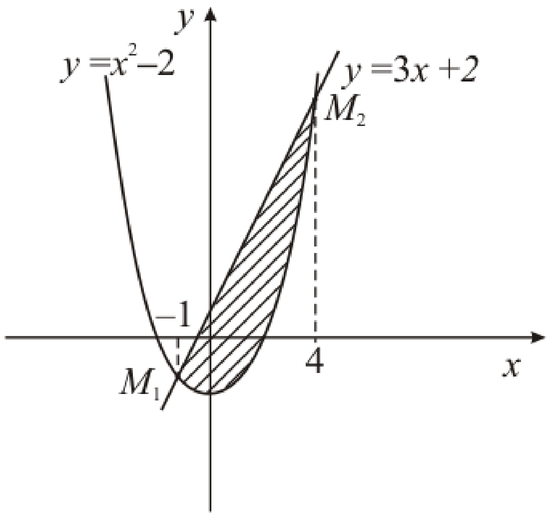


Рис. 2

Пример. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями:

$y = x^2 - 2,\ y = 3x + 2.$

*Решение***.** Построим схематический рисунок (рис. 2). Для построения параболы возьмем несколько точек:

X	0	1	–1	2	–2	3	–3	4	–4
Y	–2	–1	–1	2	2	7	7	14	14

Для построения прямой достаточно двух точек, например $(0, 2)$ и $(-1, -1)$.

Найдем координаты точек M_1 и M_2 пересечения параболы $y = x^2 - 2$ и прямой $y = 3x + 2$.

Для этого решим систему уравнений

$$\begin{cases} y = x^2 - 2, \\ y = 3x + 2. \end{cases} \Rightarrow x^2 - 2 = 3x + 2, \quad x^2 - 3x - 4 = 0, \quad x_1 = -1, \ \ x_2 = 4.$$

Тогда $y_1 = 3 \cdot (-1) + 2 = -1,\ \ y_2 = 3 \cdot 4 + 2 = 14.$ Итак, $M_1(-1,-1),\ \ M_2(4,14).$

Площадь полученной фигуры найдем по формуле (1), в которой $f_2(x) = 3x + 2,\ f_1(x) = x^2 - 2,$ поскольку $f_2(x) \ge f_1(x)$ для всех $x \in [-1, 4]$. Получим:

$$S = \int_{-1}^{4} \left(3x + 2 - \left(x^2 - 2\right)\right) dx = \int_{-1}^{4} \left(3x - x^2 + 4\right) dx = \left(\frac{3x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + 4x\right)\Bigg|_{-1}^{4} =$$

$$= \frac{3 \cdot 4^2}{2} - \frac{4^3}{3} + 4 \cdot 4 - \left(\frac{3 \cdot (-1)^2}{2} - \frac{(-1)^3}{3} + 4 \cdot (-1)\right) = 24 - \frac{64}{3} + 16 - \frac{3}{2} - \frac{1}{3} + 4 =$$

$$= 44 - \frac{65}{3} - \frac{3}{2} = \frac{125}{6} = 20\frac{5}{6}\ (\text{кв.ед.})$$

2. Вычисление площадей фигур, ограниченных линиями, заданными параметрически

Если функции $y = y(t)$ и $x = x(t)$ имеют непрерывные производные первого порядка для всех $t \in [t_0, t_1]$, то площадь плоской фигуры, ограниченной линией $\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases}$ $t \in [t_0, t_1]$, прямыми $x = a$, $x = b$, где $a = x(t_0)$,
$b = x(t_1)$, и осью OX, вычисляется по формуле:

$$S = \left| \int_{t_0}^{t_1} y(t) x'(t) dt \right|. \qquad (2)$$

Пример. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями, заданными параметрически:

$x = 2\cos t,\ y = 3\sin t,\ 0 \le t \le 2\pi.$

Решение. Для построения фигуры составим таблицу значений координат (x, y) точек кривой, соответствующих различным значениям параметра t, $0 \le t \le 2\pi$.

T	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
X	2	0	–2	0	2
Y	0	3	0	–3	0

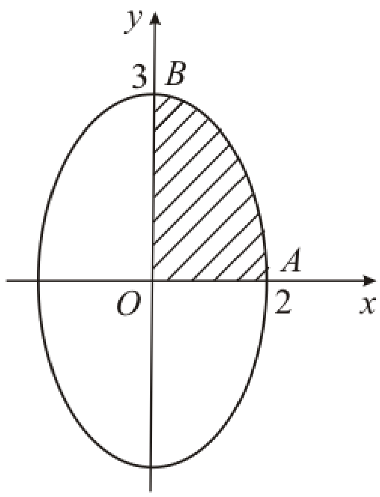


Рис. 3

Нанесем точки (x, y) на координатную плоскость XOY и соединим плавной линией. Когда параметр t изменяется от 0 до 2π, соответствующая точка (x, y) описывает эллипс (известно, что $\begin{cases} x = a\cos t \\ y = b\sin t \end{cases}$, $0 \le t \le 2\pi$ — параметрические формулы, задающие эллипс с полуосями a и b). Учитывая симметрию фигуры относительно координатных осей OX и OY, найдем её площадь S, умножив на 4 площадь криволинейной трапеции AOB. Согласно формуле (2) получим:

$$S=4\left|\int_0^{\frac{\pi}{2}}3\sin t\left(2\cos t\right)'\,dt\right|=4\left|-6\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 t\,dt\right|=\left\{\begin{array}{l}\text{используем формулу}\\ \text{понижения степени}\\ \text{для }\sin^2\alpha\text{ из таблицы 2}\end{array}\right\}=$$

$$=4\left|-6\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{2}\left(1-\cos 2t\right)dt\right|=4\left|-3\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(1-\cos 2t\right)dt\right|=4\left|-3\left(t-\frac{1}{2}\sin 2t\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}\right|=$$

$$=4\left|-3\left(\frac{\pi}{2}-\frac{1}{2}\sin\pi-\left(0-\frac{1}{2}\sin 0\right)\right)\right|=4\left|-3\frac{\pi}{2}\right|=6\pi\approx 18{,}850\ (\text{кв. ед.}).$$

Содержание практической работы

Задание 1. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями.

1) $y=x^2-2,\ y=1-2x$

2) $y=x^3,\quad y=8,\quad x=0$

3) $y=3x^2+1,\quad y=3x+6$

4) $y=x^2,\ y=x+1$

5) $y=x^2,\ y=2-x^2$

6) $y=x^2-1,\ y=1-x$

Задание 2. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями, заданными параметрически.

1) $x=2t-t^2,\quad y=t\left(t-1\right),\quad 0\le t\le 1$

2) $x=t^2-1,\quad y=t^3-t,\quad 0\le t\le 1$

3) $x=2\sin t,\quad y=\cos t,\quad 0\le t\le 2\pi$

4) $x=\ln t,\quad y=\left(t-1\right)\left(3-t\right),\quad 1\le t\le 3$

5) $x=1-\cos t,\quad y=\sin t,\quad 0\le t\le 2\pi$

6) $x=\cos t,\quad y=1-\sin t,\quad 0\le t\le 2\pi$

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 12
«Основы интегрального исчисления»

Цель: Уметь находить неопределенный интеграл методами непосредственного интегрирования, интегрирования методом подстановки, интегрирования по частям. Уметь вычислять определенный интеграл с помощью формулы Ньютона-Лейбница

Содержание работы:

Теоретический материал

Таблица интегралов

1. $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, (n \neq -1)$	7. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = ctgx + C$	13. $\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} arctgx + C$
2. $\int dx = x + C$	8. $\int tgxdx = \ln\lvert\cos x\rvert + C$	14. $\int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{2a} \ln\left\lvert\frac{a+x}{a-x}\right\rvert + C$
3. $\int \frac{dx}{x} = \ln x + C$	9. $\int ctgxdx = \ln\lvert\sin x\rvert + C$	15. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$
4. $\int \sin xdx = -\cos xdx$	10. $\int e^x dx = e^x + C$	16. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C$
5. $\int \cos xdx = \sin xdx$	11. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$	
6. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = tgx + C$	12. $\int \frac{dx}{1+x^2} = arctgx + C$	

1. Непосредственное интегрирование

Этот способ интегрирования предполагает такое преобразование подынтегральной функции, которое позволило бы использовать для решения табличные интегралы.

При непосредственном интегрировании применяются свойства неопределенного интеграла, таблица неопределенных интегралов и, если это необходимо, алгебраические преобразования

Пример вычисления 1:

Вычислите $\int (x^3 - 3x + \sin x)dx$

Решение: Для вычисления интеграла сначала воспользуемся 2 и 3 свойствами неопределенного интеграла, а затем применим 1 и 4 табличные интегралы:

$$\int (x^3 - 3x + \sin x)dx = \int x^3 dx - 3 \cdot \int xdx + \int \sin xdx = \frac{x^{3+1}}{3+1} - 3 \cdot \frac{x^{1+1}}{1+1} - \cos x + C =$$

$$= \frac{x^4}{4} - \frac{3}{2} \cdot x^2 - \cos x + C$$

Пример вычисления 2:

Вычислите $\int \frac{3 + 2x - x^2}{x} dx$

Решение: Для вычисления интеграла сначала каждый член числителя почленно разделим на знаменатель, затем воспользуемся 2 и 3 свойствами неопределенного интеграла и применим 1 и 3 табличные интегралы

$$\int \frac{3+2x-x^2}{x}dx = \int \frac{3}{x}dx + \int \frac{2x}{x}dx - \int \frac{x^2}{x}dx = 3\cdot\int \frac{dx}{x} + 2\cdot\int dx - \int xdx = 3\ln x + 2x - \frac{1}{2}\cdot x^2 + c$$

2. Метод замены переменной (метод подстановки)

Он является одним из наиболее эффективных и распространенных приемов интегрирования, позволяющих во многих случаях упростить вычисление интеграла. Суть этого метода состоит в том, что путем введения новой переменной интегрирования заданный интеграл сводится к новому интегралу, который легко вычисляется непосредственным интегрированием.

Пример вычисления 1: С развернутым оформлением

Вычислите $\int (3x-4)^3 dx$

Решение:

Введем новую переменную $t = 3x\text{-}4$, тогда $dt = t' \cdot dx = (3x-4)' \cdot dx = 3dx$, откуда $dx = \frac{dt}{3}$. Подставим новую переменную в интеграл (вместо выражения $3x\text{-}4$ подставим t, вместо dx подставим $\frac{dt}{3}$).

$$\int (3x-4)^3 dx = \int t^3 \cdot \frac{dt}{3} = \frac{t^4}{12} + C$$

Далее нужно вернуться к первоначальной переменной. Для этого сделаем обратную замену (вместо t подставим выражение $3x\text{-}4$), получим окончательный ответ.

$$\int (3x-4)^3 dx = \frac{(3x-4)^4}{12} + C$$

Пример вычисления 2:

С кратким оформлением

Решение:

$$\int sinxcosxdx = \left| \begin{matrix} t = sinx \\ dt = cosxdx \end{matrix} \right| = \int tdt = \frac{1}{2}t^2 + C = \frac{1}{2}sin^2x + C.$$

3. Интегрирование по частям

Формула интегрирования по частям

$\int udv = uv - \int vdu.$

Пример вычисления 1:

С развернутым оформлением

Вычислить

$\int xe^x dx.$

Решение. Полагая, что

$$u = x,$$
$$du = dx,$$
$$dv = e^x dx,$$
$$v = e^x,$$
$$\int dv = \int e^x dx,$$

находим

$$\int xe^x dx = \int x\, de^x = xe^x - \int e^x dx = xe^x - e^x + C.$$

Пример вычисления 2:

С кратким оформлением

Вычислить $\int (3x+2)\ln x dx$

$\int (3x+2)\ln x dx = \left(\begin{array}{l} u=\ln x, \quad du=(\\ dv=(3x+2)dx, \end{array} \right) = (3x^2/2+2x)\ln x - \int (3x^2/2+2x)\, 1/x dx =$

$= (3x^2/2+2x)\ln x - \int (3x$ /2+2x) 1/x… …2+2x)lnx-

$3x^2/4-2x+C$

Определенный интеграл

Определенный интеграл вычисляется по следующей формуле:

Формула Ньютона-Лейбница

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

Пример вычислений 1:

$$\int_1^3 \left(x^3 - 5\right)dx = \frac{x^{3+1}}{3+1} - 5x\Bigg|_1^3 = \frac{x^4}{4} - 5x\Bigg|_1^3 = \left(\frac{3^4}{4} - 5\cdot 3\right) - \left(\frac{1^4}{4} - 5\cdot 1\right) =$$

$$= \left(\frac{81}{4} - 15\right) - \left(\frac{1}{4} - 5\right) = \frac{81}{4} - 15 - \frac{1}{4} + 5 = \frac{81-1}{4} - 10 = \frac{80}{4} - 10 = 20 - 10 = 10$$

Задания для самостоятельной работы:

Вариант 1	***Вариант 2.***
Вычислите неопределенные интегралы **1.** $\int \left(7 - 8x + 4x^3 - 6x^5\right)dx$ **2.** $\int \cos^8 x \sin x dx$ **3.** $\int (4x-5)\ln x dx$	***Вычислите неопределенные интегралы*** **1.** $\int \left(1 - 5x + 6x^5 - 7x^6\right)dx$ **2.** $\int \sin^6 x \sin x dx$ 3. $\int (6x-3)e^x dx$
Вычислите определенный интеграл **4.** $\int_1^3 (4x^3 + 2)dx$	***Вычислите определенный интеграл*** **4.** $\int_0^2 \left(x^2 - 3\right)dx$

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 13

Тема: Решение неопределенных интегралов различными методами.

