МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования

**СЕВЕРО-КАВКАЗСКАЯ ГОСУДАРСТВЕННАЯ ГУМАНИТАРНО-ТЕХНОЛОГИЧЕСКАЯ АКАДЕМИЯ**

**А.А. Токова**

Учебно-методическое пособие

по дисциплине

# ТЕОРИЯ УПРАВЛЕНИЯ

для обучающихся на 3 курсе по направлению подготовки

01.03.04 – «Прикладная математика»

Черкесск 2018

**УДК 681.5**

**ББК 32.965**

Т 40

Рассмотрено на заседании кафедры «Математика»
Протокол № 2 от « 21 » сентября 2018 г.

Рекомендовано к изданию редакционно-издательским советом СевКавГГТА
Протокол № 15 от «30» октября 2018 г.

**Рецензенты:**

д.ф.-м.н., профессор А.М. Кочкаров
к.ф.-м.н., доцент З.О. Коркмазова

Т 40 **Токова А.А.** Учебно-методическое пособие по теории управления для обучающихся на 3 курсе по направлению подготовки 01.03.04 – «Прикладная математика» / Токова А.А. – Черкесск: СевКавГГТА, 2018. – 40 с.

Учебное пособие предназначено для обучающихся по направлению подготовки 01.03.04 «Прикладная математика», содержит краткий теоретический материал по курсу уравнений математической физики, который сопровождается рассмотрением большого количества примеров и заданий расчетно-графической работы.

**УДК 681.5**

**ББК 32.965**

# 1. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ЗВЕНЬЕВ И СИСТЕМ

При изучении систем автоматического управления рассматриваются динамические и статические режимы. При изучении динамических (неустановившихся) режимов математическим аппаратом является аппарат дифференциальных уравнений.

Уравнения, которые кроме неизвестной функции одной или нескольких переменных содержит также производные от этой функции, называются дифференциальными уравнениями. Если неизвестные функции зависят от одного переменного, дифференциальные уравнения называются обыкновенными, в противном случае – уравнениями в частных производных.

При построении математической модели возможно разбиение системы на отдельные звенья и их математическое описание. Совокупность уравнений отдельных звеньев и уравнений связи между ними образует систему $n$ уравнений, описывающую систему управления в целом.

Теория матриц оказалась эффективным средством исследования и решения систем дифференциальных уравнений. Среди них наиболее простыми являются линейные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами.

Линейной системой дифференциальных уравнений называется система таких уравнений, в которые неизвестные функции и их производные входят линейно.

В дальнейшем мы будем рассматривать системы уравнений первого порядка и ограничимся случаем, когда эти системы разрешены относительно производных. Такие системы называют нормальными. Линейная система имеет вид:

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}\,x_1(t)}{\mathrm{dt}} = \mathrm{a}_{11} \cdot x_1(t) + a_{12} \cdot x_2(t) + \ldots + a_{1n} \cdot x_n(t) + g_1(t) \\ \qquad\qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \dfrac{\mathrm{d}\,x_n(t)}{\mathrm{dt}} = \mathrm{a}_{n1} \cdot x_1(t) + a_{n2} \cdot x_2(t) + \ldots + a_{nn} \cdot x_n + g_n(t) \end{cases}, \tag{1.1}$$

где $x_1(t), x_2(t), \ldots x_n(t)$ – неизвестные функции от независимой переменной $t$, которые надо определить; $a_{11}, a_{12,\ldots} a_{nn}$ – коэффициенты системы; $g_1(t), g_2(t), \ldots, g_n(t)$ – функции, которые определены и непрерывны на некотором интервале $(a < t < b)$; $n$ – порядок системы.

Если для любого $t \in (a,b)$ функции $g_i\ (t)=0\ \ (i=1, 2,....n\ )$, то система дифференциальных уравнений называется однородной; в противном случае – неоднородной.

Совокупность функций:

$$x_1(t), x_2(t), \ldots x_n(t), \tag{1.2}$$

определенных и дифференцируемых на интервале ($a$, $b$), называется решением системы (1.1) на интервале ($a$ ,$b$), если они обращают уравнения (1.1) в тождества, справедливые при всех значениях $t$ из интервала ($a$,$b$). Графической интерпретацией полученного решения будет поверхность в ($n$+1) -мерном пространстве $(t, x_1(t), x_2(t), \ldots x_n(t))$, называемая интегральной.

