МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное бюджетное

образовательное учреждение высшего образования

**СЕВЕРО-КАВКАЗСКАЯ ГОСУДАРСТВЕННАЯ АКАДЕМИЯ**

А.М. Кочкаров

Д.А.-З. Хубиева

**МЕТОДЫ ОПТИМИЗАЦИИ**

Учебно-методическое пособие

для обучающихся 3 курса направления подготовки

09.03.04 Программная инженерия

Черкесск

2019

УДК 22.1

ББК 51

К75

Рассмотрено на заседании кафедры «Математика»

Протокол № 2 от «21» 09 2018 г.

Рекомендовано к изданию редакционно-издательским советом СевКавГГТА

Протокол № 15 от «30» 10 2018 г.

**Рецензенты:**

**Токова А.А**.– к.ф.-м.н., доцент

**Коркмазова З.О.** – к.ф.-м.н., доцент

К75 **Кочкаров, А.М**. Методы оптимизации: учебно-методическое пособие для обучающихся 3 курса направления подготовки 09.03.04 Программная инженерия / А.М. Кочкаров, Д. А.-З. Хубиева. – Черкесск: БИЦ СКГА, 2019. – 44 с.

В данное пособие включен краткий теоретический материал по основным разделам курса методов оптимизации, который сопровождается рассмотрением примеров и задач. Каждый раздел включает задания для самостоятельного решения.

**УДК 22.1**

**ББК 51**

© Кочкаров А.М., Хубиева Д. А.-З., 2019

© ФГБОУ ВО СКГА, 2019

**СОДЕРЖАНИЕ**

|  |  |
| --- | --- |
| ВВЕДЕНИЕ………………………………………………………................. | 4 |
| Раздел 1. ОСНОВНЫЕ ТИПЫ ЭКСТРЕМАЛЬНЫХ ЗАДАЧ……….…….. | 5 |
| * 1. Понятие о задачах оптимизации……………………………….……...... | 5 |
| * 1. Выпуклая задача оптимизации………………………………………..... | 5 |
| Задания для самостоятельного решения……………………………….......... | 8 |
| Раздел 2. УСЛОВИЯ ЭКСТРЕМУМА ФУНКЦИИ…………………............ | 10 |
| Задания для самостоятельного решения……………………………….......... | 13 |
| Раздел 3. ОСНОВНЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ЭКСТРЕМАЛЬНЫХ ЗАДАЧ…………………………………………………………………………. | 14 |
| 1. Методы одномерной минимизации…………………………………..... | 14 |
| 1. Методы полиномиальной интерполяции………………………………. | 23 |
| Задания для самостоятельного решения…………………………………….. | 29 |
| Раздел 4. ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ БЕЗУСЛОВНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ… | 32 |
| Задания для самостоятельного решения…………………………………….. | 37 |
| Раздел 5. ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ УСЛОВНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ……... | 38 |
| Задания для самостоятельного решения ………………………………......... | 41 |
| СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ…………………………. | 42 |

**ВВЕДЕНИЕ**

В настоящее время оптимизация находит применение в науке, технике и в любой другой области человеческой деятельности.

Методы оптимизации – методы поиска экстремума функции (в практических задачах – критериев оптимальности) при наличии ограничений или без ограничений очень широко используются на практике.

В настоящем учебном пособии в краткой форме представлен теоретический материал по курсу методов оптимизации, который сопровождается рассмотрением примеров и задач.

Основную часть пособия составляют задачи оптимизации, которые принято также называть экстремальными задачами. Их решение позволяет освоить алгоритмы соответствующих методов и приобрести необходимые вычислительные навыки.

Основные определения и обозначения, которые являются общими для всех разделов пособия, рассматриваются в разделе 1. Это касается таких понятий, как общая постановка за­дачи оптимизации, целевая функция, допустимое множество и допустимое решение, локальный и глобальный экстрему­мы, условный и безусловный экстремумы, некоторые общие утверждения о разрешимости задачи.

Раздел 2, где рассматриваются общие методы решения задач с непрерывными и непре­рывно дифференцируемыми функциями, представляет собой вводную часть и содержит классические методы решения задач математического программирования. Основной упор здесь сделан на методе неопределённых множителей Лагранжа, известном обучающимся по курсу математического анализа

В разделе 3 рассматриваются основные методы решения экстремальных задач.

В разделе 4 рассматриваются численные методы решения задач безуслов­ной оптимизации, такие как различные модификации градиентного метода, метода Нью­тона.

В разделе 5 рассматриваются численные методы условной оптимизации.

В конце каждого раздела приведены задания для самостоятельной работы обучающихся.

Пособие может быть использовано обучающимися для самостоятельного изучения соответствующего материала, что поможет им правильно и рационально готовиться к лекционным, практическим занятиям, к сдаче экзамена. Оно может быть полезно также преподавателям при планировании и проведении практических занятий и проверочных работ.

**Раздел 1. ОСНОВНЫЕ ТИПЫ ЭКСТРЕМАЛЬНЫХ ЗАДАЧ**

* 1. **Понятие о задачах оптимизации**

**Постановка задачи оптимизации.** Сама по себе постановка задачи оптимизации проста и естественна: заданы множество и функция , определенная на ; требуется найти точки минимума или максимума функции на . Записывается задача на минимум в виде

(1)

При этом называется *целевой функцией, –* допустимым множеством, любой элемент – допустимой точкой задачи (1).

Точка  называется точкой *глобального минимума* функции  на множестве , если функция достигает в этой точке своего наименьшего значения, т.е.:

, 

Точка  называется точкой *локального минимума* функции  на множестве , если существует , такое, что если  и , то .

* 1. **Выпуклая задача оптимизации**

Задача (1.1) называется *выпуклой,* если – выпуклое множество, а – выпуклая функция на .

Множество  называется выпуклым, если оно содержит всякий отрезок, концы которого принадлежат , т.е. если для любых ,  и  справедливо .

Функция , определенная на выпуклом множестве , называется выпуклой, если , , .

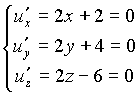
Функция , определенная на выпуклом множестве , называется строго выпуклой, если , , .

Функцию  называют выпуклой (строго выпуклой), если она целиком лежит не выше (ниже) отрезка, соединяющего две ее произвольные точки.

Если  выпуклая функция на выпуклом множестве , то всякая точка локального минимума является точкой ее глобального минимума на . Если выпуклая функция достигает своего минимума в двух различных точках, то она достигает минимума во всех точках отрезка, соединяющего эти две точки.

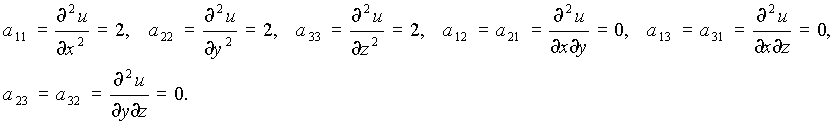
*Пример 1:* Исследовать на экстремум функцию http://mschool.kubsu.ru/math1/primer8/image205.gif

*Решение.*  Определим стационарные точки из системы

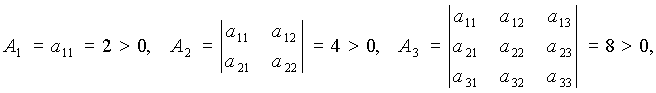


Откуда имеем единственную стационарную точку: х = - 1, у = - 2, z = 3.