Цель: отработка умений и навыков вычисления неопределенных интегралов различными методами.

Неопределенные интегралы

Совокупность всех первообразных $F(x)+C$ функции $f(x)$ называется *неопределенным интегралом* от функции $f(x)$ и обозначается символом $\int f(x)dx$, т.е. $\int f(x)dx = F(x)+C$.

В этом равенстве $f(x)$ называется *подынтегральной функцией*, а $f(x)dx$ – *подынтегральным выражением.*

Свойства неопределенных интегралов

1. $\left(\int f(x)dx\right)' = f(x)$;
2. $\int f'(x)dx = f(x)+C$;
3. $\int k\cdot f(x)dx = k\int f(x)dx$;
4. $\int [f(x)\pm g(x)]dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$;
5. $\int f(ax+b)dx = \frac{1}{a}F(ax+b)+C$.

Таблица простейших интегралов

1. $\int 0du = C$,	6. $\int \cos u du = \sin u + C$,
2. $\int u^a du = \frac{u^{a+1}}{a+1}+C$, $a \neq 1$,	7. $\int \mathrm{tg} u du = -\ln\lvert\cos u\rvert + C$,
2a. $\int du = u + C$,	8. $\int \mathrm{ctg} u du = \ln\lvert\sin u\rvert + C$,
2б. $\int \frac{du}{u^2} = -\frac{1}{u}+C$,	9. $\int \frac{du}{\sin^2 u} = -\mathrm{ctg} u + C$,
2в. $\int \frac{du}{\sqrt{u}} = 2\sqrt{u}+C$,	10. $\int \frac{du}{\cos^2 u} = \mathrm{tg} u + C$,
3. $\int \frac{du}{u} = \ln\lvert u\rvert + C$,	11. $\int \frac{du}{\sqrt{a^2-u^2}} = \arcsin\frac{u}{a}+C$,
4. $\int a^u du = \frac{a^u}{\ln a}+C$,	12. $\int \frac{du}{u^2+a^2} = \frac{1}{a}\mathrm{arctg}\frac{u}{a}+C$,

4a. $\int e^u du = e^u + C$,	13. $\int \frac{du}{u^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln\left\|\frac{u-a}{u+a}\right\| + C$,
5. $\int \sin u\, du = -\cos u + C$,	14. $\int \frac{du}{\sqrt{u^2 \pm a^2}} = \ln\left\|u + \sqrt{u^2 \pm a^2}\right\| + C$.

Примеры решения интегралов различными методами

Метод непосредственного интегрирования

Непосредственное интегрирование основано на прямом использовании таблицы интегралов. Возможны случаи:

1) данный интеграл находится непосредственно по соответствующему табличному интегралу;

2) данный интеграл после применения свойств 3 и 4 приводится к одному или нескольким табличным интегралам;

3) данный интеграл после элементарных тождественных преобразований над подынтегральной функцией (по членное деление, приведение к виду степенной функции, использование известных тождеств) и применения свойств 3 и 4 приводится к одному или нескольким табличным интегралам.

Пример 1. Найти $\int\left(2x^3 - \frac{4}{x} + \frac{1}{3}e^x\right)dx$.

Последовательно применим к данному интегралу свойства 3 и 4, а затем воспользуемся таблицей основных интегралов:

$$\int\left(2x^3 - \frac{4}{x} + \frac{1}{3}e^x\right)dx = \int 2x^3 dx - \int \frac{4dx}{x} + \int \frac{1}{3}e^x dx =$$

$$= 2\int x^3 dx - 4\int \frac{dx}{x} + \frac{1}{3}\int e^x dx = 2\cdot\frac{x^{3+1}}{3+1} - 4\ln|x| + \frac{1}{3}e^x + C =$$

$$= 2\cdot\frac{x^4}{4} - 4\ln|x| + \frac{1}{3}e^x + C = \frac{x^4}{2} - 4\ln|x| + \frac{1}{3}e^x + C.$$

Пример 2. Найти $\int\left(\sqrt[3]{x^2} + \frac{6}{\sqrt{x}} - 3^x\right)dx.$

$$\int\left(\sqrt[3]{x^2} + \frac{6}{\sqrt{x}} - 3^x\right)dx = \int x^{\frac{2}{3}}dx + 6\int x^{-\frac{1}{2}}dx - \int 3^x dx =$$

$$= \frac{x^{\frac{2}{3}+1}}{\frac{2}{3}+1} + 6\cdot\frac{x^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1} - \frac{3^x}{\ln 3} + C = \frac{x^{\frac{5}{3}}}{\frac{5}{3}} + 6\cdot\frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} - \frac{3^x}{\ln 3} + C =$$

$$= \frac{3}{5}\sqrt[3]{x^5} + 12\sqrt{x} - \frac{3^x}{\ln 3} + C = \frac{3}{5}x\sqrt[3]{x^2} + 12\sqrt{x} - \frac{3^x}{\ln 3} + C.$$

Интегрирование методом подстановки

Вычислить заданный интеграл непосредственным интегрированием удается далеко не всегда, а иногда это связано с большими трудностями. Одним из наиболее эффективных приемов является метод подстановки или замены переменной интегрирования. Сущность этого метода заключается в том, что путем введения новой переменной интегрирования удается свести заданный интеграл к новому интегралу, который сравнительно легко берется непосредственно.

Пример 1. Найти $\int (3x-5)^7 dx$.

Решение:

$$\int (3x-5)^7 dx = \begin{bmatrix} t = 3x-5;\; 3x = t+5 \\ x = \frac{t}{3} + \frac{5}{3} \\ dx = \left(\frac{t}{3}+\frac{5}{3}\right)' dt = \frac{1}{3} dt \end{bmatrix} = \int t^7 \frac{dt}{3} = \frac{1}{3}\int t^7 dt =$$

$$\frac{1}{3}\cdot\frac{t^8}{8} + C = \frac{1}{24} t^8 + C = \frac{1}{24}(3x-5)^8 + C.$$

Пример 2. Найти $\int \sin(2-8x)dx$

$$\int \sin(2-8x)dx = \begin{bmatrix} 2-8x = t, -8x = t-2 \\ x = \frac{t-2}{-8} = -\frac{1}{8}t + \frac{2}{8} \\ dx = \left(-\frac{1}{8}t + \frac{2}{8}\right)' = -\frac{1}{8}dt \end{bmatrix} = \int \sin t \times \left(-\frac{1}{8}\right) dt$$

$$= -\frac{1}{8}\int \sin t dt = \frac{1}{8}\cos t = \frac{1}{8}\cos(2-8x) + C$$

Пример 3. Найти $\int \frac{dx}{2\sqrt{4+3x}}$

$$\int \frac{dx}{2\sqrt{4+3x}} = \begin{bmatrix} 4+3x = t \qquad 3x = t-4 \\ x = \frac{t-4}{3} = \frac{t}{3} - \frac{4}{3} = \frac{1}{3}t - \frac{4}{3} \\ dx = \left(\frac{1}{3}t - \frac{4}{3}\right)' = \frac{1}{3}dt \end{bmatrix} = \int \frac{\frac{1}{3}dt}{2\sqrt{t}} = \frac{1}{3}\int \frac{dt}{2\sqrt{t}}$$

$$= \frac{1}{3}\sqrt{t} = \frac{1}{3}\sqrt{4+3x} + C$$

Метод интегрирования по частям

Если $u(x)$ и $v(x)$ – дифференцируемые функции, то справедлива формула $\int u dv = uv - \int v du$.

Данную формулу интегрирования применяют обычно в тех случаях, когда функция $u(x)$ упрощается при дифференцировании, а первообразная для функции $v(x)$ легко находится.

Пример. Вычислить неопределенные интегралы, используя метод интегрирования по частям:

а) $\int (5+4x)\cos 8x\,dx,$ **б)** $\int \ln(3x+2)\,dx$.

Решение. а) При вычислении первого интеграла воспользуемся формулой интегрирования по частям:

$$\int (5+4x)\cos 8x\ \ dx = \begin{vmatrix} u = 5+4x & du = 4dx \\ dv = \cos 8x dx & v = \frac{1}{8}\sin 8x \end{vmatrix} = \frac{1}{8}(5+4x)\sin 8x - \frac{4}{8}\int \sin 8x dx =$$

$$= \frac{1}{8}(5+4x)\sin 8x + \frac{\cos 8x}{16} + C.$$

б) При вычислении второго интеграла также воспользуемся формулой интегрирования по частям. В результате получим

$$\int \ln(3x+2)\ \ dx = \begin{vmatrix} u = \ln(3x+2) & du = \dfrac{3dx}{3x+2} \\ dv = dx & v = x \end{vmatrix} = x\ln(3x+2) - \int \frac{3x}{3x+2}dx =$$

$$= x\ln(3x+2) - \int\left(1 - \frac{2}{3x+2}\right)dx = x\ln(3x+2) - x + \frac{2}{3}\ln(3x+2) + C.$$

Задания для самостоятельной работы

Задание. Вычислите интегралы, используя указанные методы

№ варианта	***Непосредственное интегрирование***	***Метод подстановки***	***Метод интегрирования по частям***
1	$\int(2-3e^x+x)dx$	$\int \frac{2dx}{\sqrt{5x-2}}$	$\int x\ln x\,dx$
	$\int(5x^5-\cos x-1)dx$	$\int \cos 3x\,dx$	$\int(x+1)e^x\,dx$
	$\int(7x^6-\sin x+3)dx$	$\int (2-3x)^7\,dx$	$\int \arcsin x\,dx$
2	$\int\left(7-\frac{1}{\cos^2 x}-x^2\right)dx$	$\int \sin(3-2x)dx$	$\int x\sin x\,dx$
	$\int\left(x^4-\frac{1}{2x}-4\right)dx$	$\int (2-7x)^3\,dx$	$\int arctgx\,dx$
	$\int\left(3-\frac{1}{\sin^2 x}+2\right)dx$	$\int \cos(4x-1)dx$	$\int 3x\cdot\ln x\,dx$
3	$\int\left(3x^2-\frac{2}{1+x^2}+5\right)dx$	$\int (6x-1)^{10}\,dx$	$\int \frac{5}{7}x\cos x\,dx$
	$\int(2\cos x-5x^4+3)dx$	$\int \sqrt{x+4}\,dx$	$\int \frac{3}{2}xe^x\,dx$
	$\int(5e^x-x^3-4)dx$	$\int \sin 7x\,dx$	$\int 3x\sin 5x\,dx$
4	$\int\left(5x^4-\frac{1}{3x}+4\right)dx$	$\int \sqrt{1+e^x}\cdot e^x\,dx$	$\int \frac{1}{3}x\sin 5x\,dx$
	$\int(1+3\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt{x})dx$	$\int \sqrt{3-2x}\,dx$	$\int(x-1)\ln x\,dx$

	$\int\left(\sqrt{x}-2x+\sqrt{x^3}\right)dx$	$\int \sin(1-3x)\,dx$	$\int (x+3)e^{2x}\,dx$
5	$\int\left(\sqrt{x}+2\sqrt[3]{x^2}+1\right)dx$	$\int \frac{dx}{\sqrt{4+x}}$	$\int x \sin 2x\,dx$
	$\int\left(x^5-\frac{4}{x}+\cos x\right)dx$	$\int \frac{dx}{5-3x}$	$\int x \ln 4x\,dx$
	$\int\left(2\sin x+\frac{3}{x}-1\right)dx$	$\int \cos(1-3x)$	$\int x \cos 3x\,dx$

Контрольные вопросы

1 Дайте определение неопределенного интеграла.
2 В чем заключается метод непосредственного интегрирования?
3 В чем заключается метод интегрирования подстановкой?
4 В чем заключается метод интегрирования по частям?

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 14

Тема: Применение определенного интеграла для вычисления площадей плоских фигур.

Цель: отработка умений и навыков применения определенного интеграла для вычисления площадей плоских фигур.

Примеры решения задач

Пример 1 . Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями:
$y = x + 2$ и $y = -x^2 + 4x + 12$

Решение:

Графиком y=x+2 является прямая линия, а графиком линии $y = -x^2 + 4x + 12$
является парабола, ветви которой направлены вниз.

1. Чтобы построить график прямой необходимо задать две точки:

2. Построение параболы начинается с нахождения координат ее вершины:

$x_в = \frac{-b}{2a}$; $\qquad x_в = \frac{-4}{2\times(-1)} = 2$

$y_{в=}\ y(x_в)$; $\qquad y_в = -2^2 + 4\times 2 + 12 = 16$

Следовательно, координаты вершины параболы (2;16).

Далее найдем точку пересечения с осью Оу:

$$y(0) = -0^2 + 4\times 0 + 12 = 12 \rightarrow (0;12)$$

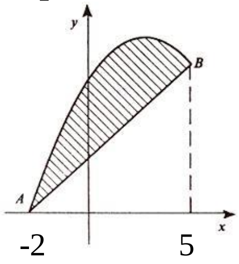
Далее найдем точки пересечения с осью Ох, решив уравнение:

$$-x^2 + 4x + 12 = 0$$
$$x^2 - 4x - 12 = 0$$

D=64

$$x_1 = \frac{-4 + \sqrt{64}}{-2} = -2$$
$$x_2 = \frac{-4 - \sqrt{64}}{-2} = 6$$

3. В одной системе координат строим оба графика и отмечаем штриховкой площадь, которую надо найти:



4. Находим точки пересечения заданных линий. Для этого решаем систему уравнений:

$$\begin{cases} y = x + 2 \\ y = -x^2 + 4x + 12 \end{cases}$$

Для нахождения абсцисс точек пересечения заданных линий решаем уравнение:

$x + 2 = -x^2 + 4x + 12$ или $x^2 - 3x - 10 = 0$

Решив квадратное уравнение, находим: x_1 = -2, x_2 = 5.