Задача нахождения решения $x_1(t), x_2(t), \ldots x_n(t)$, удовлетворяющего начальным условиям $x_{10}, x_{20}, \ldots, x_{n0}$ при $t=t_0$ называется задачей Коши.

Решение (1.2), в каждой точке которого имеет место существование и единственность решения задачи Коши, называется частным решением.

Система (1.1) может быть записана в векторной форме:

$$\frac{dx(t)}{dt} = A \cdot x(t) + G(t), \tag{1.3}$$

где $x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \\ \ldots \\ x_n(t) \end{bmatrix}$; $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{21} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$;, $G(t) = \begin{bmatrix} g_1(t) \\ g_2(t) \\ g_3(t) \\ \ldots \\ g_n(t) \end{bmatrix}$,

где $x(t)$ – вектор неизвестных функций; $A$ – матрица коэффициентов системы; $G(t)$ – вектор правой части системы дифференциальных уравнений.

## 1.1. РЕШЕНИЕ ОДНОРОДНОЙ СИСТЕМЫ ДИФФЕРНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Основные положения

В матричной форме однородная система дифференциальных уравнений имеет вид:

$$\frac{dx(t)}{dt} = A \cdot x(t). \tag{1.4}$$

Согласно методу Эйлера общее решение $X(t)$ системы (1.4) в матричной форме записывается:

$$X(t) = \Phi(t) \cdot X_0, \tag{1.5}$$

где $\Phi(t)$ – фундаментальная матрица системы; $X_0$ –вектор начальных условий.

Фундаментальную матрицу системы можно получить из следующего выражения:

$$\Phi(t) = H \cdot \varphi(t) \cdot H^{-1}, \tag{1.6}$$

где $H$ – модальная матрица системы; $\varphi(t) = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & e^{\lambda_n t} \end{bmatrix}$ – диагональная матрица собственных значений матрицы А.

**Порядок решения системы дифференциальных уравнений**

1. Записываем матрицу коэффициентов системы дифференциальных уравнений:

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{21} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

2. Составляем характеристическое уравнение системы $\det(A-\lambda\cdot E)=0$, где $E$ – единичная матрица.
3. Находим характеристические числа системы (2.4) (корни характеристического уравнения). Различают три вида корней характеристического уравнения.

***Все корни $\lambda_i$ различны и вещественные.***

Вектор-столбцы $h^{(i)}$ $(i=1,2,\ldots,n)$ модальной матрицы системы $H$ находятся из решения однородной системы алгебраических уравнений:

$$(A-\lambda_i\cdot E)\cdot h^{(i)}=0 \quad (i=1,2,\ldots,n).$$

Или в развернутом виде:

$$\begin{cases} (a_{11}-\lambda_i)\cdot h_{i1}+a_{12}\cdot h_{i2}+...+a_{1n}\cdot h_{in}=0 \\ a_{21}\cdot h_{i1}+(a_{22}-\lambda_i)\cdot h_{i2}+...+a_{2n}\cdot h_{in}=0 \\ \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \\ a_{n1}\cdot h_{i1}+a_{n2}\cdot h_{i2}+...+(a_{nn}-\lambda_i)\cdot h_{in}=0 \end{cases} \tag{1.7}$$

Другим более простым вариантом нахождения вектор-столбцов модальной матрицы является взятие в качестве компонент вектора $h^{(i)}$ алгебраических дополнений элементов первой строки определителя $|A-\lambda\cdot E|$ при соответствующем численном значении $\lambda_i$.

***Среди корней характеристического уравнения имеются кратные корни.***

Выделяют два случая:

а) если для корня $\lambda_k$ кратности *к* имеются *m* линейно независимых собственных векторов $h^{(1)}, h^{(2)},\ldots,$ $h^{(m)}$, причем *m*=*k*, то этому корню $\lambda_k$ соответствует решение вида:

$$x(t) = c_1 \cdot h^{(1)} e^{\lambda_k t} + c_2 \cdot h^{(2)} e^{\lambda_k t} + ... + c_m \cdot h^{(m)} e^{\lambda_k t}, \tag{1.8}$$

где $c_1, c_2, \ldots, c_m$ – постоянные интегрирования, находящиеся из начальных условий.