 Воспользуемся достаточным условием



Таким образом,



то есть, согласно критерию Сильвестра, http://mschool.kubsu.ru/math1/primer8/image209.gif представляет собой положительно определённую квадратичную форму. Следовательно, в точке http://mschool.kubsu.ru/math1/primer8/image210.gif функция имеет минимум.

http://mschool.kubsu.ru/math1/primer8/image206.gif

*Пример 2:* Исследовать на экстремум функцию

http://mschool.kubsu.ru/math1/primer8/image204.gif

Находим,

http://mschool.kubsu.ru/math1/primer8/image211.gif

Стационарные точки определяются из системы

http://mschool.kubsu.ru/math1/primer8/image212.gif

Она имеет три решения http://mschool.kubsu.ru/math1/primer8/image213.gif Для применения достаточных условий локального экстремума вычислим вторые производные

http://mschool.kubsu.ru/math1/primer8/image216.gif

Составим выражение http://mschool.kubsu.ru/math1/primer8/image215.gif

В точке http://mschool.kubsu.ru/math1/primer8/image214.gif следовательно, необходимы дополнительные исследования.

Рассмотрим http://mschool.kubsu.ru/math1/primer8/image234.gif z(0, 0) = z(h, k) - z(0, 0).

При http://mschool.kubsu.ru/math1/primer8/image218.gif имеем http://mschool.kubsu.ru/math1/primer8/image217.gif

При http://mschool.kubsu.ru/math1/primer8/image220.gif имеем*http://mschool.kubsu.ru/math1/primer8/image219.gif*

Таким образом, приращение http://mschool.kubsu.ru/math1/primer8/image234.gif z(0, 0) принимает значения разных знаков, а поэтому в точке http://mschool.kubsu.ru/math1/primer8/image221.gifэкстремума нет.

Далее в точках http://mschool.kubsu.ru/math1/primer8/image223.gif и так как http://mschool.kubsu.ru/math1/primer8/image222.gif то в этих точках достигается минимум, причём http://mschool.kubsu.ru/math1/primer8/image224.gif

*Пример 3:* Исследовать функцию   на экстремум.

 Находим производную заданной функции:

.

Далее ищем критические точки функции, для этого решаем уравнение

Первая производная определена во всех точках. Таким образом, имеем одну критическую точку .

Так как при переходе через точку  производная меняет свой знак с "-" на "+", то в этой точке функция достигает минимума (или минимального значения), причем наименьшее значение составляет .

**Задания для самостоятельного решения**

1. Найти экстремум функции, используя правило нахождения глобального экстремума, или верхнюю и нижнюю грань:

1. 
2. 
3.  при 
4. 
5. 
6. 
7. 
8.  при 
9.  при 
10.  при .

2. Установить, является ли выпуклым множество:

1. ;
2. ;
3. ;
4. ;
5. ;
6. ;
7. ;
8. ;
9. ;
10. ;

3. Какие из указанных функций являются выпуклыми в :

1. ;
2. ;
3. ;
4. ;
5. ;
6. ;
7. ;
8. ;
9. ;
10. .

**Раздел 2. УСЛОВИЯ ЭКСТРЕМУМА ФУНКЦИИ**

Пусть дана дважды непрерывно дифференцируемая функция , определенная на множестве . Требуется исследовать функцию  на экстремум, т.е. определить точки  ее локальных минимумов и максимумов на :



.

##### *Необходимые условия экстремума первого порядка*

Пусть  есть точка локального минимума (максимума) функции  на множестве  и  дифференцируема в точке . Тогда градиент функции  в точке  равен нулю, т.е.:

, или , 

Точки , удовлетворяющие этому условию называются стационарными.

##### *Необходимые условия экстремума второго порядка*

Пусть  есть точка локального минимума (максимума) функции  на множестве  и  дважды дифференцируема в точке . Тогда матрица Гессе  функции , вычисленная в точке , является положительно полуопределенной (отрицательно полуопределенной), т.е.

.

##### *Достаточные условия экстремума*

Пусть функция  в точке дважды дифференцируема, ее градиент равен нулю, а матрица Гессе является положительно определенной (отрицательно определенной), т.е.:

, 

Тогда точка  есть точка локального минимума (максимума) функции  на множестве .

*Пример 1.* Найти экстремум функции  на множестве 

Запишем необходимые условия экстремума первого порядка



Проверим выполнение достаточных условий

, , .

Все угловые миноры матрицы Гессе положительны, следовательно матрица Гессе положительно определена.

Значит в точке  локальный минимум. Т.к. функция является строго выпуклой на множестве , то точка локального минимума является точкой глобального минимума.

*Пример 2.* Найти экстремум функции  на множестве 

Запишем необходимые условия экстремума первого порядка



Проверим выполнение достаточных условий

, , .

Матрица Гессе не является положительно определенной, а значит достаточные условия экстремума не выполняются.

Проверим выполнение необходимого условия экстремума второго порядка.

, , , Т.к. главные миноры матрицы Гессе имеют как положительные, так и отрицательные значения, то матрица Гессе не является ни положительно полуопределенной ни отрицательно полуопределенной, а значит необходимое условие второго порядка не выполняется. Значит, в точке  нет экстремума. Точка  является седловой точкой.

*Необходимые и достаточные условия условного экстремума*

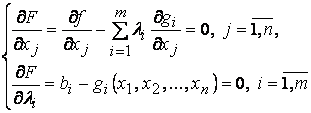
  Рассмотрим частный случай общей задачи нелинейного программирования (15.1) – (15.2), предполагая, что система ограничений (15.2) содержит только уравнения, отсутствуют условия неотрицательности переменных, http://www.math.mrsu.ru/text/courses/method/metod_mnogitelei_lagranga.files/image002.gif иhttp://www.math.mrsu.ru/text/courses/method/metod_mnogitelei_lagranga.files/image004.gif – функции, непрерывные вместе со своими частными производными. Ограничения в задаче заданы уравнениями, поэтому для ее решения можно воспользоваться классическим методом отыскания условного экстремума функций нескольких переменных. Вводят набор переменных http://www.math.mrsu.ru/text/courses/method/metod_mnogitelei_lagranga.files/image006.gif,  называемых *множителями Лагранжа*, и составляют *функцию Лагранжа*

http://www.math.mrsu.ru/text/courses/method/metod_mnogitelei_lagranga.files/image008.gif

находят частные производные

http://www.math.mrsu.ru/text/courses/method/metod_mnogitelei_lagranga.files/image010.gif

и рассматривают систему *n + m* уравнений

 (15.3)

с  *n + m*  неизвестными  http://www.math.mrsu.ru/text/courses/method/metod_mnogitelei_lagranga.files/image014.gif,  http://www.math.mrsu.ru/text/courses/method/metod_mnogitelei_lagranga.files/image016.gif. Решив   систему  уравнений (15.3), получают все точки, в которых функция (15.1) может иметь экстремальные значения. Дальнейшее исследование найденных точек проводят так же, как и в случае безусловного экстремума. Метод множителей Лагранжа имеет ограниченное применение, так как система (15.3), как правило, имеет несколько решений.