Итак, данные линии, представляющие собой параболу и прямую, пересекаются в точках *с абсциссами* x_1 = -2, x_2 = 5.

5. Эти линии образуют замкнутую фигуру, площадь которой вычисляем по указанной выше формуле:

$$S = \int_{-2}^{5} (-x^2 + 4x + 12 - x - 2)dx = \int_{-2}^{5} (-x^2 + 3x + 10)dx$$
$$= \left(-\frac{5^3}{3} + 3 \times \frac{5^2}{2} + 10 \times 5\right) - \left(\frac{(-2)^3}{3} + 3 \times \frac{(-2)^2}{2} + 10 \times (-2)\right)$$
$$= 60\text{ед}^2$$

Пример 2. Вычислить площадь, ограниченную линиями $y = x^2 + 1$ и $x + y = 3$.

Решение:

Графиком $y = 3 - x$ является прямая линия, а графиком линии $y = x^2 + 1$ является парабола, ветви которой направлены вверх.

1) Чтобы построить график прямой необходимо задать две точки:

x	0	1
y	3	2

2) Построение параболы начинается с нахождения координат ее вершины:

$x_в = \frac{-b}{2a}$; $\qquad x_в = \frac{-0}{2\times(1)} = 0$

$y_{в=}\, y(x_в)$; $\qquad y_в = 0^2 + 1 = 1$

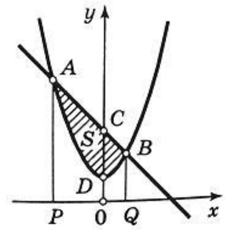
Следовательно, координаты вершины параболы (0;1)

Далее найдем точку пересечения с осью Оу:

$$y(0) = 0^2 + 1 \rightarrow (0;1)$$

Точек пересечения с осью ОХ парабола не имеет, так как вершина расположена выше оси ОХ и ветви направлены вверх.

3) В одной системе координат строим оба графика и отмечаем штриховкой площадь, которую надо найти:



4) Находим точки пересечения заданных линий. Для этого решаем систему уравнений:

$$\left.\begin{aligned} y &= x^2+1, \\ x+y &= 3, \end{aligned}\right\}$$

находим абсциссы точек пересечения x_1 = -2 и x_2 = 1.

5) Полагая $y_2 = 3 - x$ и $y_1 = x^2 + 1$, на основании формулы $S = \int_a^b (y_2 - y_1)dx$ получаем

$$S = \int_{-2}^{1}\left[(3-x)-(x^2+1)\right]dx = \int_{-2}^{1}(2-x-x^2)dx = \left(2x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_{-2}^{1} =$$

$$= \left(2 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) - \left(-4 - 2 + \frac{8}{3}\right) = 4{,}5.$$

Задания для самостоятельного решения

Вычислить площадь фигуры, ограниченной параболой $\boldsymbol{y = ax^2 + bx + c}$ и прямой $\boldsymbol{y = kx + b}$. Сделать чертеж.

1 $y = -x^2 + 4x - 1$; $\quad y = -x - 1$.

2 $y = x^2 - 6x + 7$; $\quad y = x + 1$

3 $y = -x^2 + 6x -5$; $\quad y = x - 5$

4 $y = x^2 - 6x + 7$; $\quad y = -x + 7$

5 $y =-x^2 + 6x - 5$; $\quad y = -x + 1$

6 $y = x^2 + 6x + 7$; $y = x + 7$
7 $y = -x^2 - 6x - 5$; $y = x + 1$
8 $y = x^2 + 6x + 7$; $y = -x + 1$
9 $y = -x^2 - 6x - 6$; $y = -x - 6$
10 $y = x^2 - 4x + 1$; $y = x + 1$

Контрольные вопросы

1 В чем отличие определенного интеграла от неопределенного?
2 Перечислите свойства определенного интеграла.

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 15
«Действия над матрицами»

Цель работы:

1. закрепить навыки выполнения действий с матрицами (сложение, вычитание, умножение, возведение в степень)
2. способствовать развитию аналитического мышления, внимания обучающихся;
3. воспитать интерес к предмету, трудолюбие, ответственность, самостоятельность и творческую активность.

Краткие теоретические и учебно-методические материалы по теме практической работы

Действия над матрицами

1) Сложение. Операция сложения матриц вводится только для матриц одинаковых размеров.

Суммой двух матриц A и B одинакового размера называется матрица C = A + B, элементы которой $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$

Пример. Сложить матрицы A и B, если

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}$$

Решение. Здесь A и C – квадратные матрицы второго порядка. Складывая их соответствующие элементы, получим

$$C = A + B = \begin{pmatrix} 2-1 & 4+3 \\ -1+1 & 3-4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 7 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

2) Умножение матрицы на число.

Произведением матрицы A на число λ называется матрица B равная λA, элементы которой $b_{ij} = \lambda a_{ij}$

Умножение матрицы на число сводится к умножению на это число всех элементов матрицы.

Пример: Умножить матрицу А = $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 0 & 5 & -3 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ на число λ = 3.

Решение. Умножая каждый член матрицы А на 3, получим

$$3A = \begin{pmatrix} 6 & -3 & 12 \\ 0 & 15 & -9 \\ -6 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

3) Умножение матрицы на матрицу.

Умножение матрицы А на матрицу В определено лишь в том случае, когда число столбцов первой матрицы равно числу строк второй матрицы

Произведением матриц А = $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, В = $\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$ называется матрица

С =А·В = $\begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}\,b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{pmatrix}$

Нужно каждый элемент первой строки умножить на соответствующий элемент первого столбца и полученные произведения сложить и т.д.

$A_{2\times3} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\qquad B_{3\times3} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 5 & 1 & 4 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1\cdot(-1) + 0\cdot5 + 2\cdot(-2) & 1\cdot0 + 0\cdot1 + 2\cdot0 & 1\cdot1 + 0\cdot4 + 2\cdot1 \\ 3\cdot(-1) + 1\cdot5 + 0\cdot(-2) & 3\cdot0 + 1\cdot1 + 0\cdot0 & 3\cdot0 + 1\cdot4 + 0\cdot1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -5 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 7 \end{pmatrix}.$$

Вопросы для закрепления теоретического материала к практическому занятию

1. Что называется матрицей?
2. Что называется матрицей-строкой? матрицей-столбцом? вектором?
3. Какие матрицы называются прямоугольными? квадратными?
4. Какие матрицы называются равными?
5. Что называется главной диагональю матрицы?
6. Какая матрица называется диагональной?
7. Что значит транспонировать матрицу?
8. Транспонируйте матрицу

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 7 \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

9. Что называется суммой матриц?
10. Что называется произведением матрицы на число?
11. Как найти произведение двух матриц?
12. В чем состоит обязательное условие существования произведения матриц?
13. Какими свойствами обладает произведение матриц?

Задания для практического занятия:

1. Вычислите: $D = A \times B - 3C$, если

$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 5 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$.

2. Вычислите: $D = (A \times B) + C^2$, если

$A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 5 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 1 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$.

3. Вычислите: $D = A \times B - 2C^т$, если

$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 5 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$.

4. Вычислите: $D = C^2 - (A \times B)^т$, если

$A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 5 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 1 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$.

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 16
«Нахождение обратной матрицы»

Цель работы:

1. закрепить навыки нахождения обратной матрицы)
2. способствовать развитию аналитического мышления, внимания обучающихся;
3. воспитать интерес к предмету, трудолюбие, ответственность, самостоятельность и творческую активность.

Краткие теоретические и учебно-методические материалы по теме практической работы

Составим обратную матрицу для матрицы $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$;

Вычислим определитель матрицы А:

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} - (-1) \cdot \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}$$
$$= 2(2+4) + 1(3-2) + 1(-6-2) = 12 + 1 - 8 = 5$$

Найдем алгебраические дополнения

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 6; \quad A_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1; \quad A_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -8;$$

$A_{21} = (-1)^{2+1}\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = -1;\quad A_{22} = (-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1;\quad A_{23} =$
$(-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 3;$
$A_{31} = (-1)^{3+1}\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -4;\quad A_{32} = (-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -1;\quad A_{33} =$
$(-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 7.$

Составим матрицу из алгебраических дополнений

$$\begin{pmatrix} 6 & -1 & -8 \\ -1 & 1 & 3 \\ -4 & -1 & 7 \end{pmatrix}$$

Транспонируем полученную матрицу, т.е. переходим к матрице

$$\begin{pmatrix} 6 & -1 & -4 \\ -1 & 1 & -1 \\ -8 & 3 & 7 \end{pmatrix}$$

Умножая на $\frac{1}{5}$ получим обратную матрицу

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{6}{5} & -\frac{1}{5} & -\frac{4}{5} \\ -\frac{1}{5} & \frac{1}{5} & -\frac{1}{5} \\ -\frac{8}{5} & \frac{3}{5} & \frac{7}{5} \end{pmatrix}$$

Задания практической части

Составить обратные матрицы для данных

A=$\begin{pmatrix} 3 & -1 & -4 \\ 2 & 5 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$, B=$\begin{pmatrix} 5 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ -8 & 3 & 7 \end{pmatrix}$, C=$\begin{pmatrix} 11 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ -2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 17
«Решение СЛАУ по формулам Крамера»

Цель: закрепить навыки нахождения переменных системы линейных алгебраических уравнений по формулам Крамера

.

Краткие теоретические и учебно-методические материалы по теме практической работы

Решение СЛАУ методом Крамера

Пусть дана система линейных уравнений с n неизвестными

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = b_{n.} \end{cases} \qquad (1.1)$$

Составим главный определитель системы (1.1) т.е. определитель из коэффициентов при неизвестных в данной системе.

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11}, & a_{12}, & \dots & a_{1n} \\ a_{21}, & a_{22}, & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1}, & a_{n2}, & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

и вспомогательные определители, составляем их путем замены в главном определителе соответствующего столбца столбцом, состоящим из свободных членов.

$$\Delta x = \begin{vmatrix} b_1, & a_{12}, & \dots & a_{1n} \\ b_2, & a_{22}, & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_n, & a_{n2}, & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}; \quad \Delta y = \begin{vmatrix} a_{11}, & b_1, & \dots & a_{1n} \\ a_{21}, & b_2, & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1}, & b_n, & \dots & a_{nn} \end{vmatrix};$$

$$\Delta z = \begin{vmatrix} a_{11}, & a_{12}, & \dots & b_1 \\ a_{21}, & a_{22}, & \dots & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1}, & a_{n2}, & \dots & b_n \end{vmatrix}$$

Если $\Delta \neq 0$, то решение системы (1.1) находится по формулам Крамера:

$$x = \frac{\Delta x}{\Delta}; \qquad y = \frac{\Delta y}{\Delta}; \qquad z = \frac{\Delta z}{\Delta}.$$

Вопросы для закрепления теоретического материала к практическому занятию

1. Что называется системой линейных алгебраических уравнений?
2. Что значит решить систему уравнений?
3. Что является решением системы?
4. Какие бывают системы линейных алгебраических уравнений ?
5. Какими способами можно решить систему?
6. Опишите матричный способ решения системы уравнений.
7. Сформулируйте теорему Крамера.
8. Запишите формулы Крамера.

Задания для практического занятия:

Решите системы уравнений по формулам Крамера:

а) $\begin{cases} 3x_1 + x_2 - 2x_3 = 6, \\ 5x_1 - 3x_2 + 2x_3 = -4, \\ 4x_1 - 2x_2 - 3x_3 = -2. \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2x_1 + 7x_2 + 13x_3 = 6, \\ 3x_1 + 14x_2 + 12x_3 = 18, \\ 5x_1 + 25x_2 + 16x_3 = 39. \end{cases}$

в) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 10, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 23, \\ x_2 + 2x_3 = 13. \end{cases}$ г) $\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 = 11, \\ 5x_2 + 6x_3 = 28, \\ x_1 + 2x_3 = 7. \end{cases}$

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 18
«Решение СЛАУ различными методами»

Цель: закрепить умения и навыки в решении систем линейных алгебраических уравнений методом обратной матрицы, методом Гаусса, по формулам Крамера

Краткие теоретические и учебно-методические материалы по теме практической работы

Решение системы линейных уравнений в матричной форме

Пусть дана система линейных уравнений с n неизвестными

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n. \end{cases} \qquad (1.1)$$

Составим матрицу коэффициентов:

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} a_{11}, & a_{12}, & \dots & a_{1n} \\ a_{21}, & a_{22}, & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1}, & a_{n2}, & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Составим матрицу-столбец свободных членов:

$$\mathrm{B} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix}$$

Составим еще матрицу-столбец неизвестных:

$$\mathrm{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Тогда система (1.1) в матричной форме примет вид $A \cdot X = B$

Если $detA \neq 0$, то умножая $A \cdot X = B$ на A^{-1}, получим $\boldsymbol{X = A^{-1} \cdot B}$

На этой формуле основан матричный способ решения систем линейных уравнений.