б) если для корня $\lambda_k$ кратности $k$ имеется $m$ линейно независимых собственных векторов, причем $m<k$, то решение следует искать в виде многочлена степени $k$-$m$, умноженного на $e^{\lambda_k t}$:

$$x_1(t) = P^{(m-k)}(t) \cdot e^{\lambda_k \cdot t};\ x_2(t) = Q^{(m-k)}(t) \cdot e^{\lambda_k \cdot t}; ...; x_m(t) = S^{(m-k)}(t) \cdot e^{\lambda_k} \tag{1.9}$$

где $P^{(m-k)}(t), Q^{(m-k)}(t), \ldots, S^{(m-k)}(t)$ – алгебраические полиномы с неизвестными коэффициентами; $\lambda_k$ – кратный корень.

Для нахождения неизвестных коэффициентов полиномов $P^{(m-k)}(t), Q^{(m-k)}(t), \ldots, S^{(m-k)}(t)$, следует выполнить подстановку выражений (2.9) в исходную систему (1.4).

Приравняв коэффициенты подобных членов в левой и правой частях уравнений, получим систему линейных алгебраических уравнений относительно искомых коэффициентов. Причем количество коэффициентов, равное кратности корня $k$, являются произвольными, а остальные коэффициенты выражаются через них.

***Среди корней характеристического уравнения имеются комплексные корни.*** Для получения решения воспользуемся следующими положениями.

Если коэффициенты системы (1.4) вещественные, то решение выражается только через вещественные функции. Вещественная и мнимая часть комплексного решения, соответствующая корню $\lambda = \alpha + i\beta \quad (\beta \neq 0)$, являются линейно-независимыми решениями.

Для корня $\lambda = \alpha + i\beta$ частное решение системы имеет вид:

$$x_1(t) = h_1 \cdot e^{(\alpha+i\beta)t}; \quad x_2(t) = h_2 \cdot e^{(\alpha+i\beta)t}; \ldots; \quad x_n(t) = h_n \cdot e^{(\alpha+i\beta)t}.$$

Пусть:

$$x_{11}(t) = \mathrm{Re}\left[h_1 \cdot e^{(\alpha+i\beta)t}\right], \qquad x_{21}(t) = \mathrm{Im}\left[h_1 \cdot e^{(\alpha+i\beta)t}\right],$$

. . . . . . . . . . . .   . . . . . . . . . . . .

$$x_{1n}(t) = \mathrm{Re}\left[h_n \cdot e^{(\alpha+i\beta)t}\right], \qquad x_{2n}(t) = \mathrm{Re}\left[h_n \cdot e^{(\alpha+i\beta)t}\right].$$

Тогда решение за счет комплексных корней выразится через два найденных линейно-независимых решения:

$$x_1(t) = c_1 \cdot x_{11} + c_2 \cdot x_{21}; \qquad x_2(t) = c_1 \cdot x_{21} + c_2 \cdot x_{22}; \ldots; \tag{1.10}$$

$$x_n(t) = c_1 \cdot x_{1n} + c_2 \cdot x_{2n}.$$

Решения, соответствующие корню $\lambda = \alpha - i\beta$, будут линейно зависимыми, поэтому учитывать их не нужно.

Таким образом, определив для каждого корня характеристического уравнения $\lambda_i$ соответствующие решения и сложив их, получим общее решение системы (1.4).

Пример 1

Найти решение системы дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = 4x_1 - 8x_2 + x_3 \\ \dfrac{dx_2}{dt} = 5x_1 - 9x_2 + x_3 \\ \dfrac{dx_3}{dt} = 4x_1 - 6x_2 - x_3 \end{cases}$$

с начальными условиями $X_0 = \begin{bmatrix} x_{0,1} \\ x_{0,2} \\ x_{0,3} \end{bmatrix}$.

Решение

Система однородная.

1. Составляем матрицу коэффициентов:

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -8 & 1 \\ 5 & -9 & 1 \\ 4 & -6 & -1 \end{bmatrix}.$$

2. Составляем лямбда-матрицу (А- λE):

$$(A-\lambda\cdot E)=\begin{bmatrix}4-\lambda & -8 & 5\\ 5 & -9-\lambda & 1\\ 4 & -6 & -1-\lambda\end{bmatrix}.$$

3. Составляем характеристическое уравнение *det* |*A*-*λE* |=0:

$$\lambda^3+6\lambda^2+11\lambda+6=0.$$

4. Находим корни характеристического уравнения:

$\lambda_1=-1;\quad \lambda_1=-2;\quad \lambda_1=-3$ (корни вещественные, разные).