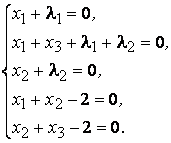
*Пример.* Найти точку условного экстремума функции http://www.math.mrsu.ru/text/courses/method/metod_mnogitelei_lagranga.files/image018.gif при ограничениях

http://www.math.mrsu.ru/text/courses/method/metod_mnogitelei_lagranga.files/image020.gif

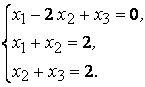
Составим функцию Лагранжа:

*http://www.math.mrsu.ru/text/courses/method/metod_mnogitelei_lagranga.files/image024.gif

Продифференцируем ее по переменным http://www.math.mrsu.ru/text/courses/method/metod_mnogitelei_lagranga.files/image026.gif. Приравнивая полученные выражения к нулю, получим следующую систему уравнений:



        Из второго и третьего уравнений следует, что http://www.math.mrsu.ru/text/courses/method/metod_mnogitelei_lagranga.files/image030.gif; тогда



Решив данную систему, получим:

http://www.math.mrsu.ru/text/courses/method/metod_mnogitelei_lagranga.files/image034.gif  и  http://www.math.mrsu.ru/text/courses/method/metod_mnogitelei_lagranga.files/image036.gif

**Задания для самостоятельного решения**

1. Найти условный экстремум функции z = 2x + 3y, при условии http://mschool.kubsu.ru/math1/primer9/image51.gif
2. Найти условные экстремумы функции http://mschool.kubsu.ru/math1/primer9/image61.gif при наличии ограничения http://mschool.kubsu.ru/math1/primer9/image60.gif
3. Найти **условные экстремумы** функции двух переменных https://function-x.ru/chapter6-3/ec024.gif при условии https://function-x.ru/chapter6-3/ec025.gif.
4. Найти **условные экстремумы** функции двух переменных https://function-x.ru/chapter6-3/ec042.gif при условии https://function-x.ru/chapter6-3/ec043.gif.

**Раздел 3. ОСНОВНЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ЭКСТРЕМАЛЬНЫХ ЗАДАЧ**

**3.1. Методы одномерной минимизации**

В некоторых случаях ограничения в задаче оптимизации позволяют через один из параметров оптимизации выразить остальные и исключить их из целевой функции. В результате задача будет сведена к поиску наибольшего или наименьшего (в зависимости от цели оптимизации) значения скалярной действительной функции выражающей критерий оптимальности. Выбирая тот или иной знак перед этой функцией, всегда можно ограничиться лишь поиском ее наименьшего значения в области определения D (), заданной с учетом ограничений на параметр оптимизации. Поэтому рассматриваем задачу

поиска наименьшего значения  функции и точки , в которой  принимает это значение. Для краткости будем говорить об *одномерной минимизации*, имея в виду нахождение наименьшего значения функции на множестве и точек, в которых это значение достигается.

Изучение методов одномерной минимизации важно не только для решения задачи (1), имеющей самостоятельное значение. Эти методы являются также существенной составной частью методов многомерной минимизации, при помощи которых находят наименьшее значение действительных функций многих переменных.

*Определение 1.*Функция  называется унимодальной на D, если существует такая точка , что



Если унимодальная функция непрерывна, то она имеет единственную точку минимума на D и эта точка совпадает с . В дальнейшем именно этот случай и имеется в виду. Если же  не достигается, то тогда будем говорить о поиске точки , фигурирующей в определении 1.

*Свойство 1.*

Пусть функция  унимодальна на D, . Тогда если , то . При  имеем .

Отметим, что если D не ограничено (является прямой или полупрямой), то, основываясь на свойстве 1, легко построить конечношаговый процесс, позволяющий найти отрезок, в котором содержится точка .

Обозначим через  класс всех унимодальных функций , заданных на отрезке .

*Определение 2.*Алгоритм поиска минимума функции  называется пассивным, если результаты вычислений  становятся известными лишь по окончании всех вычислений.

Таким образом, чтобы задать пассивный алгоритм, нужно задать все точки вычисления функции до начала поиска её точки минимума.

*Алгоритм пассивного поиска минимума*

В алгоритме **** точки вычисления функции задаются следующим образом:



где малое положительное число.

После вычисления функции  в точках  определим . Тогда, обозначив и , в силу свойства 1 находим, что , т.е. этот отрезок является отрезком локализации точки минимума функции . Центр этого отрезка принимается за аппроксимацию точки . В случае, когда =  точка , и за аппроксимацию точки принимается центр отрезка . Гарантированное значение критерия эффективности на классе функций  равно:

 (1)

Погрешность же в определении  не превышает половины длины отрезка .

*Теорема. Алгоритм  при  является оптимальным пассивным алгоритмом в классе функций Fu. При  оптимального пассивного алгоритма в классе функций Fu  не существует, но алгоритм  -оптимален.*

*Определение 3.*Алгоритм поиска минимума функции  называется блочным, если вычисления функции распадаются на  блоков по  вычислений в каждом блоке, , причем результаты вычислений каждого блока становятся известными перед началом вычислений следующего блока.

**Метод дихотомии**

Метод относится к последовательным стратегиям. Задается начальный интервал неопределенности и требуемая точность. Алгоритм опирается на анализ значений функции в двух точках. Для их нахождения текущий интервал неопределенности делится пополам и в обе стороны от середины откладывается по , где  малое положительное число. Поиск заканчивается, если длина текущего интервала неопределенности меньше заданной величины.

## *Алгоритм поиска точки минимума методом дихотомии*

Алгоритм поиска минимума функции сводится к выполнению следующих этапов.

Шаг 1. Задается начальный интервал неопределенности и - требуемая точность,  - малое положительное число.

Шаг 2. Задать .

Шаг 3. Вычислить .

Шаг 4. Если , принять  и перейти к этапу 5.

Если , принять .