Пример. Решить матричным способом систему уравнений

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = 2, \\ 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 = -2, \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = 1. \end{cases}$$

Решение. Для данной системы

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}; \qquad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}; \qquad B = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Чтобы воспользоваться формулой $X = A^{-1} \cdot B$, надо найти матрицу, обратную к матрице А, т.е. A^{-1}

Вычислим определитель матрицы А:

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} - (-1) \cdot \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}$$
$$= 2(2+4) + 1(3-2) + 1(-6-2) = 12 + 1 - 8 = 5$$

Найдем алгебраические дополнения

$A_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 6;\quad A_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1;\quad A_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -8;$

$A_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = -1;\quad A_{22} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1;\quad A_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 3;$

$A_{31} = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -4;\quad A_{32} = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -1;\quad A_{33} = (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 7.$

Составим матрицу из алгебраических дополнений

$$\begin{pmatrix} 6 & -1 & -8 \\ -1 & 1 & 3 \\ -4 & -1 & 7 \end{pmatrix}$$

Транспонируем полученную матрицу, т.е. переходим к матрице

$$\begin{pmatrix} 6 & -1 & -4 \\ -1 & 1 & -1 \\ -8 & 3 & 7 \end{pmatrix}$$

Умножая на $\frac{1}{5}$ получим обратную матрицу

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{6}{5} & -\frac{1}{5} & -\frac{4}{5} \\ -\frac{1}{5} & \frac{1}{5} & -\frac{1}{5} \\ -\frac{8}{5} & \frac{3}{5} & \frac{7}{5} \end{pmatrix}$$

Итак,

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{6}{5} & -\frac{1}{5} & -\frac{4}{5} \\ -\frac{1}{5} & \frac{1}{5} & -\frac{1}{5} \\ -\frac{8}{5} & \frac{3}{5} & \frac{7}{5} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{12+2-4}{5} \\ \frac{-2-2-1}{5} \\ \frac{-16-6+7}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Ответ: $x_1 = 2;\ x_2 = -1; x_3 = -3.$

Вопросы для закрепления теоретического материала к практическому занятию

1. Что называется системой линейных алгебраических уравнений?
2. Что значит решить систему уравнений?
3. Что является решением системы?
4. Какие бывают системы линейных алгебраических уравнений ?
5. Какими способами можно решить систему?
6. Опишите матричный способ решения системы уравнений.
7. Опишите способ решения СЛАУ по формулам Крамера
8. Опишите метод Гаусса решения СЛАУ

Задания для практического занятия:

Решите системы уравнений в матричной форме:

а) $\begin{cases} 5x + 3y = 12, \\ 2x - y = 7. \end{cases}$ б) $\begin{cases} 3x - 2y = 5, \\ 6x - 4y = 11. \end{cases}$

Решите системы линейных уравнений по формулам Крамера (в), методом Гаусса (г)

в) $\begin{cases} 2x - 3y = 11, \\ 6x - 9y = 33. \end{cases}$ г) $\begin{cases} 2x - 3y + z = -7, \\ x + 4y + 2z = -1, \\ x - 4y = -5. \end{cases}$

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА №19

Тема: Выполнение операций над множествами.

Цель: сформировать умение выполнять операции с множествами

Теоретические сведения к практической работе

Множество - одно из основным понятий математики.

Множеством называется совокупность некоторых элементов, объединенных каким-либо общим признаком. Элементами множества могут быть числа, фигуры, предметы, понятия и т.п.

Множества обозначаются прописными буквами, а элементы множество строчными буквами. Элементы множеств заключаются в фигурные скобки.

Если элемент x принадлежит множеству X, то записывают $x \in X$ ($\in$ — принадлежит).

Если множество A является частью множества B, то записывают $A \subset B$ ($\subset$ — содержится).

Множество может быть задано одним из двух способов: перечислением и с помощью определяющего свойства.

Два множества A и B равны (A=B), если они состоят из одних и тех же элементов.

Например, если A={1,2,3,4}, B={3,1,4,2} то A=B.

Объединением (суммой) множеств A и B называется множество $A \cup B$, элементы которого принадлежат хотя бы одному из этих множеств.

Например, если $A=\{1,2,4\}$, $B=\{3,4,5,6\}$, то $A \cup B = \{1,2,3,4,5,6\}$

Пересечением (произведением) множеств A и B называется множество $A \cap B$, элементы которого принадлежат как множеству A, так и множеству B.

Например, если $A=\{1,2,4\}$, $B=\{3,4,5,2\}$, то $A \cap B = \{2,4\}$

Разностью множеств A и B называется множество AB, элементы которого принадлежат множесву A, но не принадлежат множеству B.

Например, если $A=\{1,2,3,4\}$, $B=\{3,4,5\}$, то $AB = \{1,2\}$

Симметричной разностью множеств A и B называется множество $A \Delta B$, являющееся объединением разностей множеств AB и BA, то есть $A \Delta B = (AB) \cup (BA)$.

Например, если $A=\{1,2,3,4\}$, $B=\{3,4,5,6\}$, то $A \Delta B = \{1,2\} \cup \{5,6\} = \{1,2,5,6\}$

<u>Свойства:</u>

Свойства перестановочности:

$A \cup B = B \cup A$

$A \cap B = B \cap A$

Сочетательное свойство:

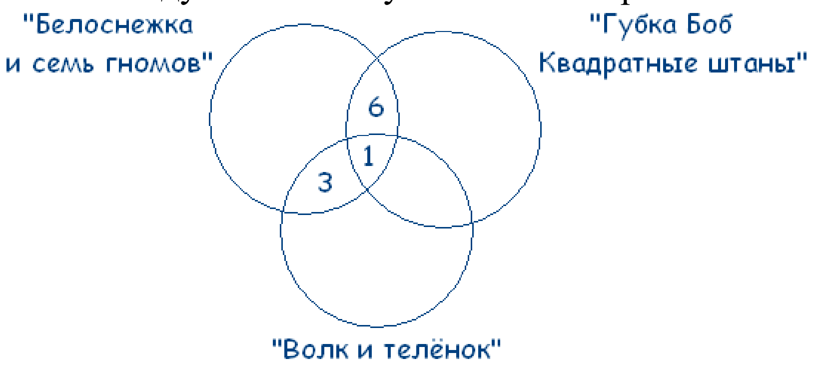
$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$

$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$

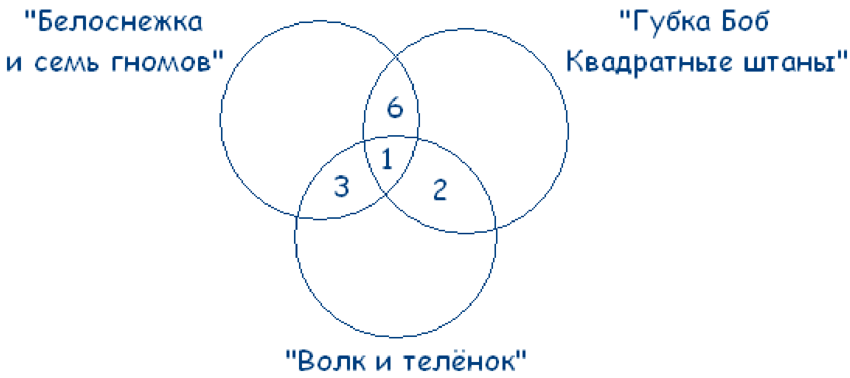
Круги Эйлера (Эйлера-Вена) — геометрическая схема, с помощью которой можно изобразить отношения между подмножествами, для наглядного представления.

Пример: Среди школьников шестого класса проводилось анкетирование по любимым мультфильмам. Самыми популярными оказались три мультфильма: «Белоснежка и семь гномов», «Губка Боб Квадратные Штаны», «Волк и теленок». Всего в классе 38 человек. «Белоснежку и семь гномов» выбрали 21 ученик, среди которых трое назвали еще «Волк и теленок», шестеро – «Губка Боб Квадратные Штаны», а один написал все три мультфильма. Мультфильм «Волк и теленок» назвали 13 ребят, среди которых пятеро выбрали сразу два мультфильма. Сколько человек выбрали мультфильм «Губка Боб Квадратные Штаны»?

Решение: В этой задаче 3 множества, из условий задачи видно, что все они пересекаются между собой. Получаем такой чертеж:



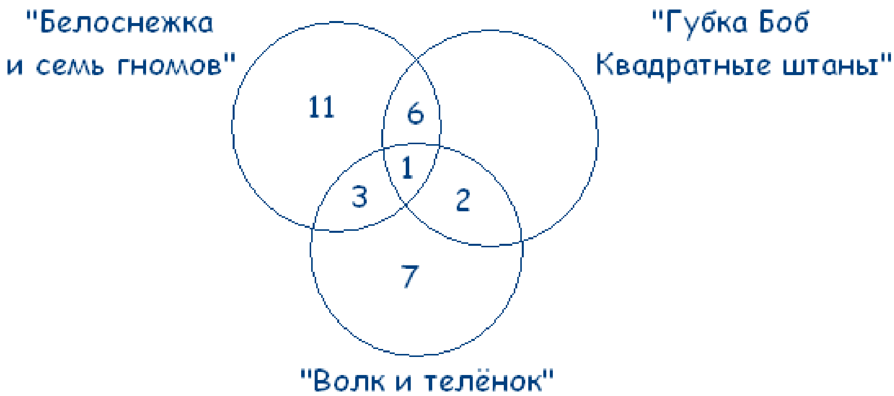
Учитывая условие, что среди ребят, которые назвали мультфильм «Волк и теленок» пятеро выбрали сразу два мультфильма, получаем:



21 – 3 – 6 – 1 = 11 – ребят выбрали только «Белоснежку и семь гномов».

13 – 3 – 1 – 2 = 7 – ребят смотрят только «Волк и теленок».

Получаем:



38 – (11 + 3 + 1 + 6 + 2 + 7) = 8 – человек смотрят только «Губка Боб Квадратные Штаны».
Делаем вывод, что «Губка Боб Квадратные Штаны» выбрали 8 + 2 + 1 + 6 = 17 человек.

Ответ. 17 человек выбрали мультфильм «Губка Боб Квадратные Штаны».

Содержание практической работы

Задание 1. 1) Найти множества $A\cap B$, $A\cup B$, A/B, B/A, если:

а) $A=\{e, o, p, x\}$ $B=\{x, y\}$

б) $A=\{x: -3<x<4\}$ $B=\{x: 0\le x\le 6\}$

в) $A=\{2^n+1\}$, $B=\{n+1\}$ $n\in N$

2) Найти множества $A\cap B$, $A\cup B$, A/B, B/A, если:

а) $A=\{12, 13, 14, 15\}$ $B=\{12, 14, 16\}$

б) $A=\{x: 0<x<2\}$ $B=\{x: 1\le x\le 4\}$

в) $A=\{3-(n+1)\}$, $B=\{n+5\}$ $n\in N$

Задание 2. 1) На 1 курсе учатся 200 студентов, 106 из них знают английский язык, 60 – немецкий, 92 – французский. 24 студента знают английский и немецкий языки, 36 – английский и французский, 30 –

немецкий и французский, 14 – все три языка. Остальные знают только один испанский язык. Сколько студентов знают:

а) только один язык?

б) испанский язык?

в) только немецкий язык?

г) знают английский и немецкий, но не знают французский?

2) На 1 курсе учатся 200 студентов, 106 из них знают английский язык, 60 – немецкий, 92 – французский. 24 студента знают английский и немецкий языки, 36 – английский и французский, 30 – немецкий и французский, 14 – все три языка. Остальные знают только один испанский язык. Сколько студентов знают:

а) ровно два языка?

б) только французский язык?

в) знают немецкий и французский, но не знают английский?

г) не знают испанский язык?

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 20
«Выполнение операций над множествами»

Цель работы: сформировать умение выполнять операции с множествами

Содержание работы:

Теоретические сведения

Множество – одно из основных понятий математики.

Множеством называется совокупность некоторых элементов, объединенных каким-либо общим признаком. Элементами множества могут быть числа, фигуры, предметы, понятия и т.п.

Множества обозначаются прописными буквами, а элементы множество строчными буквами. Элементы множеств заключаются в фигурные скобки.

Если элемент x принадлежит множеству X, то записывают $x \in X$ ($\in$ — принадлежит).

Если множество A является частью множества B, то записывают $A \subset B$ ($\subset$ — содержится).

Множество может быть задано одним из двух способов: перечислением и с помощью определяющего свойства.

Два множества A и B равны (A=B), если они состоят из одних и тех же элементов.

Например, если A={1,2,3,4}, B={3,1,4,2} то A=B.

Объединением (суммой) множеств A и B называется множество $A \cup B$, элементы которого принадлежат хотя бы одному из этих множеств.

Например, если A={1,2,4}, B={3,4,5,6}, то $A \cup B = \{1,2,3,4,5,6\}$

Пересечением (произведением) множеств А и В называется множество А ∩ В, элементы которого принадлежат как множеству А, так и множеству В.

Например, если А={1,2,4}, В={3,4,5,2}, то А ∩ В = {2,4}

Разностью множеств А и В называется множество АВ, элементы которого принадлежат множесву А, но не принадлежат множеству В.

Например, если А={1,2,3,4}, В={3,4,5}, то АВ = {1,2}

Симметричной разностью множеств А и В называется множество А Δ В, являющееся объединением разностей множеств АВ и ВА, то есть А Δ В = (АВ) ∪ (ВА).