5. Собственные векторы $h_i \quad (i=1,2,3)$ находим в виде алгебраических дополнений элементов первой строки определителя $\det(A-\lambda\cdot E)$:

$$h^{(i)}=k_i\cdot\begin{bmatrix}\Delta_{1,1}\\ \Delta_{1,2}\\ \Delta_{1,3}\end{bmatrix}=k_i\cdot\begin{bmatrix}\lambda^2+10\cdot\lambda+15\\ 5\cdot\lambda+9\\ 4\cdot\lambda+6\end{bmatrix}.$$

6. В последнее выражение производим подстановку численных значения $\lambda_i$:

$$\lambda_1=-1:\qquad h^{(1)}=k_1\cdot\begin{bmatrix}\lambda_1^2+10\cdot\lambda_1+15\\ 5\cdot\lambda_1+9\\ 4\cdot\lambda_1+6\end{bmatrix}=k_1\cdot\begin{bmatrix}+6\\ 4\\ 2\end{bmatrix};$$

$$\lambda_2=-2:\qquad h^{(2)}=k_2\cdot\begin{bmatrix}\lambda_1^2+10\cdot\lambda_1+15\\ 5\cdot\lambda_1+9\\ 4\cdot\lambda_1+6\end{bmatrix}=k_2\cdot\begin{bmatrix}-1\\ -1\\ -2\end{bmatrix};$$

$$\lambda_3=-3:\qquad h^{(3)}=k_3\cdot\begin{bmatrix}\lambda_1^2+10\cdot\lambda_1+15\\ 5\cdot\lambda_1+9\\ 4\cdot\lambda_1+6\end{bmatrix}=k_3\cdot\begin{bmatrix}-6\\ -6\\ -6\end{bmatrix},$$

где $k_1, k_2, k_3$ – произвольные коэффициенты, не равные нулю.

7. Принимаем $k_i$ таким образом, чтобы упростить столбцы модальной матрицы: $k_1 = 0,5; \quad k_2 = -1; \quad k_3 = -1\!\!\diagup\!6$.

8. С учетом этого модальная матрица запишется:

$$H = \left[ h^{(1)}, h^{(2)}, h^{(3)} \right] = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

9. Произведем расчет обратной матрицы $H^{-1}$:

$$H^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ -3 & 5 & -1 \end{bmatrix}.$$

10. Рассчитываем элементы фундаментальной матрицы:

$$\Phi(t) = H \cdot \varphi(t) \cdot H^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} e^{(-1)t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{(-2)t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{(-3)t} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ -3 & 5 & -1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 3 \cdot e^{-t} + e^{-2 \cdot t} - 3e^{-3 \cdot t} & -3 \cdot e^{-t} - 2e^{-2 \cdot t} + 5e^{-3 \cdot t} & e^{-2 \cdot t} - e^{-3 \cdot t} \\ 2 \cdot e^{-t} + e^{-2 \cdot t} - 3e^{-3 \cdot t} & -2 \cdot e^{-t} - 2e^{-2 \cdot t} + 5e^{-3 \cdot t} & e^{-2 \cdot t} - e^{-3 \cdot t} \\ e^{-t} + 2e^{-2 \cdot t} - 3e^{-3 \cdot t} & -e^{-t} - 4e^{-2 \cdot t} + 5e^{-3 \cdot t} & 2e^{-2 \cdot t} - e^{-3 \cdot t} \end{bmatrix}.$$

11. Получаем решение данной системы согласно выражению $X(t) = \Phi(t) \cdot X_0$:

$$x_1(t) = (3 \cdot e^{-t} + e^{-2 \cdot t} - 3e^{-3 \cdot t}) \cdot x_{01} + (-3 \cdot e^{-t} - 2e^{-2 \cdot t} + 5e^{-3 \cdot t}) \cdot x_{02} + \\ + (e^{-2 \cdot t} - e^{-3 \cdot t}) \cdot x_{03};$$

$$x_2(t) = (2\cdot e^{-t} + e^{-2\cdot t} - 3e^{-3\cdot t})\cdot x_{01} + (-2\cdot e^{-t} - 2e^{-2\cdot t} + 5e^{-3\cdot t})\cdot x_{02} + \\ + (e^{-2\cdot t} - e^{-3\cdot t})\cdot x_{03};$$

$$x_3(t) = (e^{-t} + 2e^{-2\cdot t} - 3e^{-3\cdot t})\cdot x_{01} + (-e^{-t} - 4e^{-2\cdot t} + 5e^{-3\cdot t})\cdot x_{02} + \\ + (2e^{-2\cdot t} - e^{-3\cdot t})\cdot x_{03},$$

где $x_{01}$, $x_{02}$, $x_{03}$ – элементы вектора начальных условий.

