

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ  
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ  
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ  
«СЕВЕРО-КАВКАЗСКАЯ ГОСУДАРСТВЕННАЯ  
АКАДЕМИЯ»

«УТВЕРЖДАЮ»

И. о. проректора по учебной работе

« 28 » 03

Ю. Нагорная



**РАБОЧАЯ ПРОГРАММА ДИСЦИПЛИНЫ**

Основы функционального анализа

Уровень образовательной программы \_\_\_\_\_ бакалавриат \_\_\_\_\_

Направление подготовки \_\_\_\_\_ 01.03.04 Прикладная математика \_\_\_\_\_

Направленность (профиль) \_\_\_\_\_ Прикладная математика \_\_\_\_\_

Форма обучения \_\_\_\_\_ очная \_\_\_\_\_

Срок освоения ОП \_\_\_\_\_ 4 года \_\_\_\_\_

Институт \_\_\_\_\_ Цифровых технологий \_\_\_\_\_

Кафедра разработчик РПД \_\_\_\_\_ Математика \_\_\_\_\_

Выпускающая кафедра \_\_\_\_\_ Математика \_\_\_\_\_

Начальник  
учебно-методического управления

\_\_\_\_\_

Семенова Л.У.

Директор института ЦТ

\_\_\_\_\_

Тебурев Д.Б.

Заведующий выпускающей кафедрой

\_\_\_\_\_

Кочкаров А.М.

г. Черкесск, 2024 г.

## СОДЕРЖАНИЕ

<b>1. Цели освоения дисциплины.....</b>	<b>4</b>
<b>2. Место дисциплины в структуре образовательной программы.....</b>	<b>4</b>
<b>3. Планируемые результаты обучения по дисциплине .....</b>	<b>5</b>
<b>4. Структура и содержание дисциплины.....</b>	<b>6</b>
4.1. Объем дисциплины и виды учебной работы.....	6
4.2. Содержание дисциплины .....	7
4.2.1. Разделы (темы) дисциплины, виды учебной деятельности и формы контроля. .	7
4.2.2. Лекционный курс .....	8
4.2.3. Лабораторный практикум .....	10
4.2.4. Практические занятия.....	10
4.3. Самостоятельная работа обучающегося.....	11
<b>5. Перечень учебно-методического обеспечения для самостоятельной работы обучающихся по дисциплине .....</b>	<b>12</b>
<b>6. Образовательные технологии.....</b>	<b>17</b>
<b>7. Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины .....</b>	<b>18</b>
7.1. Перечень основной и дополнительной учебной литературы.....	18
7.2. Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети «Интернет».....	18
7.3. Информационные технологии, лицензионное программное обеспечение.....	18
<b>8. Материально-техническое обеспечение дисциплины.....</b>	<b>19</b>
8.1. Требования к аудиториям (помещениям, местам) для проведения занятий.....	20
8.2. Требования к оборудованию рабочих мест преподавателя и обучающихся.....	20
8.3. Требования к специализированному оборудованию.....	20
<b>9. Особенности реализации дисциплины для инвалидов и лиц с ограниченными возможностями здоровья.....</b>	<b>21</b>
<b>Приложение 1. Фонд оценочных средств.....</b>	<b>22</b>
<b>Приложение 2. Аннотация рабочей программы.....</b>	<b>42</b>
<b>Рецензия на рабочую программу.....</b>	<b>43</b>
<b>Лист утверждения рабочей программы дисциплины.....</b>	<b>44</b>

## 1. ЦЕЛИ ОСВОЕНИЯ ДИСЦИПЛИНЫ

Целями освоения дисциплины «Основы функционального анализа» являются:

- изучение основных понятий и теорем функционального анализа;
- развитие логического мышления и математической культуры;
- формирование теоретической базы для понимания смежных математических и прикладных дисциплин.

*Задачи курса:*

- формирование общенаучных базовых знаний по функциональному анализу, интегральным уравнениям и интегральным преобразованиям.

- формирование умения грамотно пользоваться языком предметной области, строго доказать утверждение, формулировать результат.

## 2. МЕСТО ДИСЦИПЛИНЫ В СТРУКТУРЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЙ ПРОГРАММЫ

2.1. Дисциплина «Основы функционального анализа» относится к части, формируемой участниками образовательных отношений Блока 1 Дисциплины (модули), имеет тесную связь с другими дисциплинами.

2.2. В таблице приведены предшествующие и последующие дисциплины, направленные на формирование компетенций дисциплины в соответствии с матрицей компетенций ОП.

### Предшествующие и последующие дисциплины, направленные на формирование компетенций

№ п/п	Предшествующие дисциплины	Последующие дисциплины
1.	Математический анализ	<b>Математическое моделирование</b> Преддипломная практика

### 3. ИНДИКАТОРЫ ДОСТИЖЕНИЯ КОМПЕТЕНЦИИ

Планируемые результаты освоения образовательной программы (ОП) – компетенции обучающихся определяются требованиями стандарта по направлению подготовки 01.03.04 Прикладная математика и формируются в соответствии с матрицей компетенций ОП

<b>№ п/п</b>	<b>Номер/ индекс компетенции</b>	<b>Наименование компетенции (или ее части)</b>	<b>В результате изучения дисциплины обучающиеся должны:</b>
1	2	3	4
1.	ПК-1	Способность понимать и применять современный математический аппарат	ПК-1.1 Выявляет различные методы математического аппарата для решения прикладных задач различной направленности ПК-1.2 Способен осуществлять анализ математических методов, производить классификацию этих методов в решении прикладных задач различной направленности ПК-1.3 Собирает и систематизирует исходные данные для дальнейшей обработки различными математическими методами

#### 4. СТРУКТУРА И СОДЕРЖАНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ

##### 4.1. ОБЪЕМ ДИСЦИПЛИНЫ И ВИДЫ УЧЕБНОЙ РАБОТЫ

Вид учебной работы		Всего часов	Семестры
			№ 5
			часов
1		2	3
<b>Аудиторная контактная работа (всего)</b>		<b>72</b>	<b>72</b>
В том числе:			
Лекции (Л)		36	36
Практические занятия (ПЗ),		36	36
Лабораторные работы (ЛР)			
<b>Контактная внеаудиторная работа, в том числе: индивидуальные и групповые консультации</b>		<b>1,7</b>	<b>1,7</b>
<b>Самостоятельная работа обучающегося (СРО) (всего)</b>		<b>34</b>	<b>34</b>
<i>Расчетно-графические работы (РГР)</i>		9	9
<i>Подготовка к занятиям (ПЗ)</i>		12	12
<i>Подготовка к тестовому контролю</i>		8	8
<i>Подготовка к коллоквиуму</i>		5	5
<b>Промежуточная аттестация</b>	зачет (З) , в том числе	<b>3</b>	<b>3</b>
	Прием зачета, час	0,3	0,3
<b>ИТОГО: Общая трудоемкость</b>	<b>часов</b>	<b>108</b>	<b>108</b>
	<b>зач. ед.</b>	3	3

## 4.2. СОДЕРЖАНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ

### 4.2.1. Разделы (темы) дисциплины, виды учебной деятельности и формы контроля

#### Очная форма обучения

№ п/п	Наименование раздела дисциплины	Виды учебной деятельности, включая самостоятельную работу обучающихся (в часах)					Формы текущей и промежуточной аттестации
		Л	ЛР	ПЗ	СР О	все го	
1	2	3	4	5	6	7	8
Семестр 5							
1.	<b>Линейные, нормированные и банаховы пространства</b>	10		10	8	28	Коллоквиум, расчетно-графическая работа (РГР)
2.	<b>Пространство Лебега</b>	10		10	10	30	Коллоквиуму, расчетно-графическая работа (РГР) тестовый контроль
3.	<b>Линейные операторы</b>	8		8	8	24	Коллоквиум, расчетно-графическая работа (РГР) тестовый контроль
4.	<b>Принцип сжимающих отображений.</b>	8		8	8	24	Коллоквиум, расчетно-графическая работа (РГР) тестовый контроль
	<b>Контактная внеаудиторная работа</b>					1,7	индивидуальные и групповые консультации
	<b>Промежуточная аттестация</b>					0,3	Зачет
	<b>Итого часов:</b>	<b>36</b>		<b>36</b>	<b>34</b>	<b>108</b>	