Например, если А={1,2,3,4}, В={3,4,5,6}, то А Δ В = {1,2} ∪ {5,6} = {1,2,5,6}

Свойства:

Свойства перестановочности:

А ∪ В = В ∪ А

А ∩ В = В ∩ А

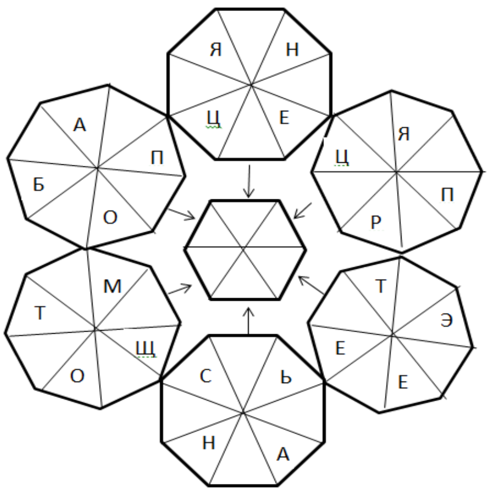
Сочетательное свойство:

(А ∪ В) ∪ С = А ∪ (В ∪ С)

(А ∩ В) ∩ С = А ∩ (В ∩ С)

Задания практической части:

1. Задание «С миру по нитке». Сначала надо восстановить шесть слов (половина букв уже вписана), а после из секторов, от которых отходят стрелки, нужно взять буквы и поместить в центральную фигуру. У вас получится главное слово задания (фамилия основоположника теории множеств)!



2. Упражнение «Найди пару»

∩	пересечение
В(А)	мощность множества А
U	пересечение объединение
Ø	пустое множество

$\bar{A}$	булеан множества А
$\|A\|$	универсальное множество
\	дополнение
U	разность

3. Определить в каких отношениях находятся между собой три множества:

1) A{1, 3}; B – множество нечетных положительных чисел; C – множество решений уравнения X^2–4X+3=0.

2) A={1, 2, 3}; B={2, 3}; C – множество решений уравнения X–1=0.

3) U={1, 2, 3, … , 20}, A – множество четных чисел, B – множество нечетных чисел.

4) A – множество решений уравнения $2X^2$–8X+6=0; B – множество решений уравнения X-1=0; N – множество натуральных чисел.

5) A={a, b, c}; B={a, b, d}; C={b, c}.

6) A={a, b}; B={a, c}; C={a, b, c}.

7) A={a}; B={{a}, {b}}; C={b}.

8) A – множество решений уравнения X–5=0; B – множество решений уравнения X^2–9=0; C={{5}, {3}}.

9) A – множество решений уравнения X^2–4X+3=0; B={{1}, {3}}; C – множество нечетных натуральных чисел.

10) A={a, b, c}; B={{c}}; C={c}.

11) A={a, b}; B={b, c}; C={a}.

12) A={a}; B={b}; C={a, b, c}.

4. Приняв множество первых 20 натуральных чисел в качестве универсума U, запишите его подмножества: A – четных чисел; B – нечетных чисел; C – квадратов чисел; D – простых чисел; и запишите множества, которые получатся в результате следующих операций:

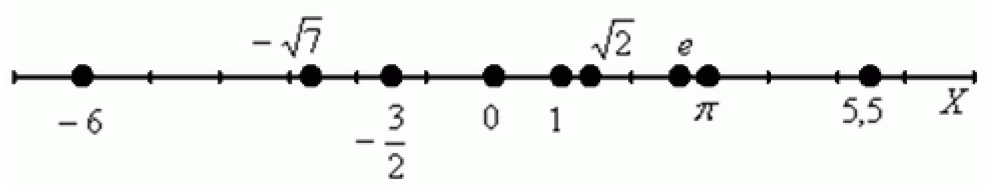
1) $A\cup B$; 2) $A\cap B$; 3) $A\cap C$; 4) $A\cap D$; 5) C – A; 6) C – B; 7) C+D; 8) U – A;
9) U – B; 10) U – D; 11) U – A; 12) $A\cup B$.

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 21
Тема: Комплексные числа и действия над ними

Цель: сформировать умение выполнять сложение, вычитание, умножение и деление комплексных чисел

Теоретические сведения к практической работе

Сначала вспомним «обычные» числа. В математике они называются **множеством действительных чисел** и обозначаются буквой R. Рассмотрим действительные числа на числовой прямой:



Здесь и целые числа, и дроби, и иррациональные числа. При этом каждой точке числовой обязательно соответствует некоторое действительное число.

Комплексным числом z называется число вида $Z=a+bi$, где a и b – действительные числа, i – так называемая *мнимая единица*. Число a называется *действительной частью* Rez комплексного числа Z , число b называется *мнимой частью* Imz комплексного числа z .

a+bi – это ЕДИНОЕ ЧИСЛО, а не сложение. Действительную и мнимую части комплексного числа, в принципе, можно переставить местами Z=a+bi: или переставить мнимую единицу: Z=a+bi – от этого комплексное число не изменится. **Но стандартно комплексное число принято записывать именно в таком порядке**: Z=a+bi

Чтобы всё было понятнее, сразу приведу геометрическую интерпретацию. Комплексные числа изображаются на *комплексной плоскости*:

Множество же **комплексных чисел** принято обозначать «жирной» или утолщенной буквой **C**. Поэтому на чертеже следует поставить букву **C**, обозначая тот факт, что у нас комплексная плоскость/ Комплексная плоскость состоит из двух осей: Rez – действительная часть; Imz- мнимая часть.

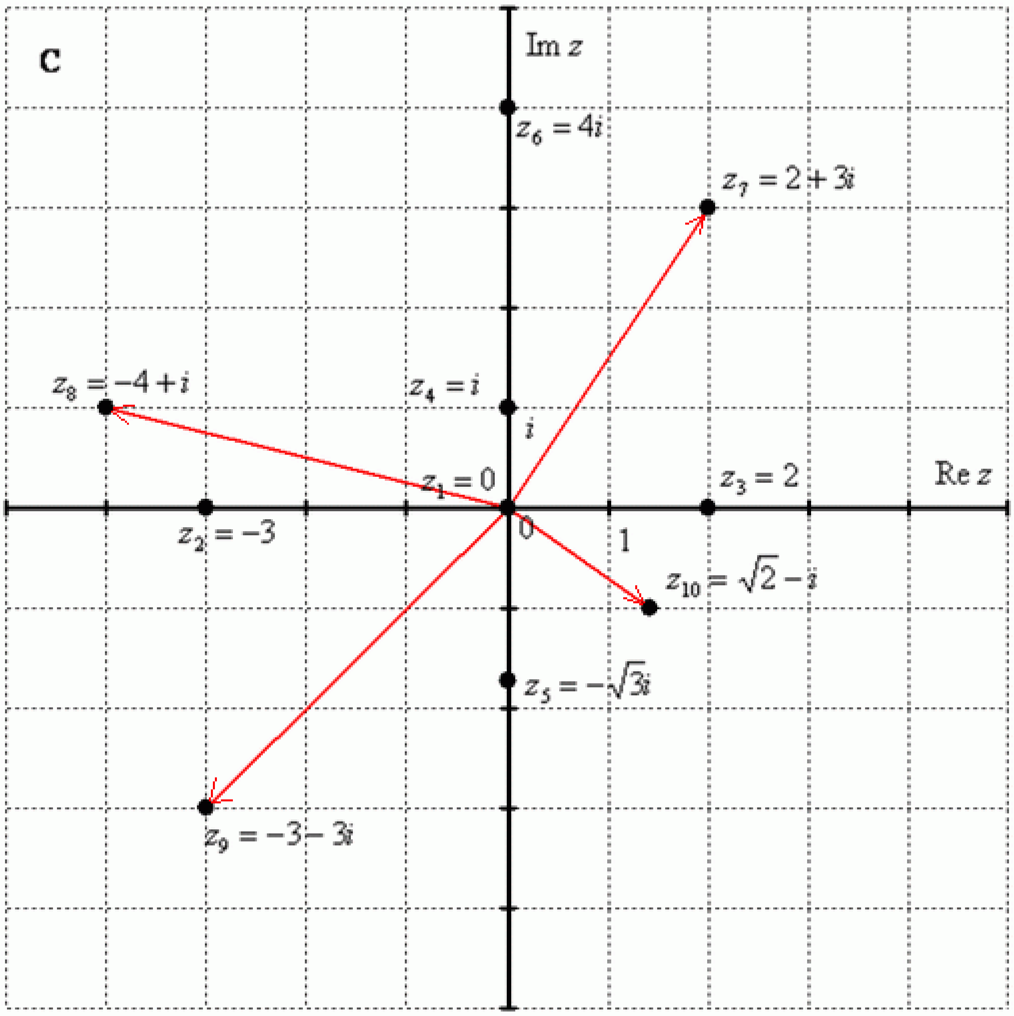
Правила оформления чертежа практически такие же, как и для чертежа в декартовой системе координат. По осям нужно задать размерность, отмечаем: ноль; единицу по действительной оси; мнимую единицу i по мнимой оси.

Построим на комплексной плоскости следующие комплексные числа:

$z_1=0$, $z_2=-3$, $z_3=2$

$z_4=i$, $z_5=-\sqrt{3}i$, $z_6=4i$

$z_4=i$ $z_7=2+3i$, $z_8=-4+i$, $z_9=-3-3i$, $z_{10}=\sqrt{2}-i$



Рассмотрим следующие комплексные числа: $z_1=0$; $z_2= -3$; $z_3= 2$ – это комплексные числа с нулевой мнимой частью. Они располагаются строго на действительной оси Rez

Числа $z_4= i$; $x_5 = -\sqrt{3}\,i$; $z_6 = 4i$, – это, наоборот, чисто мнимые числа, т.е. числа с нулевой действительной частью. Они располагаются строго на мнимой оси $\operatorname{Im} z$.

В числах $z_7 = 2+3i$, $z_8 = -4+i$, $z_9 = -3-3i$, $z_{10} = \sqrt{2} - i$ и действительная и мнимая части не равны нулю. Такие числа тоже обозначаются точками на комплексной плоскости, при этом, к ним принято проводить радиус-векторы из начала координат (обозначены красным цветом на чертеже). Радиус-векторы к числам, которые располагаются на осях, обычно не чертят, потому что они сливаются с осями.

Сложение комплексных чисел

Пример 1. Сложить два комплексных числа $z_1 = 1+3i$, $z_2 = 4-5i$

Для того чтобы сложить два комплексных числа нужно сложить их действительные и мнимые части: $z_1 + z_2 = 1+3i+4-5i = 5-2i$

Вычитание комплексных чисел

Пример 2 Найти разности комплексных чисел $z_1 - z_2$ и $z_2 - z_1$, если $z_1 = -2 + i$, $z_2 = \sqrt{3} + 5i$

Действие аналогично сложению, единственная особенность состоит в том, что вычитаемое нужно взять в скобки, а затем – стандартно раскрыть эти скобки со сменой знака:

$$z_1 - z_2 = -2 + i - (\sqrt{3} + 5i) = -2 + i - \sqrt{3} - 5i = -2 - \sqrt{3} - 4i$$

действительная часть в этом числе – составная: $-2-\sqrt{3}$. Для наглядности ответ можно переписать так: $z_1 - z_2 = (-2 - \sqrt{3}) - 4i$.

Рассчитаем вторую разность:

$$z_2 - z_1 = \sqrt{3} + 5i - (-2 + i) = \sqrt{3} + 5i + 2 - i = 2 + \sqrt{3} + 4i$$

Здесь действительная часть тоже составная: $2 + \sqrt{3}$

Чтобы не было какой-то недосказанности, приведу короткий пример с «нехорошей» мнимой частью: $-1 + \sqrt{2}i + 7 - 3i = 6 + (\sqrt{2} - 3)i$. Вот здесь без скобок уже не обойтись.

Умножение комплексных чисел

Настал момент познакомить вас со знаменитым равенством: $i^2 = -1$

Пример 3 Найти произведение комплексных чисел $z_1 = 1 - i$, $z_2 = 3 + 6i$

Очевидно, что произведение следует записать так: $z_1 \cdot z_2 = (1-i)(3+6i)$ далее надо раскрыть скобки по правилу умножения многочленов. $z_1 \cdot z_2 = (1-i)(3+6i) = 1 \cdot 3 - i \cdot 3 + 1 \cdot 6i - i \cdot 6i = 3 - 3i + 6i + 6 = 9 + 3i$

Понятно, что $-i \cdot 6i = -6i^2 = -6 \cdot (-1) = +6$

Деление комплексных чисел

Пример 4 Даны комплексные числа $z_1 = 13 + i$, $z_2 = 7 - 6i$. Найти частное $\frac{z_1}{z_2}$.

Составим частное:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{13+i}{7-6i}$$

Деление чисел осуществляется методом умножения знаменателя и числителя на сопряженное знаменателю выражение.