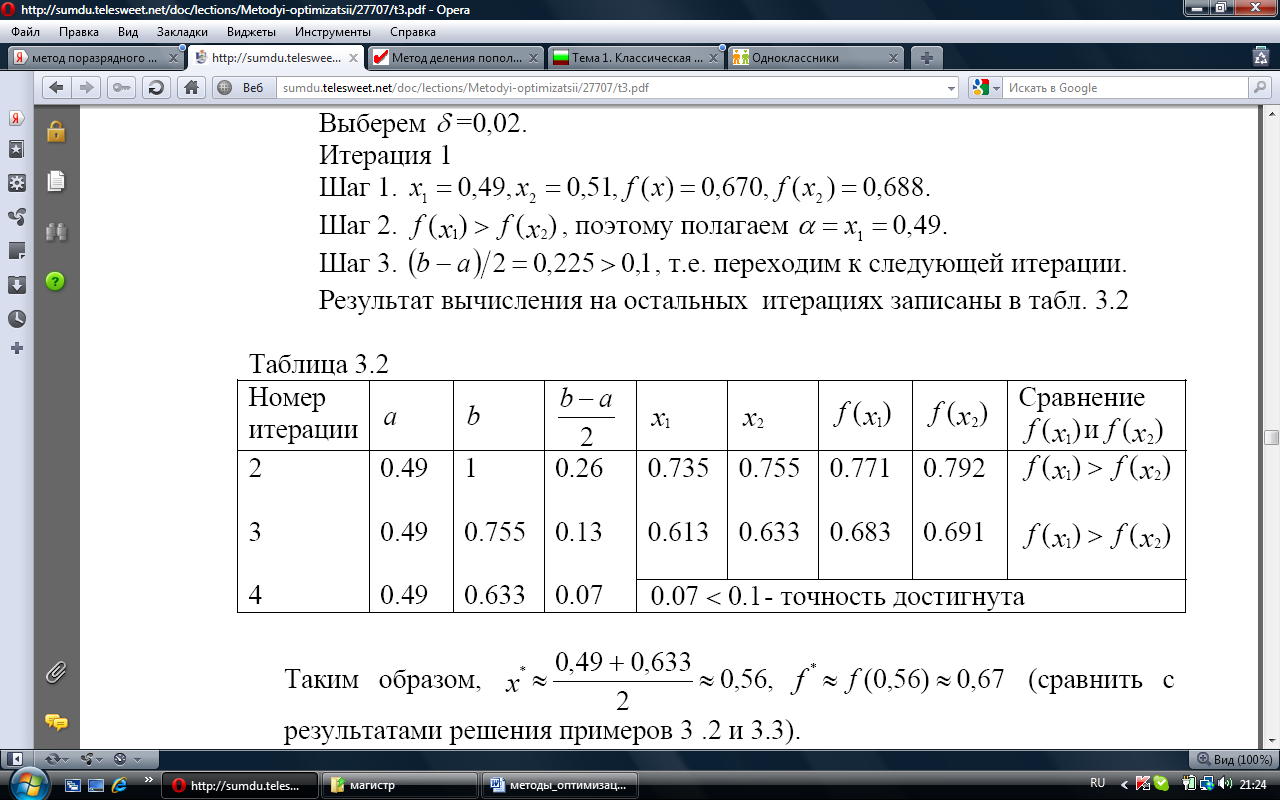
Шаг 5. Вычислить и проверить условие окончания:

Если , то процесс поиска завершается и . В качестве приближенного решения принимают середину последнего интервала .

Если , то принять  и перейти к этапу 3.

Для оценки сходимости метода используется характеристика относительного уменьшения начального интервала неопределенности , где  количество вычислений функции.

*Пример.* Решить задачу *f*(*x*) *= x4+e-x→*min, *x*[0;1] с точностью до *ε* = 0.1.

Выберем = 0,02.

Результаты вычисления на остальных итерациях записаны в таблице 1.

*Таблица 1*

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Номер итерации | *a* | *b* |  | *x*1 | *x*2 | *f*(*x*1) | *f*(*x*2) | Сравнение  *f*(*x*1) и *f*(*x*2) |
| 2 | 0,49 | 1 | 0,26 | 0,735 | 0,755 | 0,771 | 0,792 | *f*(*x*1) > *f*(*x*2) |
| 3 | 0,49 | 0,755 | 0,13 | 0,613 | 0,633 | 0,683 | 0,691 | *f*(*x*1) > *f*(*x*2) |
| 4 | 0,49 | 0,633 | 0,07 | 0,07 < 0,1 – точность достигнута | | | | |

Таким образом  

**Метод золотого сечения**

В методе золотого сечения в качестве двух внутренних точек выбираются точки золотого сечения.

Точка производит золотое сечение, если отношение длины всего отрезка к большей части равно отношению большей части к меньшей части. На отрезке  имеются две симметричные относительно его концов точки и :

.

Точка  производит золотое сечение отрезка , а точка  - отрезка .

Метод относится к последовательным стратегиям. Задается начальный интервал неопределенности и требуемая точность. Алгоритм опирается на анализ значений функции в двух точках. В качестве точек вычисления функции выбираются точки золотого сечения. На каждой итерации, кроме первой, требуется только одно новое вычисление функции. Поиск заканчивается, если длина текущего интервала неопределенности меньше заданной величины.

*Алгоритм поиска точки минимума методом золотого сечения*

Алгоритм поиска минимума функции сводится к выполнению следующих этапов.

Шаг 1. Задается начальный интервал неопределенности и - требуемая точность.

Шаг 2. Задать .

Шаг 3. Вычислить .

Шаг 4. Вычислить .

Шаг 5. Если , то принять  и . Перейти к шагу 6.

Если , принять  и .

Шаг 6. Вычислить  и проверить условие окончания поиска. Если , процесс поиска прекращается и . В качестве приближенного решения принимают середину последнего интервала .

Если , принять  и перейти к шагу 4.

*Пример***.** Решить задачу *f(x) = x4 + e-x→*min, *x*[0;1] с точностью до *ε* = 0,1.

Шаг 1. Находим:

*x*1 = 0,382, *x*2 = 0,618, *f*(*x*1) = 0,704, *f*(*x*2) = 0,685, *εn* = 0,5.

Шаг 2. *εn* = 0,5 > *ε* = 0,1, поэтому переходим к шагу 3.

Шаг 3. *f*(*x*1) > *f*(*x*2), поэтому полагаем *a* = 0,382, *x*1 = 0,618, *f*(*x*1) = 0,685, *x*2 = 0,784, *εn* = 0,309 и вычисляем *f*(*x*2) = 0,807. Переходим к следующей итерации, начиная с шага 2.

Результаты вычислений на остальных итерациях представлены в таблице 2.

*Таблица 2*

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Номер итерации | *a* | *b* | *εn* | *x*1 | *x*2 | *f*(*x*1) | *f*(*x*2) | Сравнение  *f*(*x*1) и *f*(*x*2) |
| 2 | 0,382 | 1,000 | 0,309 | 0,764 | 0,764 | 0,685 | 0,807 | *f*(*x*1) < *f*(*x*2) |
| 3 | 0,382 | 0,764 | 0,191 | 0,528 | 0,618 | 0,668 | 0,685 | *f*(*x*1) < *f*(*x*2) |
| 4 | 0,382 | 0,618 | 0,118 | 0,472 | 0,528 | 0,673 | 0,668 | *f*(*x*1) < *f*(*x*2) |
| 5 | 0,472 | 0,618 | 0,073 | 0,073 < 0,1 – точность достигнута | | | | |

Таким образом, .

**Метод Фибоначчи**

В методе Фибоначчи реализована последовательная стратегия, обеспечивающая максимальное гарантированное сокращение интервала неопределенности при заданном количестве вычисления функции. Эта стратегия опирается на числа Фибоначчи, определяемые по формуле

.