#### 4.2.2. Лекционный курс.

№ п/п	Наименование раздела дисциплины	Наименование темы лекции	Содержание лекции	Всего часов
1	2	3	4	5
Семестр 5				
1.	«Линейные, нормированные и банаховы пространства»	<b>1.1. Линейные пространства.</b>	Определение и примеры линейных пространств. Линейная зависимость и линейная независимость элементов. Конечномерные и бесконечномерные пространства. Линейные и аффинные многообразия. Изоморфизм линейных пространств. Выпуклые множества в линейных пространствах.	<b>2</b>
		<b>1.2. Нормированные пространства.</b>	Определение нормированного пространства. Предел последовательности. Неравенства Гельдера и Минковского для сумм. Примеры нормированных пространств.	<b>2</b>
		<b>1.3. Анализ в нормированных пространствах.</b>	Открытые и замкнутые множества. Подпространства нормированного пространства. Расстояние от точки до подпространства. Приближение элементами подпространства. Линейные многообразия, плотные в нормированном пространстве. Изометричные нормированные пространства.	<b>2</b>
		<b>1.4. Пространства со скалярным произведением.</b>	Евклидовы пространства. Унитарные пространства. Ортогональные и ортонормированные системы. Примеры пространств со скалярным произведением.	<b>2</b>
		<b>1.5. Банаховы и гильбертовы пространства.</b>	Фундаментальные последовательности. Определение банахова пространства. Примеры банаховых пространств. Ряды в нормированных и банаховых пространствах. Принцип вложенных шаров. Множества I и II категории. Определение	<b>2</b>

			гильбертова пространства.	
2.	<b>«Пространство Лебега»</b>	<p><b>2.1. Пополнение нормированных пространств и пространств со скалярным произведением.</b></p> <p><b>2.2. Интеграл Лебега. Мера Лебега.</b></p>	<p>Теорема о пополнении нормированного пространства. Пополнение пространств со скалярным произведением. Пространство Лебега <math>L[a, b]</math></p> <p>Множества меры нуль. Эквивалентные функции. Сходимость почти всюду и сходимость в среднем. Интеграл Лебега и функции, интегрируемые по Лебегу. Основные свойства интеграла Лебега и функций интегрируемых по Лебегу. Мера Лебега.</p>	<p><b>4</b></p> <p><b>6</b></p>
3.	<b>«Линейные операторы»</b>	<p><b>3.1. Линейные операторы. Непрерывность и ограниченность.</b></p> <p><b>3.2. Пространства линейных операторов.</b></p>	<p>Определение оператора. Взаимно однозначные операторы. Суперпозиция операторов. Операторы в нормированных пространствах. Предел и непрерывность. Определение линейного оператора. Непрерывные и ограниченные линейные операторы. Примеры линейных операторов.</p> <p>Нормированное пространство <math>L(X, Y)</math>. Норма линейного оператора. Равномерная сходимость линейных операторов. Сильная сходимость в <math>L(X, Y)</math>. Принцип равномерной ограниченности. Продолжение линейного оператора по непрерывности.</p>	<p><b>4</b></p> <p><b>4</b></p>
4.	<b>«Принцип сжимающих отображений»</b>	<p><b>4.1 Принцип сжимающих отображений.</b></p> <p><b>4.2. Применение принципа сжимающих отображений.</b></p>	<p>Неподвижные точки нелинейного оператора, сжимающие отображения. Принцип сжимающих отображений. Следствия принципа сжимающих отображений. Обобщенный принцип сжимающих отображений. Простейшие применения принципа сжимающих отображений, в том числе к интегральным уравнениям</p>	<p><b>4</b></p> <p><b>4</b></p>

Итого часов в 5 семестре	<b>36</b>
--------------------------	-----------

#### 4.2.3. Лабораторный практикум.

Не предполагается.

#### 4.2.4. Практические занятия.

№ п/п	Наименование раздела дисциплины	Наименование практического занятия	Содержание практического занятия	Всего часов
1	2	3	4	5
Семестр 5				
1.	<b>Линейные, нормированные и банаховы пространства</b>	<b>1.1 Линейные пространства</b>	Линейная зависимость и линейная независимость элементов.	2
		<b>1.2 Нормированные пространства</b>	Конечномерные и бесконечномерные пространства. Линейные и аффинные многообразия. Примеры нормированных пространств.	2
		<b>1.3 Анализ в нормированных пространствах</b>	Открытые и замкнутые множества. Подпространства нормированного пространства. Расстояние от точки до подпространства.	2
		<b>1.4 Пространства со скалярным произведением.</b>	Евклидовы пространства. Унитарные пространства. Ортонормированные системы. Примеры пространств со скалярным произведением.	2
		<b>1.5 Банаховы и гильбертовы пространства</b>	Примеры банаховых и гильбертовых пространств.	2
2.	<b>Пространство Лебега</b>	<b>2.1. Пополнение нормированных пространств и пространств со скалярным произведением.</b>	Пополнение пространств со скалярным произведением. Пространство Лебега $L[a, b]$	4
		<b>2.2. Интеграл Лебега. Мера Лебега.</b>	Эквивалентные функции. Сходимость почти всюду и сходимость в среднем. Интеграл Лебега и функции, интегрируемые по Лебегу. Мера Лебега.	6
3.	<b>Линейные</b>	<b>3.1. Линейные</b>	Взаимно однозначные	4

	<b>операторы</b>	<b>операторы. Непрерывность и ограниченность.  3.2. Пространства линейных операторов.</b>	операторы. Суперпозиция операторов. Предел и непрерывность. Примеры линейных операторов. Нормированное пространство $L(X, Y)$ . Норма линейного оператора.	4
4.	<b>Принцип сжимающих отображений</b>	<b>4.1. Принцип сжимающих отображений.  4.2. Применение принципа сжимающих отображений.</b>	Неподвижные точки нелинейного оператора, сжимающие отображения.  Простейшие применения принципа сжимающих отображений, в том числе к интегральным уравнениям	4  4
ИТОГО часов в 5 семестре				<b>36</b>

#### 4.3. САМОСТОЯТЕЛЬНАЯ РАБОТА ОБУЧАЮЩЕГОСЯ.

№ п/п	Наименование раздела (темы) дисциплины	№ п/п	Виды СРО	Всего часов
1	2	3	4	5
<b>Семестр 5</b>				
1.	<b>«Линейные, нормированные и банаховы пространства»</b>	1.1.	Подготовка к занятиям (ПЗ). Расчетно-графическая работа (РГР)	1 1
		1.2	Подготовка к занятиям (ПЗ).	1
		1.3	Подготовка к тестовому контролю.	1
		1.4	Подготовка к занятиям (ПЗ). Подготовка к коллоквиуму.	1 1
		1.5	Подготовка к занятиям (ПЗ). Расчетно-графическая работа (РГР)	1 1
2.	<b>«Пространство Лебега»</b>	2.1.	Подготовка к занятиям (ПЗ). Подготовка к тестовому контролю.	1 3
		2.2	Подготовка к коллоквиуму. Подготовка к занятиям (ПЗ). Расчетно-графическая работа (РГР)	2 2 2

3.	«Линейные операторы»	3.1.	Подготовка к занятиям (ПЗ).	2
			Расчетно-графическая работа (РГР)	2
		3.2.	Подготовка к занятиям (ПЗ).	2
			Расчетно-графическая работа (РГР)	2
4.	«Принцип сжимающих отображений»	4.1.	Расчетно-графическая работа (РГР)	1
			Подготовка к тестовому контролю.	2
		4.2.	Подготовка к тестовому контролю.	2
			Подготовка к коллоквиуму.	3
<b>ИТОГО:</b>				34

## 5. ПЕРЕЧЕНЬ УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОГО ОБЕСПЕЧЕНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ ОБУЧАЮЩИХСЯ ПО ДИСЦИПЛИНЕ

### 5.1. Методические указания для подготовки обучающихся к лекционным занятиям

Лекции составляют основу теоретического обучения и дают систематизированные основы научных знаний по дисциплине, раскрывают состояние и перспективы развития соответствующей области науки, концентрируют внимание обучающихся на наиболее сложных и узловых вопросах, стимулируют их активную познавательную деятельность и способствуют формированию творческого мышления.