Вспоминаем бородатую формулу $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$ и смотрим на наш знаменатель: $7 - 6i$. В знаменателе уже есть $(a-b)$, поэтому сопряженным выражением в данном случае является $(a+b)$, то есть $7 + 6i$ Согласно правилу, знаменатель нужно умножить на $7 + 6i$, и, чтобы ничего не изменилось, домножить числитель на то же самое число $7 + 6i$:

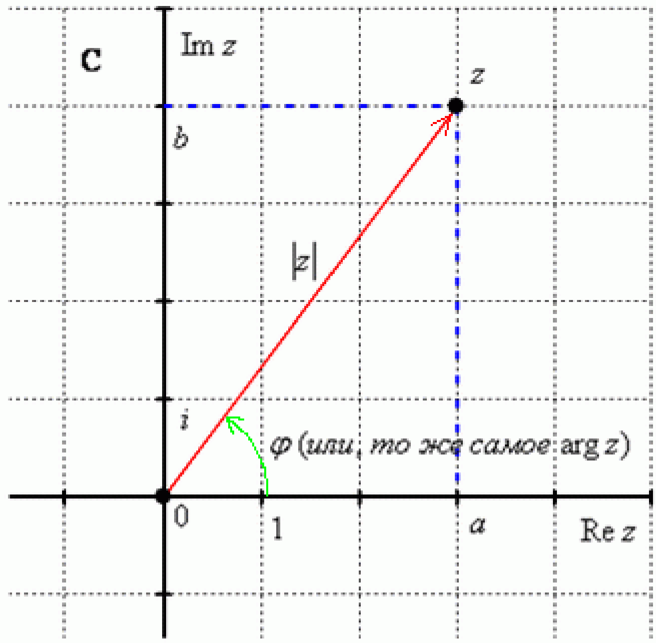
$\frac{z_1}{z_2} = \frac{(13+i)(7+6i)}{(7-6i)(7+6i)}$ Далее в числителе нужно раскрыть . А в знаменателе воспользоваться формулой $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$ (помним, что $i^2 = -1$)

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{(13+i)(7+6i)}{(7-6i)(7+6i)} = \frac{91+7i+78i+6i^2}{7^2-(6i)^2} = \frac{91+7i+78i-6}{49-(-36)} =$$

Подробн $= \frac{85+85i}{49+36} = \frac{85+85i}{85} = 1+i$

<u>Пример 5</u> Дано комплексное число $z = \frac{1}{\sqrt{3}+i}$. Записать данное число в алгебраической форме (т.е. в форме $a+bi$).Приём тот же самый – умножаем знаменатель и числитель на сопряженное знаменателю выражение. Снова смотрим на формулу $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$. В знаменателе уже есть $(a+b)$, поэтому знаменатель и числитель нужно домножить на сопряженное выражение $(a-b)$, то есть на $\sqrt{3}-i$:

$$z = \frac{1}{\sqrt{3}+i} = \frac{\sqrt{3}-i}{(\sqrt{3}+i)(\sqrt{3}-i)} = \frac{\sqrt{3}-i}{(\sqrt{3})^2-(i)^2} = \frac{\sqrt{3}-i}{3+1} = \frac{\sqrt{3}-i}{4} = \frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{1}{4}i$$



Модулем комплексного числа z называется расстояние от начала координат до соответствующей точки комплексной плоскости. Попросту говоря, **модуль – это длина** радиус-вектора, который на чертеже обозначен красным цветом.

Модуль комплексного числа z стандартно обозначают: $|z|$ или r

По теореме Пифагора легко вывести формулу для нахождения модуля комплексного числа: $|z| = \sqrt{a^2+b^2}$.

Содержание практической работы

Задание: 1. Вычислить сумму комплексных чисел: z_1+z_2-? $z_1=2+3i$ $z_2=4-6i$; $z_1=15$ $z_2=-3i$; $z_1=2-4i$ $z_2=2$.

2.Вычислить разность этих же чисел.

3.Вычислить произведение этих же чисел.

4. Вычислить z_1/z_2 и z_2/z_1 этих же чисел.

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 22
«Комплексные числа и действия над ними»

Цель работы:

1. закрепить умения по выполнению действий с комплексными числами
2. способствовать развитию аналитического мышления, внимания обучающихся;
3. воспитать интерес к предмету, трудолюбие, ответственность, самостоятельность и творческую активность.

Краткие теоретические и учебно-методические материалы по теме практической работы

Действия с комплексными числами

1. Сложение. Так как комплексное число можно интерпретировать как точку на комплексной плоскости, то если

$z_1=a_1+i\cdot b_1, z_2=a_2+i\cdot b_2$, имеем: $z_1+z_2=(a_1+a_2)+i\cdot(b_1+b_2)$

Например:

(3+2i) + (-4+7i) = (3-4)+(2+7)I = -1+9i.

2. Умножение.

а). Если числа заданы в алгебраической форме, имеем:

$$z_1\cdot z_2=(a_1+i\cdot b_1)\cdot(a_2+i\cdot b_2)=a_1a_2+i\cdot a_1b_2+i\cdot a_2b_1+i^2\cdot b_1b_2\cdot$$

Учитывая, что $i^2=-1$, имеем:

$$z_1\cdot z_2=a_1a_2-b_1b_2+i\cdot(a_1b_2+a_2b_1)\cdot$$

в). Если числа заданы в комплексной форме $z_1=|r_1|(\cos\varphi_1+i\cdot\sin\varphi_1)$ и $z_1=|r_1|(\cos\varphi_2+i\cdot\sin\varphi_2)$, то $z_1z_2=|r_1|\cdot|r_2|\cdot(\cos(\varphi_1+\varphi_2)+i\cdot\sin(\varphi_1+\varphi_2))$.

При доказательстве мы используем формулы синуса суммы и косинуса суммы двух углов (проделайте самостоятельно).

3. Деление.

а). Если числа заданы в алгебраической форме, то числитель и знаменатель домножим на сопряженное к знаменателю число, чтобы в знаменателе получилось действительное число. Имеем:

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{a_1+i\cdot b_1}{a_2+i\cdot b_2}=\frac{(a_1+ib_1)\cdot(a_2-ib_2)}{(a_2+ib_2)(a_2-ib_2)}=\frac{a_1a_2-b_1b_2+i\cdot(a_2b_1-a_1b_2)}{a_2^2+b_2^2}$$

(проделайте вычисления самостоятельно, учитывая равенство $i^2=-1$).

в). Если числа заданы в комплексной форме $z_1=|r_1|(\cos\varphi_1+i\cdot\sin\varphi_1)$ и $z_1=|r_1|(\cos\varphi_2+i\cdot\sin\varphi_2)$, то

$$\frac{z_1}{z_2}=\left|\frac{r_1}{r_2}\right|\cdot(\cos(\varphi_1-\varphi_2)+i\cdot\sin(\varphi_1-\varphi_2)),\text{ если } z_2\neq o.$$

4. Возведение в степень.

Формулу произведения двух комплексных чисел можно обобщить на n сомножителей. Отсюда, как частный случай, получается формула:

$$z^n=(r\cdot(\cos\varphi+i\cdot\sin\varphi))^n=r^n\cdot(\cos(n\varphi)+i\cdot\sin(n\varphi))$$

5. Извлечение корня n-ой степени.

Имеет место формула Муавра:

$$\sqrt[n]{z}=\sqrt[n]{z}\cdot(\cos\frac{\varphi+2\pi k}{n}+i\cdot\sin\frac{\varphi+2\pi k}{n}),\text{ где } k\in Z.$$

Таким образом, комплексное число z имеет бесконечно много корней n-ой степени, причем различных корней – ровно n штук. Все корни расположены на окружности радиуса $\sqrt[n]{r}$ в вершинах правильного n-угольника.

Вопросы для закрепления теоретического материала к практическому занятию

1. Дайте определение комплексного числа.
2. Что называется мнимой единицей?
3. В каких формах можно записать комплексное число?
4. Какие действия можно совершать над комплексными числами?
5. Объясните понятие сопряженного комплексного числа.

Задания для практического занятия:

1. Записать комплексные числа в алгебраической и тригонометрической форме, отметить их на комплексной плоскости.

а). $z=\cos\frac{\pi}{6}-i\cdot\sin\frac{\pi}{6}$, б). $z=-\cos\frac{\pi}{4}-i\cdot\sin\frac{\pi}{4}$, в). $\frac{(1+i)^{16}}{(1-i)^6}$

2. Выполнить действия. Ответ записать в алгебраической форме.

а). $\frac{(i-\sqrt{3})(\cos\frac{\pi}{12}+i\sin\frac{\pi}{12})}{1-i}$ б). $\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{i}{2}\right)^{13}$ в). $\frac{(\cos\frac{\pi}{3}-i\sin\frac{\pi}{3})(1+\sqrt{3})^7}{i^5}$

3. Вычислить все различные корни их комплексного числа и нанести их на комплексную плоскость.

а). $\sqrt[6]{32(\cos\pi + i\sin\pi)}$ б). $\sqrt[4]{i}$ в) $\sqrt[3]{1}$ г) $\sqrt[4]{-1}$

4. Решить уравнения:

а) $z^2-6z+10=0$ б) $z^2+10+29=0$ в) $z^2+|z|=0$ г) $|z|-iz=1-2i$

5. При каких значениях параметра **а** уравнение имеет комплексные корни?

а). $x^2+10x+a=0$ б). $4x^2+4(a-2)x+1=0$

Найти эти корни при каком-либо значении параметра.

6. Какое множество точек на комплексной плоскости задается условием?

а) $(\operatorname{Re} z)^2+(\operatorname{Im} z)^2=2$ б). $\operatorname{Im}(z-\bar{z})=(\operatorname{Re} z)$ в). $z\cdot\bar{z}-4\operatorname{Im} z=0$

г) $\operatorname{Re}(z^2)=0$ д). $2\operatorname{Re}(iz)>|z|^2$ е) $\begin{cases} \dfrac{\pi}{6} \le \arg z \le \dfrac{\pi}{2} \\ \operatorname{Im} z \le 3 \end{cases}$

Изобразить найденное множество на комплексной плоскости.

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 23
Тема: Элементы теории вероятностей.

Цель: сформировать умение решать задачи на нахождение вероятностей

Теоретические сведения к практической работе

Классическое определение вероятности

Раздел математики, изучающий закономерности случайных событий, называется теорией вероятностей.

Вероятностью Р(А) события А в испытании с равновозможными элементарными исходами называют отношение числа исходов m, благоприятствующих событию А, к числу n всех исходов испытания.

$$P(A)=\frac{m}{n}$$

Пример 1: В партии из 30 миксеров 2 бракованных. Найти вероятность купить исправный миксер.

$$n=30, m=30-2=28$$
$$P=\frac{28}{30}=\frac{14}{15}$$

Аксиомы вероятностей:

Каждому событию А поставлено в соответствие неотрицательное число Р(А), называемое вероятностью события А.

Если события A_1, A_2 … попарно несовместны, то $P(A_1+A_2+\ldots)=P(A_1)+P(A_2)+\ldots$

Свойства вероятностей:

Вероятность невозможного события равна нулю Р=0.

Вероятность достоверного события равна единице P=1.

Вероятность произвольного случайного события A заключается между 0 и 1: 0<P(A)<1.

Пример 2: Из 34 экзаменационных билетов, пронумерованных с помощью чисел от 1 до 34, наудачу извлекается один. Какова вероятность, что номер вытянутого билета есть число, кратное трем.

Решение: Найдем количество чисел от 1 до 34, кратных трем. Это числа 3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, 27, 30, 33. Всего таких чисел 11. Таким образом, искомая вероятность $p = \frac{11}{34}$

События A и B называются совместными, если они могут одновременно произойти, и несовместными, если при осуществлении одного события не может произойти другое.

События A и B называются независимыми, если вероятность наступления одного события не зависит от того, произошло другое событие или нет.

Вероятность суммы двух совместных событий равна сумме вероятностей слагаемых без вероятности произведения: P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB)

Пример 3: Вероятность поражения одной мишени – 0,7, а другой – 0,8. Какова вероятность, что будет поражена хотя бы одна мишень, если по ним стреляют независимо друг от друга.

Решение: Т.к. события совместны, то $p = 0,7 + 0,8 - 0,7 \cdot 0,8 = 1,5 - 0,56 = 0,94$

Вероятность суммы двух несовместных событий равна сумме вероятностей слагаемых: P(A+B)=P(A)+P(B).

P(A)+P($\overline{A}$)=1

Условная вероятность – вероятность одного события, при условии, что другое событие уже произошло.

Вероятность произведения событий A и B равна произведению вероятности одного из них на условную вероятность другого: P(AB)=P(A)·P(A/B) или P(BA)=P(A)·P(B/A)

Вероятность произведения двух независимых событий A и B равна произведению вероятностей сомножителей: P(AB)=P(A)·P(B).

Пример 4: В двух коробках лежат ручки разного цвета. В первой коробке – 4 красных и 6 черных, во второй – 3 красных, 5 синих и 2 черных. Из обеих коробок вынимают по одной ручки. Найти вероятность, что обе ручки красные.

Решение: Найдем вероятности вытащить красную ручку из каждой коробки

$n_1 = 10$

$m_1 = 4$

$p_1 = \frac{4}{10}$

$n_2 = 10$

$m_2 = 3$

$p_2 = \frac{3}{10}$

Тогда вероятность того, что обе ручки красные: $p = p_1 \cdot p_2 = \frac{4}{10} \cdot \frac{3}{10} = \frac{12}{100} = 0{,}12$

Содержание практической работы

Задание: Используя классическое определение вероятности события, решить следующие задачи:

1. В коробке 4 красных, 5 зеленых, 8 желтых, 7 белых и 1 черный шар. Найти вероятность вытащить: красный шар; синий шар; белый шар; цветной шар; или зеленый или белый шар; не красный шар; шар одного из цветов светофора.

2. В семье – двое детей. Какова вероятность, что старший ребенок – девочка, если известно, что в семье есть дети обоего пола?

3. Мастер, имея 10 деталей, из которых 4 – нестандартных, проверяет детали одну за другой, пока ему не попадется стандартная. Какова вероятность, что он проверит ровно две детали?

4. В одном ящике 3 белых и 7 черных шаров, в другом ящике – 6 белых и 8 черных шара. Найти вероятность того, что хотя бы из одного ящика будет вынут белый шар, если из каждого ящика вынуто по одному шару.

5. Издательство отправило газеты в три почтовых отделения. Вероятность своевременной доставки газет в первое отделение равна 0,9, во второе - 0,7, в третье - 0,85. Найти вероятность следующих событий:

а) только одно отделение получит газеты вовремя;

б) хотя бы одно отделение получит газеты с опозданием.

6. В первой урне находятся 12 белых и 4 черных шаров, а во второй 5 белых и 10 черных шаров. Из каждой урны вынули по шару. Какова вероятность того, что оба шара окажутся черными? Какова вероятность, что оба шара окажутся белыми?