## Пример 2

Найти решение системы дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = -4x_1 + 2x_2 + 5x_3 \\ \dfrac{dx_2}{dt} = 6x_1 - x_2 - 6x_3 \\ \dfrac{dx_3}{dt} = -8x_1 + 3x_2 + 9x_3 \end{cases}$$

с начальными условиями $X_0 = \begin{bmatrix} x_{0,1} \\ x_{0,2} \\ x_{0,3} \end{bmatrix}$.

## Решение

Система однородная.

1. Составляем матрицу коэффициентов:

$$A = \begin{bmatrix} -4 & 2 & 5 \\ 6 & -1 & -6 \\ -8 & 3 & 9 \end{bmatrix}.$$

2. Составляем лямбда-матрицу $(A - \lambda E)$:

$$(A - \lambda\cdot E) = \begin{bmatrix} -4-\lambda & 2 & 5 \\ 6 & -1-\lambda & -6 \\ -8 & 3 & 9-\lambda \end{bmatrix}.$$

3. Составляем характеристическое уравнение $\det(A-\lambda E)=0$:

$$\lambda^3-4\lambda^2+5\lambda-2=0\,.$$

4. Находим корни характеристического уравнения:

$\lambda_1=2;\quad \lambda_2=\lambda_3=1;$ (корни вещественные: два из них кратные).

5. Для корня $\lambda_1=2$ найдем частное решение вида:

$$x_1(t)=h^{(1)}{}_1\cdot e^{2t};\quad x_2(t)=h^{(1)}{}_2\cdot e^{2t}\quad x_3(t)=h^{(1)}{}_3\cdot e^{2t}\,.$$

Для этого найдем собственный вектор $h^{(1)}$. Это можно сделать двумя способами:
а) решить систему однородных алгебраических уравнений (1.7), подставляя значение корня $\lambda_1=2$:

$$\begin{cases}-6\cdot h_{11}+2\cdot h_{12}+5\cdot h_{13}=0\\ 6\cdot h_{11}-3\cdot h_{12}-6\cdot h_{13}=0\\ -8\cdot h_{11}+3\cdot h_{12}+7\cdot h_{13}=0\end{cases};$$

б) вычислением алгебраических дополнений элементов первой строки определителя *det* |*A-λE* | с подстановкой значения корня $\lambda_1=2$:

$$h^{(1)}=k_1\cdot\begin{bmatrix}\Delta_{11}\\ \Delta_{12}\\ \Delta_{13}\end{bmatrix}=k_1\cdot\begin{bmatrix}\lambda^2-8\cdot\lambda+9\\ 6\cdot\lambda-6\\ 10-8\lambda\end{bmatrix}=-\frac{1}{3}\cdot\begin{bmatrix}-3\\ 6\\ -6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\ -2\\ 2\end{bmatrix}.$$

Тогда частное решение для значения корня $\lambda_1=2$ запишется:

$$x_1^{\lambda=2}(t)=1\cdot e^{2t};\quad x_2^{\lambda=2}(t)=-2\cdot e^{2t};\quad x_3^{\lambda=2}(t)=2\cdot e^{2t}. \qquad (1.11)$$

6. Найдем частное решение для корня λ=1 (кратности 2):
1) определим число линейно независимых собственных векторов. При подстановке значения корня $\lambda$=1 в выражение *(A-λE)* получим матрицу:

$$(A-\lambda\cdot E)=\begin{bmatrix}-5 & 2 & 5\\ 6 & -2 & -6\\ -8 & 3 & 8\end{bmatrix}.$$

Ее порядок $n$ равен 3 , ранг $r$= 2, найденный известными методами. Число линейно независимых собственных векторов равно $m=n-r=1$. Корень $\lambda$=1 имеет кратность $k$=2.