Ведущим методом в лекции выступает устное изложение учебного материала, сопровождающееся использованием мультимедиа аппаратуры.

Лекция является исходной формой всего учебного процесса, играет направляющую и организующую роль в самостоятельном изучении предмета. Важнейшая роль лекции заключается в личном воздействии лектора на аудиторию.

Основная дидактическая цель лекции - обеспечение ориентировочной основы для дальнейшего усвоения учебного материала. Построение лекций по дисциплине «Основы функционального анализа» осуществляется на основе принципов научности (предполагает воспитание диалектического подхода к изучаемым предметам и явлениям, диалектического мышления, формирование правильных представлений, научных понятий и умения точно выразить их в определениях и терминах, принятых в науке)

На лекциях раскрываются основные теоретические аспекты, приводятся примеры реализации на практике, освещается достигнутый уровень формализации деятельности по автоматизации процессов.

Специфической чертой изучения данного курса является то, что приобретение умений и навыков работы невозможно без систематической тренировки, которая осуществляется на практических занятиях.

Основное внимание в лекции сосредотачивается на глубоком, всестороннем раскрытии главных, узловых, наиболее трудных вопросов темы. Уже на начальном этапе подготовки лекции решается вопрос о соотношении материалов учебника и лекции.

Для того чтобы лекция для обучающегося была продуктивной, к ней надо готовиться. Подготовка к лекции заключается в следующем:

- узнать тему лекции (по тематическому плану, по информации лектора),
- прочитать учебный материал по учебнику и учебным пособиям,
- уяснить место изучаемой темы в своей профессиональной подготовке,

- выписать основные термины,
- ответить на контрольные вопросы по теме лекции,
- уяснить, какие учебные элементы остались неясными,
- записать вопросы, которые можно задать лектору на лекции.

В ходе лекционных занятий обучающийся должен вести конспектирование учебного материала. Обращать внимание на категории, формулировки, раскрывающие содержание тех или иных явлений и процессов, научные выводы и практические рекомендации, положительный опыт в ораторском искусстве. Желательно оставить в рабочих конспектах поля, на которых делать пометки из рекомендованной литературы, дополняющие материал прослушанной лекции, а также подчеркивающие особую важность тех или иных теоретических положений. Задавать преподавателю уточняющие вопросы с целью уяснения теоретических положений, разрешения спорных ситуаций.

Указания по конспектированию лекций:

- не нужно стараться записать весь материал, озвученный преподавателем. Как правило, лектором делаются акценты на ключевых моментах лекции для начала конспектирования;
- конспектирование необходимо начинать после оглашением главной мысли лектором, перед началом ее комментирования;
- выделение главных мыслей в конспекте другим цветом целесообразно производить вне лекции с целью сокращения времени на конспектирование на самой лекции;
- применение сокращений приветствуется;
- нужно избегать длинных и сложных рассуждений;
- дословное конспектирование отнимает много времени, поэтому необходимо опускать фразы, имеющие второстепенное значение;
- если в лекции встречаются неизвестные термины, лучше всего отметить на полях их существование, оставить место для их пояснения и в конце лекции задать уточняющий вопрос лектору.

Конспектирование и рецензирование, таким образом, это процесс выделения основных мыслей текста, его осмысления и оценки содержащейся в нем информации. Данный вид учебной работы является видом индивидуальной самостоятельной работы обучающегося.

## **5.2. Методические указания для подготовки обучающихся к практическим занятиям**

В процессе подготовки и проведения практических занятий обучающиеся закрепляют полученные ранее теоретические знания, приобретают навыки их практического применения, опыт рациональной организации учебной работы, готовятся к сдаче зачета. Поскольку активность на практических занятиях является предметом внутрисеместрового контроля его продвижения в освоении курса, подготовка к таким занятиям требует ответственного отношения. При подготовке к занятию в первую очередь должны использовать материал лекций и соответствующих литературных источников. Самоконтроль качества подготовки к каждому занятию осуществляют, проверяя свои знания и отвечая на вопросы для самопроверки по соответствующей теме.

Входной контроль осуществляется преподавателем в виде проверки и актуализации знаний обучающихся по соответствующей теме.

Выходной контроль осуществляется преподавателем проверкой качества и полноты выполнения задания.

Подготовку к практическому занятию каждый обучающийся должен начать с ознакомления с планом практического занятия, который отражает содержание предложенной темы. Тщательное продумывание и изучение вопросов плана основывается на проработке текущего материала, а затем изучение обязательной и дополнительной литературы, рекомендованной к данной теме.

Все новые понятия по изучаемой теме необходимо выучить наизусть и внести в глоссарий, который целесообразно вести с самого начала изучения курса. Результат такой

работы должен проявиться в способности обучающегося свободно ответить на теоретические вопросы, его выступлении и участии в коллективном обсуждении вопросов изучаемой темы, правильном выполнении практических заданий.

Предлагается следующая опорная схема подготовки к практическим занятиям.

1. Ознакомление с темой практического занятия. Выделение главного (основной темы) и второстепенного (подразделы, частные вопросы темы).

2. Освоение теоретического материала по теме с опорой на лекционный материал, учебник и другие учебные ресурсы. Самопроверка: постановка вопросов, затрагивающих основные термины, определения и положения по теме, и ответы на них.

3. Выполнение практического задания. Обнаружение основных трудностей, их решение с помощью дополнительных интеллектуальных усилий и/или подключения дополнительных источников информации.

4. Решение типовых заданий расчетно-графической работы.

Обучающийся при подготовке к практическому занятию может консультироваться с преподавателем и получать от него наводящие разъяснения, задания для самостоятельной работы.

Дидактические цели практического занятия: углубление, систематизация и закрепление знаний, превращение их в убеждения; проверка знаний; привитие умений и навыков самостоятельной работы с книгой; развитие культуры речи, формирование умения аргументировано отстаивать свою точку зрения, отвечать на вопросы слушателей; умение слушать других, задавать вопросы.

Задачи: стимулировать регулярное изучение программного материала, первоисточников; закреплять знания, полученные на уроке и во время самостоятельной работы; обогащать знаниями благодаря выступлениям товарищей и учителя на занятии, корректировать ранее полученные знания.

Функции практического занятия:

- учебная (углубление, конкретизация, систематизацию знаний, усвоенных во время занятий и в процессе самостоятельной подготовки к семинару);

- развивающая (развитие логического мышления учащихся обучающихся, приобретение ими умений работать с различными литературными источниками, формирование умений и навыков анализа фактов, явлений, проблем и т.д.);

- воспитательная (воспитание ответственности, работоспособности, воспитание культуры общения и мышления, привитие интереса к изучению предмета, формирование потребности рационализации и учебно-познавательной деятельности и организации досуга)

- диагностическая -коррекционную и контролирующую (контроль за качеством усвоения обучающимися учебного материала, выявление пробелов в его усвоении и их преодоления)

- организация самостоятельной работы обучающихся содержит объяснение содержания задачи, методики его выполнения, краткую аннотацию рекомендованных источников информации, предложения по выполнению индивидуальных заданий.