7. В партии из 25 деталей находятся 8 бракованных. Вынимают из партии наудачу две детали. Определить, какова вероятность того, что обе детали окажутся бракованными.

8. Подброшены две игральные кости. Найти вероятность события А того, что выпадет хотя бы одна шестерка.

9. Найти вероятность, что при бросании игральной кости выпадет число, большее 4.

10. Найти вероятность, что при бросании игральной кости выпадет число, не меньшее 2 и не большее 5.

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 24
Тема: Вычисление полной вероятности.

Цель: сформировать умение решать задачи на нахождение полной вероятности.

Теоретические сведения к практической работе

Полная вероятность. Формула Байеса

Если событие А может произойти только при выполнении одного из событий H_1, H_2, …, которые образуют полную группу несовместных событий, то вероятность события А вычисляется по формуле

$$p(\mathrm{A}) = \mathrm{p}(\mathrm{H}_1)\cdot \mathrm{p}(\mathrm{A}/\mathrm{H}_1) + \mathrm{p}(\mathrm{H}_2)\cdot \mathrm{p}(\mathrm{A}/\mathrm{H}_2) + \mathrm{p}(\mathrm{H}_3)\cdot \mathrm{p}(\mathrm{A}/\mathrm{H}_3) + \ldots$$

Эта формула называется формулой полной вероятности.

Если выполняются все условия, имеющие место для формулы полной вероятности, и $p(\mathrm{A}) \neq 0$, то выполняется равенство, называемое формулой Байеса:

$$p(\mathrm{H}_i/\mathrm{A}) = \frac{\mathrm{p}(\mathrm{H}_i)\cdot \mathrm{p}(\mathrm{A}/\mathrm{H}_i)}{p(\mathrm{A})}$$

Пример 1: В первой партии 20 ламп, во второй – 30 ламп и в третьей – 50 ламп. Вероятности того, что проработает заданное время, равна для первой партии 0,7, для второй – 0,8 и для третьей партии – 0,9. Какова вероятность того, что наудачу взятая лампа проработает заданное время? Найти вероятность, что эта лампа принадлежит первой партии?

Решение: Пусть событие А – наудачу взятая лампа проработает заданное время.

Тогда, пусть H_1 – лампа из первой партии, H_2 – лампа из второй партии и H_3 – лампа из третьей партии. Тогда событие A/H_1 – лампа из первой партии проработает заданное время, A/H_2 – лампа из второй партии проработает заданное время и A/H_3 – лампа из третьей партии проработает заданное время. Найдем вероятности

$$n = 20 + 30 + 50 = 100$$

$$p(\mathrm{H}_1) = \frac{20}{100} = 0,2$$

$$p(\mathrm{H}_2) = \frac{30}{100} = 0,3$$

$$p(\mathrm{H}_3) = \frac{50}{100} = 0,5$$

$$p(\mathrm{A}/\mathrm{H}_1) = 0,7$$

$$p(\mathrm{A}/\mathrm{H}_2) = 0,8$$

$$p(\mathrm{A}/\mathrm{H}_3) = 0,9$$

$$p(\mathrm{A}) = \mathrm{p}(\mathrm{H}_1)\cdot \mathrm{p}(\mathrm{A}/\mathrm{H}_1) + \mathrm{p}(\mathrm{H}_2)\cdot \mathrm{p}(\mathrm{A}/\mathrm{H}_2) + \mathrm{p}(\mathrm{H}_3)\cdot \mathrm{p}(\mathrm{A}/\mathrm{H}_3) =$$
$$= 0,2\cdot 0,7 + 0,3\cdot 0,8 + 0,5\cdot 0,9 = 0,14 + 0,24 + 0,45 = 0,83$$

Теперь, используя формулу Байеса найдем вероятность того, что эта лампа принадлежит первой партии

$$p(\mathrm{H}_1/\mathrm{A}) = \frac{\mathrm{p}(\mathrm{H}_1)\cdot \mathrm{p}(\mathrm{A}/\mathrm{H}_1)}{p(\mathrm{A})} = \frac{0,2\cdot 0,7}{0,83} \approx 0,169$$

Пример 2: Имеются 3 одинаковые урны. В первой урне находятся 5 белых и 7 черных шаров, во второй – только белые и в третьей – только черные. Наугад выбираются урна и из нее извлекается один шар. Какова вероятность, что этот шар белый?

Решение: Пусть событие А – извлекается белый шар.

Тогда, пусть H_1 – шар из первой урны, H_2 – шар из второй урны и H_3 – шар из третьей урны. Тогда событие A/H_1 – белый шар из первой урны, A/H_2 – белый шар из второй урны и A/H_3 – белый шар из третьей урны. Найдем вероятности

$$p(\mathrm{H}_1) = \frac{1}{3}$$

$$p(\mathrm{H}_2) = \frac{1}{3}$$

$$p(\mathrm{H}_3) = \frac{1}{3}$$

$$p(\mathrm{A}/\mathrm{H}_1) = \frac{5}{12}$$

$$p(\mathrm{A}/\mathrm{H}_2) = 1$$

$$p(\mathrm{A}/\mathrm{H}_3) = 0$$

$$p(\mathrm{A}) = \mathrm{p}(\mathrm{H}_1)\cdot \mathrm{p}(\mathrm{A}/\mathrm{H}_1) + \mathrm{p}(\mathrm{H}_2)\cdot \mathrm{p}(\mathrm{A}/\mathrm{H}_2) + \mathrm{p}(\mathrm{H}_3)\cdot \mathrm{p}(\mathrm{A}/\mathrm{H}_3) =$$

$$= \frac{1}{3}\cdot\frac{5}{12} + \frac{1}{3}\cdot 1 + \frac{1}{3}\cdot 0 = \frac{5}{36} + \frac{1}{3} = \frac{17}{36}$$

Содержание практической работы

Задание: Используя формулы полной вероятности и Байеса, решить следующие задачи:

1. Имеются 2 одинаковые урны. В первой урне находятся 7 белых и 3 черных шаров, во второй – 6 белых и 4 черных. Наугад выбираются урна и из нее извлекается один шар. Выбранный шар оказался черным. Какова вероятность, что этот шар из 2 урны?

2. Детали, изготовляемые цехом завода, попадают для проверки их на стандартность к одному из двух контролеров. Вероятность того, что деталь попадет к первому контролеру =0,5, ко второму =0,6. Вероятность того, что годная деталь будет признана стандартной первым контролером =0,94, а вторым =0,92. Годная деталь при проверке была признана стандартной. Найти вероятность того, что эту деталь проверил первый контролер.

3. Имеется два набора деталей. Вероятность того, что деталь первого набора стандартная равна 0,9, а второго – 0,8. Найти вероятность того, что взятая наудачу деталь – стандартная.

4. Имеются 3 одинаковые урны. В первой урне находятся 6 синих и 4 черных шаров, во второй – только синие и в третьей – только черные. Наугад выбираются урна и из нее извлекается один шар. Какова вероятность, что этот шар синий?

5. Имеются 2 одинаковые урны. В первой урне находятся 7 белых и 3 черных шаров, во второй – 6 белых и 4 черных. Наугад выбираются урна и из нее извлекается один шар. Выбранный шар оказался черным. Какова вероятность, что этот шар из 1 урны?

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 25
«Решение практических задач на определение вероятности события»

Цель работы: сформировать умения по определению вероятности события

Теоретические сведения:

Понятие о случайном событии.

Если событие при заданных условиях может произойти или не произойти, то оно называется ***случайным***. В том случае, когда событие должно непременно произойти, его называют ***достоверным***, а в том случае, когда оно заведомо не может произойти,- ***невозможным***.

События называются ***несовместными***, если каждый раз возможно появление только одного из них.

События называются ***совместными***, если в данных условиях появление одного из этих событий не исключает появление другого при том же испытании.

События называются ***противоположными***, если в условиях испытания они, являясь единственными его исходами, несовместны.

События принято обозначать заглавными буквами латинского алфавита: *А, В, С, Д, …* .

Классическое определение вероятности

Число, являющееся выражением меры объективной возможности наступления события, называется ***вероятностью*** этого события и обозначается символом *Р(А).*

Определение. Вероятностью события A называется отношение числа исходов m, благоприятствующих наступлению данного события A, к числу n всех исходов т.е. $P(A)=\dfrac{m}{n}$.

Теорема сложения вероятностей

Вероятность наступления двух (или нескольких) несовместных событий равна сумме вероятностей этих событий: $P(A+B)=P(A)+P(B)$ или $P(A_1+A_2+...+A_n)=P(A_1)+P(A_2)+...+P(A_n)$

Теорема умножения вероятностей

Вероятность одновременного появления двух независимых событий равна произведению вероятностей этих событий: $P(AB)=P(A)\cdot P(B)$.

Вероятность появления нескольких событий, независимых в совокупности, вычисляется по формуле

$P(A_1A_2...A_n)=P(A_1)\cdot P(A_2)\cdot ...\cdot P(A_n)$.

Понятие о случайном событии.

Если событие при заданных условиях может произойти или не произойти, то оно называется ***случайным***. В том случае, когда событие должно непременно произойти, его называют ***достоверным***, а в том случае, когда оно заведомо не может произойти,- ***невозможным***.

События называются ***несовместными***, если каждый раз возможно появление только одного из них.

События называются ***совместными***, если в данных условиях появление одного из этих событий не исключает появление другого при том же испытании.

События называются ***противоположными***, если в условиях испытания они, являясь единственными его исходами, несовместны.

События принято обозначать заглавными буквами латинского алфавита: *А, В, С, Д, …* .

Классическое определение вероятности

Число, являющееся выражением меры объективной возможности наступления события, называется ***вероятностью*** этого события и обозначается символом *Р(А).*

Определение. Вероятностью события A называется отношение числа исходов m, благоприятствующих наступлению данного события A, к числу n всех исходов т.е. $P(A)=\dfrac{m}{n}$.

Теорема сложения вероятностей

Вероятность наступления двух (или нескольких) несовместных событий равна сумме вероятностей этих событий: $P(A+B)=P(A)+P(B)$ или $P(A_1+A_2+...+A_n)=P(A_1)+P(A_2)+...+P(A_n)$

Теорема умножения вероятностей

Вероятность одновременного появления двух независимых событий равна произведению вероятностей этих событий: $P(AB) = P(A) \cdot P(B)$.

Вероятность появления нескольких событий, независимых в совокупности, вычисляется по формуле

$P(A_1 A_2 ... A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot ... \cdot P(A_n)$.

Задача 1. В лотерее из 1000 билетов имеются 200 выигрышных. Вынимают наугад один билет. Чему равна вероятность того, что этот билет выигрышный?

Решение. Общее число различных исходов есть n=1000. Число исходов, благоприятствующих получению выигрыша, составляет m=200. Согласно формуле, получим

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{200}{1000} = \frac{1}{5} = 0{,}2.$$

Задача 2. На заочное отделение техникума поступают контрольные работы по математике из городов *A, B* и *C*. Вероятность поступления контрольной работы из города *A* равна 0,6, из города *B* - 0,1. Найти вероятность того, что очередная контрольная работа поступит из города *C*.

Решение. События «контрольная работа поступила из города *A*», «контрольная работа поступила из города B» и «контрольная работа поступила из города C» образуют полную систему, поэтому сумма их вероятностей равна единице:

$0{,}6 + 0{,}1 + p = 1$, т.е. $p = 1 - 0{,}7 = 0{,}3$.

Задача 3. В первой урне находится 6 черных и 4 белых шара, во второй- 5 черных и 7 белых шаров. Из каждой урны извлекают по одному шару. Какова вероятность того, что оба шара окажутся белыми.

Решение. Пусть A_1 - из первой урны извлечен белый шар; A_2- из второй урны извлечен белый шар. Очевидно, что события A_1 и A_2 независимы.

Так как $P(A_1) = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$**,** $P(A_2) = \frac{7}{12}$**,** то по формуле $P(A_1 A_2) = P(A_1) \cdot P(A_2)$ находим

$$P(A_1 A_2) = \frac{2}{5} \cdot \frac{7}{12} = \frac{14}{60} = \frac{7}{30}.$$

Задания практической части:

При стрельбе по мишени вероятность сделать отличный выстрел равна 0,3, а вероятность выстрела на оценку «хорошо» равна 0,4. Какова вероятность получить за сделанный выстрел оценку не ниже «хорошо»?

Вероятность того, что лицо умрет на 71-м году жизни, равна 0,04. Какова вероятность того, что человек не умрет на 71-м году?|

Бросается один раз игральная кость. Определить вероятность выпадения 3 или 5 очков.

В урне 30 шаров: 15 белых, 10 красных и 5 синих. Какова вероятность вынуть цветной шар, если вынимается один шар?

В денежно-вещевой лотерее на серию в 1000 билетов приходится 120 денежных и 80 вещевых выигрышей. Какова вероятность какого-либо выигрыша на один лотерейный билет?

В урне 3 белых и 3 черных шара. Из урны дважды вынимают по одному шару, не возвращая их обратно. Найти вероятность появления белого шара при втором испытании, если при первом испытании был извлечен черный шар.

В колоде 36 карт. Наудачу вынимаются из колоды 2 карты. Определить вероятность того, что вторым вынут туз, если первым тоже вынут туз.

В урне 2 белых и 3 черных шара. Из урны вынимают подряд два шара. Найти вероятность того, что оба шара белые.

Какова вероятность того, что из колоды в 36 карт будут вынуты подряд два туза?

Два стрелка стреляют по цели. Вероятность поражения цели первым стрелком при одном выстреле равна 0,8, вторым стрелком — 0,7. Найти вероятность поражения цели двумя пулями в одном залпе.

Найти вероятность одновременного появления герба при одном бросании двух монет.