Так как $m<k$, то решение следует искать в виде произведения многочлена степени $k$-$m$=1 на $e^{1\cdot t}$:

$$x_1(t)=P^{(1)}(t)\cdot e^{1\cdot t}=(a_1+a_2\cdot t)\cdot e^{1\cdot t};\quad x_2(t)=Q^{(1)}(t)\cdot e^{1\cdot t}=(b_1+b_2\cdot t)\cdot e^{1\cdot t};$$

$$x_3(t)=S^{(1)}(t)\cdot e^{1\cdot t}=(c_1+c_2\cdot t)\cdot e^{1\cdot t}.$$

Для нахождения коэффициентов $a_i,\ b_i,\ c_i$ ($i$=1,2) делаем подстановку полученных выражений в исходную систему (1.4).

Сокращая на $e^{1\cdot t}$ правую и левую часть уравнений, имеем:

$$\begin{cases}a_2\cdot t+a_1+a_2=(-4a_2+2b_2+5c_2)\cdot t-4a_1+2b_1+5c_1\\ b_2\cdot t+b_1+b_2=(6a_2-b_2-6c_2)\cdot t+6a_1-b_1-6c_1\\ c_2\cdot t+c_1+c_2=(-8a_2+3b_2+9c_2)\cdot t-8a_1+3b_1+9c_1\end{cases}.$$

Приравнивая коэффициенты при $t$ и свободные члены, получаем систему уравнений:

Так как кратность корня $\lambda$=1 равна 2, будем считать известными два коэффициента $c_1$ и $c_2$ . Остальные неизвестные коэффициенты выразим через них. Решая систему, находим: $a_2=c_2$; $a_1=c_1+c_2$; $b_2=0$; $b_1=3\cdot c_2$.

$$\begin{cases} -5\cdot a_2+2\cdot b_2+5\cdot c_2=0, & (t^1) \\ -5\cdot a_1+2\cdot b_1+5\cdot c_1=a_2, & (t^0) \\ 6\cdot a_2-2\cdot b_2-6\cdot c_2=0, & (t^1) \\ 6\cdot a_1-2\cdot b_1-6\cdot c_1=b_2, & (t^0) \\ -8\cdot a_2+3\cdot b_2+8\cdot c_2=0, & (t^1) \\ -8\cdot a_1+3\cdot b_1+8\cdot c_1=c_2. & (t^0) \end{cases}$$

Частное решение для кратного корня $\lambda$=1 принимает вид:

$$x_1^{\lambda=1}(t)=(c_1+c_2+c_2\cdot t)\cdot e^t;\ x_2^{\lambda=1}(t)=3\cdot c_2\cdot e^t;$$
$$x_3^{\lambda=1}(t)=(c_1+c_2\cdot t)\cdot e^t. \tag{1.12}$$

Общим решением исходной системы будет сумма решений (1.11), умноженного на $c_3$, и (1.12):

$$x_1(t)=x_1^{\lambda=1}(t)+x_1^{\lambda=2}(t)=(c_1+c_2+c_3\cdot t)\cdot e^t+c_3\cdot e^{2t};$$
$$x_2(t)=x_2^{\lambda=1}(t)+x_2^{\lambda=2}(t)=3\cdot c_2\cdot e^t-2\cdot c_3\cdot e^{2t};$$
$$x_3(t)=x_3^{\lambda=1}(t)+x_3^{\lambda=2}(t)=(c_1+c_2\cdot t)\cdot e^t+2\cdot c_3\cdot e^{2t},$$

где $c_1, c_2, c_3$, – постоянные интегрирования, находящиеся из начальных условий.

## Пример 3

Найти решение системы дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt}=5\cdot x_1-x_2 \\ \dfrac{dx_2}{dt}=x_1+5\cdot x_2 \end{cases}$$

с начальными условиями $X_0=\begin{bmatrix} x_{0,1} \\ x_{0,2} \end{bmatrix}$.

## Решение

1. Составляем матрицу коэффициентов:

$$A = \begin{bmatrix} 5 & -1 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}.$$

2. Составляем лямбда-матрицу (A- λE):

$$A = \begin{bmatrix} 5-\lambda & -1 \\ 1 & 5-\lambda \end{bmatrix}.$$

3. Составляем и решаем характеристическое уравнение:

$$\lambda^2 - 10 \cdot \lambda + 26 = 0;$$
$$\lambda_{1,2} = 5 \pm i \quad \text{(корни комплексно сопряженные).}$$

4. Для корня $\lambda = 5 + i$ найдем собственный вектор $h^{(1)}$. Для этой цели делаем подстановку в матрицу $(A - \lambda E)$ значения этого корня и получаем систему уравнений:

$$\begin{cases} -i \cdot h_{11} - h_{12} = 0 \\ h_{11} - i \cdot h_{12} = 0 \end{cases}.$$

Эти два уравнения линейно зависимы. Поэтому для нахождения $h_{11}$ и $h_{12}$ можно воспользоваться любым уравнением системы. Пусть $h_{11} = 1$. Тогда из первого уравнения $h_{12} = -i$.