Последовательность чисел Фибоначчи имеет вид 1,1,2,3,5,8,13,23,34,55,89,144,233,.. .

Метод относится к последовательным стратегиям. Задается начальный интервал неопределенности и количество вычислений функции. Алгоритм опирается на анализ значений функции в двух точках. Точки вычисления функции находятся с использованием последовательности из  чисел Фибоначчи. На каждой итерации, кроме первой, требуется только одно новое вычисление функции. Поиск заканчивается, если длина текущего интервала неопределенности меньше заданной величины.

*Алгоритм поиска точки минимума методом Фибоначчи*

Алгоритм поиска минимума функции сводится к выполнению следующих этапов.

Шаг 1. Задается начальный интервал неопределенности , - допустимая длина конечного интервала,  - константа различимости.

Шаг 2. Найти количество вычислений функции как наименьшее целое число, при котором удовлетворяется условие  и числа Фибоначчи .

Шаг 3. Задать .

Шаг 4. Вычислить .

Шаг 5. Вычислить .

Шаг 6. Если , то принять  и . Перейти к шагу 7.

Если , принять  и .

Шаг 7. Если , то принять  и перейти к шагу 5.

Если , то всегда , то есть отсутствует точка нового вычисления функции. В этом случае следует принять . В точках вычисляются значения функции и находятся границы конечного интервала неопределенности:

- если , то принять ;

- если , то принять .

Процесс поиска завершается и . В качестве приближенного решения можно принять любую точку интервала, рекомендуется .

Характеристика относительного уменьшения начального интервала неопределенности , где  количество вычислений функции.

*Пример.* С помощью метода Фибоначчи найти минимум функции *f(x)=x2+2x*на интервале *(-3,5)*. Длина конечного интервала неопределенности не должна превосходить *0,2*.

*Решение:*

Примем δ=0,01.

Найдем необходимое число вычислений функции:

|  |  |
| --- | --- |
| http://dit.isuct.ru/IVT/sitanov/Literatura/M171/Pages/Glava1_4.files/image024.gif | *F8<40<F9* |

Итак, *S =*9.

http://dit.isuct.ru/IVT/sitanov/Literatura/M171/Pages/Glava1_4.files/image026.gif

Первый шаг. *a=-3; b=5*.

*x1=a+l∙F7= 0.0555; f(x1) =0,1141;*

*x2 = b-l∙F7=1,9445; f(x2) =7,6701;*

*f(x1)*<*f(x2).*Новый отрезок *[-3; 1,9445]*.

Второй шаг. *a=-3; b=5*.

*x1=a+l∙F6= -1.1085; f(x1) =-0,9882;*

*x2 =0,0555; f(x2) =0,1141;*

*f(x1)*<*f(x2).*Новый отрезок *[-3; 0,0555]*.

Дальнейшие расчеты приведены в таблице 3. Значения *f(x,)* вычисленные на каждом шаге, помечены звездочкой.

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| *Таблица 3.* | | | | | | | |
| № шага | a | b | b-a | x1 | x2 | f(x1) | f(x2) |
| 1 | -3,000 | 5,000 | 8,000 | 0,0555 | 1,9445 | 0,1141\* | 7,6701\* |
| 2 | -3,000 | 1,9445 | 4,9445 | -1,1085 | 0,0555 | -0,9882\* | 0,1141 |
| 3 | -3,000 | 0,0555 | 3,0555 | -1,8360 | -1,1085 | -0,3011\* | -0,9882 |
| 4 | -1,8360 | 0,0555 | 1,8915 | -1,1085 | -0,6720 | -0,9882 | -0,8924\* |
| 5 | -1,8360 | -0,6720 | 1,1640 | -1,3995 | -1,1085 | -0,8404\* | -0,9882 |
| 6 | -1,3995 | -0,6720 | 0,7275 | -1,1085 | -0,9630 | -0,9882 | -0,9986\* |
| 7 | -1,1085 | -0,6720 | 0,4365 | -0,9630 | -0,8175 | -0,9986 | -0,9667\* |
| 8 | -1,1085 | -0,8175 | 0,2910 | -0,9630 | -0,9630 | -0,9986 | -0,9986 |
| 9 | -1,1085 | -0,9630 | 0,1455 | -0,9630 | -0,9530 | -0,9986 | -0,9978\* |

Поскольку для *k = 9* *f(x1)*<*f(x2)*, конечный интервал неопределённости равен *(-1,1085; -0,9630)*, длина его составляет *0,1455*. В качестве приближенного значения точки минимума выберем середину этого отрезка *-1,0358*; *f(-1,0358) = -0,9987*. Напомним, что при использовании, метода золотого сечения при *S*= 9 длина интервала неопределенности была равна *0,176.*

## Метод средней точки

Метод средней точки направлен на повышение эффективности метода деления отрезка пополам при использовании технологии исключения отрезков за счет замены вычислений функции в трех точках на операцию вычисления производной в средней точке .

Если , то точка  лежит на участке монотонного возрастания , поэтому  и точку минимума следует искать на отрезке .

Если , то точка  лежит на участке монотонного убывания , поэтому  и точку минимума следует искать на отрезке .

Равенство  означает, что точка минимума найдена точно и .

Такое исключение отрезков требует на каждой итерации только одного вычисления  и уменьшает отрезок поиска точки минимума ровно в два раза.

Поиск заканчивается, если абсолютная величина производной меньше заданной погрешности.

## *Алгоритм поиска точки минимума методом средней точки*

Алгоритм поиска минимума функции сводится к выполнению следующих этапов.

Шаг 1. Задается начальный интервал неопределенности и - требуемая точность.

Шаг 2. Задать .

Шаг 3. Вычислить среднюю точку .

Шаг 4. Проверить условие окончания:

- если , то процесс поиска завершается и ;

- если , то сравнить с нулем.

Если , то продолжить поиск на отрезке , положив , .

Если , то продолжить поиск на отрезке , положив ,.

Перейти к шагу 3.

**3.2.** **Методы полиномиальной интерполяции**

Поиск точки минимума методами исключения отрезков основан на сравнении значений функции в двух точках. При таком сравнении разности значений *f(x)* в этих точках не учитываются, важны только их знаки.

Учесть информацию, содержащуюся в относительных изменениях значений *f(x)* в пробных точках, позволяют методы полиномиальной ап­проксимации, основная идея которых состоит в том, что для функции *f(x)* строится аппроксимирующий многочлен и его точка минимума служит приближением к *х*\**.* Для эффективного использования этих методов на функцию *f(x),* кроме унимодальности, налагается дополнительное требование достаточной гладкости (по крайней мере, непрерывности).

Обоснованием указанных методов является известная из математического анализа теорема Вейерштрасса об аппроксимации, согласно которой непрерывную на отрезке функцию можно с любой точностью приблизить на этом отрезке некоторым полиномом.