Имеется два ящика, содержащих по 10 деталей. В первом ящике 8, во втором 7 стандартных деталей. Из каждого ящика наудачу вынимают по одной детали. Найти вероятность того, что обе вынутые детали окажутся стандартными.

В семье двое детей. Принимая события, состоящие в рождении мальчика и девочки равновероятными, найти вероятность того, что в семье: а) все девочки; б) дети одного пола.]

Пусть всхожесть семян оценивается вероятностью 0,7. Какова вероятность того, что из двух посеянных семян взойдет какое-либо одно?

Из колоды в 36 карт наудачу вынимается одна. Какова вероятность того, что будет вынута пика или туз?

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 26

Тема: Формула Бернулли.

Цель: сформировать умение решать задачи с помощью формулы Бернулли.

Теоретические сведения к практической работе

Формула Бернулли

1) Вероятность того, что событие А наступит ровно m раз при проведении n независимых испытаний, каждый из которых имеет ровно два исхода вычисляется по формуле Бернулли $P_n(\mathrm{m}) = \mathrm{C}_n^m\, p^m (1-p)^{n-m}, m = 0,1,2,...,n$

Пример 1: Вероятность выигрыша по одному лотерейному билету равна 0,2. Найти вероятность, что из 6 приобретенных билетов 2 окажутся выигрышными.

Решение:

$p = 0,2$

$n = 6$

$m = 2$

$$P_n(\mathrm{m}) = \mathrm{C}_n^m\, p^m (1-p)^{n-m} = \mathrm{C}_6^2\, 0,2^2 (1-0,2)^{6-2} = \frac{6!}{4!\cdot 2!}\cdot 0,04\cdot 0,8^4 \approx 0,246$$

2) Вероятность наступления события А хотя бы один раз при проведении n независимых испытаний, удовлетворяющих схеме Бернулли, равна $P_n(\mathrm{m}\geq 1) = 1-\mathrm{q}^n, q = 1-p$

Пример 2: Прибор состоит из шести элементов, работающих независимо друг от друга. Вероятность безотказной работы каждого элемента за определенное время равна 0,6. Для безотказной работы прибора необходимо, чтобы хотя бы один элемент был исправен. Какова вероятность, что за данное время прибор будет работать безотказно?

Решение:

$p = 0,6 \Rightarrow \quad q = 0,4$

$n = 6$

$m \geq 1$

$P_6(\mathrm{m}\geq 1) = 1-0,4^6 \approx 0,9959$

3) Вероятность наступления события А хотя бы один раз при проведении n независимых испытаний, удовлетворяющих схеме Бернулли, наступит не менее m_1 и не более m_2 раз вычисляется по формуле $P_n(\mathrm{m}_1 \leq \mathrm{m} \leq \mathrm{m}_2) = \sum_{m_1}^{m_2} P_n(\mathrm{m})$

Пример 3: Найти вероятность осуществления от двух до четырех разговоров по телефону при наблюдении пяти независимых вызовов, если вероятность того, что разговор состоится, равна 0,7.

Решение:

$p = 0,7$

$n = 5$

$2 \leq m \leq 4$

$$P_5(2\leq m\leq 4) = \mathrm{C}_5^2\cdot 0,7^2(1-0,7)^{5-2} + \mathrm{C}_5^3\cdot 0,7^3(1-0,7)^{5-3} + \mathrm{C}_5^4\cdot 0,7^4(1-0,7)^{5-4} \approx 0,801$$

4) Наивероятнейшее значение m_0 числа наступления события А при проведении n повторных независимых испытаний, удовлетворяющих схеме Бернулли, вычисляется по формуле $\begin{gathered} np-q \leq m_0 \leq np+p \\ np-(1-p) \leq m_0 \leq np+p \end{gathered}$

Пример 4: Магазин получил 50 деталей. Вероятность наличия нестандартной детали в партии равна 0,05. Найти наиболее вероятное число нестандартных деталей в партии.

Решение:

$p = 0,05$

$n = 50$

$m_0 - ?$

$q = 1 - p = 1 - 0,05 = 0,95$

$50 \cdot 0,05 - 0,95 \le m_0 \le 50 \cdot 0,05 + 0,05$

$1,55 \le m_0 \le 2,55$

$m_0 = 2$

Содержание практической работы

Задание: Используя формулу Бернулли, решить следующие задачи:

1. Вероятность того, что расход электроэнергии на продолжении одних суток не превысит установленной нормы равна 0,75. Найти вероятность того, что в ближайшие 6 суток расход электроэнергии в течение 4 суток не превысит нормы.

2. Найти вероятность осуществления от одного до трех разговоров по телефону при наблюдении шести независимых вызовов, если вероятность того, что разговор состоится, равна 0,6.

3. Прибор состоит из пяти элементов, включенных в цепь параллельно и работающих независимо друг от друга. Вероятность безотказной работы каждого элемента за время Т равна 0,5. Для безаварийной работы прибора достаточно, чтобы хотя бы один элемент был исправен. Какова вероятность того, что за время Т прибор будет работать безотказно?

4. Вероятность выигрыша по одному лотерейному билету =0,3. Какова вероятность того, что из семи приобретенных билетов три билета окажутся выигрышными?

5. Магазин получил 40 деталей. Вероятность наличия нестандартной детали в партии равна 0,04. Найти наиболее вероятное число нестандартных деталей в этой партии.

6. Вероятность изготовления на автоматическом станке стандартной детали равна 0,8. Найдя вероятности возможного числа появления бракованных деталей среди 5 отобранных, найти наивероятнейшее число появления бракованных деталей из 5 отобранных, указав его вероятность.

7. Сколько раз необходимо подбросить игральную кость, чтобы наивероятнейшее выпадение тройки было равно 10?

8. Для данного участника игры вероятность набросить кольцо на колышек =0,3. Какова вероятность того, что при шести бросках 3 кольца окажутся на колышке?

9. На самолете имеются 4 одинаковых двигателя. Вероятность нормальной работы каждого двигателя в полете равна p. Найти вероятность того, что в полете могут возникнуть неполадки в одном двигателе.

10. Вероятность отказа каждого прибора при испытании равна 0,4. Что вероятнее ожидать: отказ двух приборов при испытании четырех или отказ трех приборов при испытании шести, если приборы испытываются независимо друг от друга?

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 27

«Решение задач с реальными дискретными случайными величинами»

Цель работы:

1. закрепить умения по решению задач с реальными дискретными случайными величинами
2. способствовать развитию аналитического мышления, внимания обучающихся;
3. воспитать интерес к предмету, трудолюбие, ответственность, самостоятельность и творческую активность.

Краткие теоретические и учебно-методические материалы по теме практической работы

1. **Случайной величиной** называется числовая переменная величина, принимающая в зависимости от случая те или иные значения с определёнными вероятностями.
2. **Математическим ожиданием** дискретной случайной величины называется число, равное сумме произведений всех значений случайной величины на вероятности этих значений $M(x) = \sum x_i p_i = x_1 p_1 + x_2 p_2 + ... + x_n p_n$ **(1)**
3. **Дисперсией** дискретной случайной величины называется математическое ожидание квадрата отклонения случайной величины от её математического ожидания: $D(x) = M(x - M(x))^2$ **(2)** или или $D(x) = M(x^2) - (M(x))^2$ **(3)**
4. Дисперсия случайной величины характеризует степень разброса значений случайной величины относительно её математического ожидания.

Средним квадратичным отклонением дискретной случайной величины называется квадратный корень из дисперсии: $\delta(x) = \sqrt{D(x)}$ **(4)**

<u>Пример1.</u> Найти математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратичное отклонение числа очков, выпадающих при бросании игральной кости.

<u>Решение.</u> Случайная величина X числа очков принимает значения1, 2, 3, 4,5, 6. Составим закон ее распределения:

Xi	1	2	3	4	5	6
Pi	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6

Тогда математическое ожидание вычисляется по формуле (1):

$$M(X) = 1 \cdot \frac{1}{6} + 2 \cdot \frac{1}{6} + 3 \cdot \frac{1}{6} + 4 \cdot \frac{1}{6} + 5 \cdot \frac{1}{6} + 6 \cdot \frac{1}{6} = 3,5.$$

Закон распределения случайной величины x^2

Xi	1	4	9	16	25	36

Pi	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6

Тогда $M(x^2) = 1/6(1+4+9+16+25+36) = 1/6\cdot 91 = 91/6$

По формуле (3) найдем дисперсию: $D(x) = M(x^2) - (M(x))^2 = 91/6 - (7/2)^2 = 35/12 = 2{,}92$

По формуле (4) вычислим среднее квадратичное отклонение

$\delta(x) = \sqrt{D(x)} = \sqrt{2{,}92} \approx 1{,}71$

Ответ: $M(x)=3{,}5$; $D(x)=2{,}92$; $\delta(x) = 1{,}71$.

Задания практической части:

1. Составить закон распределения и найти математическое ожидание суммы числа очков, которые могут выпасть при одном бросании двух игральных костей
2. Найти математическое ожидание произведения числа очков, которые могут выпасть при одном бросании двух игральных костей
3. Для заданного закона распределения найти $M(x)$, $D(x)$, $\delta(x)$.

x_i	0	3	5	8
p_i	0.3	0.25	0.3	0.15

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 28

Тема: Решение задач с реальными дискретными случайными величинами.

Цель: сформировать умение решать задачи на нахождение математического ожидания, дисперсии и среднего квадратичного отклонения.

Теоретические сведения к практической работе

Дискретная случайная величина и ее числовые характеристики

Случайная величина X – это числовая функция $X = f(\omega_i)$, определенная на пространстве элементарных событий. Случайные величины, имеющие счетные множества возможных значений, называются дискретными. Дискретная случайная величина определена, если известны все ее значения и соответствующие им вероятности. Соотношение между возможными значениями случайной величины и соответствующими им вероятностями называют распределением вероятностей случайной величины. Для дискретной случайной величины это соответствие может быть записано в виде таблицы: $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$

x_i	x_1	x_2	…	x_n

p_i	p_1	p_2	…	p_n

Математическим ожиданием (средним значением) дискретной случайной величины X называют сумму произведений всех ее возможных значений на соответствующие им вероятности $M(\mathrm{X})=\sum_{i=1}^{\infty} x_i p_i$

Дисперсией дискретной случайной величины X называют математическое ожидание квадрата отклонения случайной величины от ее математического ожидания $D(\mathrm{X})=M(\mathrm{X}-M(\mathrm{X}))^2$. Дисперсия дискретной случайной величины вычисляется по формулам:

$$D(\mathrm{X})=\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-m\right)^2 p_i$$

$$D(\mathrm{X})=M(\mathrm{X}^2)-(M(\mathrm{X}))^2$$

Средним квадратичным отклонением дискретной случайной величины называют корень квадратный из дисперсии $\sigma(\mathrm{X})=\sqrt{D(\mathrm{X})}$.

Если случайная величина X имеет биномиальное распределение вероятностей, то

$$M(\mathrm{X})=\mathrm{np} \quad D(\mathrm{X})=\mathrm{npq}$$

Пример 1: Случайная величина X задана таблицей распределения вероятностей. Найти M(X), D(X), σ(X).

x_i	2	5	8	9
p_i	0 ,1	0 ,4	0 ,3	0 ,2

Решение:

$$M(\mathrm{X})=2\cdot 0,1+5\cdot 0,4+8\cdot 0,3+9\cdot 0,2=0,2+2+2,4+1,8=6,4$$

$$M(\mathrm{X}^2)=4\cdot 0,1+25\cdot 0,4+64\cdot 0,3+81\cdot 0,2=45,8$$

$$D(\mathrm{X})=45,8-6,4^2=4,84$$

$$\sigma(X)=\sqrt{D(\mathrm{X})}=\sqrt{4,84}=2,2$$

Пример 2: Найти математическое ожидание и дисперсию числа лотерейных билетов, на которые выпадут выигрыши, если приобретено 100 билетов, а вероятность выигрыша на каждый билет равна 0,05.

Решение:

$$M(\mathrm{X})=100\cdot 0,05=5$$

$$D(\mathrm{X})=100\cdot 0,05\cdot 0,95=4,75$$

$$\sigma(X)=\sqrt{D(\mathrm{X})}=\sqrt{4,75}=2,18$$

Содержание практической работы

Задание: Найти числовые характеристики дискретных случайных величин:

1. Найти математическое ожидание случайной величины X, зная закон ее распределения:

x_i	3	5	2
p_i	0,1	0,6	0,3

2. Вероятность попадания в цель при стрельбе из орудия 0,6. Найти математическое ожидание общего числа попаданий, если будет произведено 10 выстрелов.

3. Найти дисперсию случайной величины X, которая задана следующим законом распределения:

x_i	1	2	5
p_i	0,3	0,5	0,2

4.Найти дисперсию случайной величины X, которая задана следующим законом распределения:

x_i	2	3	5
p_i	0,1	0,6	0,3

ТАРАСЕНКО Ирина Владимировна

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ПРИКЛАДНЫХ ПРОФЕССИОНАЛЬНЫХ ЗАДАЧ

Практикум для обучающихся 2 курса специальности 35.02.16
Эксплуатация и ремонт сельскохозяйственной техники и оборудования

Корректор Чагова О.Х.
Редактор Чагова О.Х.

Сдано в набор 29.05.2025 г.
Формат 60х84/16
Бумага офсетная.
Печать офсетная.
Усл. печ. л.5.11
Заказ № 5127
Тираж 100 экз.

Оригинал-макет подготовлен

в Библиотечно-издательском центре СКГА
369000, г. Черкесск, ул. Ставропольская, 36