### **5.3. Методические указания по самостоятельной работе обучающихся**

Самостоятельная работа обучающихся предполагает различные формы индивидуальной учебной деятельности: конспектирование научной литературы, сбор и анализ практического материала в СМИ, проектирование, выполнение тематических и творческих заданий и пр. Выбор форм и видов самостоятельной работы определяется индивидуально-личностным подходом к обучению совместно преподавателем и обучающимся.

#### **5.3.1. Методические указания по подготовке к коллоквиуму.**

Подготовка к коллоквиуму начинается с консультации преподавателя, на которой он разъясняет развернутую тематику проблемы, рекомендует литературу для изучения и объясняет и объясняет процедуру проведения коллоквиуму.

Подготовка включает в себя изучение конспекта лекций, рекомендованной литературы и (по указанию преподавателя) конспектирование важнейших источников.

Коллоквиум проводится в форме индивидуальной беседы с каждым обучающимся или беседы в небольших группах (3-5 человек). Обычно преподаватель задает несколько кратких конкретных вопросов, позволяющих выяснить степень добросовестности работы с литературой, контролирует конспект. Далее более подробно обсуждается какая-либо сторона проблемы, что позволяет оценить уровень понимания. Обучающимся дается возможность высказать свое мнение, точку зрения, критику по определенным вопросам. При высказывании требуется аргументированность и обоснованность собственных оценок.

### **5.3.2. Методические указания по подготовке к тестовому контролю.**

Тесты – это вопросы или задания, предусматривающие конкретный, краткий, четкий ответ на имеющиеся эталоны ответов.

При самостоятельной подготовке к тестированию обучающемуся необходимо:

а) готовясь к тестированию, проработайте информационный материал по дисциплине. Проконсультируйтесь с преподавателем по вопросу выбора учебной литературы;

б) четко выясните все условия тестирования заранее. Вы должны знать, сколько тестов будет предложено, сколько времени отводится на тестирование, какова система оценки результатов и т.д.

в) приступая к работе с тестами, внимательно и до конца прочтите вопрос и предлагаемые варианты ответов. Выберите правильные (их может быть несколько). На отдельном листке ответов выпишите цифру вопроса и буквы соответствующие правильным ответам;

г) если встретили чрезвычайно трудный вопрос, не тратьте много времени на него. Переходите к другим тестам. Вернитесь к трудному вопросу в конце.

д) обязательно оставьте время для проверки ответов, чтобы избежать механических ошибок.

### **5.3.3. Методические указания по выполнению расчетно-графической работы**

Расчетно-графическая работа оформляется в распечатанном или рукописном варианте. Номер варианта выбирается по порядковому номеру списка обучающихся. РГР с другим номером варианта не зачитываются. Работа выполняется аккуратно, в случае рукописного оформления чтение ее не должно вызывать затруднений.

РГР должна состоять из титульного листа и основной части. Допускается включение в работу приложений, содержащих таблицы, рисунки, полученные на компьютере. На титульном листе обязательно указывается наименование дисциплины, ФИО обучающегося, группа, вариант задания, ФИО преподавателя. Выполненная и оформленная работа должна быть представлена преподавателю не позднее, чем за 10 дней до начала сессии.

В основной части РГР до решения каждой задачи должны быть представлены собственные данные: вариант задания, формулировка задания, численные значения, соответствующие своему варианту. Далее должно быть представлено решение с расшифровкой формул и последовательности действий. Все вычисления сначала представляются в виде расчетных формул, затем в формулы подставляются численные значения и записывается ответ с указанием единиц измерений (без промежуточных расчетов). Все вычислительные процедуры следует производить с точностью до 0,01.

### **Промежуточная аттестация**

По итогам семестра проводится зачет. При подготовке к сдаче зачета рекомендуется пользоваться материалами лекции и практических занятий, и материалами, изученными в ходе текущей самостоятельной работы. Зачет проводится в устной или письменной форме.

## 6. ОБРАЗОВАТЕЛЬНЫЕ ТЕХНОЛОГИИ

<b>№ п/п</b>	<b>№ семестра</b>	<b>Виды учебной работы</b>	<b>Образовательные технологии</b>	<b>Всего часов</b>
1	2	3	4	
1.	5	<i>Лекция «Линейные пространства.»</i>	<i>Проблемная</i>	2
2.	5	<i>Лекция «Нормированные пространства»</i>	<i>Проблемная</i>	2
3.	5	<i>Лекция «Банаховы пространства.»</i>	<i>Проблемная</i>	2
4.	5	<i>Лекция «Линейные операторы»</i>	<i>Проблемная</i>	2
5.	5	<i>Практическое занятие «Пространства со скалярным произведением.»</i>	<i>Тренинг</i>	2
6.	5	<i>Практическое занятие «Евклидовы пространства.»</i>	<i>Тренинг</i>	2
7.	5	<i>Практическое занятие «Унитарные пространства.»</i>	<i>Тренинг</i>	2
8.	5	<i>Практическое занятие «Линейные операторы»</i>	<i>Тренинг</i>	2

## **7. УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОЕ И ИНФОРМАЦИОННОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ**

### **7.1. Перечень основной и дополнительной учебной литературы**

#### **Основная литература**

1. Глазырина, П. Ю. Функциональный анализ. Типовые задачи: учебное пособие / П. Ю. Глазырина, М. В. Дейкалова, Л. Ф. Коркина. — Екатеринбург: Уральский федеральный университет, ЭБС АСВ, 2016. — 216 с. — ISBN 978-5-7996-1771-4. — Текст: электронный // Цифровой образовательный ресурс IPR SMART: [сайт]. — URL: <https://www.iprbookshop.ru/66213.html>
2. Крепкогорский, В. Л. Функциональный анализ: учебное пособие / В. Л. Крепкогорский. — Казань: Казанский национальный исследовательский технологический университет, 2014. — 116 с. — ISBN 978-5-7882-1650-8. — Текст: электронный // Цифровой образовательный ресурс IPR SMART: [сайт]. — URL: <https://www.iprbookshop.ru/62016.html>
3. Осиленкер, Б. П. Задачи и упражнения по функциональному анализу: учебно-практическое пособие / Б. П. Осиленкер. — Москва: Московский государственный строительный университет, ЭБС АСВ, 2015. — 132 с. — ISBN 978-5-7264-1186-6. — Текст : электронный // Цифровой образовательный ресурс IPR SMART : [сайт]. — URL: <https://www.iprbookshop.ru/60819.html>

#### **Дополнительная литература**

1. Сухинов, А. И. Лекции по функциональному анализу: учебное пособие / А. И. Сухинов, И. П. Фирсов. — Ростов-на-Дону: Издательство Южного федерального университета, 2009. — 192 с. — ISBN 978-5-9275-0671-2. — Текст: электронный // Цифровой образовательный ресурс IPR SMART: [сайт]. — URL: <https://www.iprbookshop.ru/46993.html>
2. Бутко, Я. А. Элементы функционального анализа и методы математической физики. Часть 1: учебное пособие / Я. А. Бутко; под редакцией М. М. Сержантова. — Москва: Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана, 2011. — 68 с. — Текст: электронный // Цифровой образовательный ресурс IPR SMART: [сайт]. — URL: <https://www.iprbookshop.ru/31>
3. Асташова, И. В. Функциональный анализ: учебное пособие / И. В. Асташова. — Москва: Евразийский открытый институт, 2011. — 112 с. — ISBN 978-5-374-00486-1. — Текст: электронный // Цифровой образовательный ресурс IPR SMART: [сайт]. — URL: <https://www.iprbookshop.ru/11120>.

### **7.2 Интернет-ресурсы, справочные системы**

<http://fcior.edu.ru> - Федеральный центр информационно-образовательных ресурсов;  
<http://elibrary.ru> - Научная электронная библиотека.