Для повышения точности аппроксимации можно, во-первых, увеличивать порядок полинома и, во-вторых, уменьшать длину отрезка аппроксимации. Первый путь приводит к быстрому усложнению вычислительных процедур, поэтому на практике используют аппроксимирующие полиномы не выше третьего порядка. В то же время уменьшение отрезка, содержащего точку минимума унимодальной функции, не представляет особого труда.

В простейшем методе полиномиальной аппроксимации - методе парабол используются полиномы второго порядка. На каждой итерации этого метода строится квадратный трехчлен, график которого (парабола) проходит через три выбранные точки графика функции *f(x).*

**Метод квадратичной интерполяции**

Метод квадратичной интерполяции относится к последовательным стратегиям. Задается начальная точка и с помощью пробного шага находятся три точки так, чтобы они были как можно ближе к искомой точке минимума. В полученных точках вычисляются значения функции. Затем строится интерполяционный полином второй степени, проходящий через эти три точки. В качестве приближения точки минимума берется точка минимума полинома. Процесс поиска заканчивается, когда полученная точка отличается от наилучшей из трех опорных точек не более, чем на заданную величину.

*Алгоритм поиска точки минимума с квадратичной интерполяцией*

Алгоритм поиска минимума функции сводится к выполнению следующих этапов.

Шаг 1. Задать начальную точку , величину шага ,  - малые положительные числа, характеризующие точность.

Шаг 2. Вычислить .

Шаг 3. Вычислить .

Шаг 4. Если , то принять .

Если , то принять .

Шаг 5. Вычислить .

Шаг 6. Найти .

Шаг 7. Вычислить точку минимума интерполяционного полинома, построенного по трем точкам:



и величину . Если знаменатель в формуле для  на некоторой итерации обращается в нуль, то результатом интерполяции является прямая линия. В этом случае рекомендуется принять  и перейти к шагу 2.

Шаг 8. Проверить выполнение условий окончания

.

Если оба условия выполнены, то процедура закончена и .

Если хотя бы одно из условий не выполнено и , выбрать наилучшую точку ( или ) и две точки по обе стороны от нее. Переобозначить эти точки в порядке возрастания и перейти к шагу 6.

Если хотя бы одно из условий не выполнено и , то принять  и перейти к шагу 2.

**Метод кубической интерполяции**

В этом методе полиномиальной аппроксимации в качестве аппроксимирующего полинома используется многочлен третьей степени. Предполагается, что  - выпуклая дифференцируемая функция и найден интервал , содержащий ее точку минимума . Это означает, что , а .

Аппроксимирующий кубический полином записывается в виде

,

где неизвестными являются коэффициенты .

Для определения неизвестных коэффициентов предполагается, что в точках  и  значения функции  и аппроксимирующего полинома  совпадают. Это позволяет найти два коэффициента. Для определения недостающих двух коэффициентов дополнительно полагают, что в точках  и  равны и их производные

.

Тогда уравнения для определения коэффициентов аппроксимирующего полинома примут вид

.

Для определения точки минимума производная  приравнивается нулю. В результате получается квадратное уравнение, имеющее два корня. Из двух корней выбирается тот, который принадлежит интервалу . Этот корень  является точкой минимума приближения  на отрезке  и используется в качестве приближения к точке минимума .

Новыми точками  и  для осуществления следующей итерации являются концы того из отрезков  и , который содержит точку . Его определяют по знаку производной .

Если , то точка  лежит на участке монотонного возрастания , поэтому  и точку минимума следует искать на отрезке .

Если , то точка  лежит на участке монотонного убывания , поэтому  и точку минимума следует искать на отрезке .

Равенство  означает, что точка минимума найдена точно и .

*Алгоритм поиска точки минимума с кубической интерполяцией*

Алгоритм поиска минимума функции с кубической интерполяцией сводится к выполнению следующих этапов.

Шаг 1. Задать начальную точку , величину шага ,  - малые положительные числа, характеризующие точность (,).

Шаг 2. Вычислить производную .

Шаг 3. Проверить знак производной в точке .

Если , то вычислить . до точки , в которой .

Если , то вычислить . до точки , в которой .

Шаг 4. Положить  и вычислить.

Шаг 5. Найти точку минимума кубического интерполяционного полинома по формуле



где , , .

Вычислить .

Шаг 6. Проверить условие убывания.

Если , перейти к этапу 7.

Если , вычислить  по формуле  до тех пор, пока не будет выполнено неравенство .

Шаг 7. Проверить выполнение условий окончания:

, .

Если оба условия выполнены, то процедура поиска точки минимума закончена и .

Если хотя бы одно из условий не выполнено, то положить либо  при , либо  при .

Перейти к шагу 5.

*Примечание.*На шагах 2-3 реализуется эвристическая процедура поиска границ интервала неопределенности, где изменение знака производной свидетельствует о переходе через точку минимума.

*Пример.* Найти минимум функции *f*(*x*) = *x*2–16/*x*методом кубической аппроксимации. Выбираем начальный интервал [-5; 10] и точность поиска равную 0,1. Результаты расчета приведены в таблице 4.

*Таблица 4*

Результаты расчета минимума функции *f*(*x*) = *x*2–16/*x*методом кубической аппроксимации.

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| № | x1 | x2 | f(*x*1) | f(*x*2) | f'(*x*1) | f'(*x*2) | z | ω | μ | http://ok-t.ru/life-prog/baza2/588341627576.files/image057.png | f'( http://ok-t.ru/life-prog/baza2/588341627576.files/image057.png ) | |*x*2-*x*1| | Критерий |
| 1 | -5.0 | 10.0 | 28.20 | 98.400 | -9.360 | 20.160 | -3.240 | 14.114 | 0.350 | 0.256 | 245.150 | 15.00 | Не достигнут |
| 2 | -5.0 | 0.26 | 28.20 | -62.498 | -9.360 | 245.150 | 287.561 | 291.523 | 0.703 | -1.307 | 6.745 | 5.256 | Не достигнут |
| 3 | -5.0 | -1.31 | 28.20 | 13.947 | -9.360 | 6.745 | 8.965 | 11.979 | 0.756 | -2.207 | -1.129 | 3.693 | Не достигнут |
| 4 | -2.2 | -1.31 | 12.12 | 13.947 | -1.129 | 6.745 | -0.476 | 2.800 | 0.256 | -1.976 | 0.143 | 0.899 | Не достигнут |
| 5 | -2.2 | -1.98 | 12.12 | 12.002 | -1.129 | 0.143 | 0.560 | 0.689 | 0.897 | -2.000 | -0.001 | 0.231 | Не достигнут |
| 6 | -2.0 | -1.98 | 12.00 | 12.002 | -0.001 | 0.143 | -0.070 | 0.071 | 0.005 | -2.000 | 0.000 | 0.024 | Достигнут |

Таким образом, на шестом шаге с точностью 0,01 найден экстремум функции **http://ok-t.ru/life-prog/baza2/588341627576.files/image057.png=-**2,000,который совпадает с экстремумом, полученным аналитически.