### 7.3. Информационные технологии, лицензионное программное обеспечение

Лицензионное программное обеспечение	Реквизиты лицензий/ договоров
Microsoft Azure Dev Tools for Teaching 1. Windows 7, 8, 8.1, 10 2. Visual Studio 2008, 2010, 2013, 2019 5. Visio 2007, 2010, 2013 6. Project 2008, 2010, 2013 7. Access 2007, 2010, 2013 и т. д.	Идентификатор подписчика: 1203743421 Срок действия: 30.06.2022  (продление подписки)
MS Office 2003, 2007, 2010, 2013	Сведения об Open Office: 63143487, 63321452, 64026734, 6416302, 64344172, 64394739, 64468661, 64489816, 64537893, 64563149, 64990070, 65615073 Лицензия бессрочная
Антивирус Dr.Web Desktop Security Suite	Лицензионный сертификат Серийный № 8DVG-V96F-H8S7-NRBC договор №441 от 21.09.23 Срок действия: с 22.09.2023 до 22.09.2024
Цифровой образовательный ресурс IPRsmart	Лицензионный договор № 10423/23П от 30.06.2023 г. Срок действия: с 01.07.2023 г. до 01.07.2024г.

Свободное программное обеспечение:  
WinDjView, SumatraPDF, 7-Zip

## 8. МАТЕРИАЛЬНО-ТЕХНИЧЕСКОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ

### 8.1. Требования к аудиториям (помещениям, местам) для проведения занятий Учебная аудитория для проведения занятий лекционного типа.

Специализированная мебель:

Кафедра настольная - 1 шт., доска меловая - 1 шт., стулья - 65 шт., парты - 34 шт.

Технические средства обучения, служащие для предоставления учебной информации большой аудитории:

Экран на штативе – 1 шт.

Проектор – 1 шт.

Ноутбук – 1 шт.

### Учебная аудитория для проведения занятий семинарского типа, курсового проектирования (выполнения курсовых работ), групповых и индивидуальных консультаций, текущего контроля и промежуточной аттестации.

Специализированная мебель:

Кафедра настольная - 1 шт., доска меловая - 1 шт., стулья - 65 шт., парты - 34 шт.

Технические средства обучения, служащие для предоставления учебной информации большой аудитории:

Экран на штативе – 1 шт.

Проектор – 1 шт.

Ноутбук – 1 шт.

### Помещение для самостоятельной работы.

Отдел обслуживания печатными изданиями

Специализированная мебель: Рабочие столы на 1 место – 21 шт. Стулья – 55 шт. Набор демонстрационного оборудования и учебно-наглядных пособий, обеспечивающих тематические иллюстрации: экран настенный – 1 шт.

Проектор – 1 шт. Ноутбук – 1 шт.  
Информационно-библиографический отдел.  
Специализированная мебель:  
Рабочие столы на 1 место - 6 шт. Стулья - 6 шт.  
Компьютерная техника с возможностью подключения к сети «Интернет» и обеспечением доступа в электронную информационно-образовательную среду ФГБОУ ВО «СевКавГА»:  
Персональный компьютер – 1 шт. Сканер – 1 шт. МФУ – 1 шт.  
Отдел обслуживания электронными изданиями  
Специализированная мебель:  
Рабочие столы на 1 место – 24 шт. Стулья – 24 шт.  
Набор демонстрационного оборудования и учебно-наглядных пособий, обеспечивающих тематические иллюстрации:  
Интерактивная система - 1 шт. Монитор – 21 шт. Сетевой терминал -18 шт. Персональный компьютер -3 шт. МФУ – 2 шт. Принтер –1шт.

### **Помещение для хранения и профилактического обслуживания учебного оборудования**

Специализированная мебель: Шкаф – 1 шт., стул -2 шт., кресло компьютерное – 2 шт., стол угловой компьютерный – 2 шт., тумбочки с ключом – 2 шт. Учебное пособие (персональный компьютер в комплекте) – 2 шт.

### **8.2. Требования к оборудованию рабочих мест преподавателя и обучающихся**

Рабочее место преподавателя, оснащенное компьютером с доступом в Интернет  
Рабочие места обучающихся, оснащенные компьютерами с доступом в Интернет, предназначенные для работы в электронной образовательной среде.

### **8.3. Требования к специализированному оборудованию нет**

## **9. ОСОБЕННОСТИ РЕАЛИЗАЦИИ ДИСЦИПЛИНЫ ДЛЯ ИНВАЛИДОВ И ЛИЦ С ОГРАНИЧЕННЫМИ ВОЗМОЖНОСТЯМИ ЗДОРОВЬЯ**

Для обеспечения образования инвалидов и обучающихся с ограниченными возможностями здоровья разрабатывается (в случае необходимости) адаптированная образовательная программа, индивидуальный учебный план с учетом особенностей их психофизического развития и состояния здоровья, в частности применяется индивидуальный подход к освоению дисциплины, индивидуальные задания: рефераты, письменные работы и, наоборот, только устные ответы и диалоги, индивидуальные консультации, использование диктофона и других записывающих средств для воспроизведения лекционного и семинарского материала.

В целях обеспечения обучающихся инвалидов и лиц с ограниченными возможностями здоровья комплектуется фонд основной учебной литературой, адаптированной к ограничению электронных образовательных ресурсов, доступ к которым организован в БИЦ Академии. В библиотеке проводятся индивидуальные консультации для данной категории пользователей, оказывается помощь в регистрации и использовании сетевых и локальных электронных образовательных ресурсов, предоставляются места в читальном зале.

## **ФОНД ОЦЕНОЧНЫХ СРЕДСТВ**

по дисциплине Основы функционального анализа

**1. ПАСПОРТ ФОНДА ОЦЕНОЧНЫХ СРЕДСТВ ПО ДИСЦИПЛИНЕ**  
«Основы функционального анализа»

**1. Компетенции, формируемые в процессе изучения дисциплины**

Индекс	Формулировка компетенции
ПК -1	Способность понимать и применять современный математический аппарат

**2. Этапы формирования компетенции в процессе освоения дисциплины**

Основными этапами формирования указанных компетенций при изучении обучающимися дисциплины являются последовательное изучение содержательно связанных между собой разделов (тем) учебных занятий. Изучение каждого раздела (темы) предполагает овладение обучающимися необходимыми компетенциями. Результат аттестации обучающихся на различных этапах формирования компетенций показывает уровень освоения компетенций обучающимися.

Этапность формирования компетенций прямо связана с местом дисциплины в образовательной программе.

Разделы (темы ) дисциплины	Проверяемая компетенция (коды)
	ПК-1
Линейные, нормированные и банаховы пространства	+
Пространство Лебега	+
Линейные операторы	+

### 3. Показатели, критерии и средства оценивания компетенций, формируемых в процессе изучения дисциплины

#### ПК-1 Способность понимать и применять современный математический аппарат

Индикаторы достижения компетенции	Критерии оценивания результатов обучения				Средства оценивания результатов обучения	
	неудовлетв	удовлетв	хорошо	Отлично	Текущий контроль	Промежуточная аттестация
ПК-1.1 Выявляет различные методы математического аппарата для решения прикладных задач различной направленности	Допускает существенные ошибки при выявлении методов математического аппарата для решения математических моделей при проведении функционального анализа	Демонстрирует частичные знания математического аппарата для решения математических моделей при проведении функционального анализа	Демонстрирует знания математического аппарата для решения математических моделей при проведении функционального анализа	Раскрывает полное содержание знаний математического аппарата для решения математических моделей при проведении функционального анализа	Коллоквиум, Расчетно-графическая работа, тестирование	зачет
ПК-1.2 Способен осуществлять анализ математических методов, производить классификацию этих методов в решении прикладных задач различной направленности	Не способен и не готов осуществлять анализ математических методов для решения поставленных задач, при проведении функционального анализа	При формулировке методов не учитывает тенденции математического аппарата для решения поставленных задач, при проведении функционального анализа	Формулирует методы математического аппарата для решения поставленных задач, при проведении функционального анализа	Готов и умеет осуществлять анализ методов математического аппарата для решения поставленных задач, при проведении функционального анализа	Коллоквиум, Расчетно-графическая работа, тестирование	зачет
ПК-1.3 Собирает и систематизирует исходные данные для дальнейшей обработки различными математическими методами	Не владеет навыками применения математического аппарата для решения поставленных задач, при проведении функционального анализа	Владеет отдельными навыками применения математического аппарата для решения поставленных задач, при проведении функционального анализа	Владеет навыками применения математического аппарата для решения поставленных задач, при проведении функционального анализа	Демонстрирует владение системой навыков применения математического аппарата для решения поставленных задач, при проведении функционального анализа	Коллоквиум, Расчетно-графическая работа, тестирование	зачет

## 4. Комплект контрольно-оценочных средств по дисциплине

### Вопросы к зачету

по дисциплине «Основы функционального анализа»

1. Линейные пространства.
2. Примеры линейных пространств.
3. Линейная зависимость и линейная независимость элементов.
4. Конечномерные и бесконечномерные линейные пространства.
5. Линейные и аффинные многообразия.
6. Изоморфизм линейных пространств.
7. Выпуклые множества в линейных пространствах.
8. Определение нормированного пространства.
9. Предел последовательности в нормированных пространствах.
10. Пространство непрерывных функций  $C[a, b]$
11. Пространство  $C^k[a, b]$
12. Пространство  $\tilde{L}_p[a, b]$
13. Открытые и замкнутые множества в нормированных пространствах.
14. Линейные многообразия плотные в нормированных пространствах.
15. Евклидовы пространства.
16. Унитарные пространства.
17. Ортогональные системы элементов в пространствах со скалярным произведением.
18. Свойства скалярного произведения.
19. Фундаментальные последовательности.
20. Банаховы пространства. Примеры.
21. Принцип вложенных шаров. Множества первой и второй категорий.
22. Теорема Бэра – Хаусдорфа.
23. Гильбертовы пространства. Примеры.
24. Построение пополнения нормированного пространства.
25. Теорема о пополнении нормированного пространства.
26. Пополнение пространств со скалярным произведением.
27. Пространство Лебега  $L[a, b]$
28. Множества меры нуль. Эквивалентные функции.
29. Интеграл Лебега и функции, интегрируемые по Лебегу.
30. Основные свойства интеграла Лебега и функций, интегрируемых по Лебегу.
31. Общее определение оператора.
32. Взаимно – однозначные операторы.
33. Суперпозиция операторов.
34. Операторы в нормированных пространствах. Предел и непрерывность.
35. Определение линейного оператора.
36. Непрерывные линейные операторы.
37. Ограниченные линейные операторы.
38. Эквивалентность понятий линейного непрерывного и линейного ограниченного операторов.
39. Примеры линейных операторов.
40. Мера Лебега.
41. Нормированное пространство  $L(X, Y)$  Норма линейного оператора.

42. Равномерная сходимость линейных операторов.
43. Сильная сходимость в  $L(X, Y)$ .
44. Принцип равномерной ограниченности.
45. Теорема Банаха – Штейнгауза.
46. Продолжение линейного оператора по непрерывности.
47. неподвижные точки нелинейного оператора, сжимающие отображения.
48. Принцип сжимающих отображений.
49. Следствия принципа сжимающих отображений.
50. Обобщенный принцип сжимающих отображений.

## Тестовые вопросы и задания

по дисциплине «Основы функционального анализа»

1. Нормой элемента  $x(t)=t^2$  в пространстве непрерывных функций  $C[0;1]$ 
  - 1) 0,5
  - 2) 3
  - 3) 5
  - 4) 1
  - 5) 4
2. Найти норму элемента  $x(t)=2t-7$  в пространстве непрерывных функций  $C[0;1]$ 
  - 1) 0,5
  - 2) 3
  - 3) 7
  - 4) 1
  - 5) -4
3. Найти норму элемента  $x(t)=2t+10$  в пространстве непрерывных функций  $C[0;1]$ 
  - 1) 351
  - 2) 12
  - 3) -1
  - 4) 0
  - 5) 10
4. Найти норму элемента  $x(t)=t-15$  в пространстве непрерывных функций  $C[0;1]$ 

---
5. Найти норму элемента  $x(t)=t^2$  в пространстве непрерывных функций  $C^1[0;1]$ 
  - 1) 0,5
  - 2) 3
  - 3) 5
  - 4) 1
  - 5) 4
6. Найти норму элемента  $x(t)=t+5$  в пространстве непрерывных функций  $C^1[0;1]$ 
  - 1) 0,5
  - 2) 6
  - 3) 7
  - 4) 1
  - 5) 0
7. Найти норму элемента  $x(t)=2t-7$  в пространстве непрерывных функций  $C^1[0;1]$ 
  - 1) 0,5
  - 2) 3
  - 3) 7
  - 4) 9
  - 5) -4
8. Найти норму элемента  $x(t)=3t-5$  в пространстве непрерывных функций  $C^1[0;1]$ 

---

Найти норму элемента  $x(t)=8t+12$  в пространстве непрерывных функций  $C^1[0;1]$

- 1) - 2
- 2) 3
- 3) 28
- 4) 0

5) 15

9. Найти норму элемента  $x(t)=6t - 1$  в пространстве непрерывных функций  $C1[0;1]$

---

10. Найти норму элемента  $x(t)=t$  в пространстве  $L1[-1;1]$

---

На множестве  $X=\{a, b, c\}$  задана метрика  $dist$  такая, что  $dist(a, b) = dist(b, c) = 1$ .  
Какие значения может принимать  $dist(a, c)$  ?

1) [7;10)

2) [0 ;2]

3) (3; 4]

4) 90

5) [-6;1)

11. На множестве  $X=\{a, b, c\}$  задана метрика  $dist$  такая, что  $dist(a, b) = dist(b, c) = 2$ .  
Какие значения может принимать  $dist(a, c)$  ?

1) - 2

2) (-4 ;2]

3) [0; 4]

4) 90

5) (5; 7]

12. На множестве  $X=\{a, b, c\}$  задана метрика  $dist$  такая, что  $dist(a, b) = 2, dist(b, c) = 3$ .  
Какие значения может принимать  $dist(a, c)$  ?

1) 10

2) (-1 ;2]

3) [1; 5]

4) -30

5) [7;12)

13. На множестве  $X=\{a, b, c\}$  задана метрика  $dist$  такая, что  $dist(a, b) = 3, dist(b, c) = 7$ .  
Какие значения может принимать  $dist(a, c)$  ?

1) 60

2) (-1 ;2]

3) [4; 10]

4) (0; 10]

5) [12; 30)

14. На множестве  $X=\{a, b, c\}$  задана метрика  $dist$  такая, что  $dist(a, b) = 6, dist(b, c) = 3$ .  
Какие значения может принимать  $dist(a, c)$  ?

1) 10

2) [3 ;9]

3) (-3; 5]

4) (10;26]

5) (0; 9]

15. Если элемент линейного нормированного пространства умножить на 5, то как изменится его норма?

1) не изменится

2) увеличится на 5

3) уменьшится на 5

- 4) увеличится в 5 раз
- 5) уменьшится в 5 раз

16. Если элемент линейного нормированного пространства умножить на 2, то как изменится его норма?

- 1) не изменится
- 2) увеличится на 2
- 3) уменьшится на 2
- 4) увеличится в 2 раза
- 5) уменьшится в 2 раза

17. Если элемент линейного нормированного пространства умножить на 25, то как изменится его норма?

- 1) не изменится
- 2) увеличится на 5
- 3) уменьшится на 5
- 4) увеличится в 25 раз
- 5) уменьшится в 25 раз

18. Если элемент линейного нормированного пространства умножить на 10, то как изменится его норма?

- 1) не изменится
- 2) увеличится на 5
- 3) уменьшится на 100
- 4) увеличится в 10 раз
- 5) уменьшится в 5 раз

19. Если элемент линейного нормированного пространства разделить на 8, то как изменится его норма?