**Задания для самостоятельного решения**

1*.* При заданной наибольшей допустимой длине  интервала неопределенности, используя оптимальный пассивный поиск найти точку  в которой унимодальная на отрезке  функция достигает наименьшего на этом отрезке значения:

1. ;
2. ;
3. ;
4. ;
5. ;
6. ;
7. ;
8. ;
9. ;
10. .

2. Используя метод дихотомии при заданном значении  наибольшей допустимой длины интервала неопределенности найти интервал, в котором расположена точка  минимума унимодальной на отрезке  функции  и :

1. ;
2. ;
3. ;
4. ;
5. ;
6. ;
7. ;
8. ;
9. ;
10. .

3. Используя метод золотого сечения при заданном значении  наибольшей допустимой длины интервала неопределенности найти интервал, в котором расположена точка  минимума унимодальной на отрезке  функции :

1. ;
2. ;
3. ;
4. ;
5. ;
6. ;
7. ;
8. ;
9. ;
10. .

4*.* Используя метод Фибоначчи при заданном значении  наибольшей допустимой длины интервала неопределенности найти интервал, в котором расположена точка  минимума унимодальной на отрезке  функции :

1. ;
2. ;
3. ;
4. ;
5. ;
6. ;
7. ;
8. ;
9. ;
10. .

5. Используя метод квадратичной аппроксимации найти минимум  функции унимодальной на отрезке  функции :

1. ;
2. ;
3. ;
4. ;
5. ;
6. ;
7. ;
8. ;
9. ;
10. .

6*.* Используя метод средней точки найти точку  наименьшего значения унимодальной на отрезке  функции :

1. ;
2. ;
3. ;
4. ;
5. ;
6. ;
7. ;
8. ;
9. ;
10. .
11. Используя метод кубической аппроксимации найти минимум  функции унимодальной на отрезке  функции :
12. ;
13. ;
14. ;
15. ;
16. ;
17. ;
18. ;
19. ;

**Раздел 4. ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ БЕЗУСЛОВНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ**

Для заданной начальной точки  генерируется последовательность точек с координатами 

Переход от точки  к точке  представляет собой итерацию. Численное решение задачи (1) связано с построением последовательности точек , обладающих свойством

 .

Общее правило построения последовательности ****имеет вид

****

где **-** направление поиска точки **** из точки ****, а число - величина шага, которая выбирается так, чтобы выполнялось условие.

Эти алгоритмы различаются способом построения вектора ****и выбора шага 

## Метод градиентного спуска с постоянным шагом

Алгоритм метода градиентного спуска состоит из следующих этапов.

Шаг 1. Задать начальную точку , погрешности расчета число , , , - предельное число итераций. Найти градиент функции в произвольной точке .

Шаг 2. Принять .

Шаг 3. Вычислить .

Шаг 4. Проверить выполнение критерия окончания :

А) если критерий выполнен, расчет закончен ;

Б) если критерий не выполнен, то перейти к этапу 5;

Шаг 5. Проверить выполнение неравенства :

А) если неравенство выполнено, то расчет окончен: ;

Б) если нет, то перейти к шагу 6.

Шаг 6. Задать величину шага .

Шаг 7. Вычислить .

Шаг 8. Проверить выполнение условия.

А) если условие выполнено, то перейти к шагу 9;

Б) если условие не выполнено, принять  и перейти к шагу 7.

Шаг 9. Проверить выполнение условий :

А) если оба условия выполнены при текущем значении  и , то расчет окончен и ;

Б) если хотя бы одно из условий не выполнено, то принять и перейти к шагу 3.

## Метод наискорейшего градиентного спуска

Алгоритм метода наискорейшего градиентного спуска состоит из следующих этапов.

Шаг 1. Задать начальную точку , погрешности расчета , , - предельное число итераций. Найти градиент функции в произвольной точке .

Шаг 2. Принять .

Шаг 3. Вычислить .

Шаг 4. Проверить выполнение критерия окончания :

А) если критерий выполнен, расчет закончен ;

Б) если критерий не выполнен, то перейти к шагу 5;

Шаг 5. Проверить выполнение неравенства :

А) если неравенство выполнено, то расчет окончен: ;

Б) если нет, то перейти к шагу 6.

Шаг 6. Задать величину шага  из условия:

.

Шаг 7. Вычислить .

Шаг 8. Проверить выполнение условий



А) если оба условия выполнены при текущем значении  и , то расчет окончен и ;

Б) если хотя бы одно из условий не выполнено, то принять и перейти к шагу 3.

**Метод Ньютона**

Алгоритм метода Ньютона состоит из следующих шагов.

Шаг 1. Задать начальную точку , погрешности расчета , , - предельное число итераций. Найти градиент функции в произвольной точке  и матрицу Гессе .

Шаг 2. Принять .

Шаг 3. Вычислить .

Шаг 4. Проверить выполнение критерия окончания :

А) если критерий выполнен, расчет закончен ;

Б) если критерий не выполнен, то перейти к этапу 5;

Шаг 5. Проверить выполнение неравенства :

А) если неравенство выполнено, то расчет окончен: ;

Б) если нет, то перейти к шагу 6.

Шаг 6. Вычислить матрицу .

Шаг 7. Вычислить матрицу .

Шаг 8. Проверить выполнение условия :

А) если , то перейти к шагу 9;

Б) если , то перейти к этапу 10, приняв 

Шаг 9. Определить .

Шаг 10. Вычислить , приняв , если  или выбрав  из условия  если .

Шаг 11. Проверить выполнение условий



А) если оба условия выполнены при текущем значении  и , то расчет окончен и ;

Б) если хотя бы одно из условий не выполнено, то принять  и перейти к шагу 3.

**Метод сопряженных направлений**

Метод основан на том, что минимум квадратичной функции может быть найден не более чем за  шагов при условии, что поиск ведется вдоль сопряженных относительно матрицы Гессе направлений. Этот факт применяется и для неквадратичных функций. Задается начальная точка  и направления, совпадающие с координатами

.

## Находится минимум при последовательном движении по направлению с помощью одного из методов одномерной минимизации. При этом полученная ранее точка минимума берется в качестве исходной точки для поиска по следующему направлению, а направление используется как при первом , так и последнем поиске. Находится новое направление поиска, сопряженное с . Оно проходит через точки, полученные при первом и последнем поиске. Заменяется на , на и так далее. Направление заменяется сопряженным направлением, после чего повторяется поиск по направлениям, уже не содержащим старого направления .

Для квадратичных функций последовательность из  одномерных поисков приводит к точке минимума.

Алгоритм метода сопряженных градиентов состоит из следующих этапов.

Шаг 1. Задать начальную точку , погрешность расчета . В качестве начальных направлений используются вектора

.

Принимается .

Шаг 2. Найти где  находится в результате поиска минимума функции  по  одним из методов одномерной минимизации.

Шаг 3. Проверить выполнение условий:

А) если , то принять  и перейти к шагу 2;

Б) если , то проверить успешность поиска по  первым направлениям.

Если то поиск завершить и принять иначе принять  и перейти к шагу 2;

В) если , то проверить успешность поиска по  последним направлениям.

Если то поиск завершить и принять иначе перейти к шагу 4 для построения сопряженного направления.

Шаг 4 . Принять  и проверить условие окончания:

А) если , то поиск завершить и принять ;

Б) иначе принять  - новое направление;

- исключается старое направление.

Если при этом  то новая система направлений линейно независима. В этом случае принять  и перейти к шагу 2.

Если то новая система направлений линейно зависима. Тогда следует продолжить поиск в старых направлениях. Для этого принять:  и перейти к шагу 2.

**Задания для самостоятельного решения**

1**.** Используя алгоритм градиентного спуска с дроблением шага найти решение задачи безусловной минимизации функции  с начальной точкой :

1. ; , ;
2. ; , ;
3. ; , ;
4. ; , ;
5. ; , ;
6. ; , ;
7. ; , ;
8. ; , ;
9. ; , ;
10. ; , .

2. Используя модификации метода Ньютона найти минимум  функции унимодальной на отрезке  функции :

1. ;
2. ;
3. ;
4. ;
5. ;
6. ;
7. ;
8. ;
9. ;
10. .

**Раздел 5. ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ УСЛОВНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ**

Применение необходимых и достаточных условий условного экстремума эффективно для решения ограниченного числа задач, в которых имеются аналитические решения. Для решения большинства практических задач используются численные методы, которые можно разделить на две группы:

- методы последовательной безусловной оптимизации;

- методы возможных направлений.

Методы последовательной безусловной оптимизации основаны на преобразовании задачи условной оптимизации в последовательность задач безусловной оптимизации путем введения в рассмотрение вспомогательных функций.

**Метод штрафных функций**

Метод штрафных функций относится к классу методов последовательной безусловной оптимизации и, как все методы этого класса, предназначен для решения многомерной задачи локальной условной оптимизации. В методе штрафных функций функцию *Pα*(*х*), которая в этом случае называется штрафной функцией, подбирают таким образом, чтобы при больших  функция  мало отличалась от функции *f*(*x*) при  и быстро возрастала при удалении точки  от границы области допустимых значений *D*. В данном методе точка *х* в процессе поиска может выходить за границы области *D* (рис. 6.4). Т.е. метод штрафных функций относится к классу методов внешней точки, в котором при решении задачи условной оптимизации используемый метод поиска разрешает текущей точке *х* выходить за границы области ее допустимых значений. Рассмотренный выше пример также иллюстрирует метод штрафных функций.

*Алгоритм метода штрафов состоит из следующих этапов*

Шаг 1. Задать начальную точку  вне области допустимых решений, начальное значение параметра штрафа , число  для увеличения параметра штрафа, погрешность расчета . Принять .

Шаг 2. Составить вспомогательную функцию

,

где функция штрафа  - квадрат срезки.

 - срезка функции:



Шаг 3. Найти точку  безусловного минимума функции  по  с помощью какого либо метода (нулевого, первого или второго порядка):

 . При этом задать все требуемые выбранным методом параметры. В качестве начальной точки взять . Вычислить функцию штрафа .

Шаг 4. Проверить выполнение условия окончания:

А) если , процесс поиска закончить: ;

Б) если , то принять  и перейти к шагу 2.

**Метод барьерных функций**

Метод барьерных функций относится к классу методов последовательной безусловной оптимизации и, как все методы этого класса, предназначен для решения многомерной задачи локальной условной оптимизации. В методе барьерных функций функцию *P*α(*х*), которая в этом случае называется барьерной функцией, подбирают таким образом, чтобы при больших функция  мало отличалась от функции *f*(*x*) при  и быстро возрастала при приближении точки  к границе области допустимых значений *D*. В данном методе точка *х* не может выходить за границы области *D* (рис. 6.5). Это означает, что метод барьерных функций относится к классу методов внутренней точки, в котором при решении задачи условной оптимизации используемый метод поиска запрещает текущей точке *х* выходить за границы области ее допустимых значений.

*Алгоритм метода барьерных функций состоит из следующих этапов*

Шаг 1. Задать начальную точку  внутри области , начальное значение параметра штрафа , число  для уменьшения величины параметра штрафа, погрешность расчета . Принять .

Шаг 2. Составить вспомогательную функцию

 или .

Шаг 3. Найти точку  безусловного минимума функции  по  с помощью какого либо метода (нулевого, первого или второго порядка):

 с проверкой принадлежности текущей точки внутренности множества . При этом задать все требуемые выбранным методом параметры. В качестве начальной точки взять .

Вычислить функцию штрафа  (обратная функция штрафа) или  (логарифмическая функция штрафа).

Шаг 4. Проверить выполнение условия окончания:

А) если , то процесс поиска закончить, приняв ;

Б) если , то принять  и перейти к шагу 2.

**Задания для самостоятельного решения**

Используя алгоритм метода штрафов найти решение задачи:

1. 
2. 
3. 
4. 
5. 

**СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ**

1. Аттетков, А.В. Методы оптимизации: Учебное пособие / А.В. Аттетков, В.С. Зарубин, А.Н. Канатников. - М.: ИЦ РИОР, НИЦ ИНФРА-М, 2013. - 270 c.
2. Сухарев, А. Г. Курс методов оптимизации / А.Г. Сухарев, А.В. Тимохов, В.В. Федоров. - М.: ФИЗМАТЛИТ, **2012.** - 368 c.
3. Пантелеев, А.В. Методы оптимизации в примерах и задах [Текст]: учеб. пособие для студ. вузов/ А.В. Пантелеев, Т.А. Летова.- М.: Высш.шк., 2002.- 544 с.
4. Ренин, С.В. Методы оптимизации [Электронный ресурс]: сборник задач и упражнений/ С.В. Ренин, Н.Д. Ганелина. — Электрон. текстовые данные. — Новосибирск: Новосибирский государственный технический университет, 2011. — 54 c. — 978-5-7782-1688-4. — Режим доступа: <http://www.iprbookshop.ru/45389.html>
5. Мицель, А.А. Методы оптимизации [Электронный ресурс]: учебное пособие/ А.А. Мицель, А.А. Шелестов, В.В. Романенко. — Электрон. текстовые данные. — Томск: Томский государственный университет систем управления и радиоэлектроники, 2017. — 198 c. — 2227-8397. — Режим доступа: <http://www.iprbookshop.ru/72127.html>

КОЧКАРОВ Ахмат Магомедович

ХУБИЕВА Диана Абрек-Зауровна

**МЕТОДЫ ОПТИМИЗАЦИИ**

Учебно-методическое пособие

для обучающихся 3 курса направления подготовки

09.03.04 Программная инженерия

Печатается в редакции автора

Корректор Темирлиева Р.М.

Редактор Темирлиева Р.М.

Сдано в набор . 25.01.2019 г.

Формат 60х84/16

Бумага офсетная.

Печать офсетная.

Усл. печ. л. 2,5

Заказ № 3701

Тираж 100 экз.

Оригинал-макет подготовлен в Библиотечно-издательском

центре СКГА

369000, г. Черкесск, ул. Ставропольская, 36