- 1) не изменится
- 2) увеличится на 8
- 3) уменьшится на 8
- 4) увеличится в 8 раз
- 5) уменьшится в 8 раз

20. Если элемент линейного нормированного пространства разделить на 10, то как изменится его норма?

- 1) не изменится
- 2) увеличится на 4
- 3) уменьшится на 5
- 4) увеличится в 100 раз
- 5) уменьшится в 10 раз

21. Если элемент линейного нормированного пространства разделить на 2, то как изменится его норма?

- 1) не изменится
- 2) увеличится на 4
- 3) уменьшится на 4
- 4) увеличится в 2 раз
- 5) уменьшится в 2 раза

22. Если элемент линейного нормированного пространства разделить на -2, то как изменится его норма?

- 1) не изменится
- 2) увеличится на 4
- 3) уменьшится на 4
- 4) увеличится в 2 раз
- 5) уменьшится в 2 раза

23. Если элемент линейного нормированного пространства разделить на -3, то как

изменится его норма?

- 1) не изменится
- 2) увеличится на 3
- 3) уменьшится на 3
- 4) увеличится в 3 раза
- 5) уменьшится в 3 раза

24. Если элемент линейного нормированного пространства разделить на -10, то как изменится его норма?

- 1) не изменится
- 2) увеличится на 10
- 3) уменьшится на -10
- 4) увеличится в 10 раз
- 5) уменьшится в 10 раз

25. Полное линейное нормированное пространство называется \_\_\_\_\_

26. Полное пространство со скалярным произведением называется \_\_\_\_\_

27. Пространство, в котором существует счетное всюду плотное множество называется \_\_\_\_\_

28. Замкнутое линейное многообразие в линейном нормированном пространстве называется \_\_\_\_\_

29. Оператор  $A$ , для которого найдется константа  $C > 0$  такая, что  $\|Ax\| \leq C \|x\|$  называется \_\_\_\_\_

30. Оператор, отображающий некоторое линейное нормированное пространство в пространство действительных чисел называется \_\_\_\_\_

## Вопросы к коллоквиуму

по дисциплине «Основы функционального анализа»

1. Линейные пространства.
2. Примеры линейных пространств.
3. Линейная зависимость и линейная независимость элементов.
4. Конечномерные и бесконечномерные линейные пространства.
5. Линейные и аффинные многообразия.
6. Изоморфизм линейных пространств.
7. Выпуклые множества в линейных пространствах.
8. Определение нормированного пространства.
9. Предел последовательности в нормированных пространствах.
10. Пространство непрерывных функций  $C[a, b]$
11. Пространство  $C^k[a, b]$
12. Пространство  $\tilde{L}_p[a, b]$
13. Открытые и замкнутые множества в нормированных пространствах.
14. Линейные многообразия плотные в нормированных пространствах.
15. Евклидовы пространства.
16. Унитарные пространства.
17. Ортогональные системы элементов в пространствах со скалярным произведением.
18. Свойства скалярного произведения.
19. Фундаментальные последовательности.
20. Банаховы пространства. Примеры.
21. Принцип вложенных шаров. Множества первой и второй категорий.
22. Теорема Бэра – Хаусдорфа.
23. Гильбертовы пространства. Примеры.

## Задания расчетно-графической работы

по дисциплине «Основы функционального анализа»

### Вариант 1.

1. Покажите, что при фиксированном базисе координаты вектора  $x$  однозначно определяются вектором  $x$ .
2. Пусть  $x_n, x, y_n, y \in X$  ( $n \in \mathbb{N}$ ). Докажите, что если  $x_n \rightarrow x$ , то  $\{x_n\}$  - ограниченная последовательность.
3. Докажите, что если подпоследовательность фундаментальной последовательности сходится к  $x$ , то и сама последовательность сходится к  $x$ .
4. Доказать, что в определении линейного нормированного пространства аксиому 1) можно заменить на аксиому: из  $\|x\| = 0$  следует  $x = 0$ .
5. Пусть  $H$  - гильбертово пространство,  $A: H \rightarrow H$  - ограниченный линейный оператор с  $D(A) = H$ . Доказать, что  $\|A\| = \sup_{x, y \in H, \|x\|=1, \|y\|=1} |(Ax, y)|$ .
6. Доказать, что оператор является линейным ограниченным и найти его норму

$$A: C[0,1] \rightarrow C[0,1], Ax(t) = x(t^2)$$

### Вариант 2.

1. Покажите, что при  $k > l > 0$   $C^k[a, b]$  - линейное многообразие в  $C^l[a, b]$
2. Пусть  $x_n, x, y_n, y \in X$  ( $n \in \mathbb{N}$ ). Докажите, что если  $x_n \rightarrow x$ ,  $\|y_n\| \rightarrow \|y\|$ , то  $\|x_n y_n\| \rightarrow \|x y\|$ .
3. Пусть  $E$  и  $\tilde{E}$  - изоморфные конечномерные линейные пространства и формула  $\tilde{x} = I(x)$  осуществляет их изоморфизм. Докажите, что  $\{I(e_k)\}_1^m$  - базис в  $\tilde{E}$ , если  $\{e_k\}_1^m$  - базис в  $E$ .
4. Пусть  $X, Y$  - линейные пространства,  $A: X \rightarrow Y$  - линейный оператор и система элементов  $x_1, x_2, \dots, x_n \in D(A)$  линейно зависима. Доказать, что система  $Ax_1, Ax_2, \dots, Ax_n$  линейно зависима.
5. Доказать, что открытый шар  $S_r(x_0)$  - открытое множество, замкнутый шар  $\bar{S}_r(x_0)$  - замкнутое множество и замыкание  $S_r(x_0)$  совпадает с  $\bar{S}_r(x_0)$ .
6. Доказать, что оператор является линейным ограниченным и найти его норму

$$A: C[0,1] \rightarrow C[0,1], Ax(t) = \int_0^t x(t) dt$$

### Вариант 3.

1. Покажите, что множество всех многочленов степени не выше  $m$  является  $(m+1)$ -мерным линейным многообразием в  $C[a, b]$ .
2. Пусть  $x_n, x \in X$  ( $n \in \mathbb{N}$ ). Докажите, что если  $x_n \rightarrow x$ , то  $\|x_n\| \rightarrow \|x\|$ .
3. Пусть  $\{x_n\}$  фундаментальна. Докажите, что и  $\{1/x_n\}$  фундаментальна.

4. Пусть  $L \hat{=} X$  - линейное многообразие,  $L^1 X$ . Доказать, что  $L$  не содержит никакого шара.
5. Пусть  $X, Y$  - линейные пространства,  $A : X \otimes Y$  - линейный оператор. Доказать, что оператор  $A$  переводит выпуклое множество из  $D(A)$  в выпуклое множество в пространстве  $Y$ .
6. Образует ли в пространстве  $C[-1, 1]$  подпространство множество монотонных функций.

Вариант 4.

1. Покажите, что в  $C[a, b]$  множество всех функций удовлетворяющих граничным условиям  $x(a) = a, x(b) = b$ , является линейным многообразием тогда и только тогда, когда  $a = b = 0$ .
2. Пусть  $x_n, x, y_n, y \hat{=} X (n \hat{=} N)$ . Докажите, что если  $x_n \otimes x$  и  $\|x_n - y_n\| \otimes 0$ , то  $y_n \otimes x$ .
3. Докажите, что в банаховом пространстве всякое непустое открытое множество есть множество 2-ой категории.
4. Пусть  $A \hat{=} X$  - ограниченное множество. Докажите, что  $\bar{A}$  - ограниченное множество.
5. Докажите, что для ограниченного линейного оператора  $A : X \otimes Y$  с  $D(A) = X$  справедливо равенство  $\|A\| = \inf c$ , где  $c$  - такое число, что  $\|Ax\| \leq c\|x\|$  для любого  $x \hat{=} X$ .
6. Образует ли в пространстве  $C[-1, 1]$  подпространство множество четных функций.

Вариант 5.

1. Докажите, что множество решений линейной однородной системы  $m$  уравнений с  $n$  неизвестными
 
$$\begin{matrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = 0 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = 0. \end{matrix}$$
 При  $n > r$  является  $(n - r)$ - мерным линейным многообразием в  $R^n$ , где  $r$  - ранг матрицы системы.
2. Пусть  $x_n, x, y \hat{=} X (n \hat{=} N)$ . Докажите, что если  $x_n \otimes x$ , то  $\|x_n - y\| \otimes \|x - y\|$ .
3. Докажите, что в банаховом пространстве множество, дополнительное к множеству 1-ой категории есть множество 2-ой категории.
4. Доказать, что шар в линейном нормированном пространстве не может содержать ненулевого линейного многообразия.
5. Доказать, что всякое конечномерное линейное нормированное пространство является банаховым.
6. Доказать, что оператор является линейным ограниченным и найти его норму
 
$$A : C[0, 1] \otimes C[0, 1], Ax(t) = x(t).$$

Вариант 6.

1. Покажите, что всякое линейное многообразие в линейном пространстве  $E$  является выпуклым множеством.
2. Пусть  $x_n, x, y_n, y \hat{=} X (n \hat{=} N)$ . Докажите, что если  $x_n \otimes x, y_n \otimes y$ , то  $\|x_n - y_n\| \otimes \|x - y\|$ .

3. Покажите, что если  $\{x_n\}$  эквивалентна  $\{x_n'\}$ , а  $\{y_n'\}$  эквивалентна  $\{y_n\}$ , то  $\{x_n' + y_n'\}$  эквивалентна  $\{x_n + y_n\}$ .
4. Пусть  $x \in X$  - произвольная точка,  $A \in X$  - произвольное множество. Доказать, что  $r(x, A) = r(x, \bar{A})$
5. Пусть  $X, Y$  - линейные нормированные пространства,  $A: X \rightarrow Y$  - ограниченный линейный оператор с  $D(A) = X$ . Доказать, что  $\|A\| = \sup_{x \in X, \|x\|=1} \|Ax\|$ .
6. Образует ли в пространстве  $C[-1, 1]$  подпространство множество многочленов.

#### Вариант 7.

1. Пусть  $W$  - выпуклое множество, а  $x_0 \in E$ . Покажите, что множество  $x_0 + W$  - выпуклое.
2. Покажите, что сходимость по норме в  $C[a, b]$  есть равномерная сходимость.
3. Покажите, что если  $\{x_n\}$  эквивалентна  $\{x_n'\}$ , то  $\{1/x_n'\}$  эквивалентна  $\{1/x_n\}$ .
4. Пусть  $A \in X$  - замкнутое множество. Доказать, что  $r(x, A) = 0$  тогда и только тогда, когда  $x \in A$ .
5. Пусть  $X, Y$  - линейные нормированные пространства,  $A: X \rightarrow Y$  - линейный оператор с  $D(A) = X$ . Доказать, что оператор  $A$  ограничен тогда и только тогда, когда существует  $c \in K, c > 0$  такое, что для любого  $x \in S_1(0) \in X$  выполняется неравенство  $\|Ax\| \leq c$ . Если это условие выполняется, то  $\|A\| = \sup_{x \in X, \|x\|=1} \|Ax\|$ .
6. Образует ли в пространстве  $C[-1, 1]$  подпространство множество многочленов степени  $\leq k$ .

#### Вариант 8.

1. Покажите, что пересечение произвольного числа выпуклых множеств является выпуклым множеством.
2. Доказать, что в пространствах со скалярным произведением имеет место тождество Апполония  $\|z - x\|^2 + \|z - y\|^2 = \frac{1}{2}\|x - y\|^2 + 2\left\|z - \frac{x + y}{2}\right\|^2$ .
3. Докажите, что конечное число точек  $t_1, \dots, t_k \in [a, b]$  - множество меры нуль.
4. Докажите, что всякое линейное многообразие в конечномерном линейном нормированном пространстве есть подпространство.
5. Пусть  $X, Y$  - линейные пространства,  $A: X \rightarrow Y$  - линейный оператор,  $B \in R(A)$  - выпуклое множество,  $M = \{x \in D(A): Ax \in B\}$ . Будет ли множество  $M$  выпуклым?
6. Доказать, что оператор является линейным ограниченным и найти его норму  $A: C[0, 1] \rightarrow C[0, 1], Ax(t) = t^2 x(0)$

#### Вариант 9.

1. Пусть,  $p(x)$ - выпуклый функционал,  $x_0$  - вектор,  $c$  - вещественное число. Докажите выпуклость множества  $\bar{Q} = \{x \in X : p(x - x_0) \leq c\}$ .
2. Всякая фундаментальная последовательность ограничена. Докажите.
3. Докажите, что объединение конечного или счетного числа множеств меры нуль и пересечение любого числа множеств меры нуль есть множества меры нуль.
4. Доказать, что всякое конечномерное линейное многообразие в линейном нормированном пространстве есть подпространство.
5. Пусть  $X, Y$  - линейные пространства,  $A : X \rightarrow Y$  - линейный оператор и система элементов  $x_1, x_2, \dots, x_n \in D(A)$  линейно независима. Верно ли, что система  $Ax_1, Ax_2, \dots, Ax_n$  линейно независима?
6. Доказать, что шары  $S_r(x_0), \bar{S}_r(x_0)$ - выпуклые множества. Будет ли выпуклым множеством сфера  $S_r(x_0)$ ?

#### Вариант 10.

1. Докажите, что всякая сходящаяся последовательность ограничена.
2. Пусть  $\{x_n\}$  и  $\{y_n\}$  фундаментальны в  $X$ . Докажите, что и  $\{x_n + y_n\}$  фундаментальна.
3. Воспользовавшись теоремой Вейерштрасса доказать, что любой класс  $\hat{x}(t) \in L[a, b]$  содержит фундаментальную в среднем последовательность многочленов.
4. Доказать, что всякое  $n$ - мерное линейное нормированное пространство изоморфно пространству  $E^n$ .
5. Доказать, что оператор является линейным ограниченным и найти его норму  $A : C^1[a, b] \rightarrow C[a, b], Ax(t) = \frac{dx}{dt}$ .
6. Доказать, что подпространство банахова пространства является банаховым пространством.

## **5. Методические материалы, определяющие процедуры оценивания компетенции**

### **5.1 Критерии оценивания коллоквиума**

Оценка **«отлично»** выставляется за глубокое знание предусмотренного программой материала, за умение четко, лаконично и логически последовательно отвечать на поставленные вопросы.

Оценка **«хорошо»** – за твердое знание основного (программного) материала, за грамотные, без существенных неточностей ответы на поставленные вопросы.

Оценка **«удовлетворительно»** – за общее знание только основного материала, за ответы, содержащие неточности или слабо аргументированные, с нарушением последовательности изложения материала.

Оценка **«неудовлетворительно»** – за незнание значительной части программного материала, за существенные ошибки в ответах на вопросы, за неумение ориентироваться в материале, за незнание основных понятий дисциплины.

### **5.2 Критерии оценивания тестирования**

При тестировании все верные ответы берутся за 100%.

90%-100% отлично

75%-90% хорошо

60%-75% удовлетворительно

менее 60% неудовлетворительно

### **5.3 Критерии оценивания расчетно-графической работы**

При проверке расчетно-графической работы все верные ответы берутся за 100%.

90%-100% отлично

75%-90% хорошо

60%-75% удовлетворительно

менее 60% неудовлетворительно

### **5.4 Критерии оценивания ответа на зачете:**

Оценка **«зачтено»** выставляется обучающемуся, если обучающийся почти ответил на все вопросы, поставленные преподавателем на зачете.

Оценка **«не зачтено»** выставляется обучающемуся, если обучающийся не проявил глубоких теоретических знаний при ответе на вопросы