5. Частное решение запишется следующим образом (последние преобразования по формуле Эйлера):

$$x_1(t) = 1 \cdot e^{(5+i)\cdot t} = h_1 \cdot e^{(5+i)t} = e^{5t} \cdot e^{it} = e^{5t} \cdot (\cos(t) + i \cdot \sin(t));$$
$$x_2(t) = h_2 \cdot e^{(5+i)t} = -i \cdot e^{(5+i)\cdot t} = -i \cdot e^{5t} \cdot e^{it} = e^{5t} \cdot (\sin(t) - i \cdot \cos(t)).$$

Так как данная система имеет вещественные коэффициенты, то решение, соответствующее корню $\lambda = 5 - i$, можно не искать – оно будет комплексно сопряженным с найденным решением.

6. Записываем решение в вещественной форме. Для этой цели выделяем в комплексном решении $x_1$ и $x_2$ два вещественных линейно-независимых решения, отделяя в них вещественную и мнимую части:

$$\begin{cases} x_{11} = \mathrm{Re}(x_1) = e^{5t} \cdot \cos(t) \\ x_{12} = \mathrm{Re}(x_2) = e^{5t} \cdot \sin(t) \end{cases}$$ (первое частное решение);

$$\begin{cases} x_{21} = \mathrm{Im}(x_1) = e^{5t} \cdot \sin(t) \\ x_{22} = Im(x_2) = -e^{5t} \cdot \cos(t) \end{cases}$$ (второе частное решение).

7. Общее решение выражается через два найденных линейно-независимых решения ($c_1$ и $c_2$ определяются вектором начальных условий):

$$x_1 = c_1 \cdot x_{11} + c_2 \cdot x_{12} = e^{5t} \cdot (c_1 \cdot \cos(t) + c_2 \cdot \sin(t));$$
$$x_2(t) = c_1 \cdot x_{12} + c_2 \cdot x_{22} = e^{5t} \cdot (c_1 \cdot \sin(t) - c_2 \cdot \cos(t)).$$

## Задание №1 расчетно-графической работы

Дана система дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = a_{11} \cdot x_1 + a_{12} \cdot x_2 + a_{13} \cdot x_3 \\ \dfrac{dx_2}{dt} = a_{21} \cdot x_1 + a_{22} \cdot x_2 + a_{23} \cdot x_3 \\ \dfrac{dx_3}{dt} = a_{31} \cdot x_1 + a_{32} \cdot x_2 + a_{33} \cdot x_3 \end{cases}$$

с начальными условиями $\begin{bmatrix} x_{10} \\ x_{20} \\ x_{30} \end{bmatrix}$.

Требуется:

решить систему уравнений и построить графики зависимостей $x_1(t)$, $x_2(t)$ $x_3(t)$.

Варианты заданий

| Варианты задания | $a_{11}$ | $a_{12}$ | $a_{13}$ | $a_{21}$ | $a_{22}$ | $a_{23}$ | $a_{31}$ | $a_{32}$ | $a_{33}$ | $x_{10}$ | $x_{20}$ | $x_{30}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1. | -4 | -3 | -2 | 0 | 0 | 1 | 6 | 5 | 2 | 1 | 1 | 2 |
| 2. | 8 | 2 | -1 | 0 | 1 | -1 | -6 | -4 | 1 | 1 | 2 | 0 |
| 3. | -2 | 2 | -1 | 0 | -5 | -1 | -6 | -4 | 1 | 1 | 2 | 0 |

Варианты заданий (продолжение)

| Варианты задания | $a_{11}$ | $a_{12}$ | $a_{13}$ | $a_{21}$ | $a_{22}$ | $a_{23}$ | $a_{31}$ | $a_{32}$ | $a_{33}$ | $x_{10}$ | $x_{20}$ | $x_{30}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 4. | -2 | 2 | -1 | 6 | 0 | -1 | 2 | -4 | 1 | 1 | 2 | 0 |
| 5. | -4 | -3 | -2 | 0 | 0 | 1 | 6 | 5 | 2 | 1 | 0 | 2 |
| 6. | 9 | 2 | 1 | -6 | 5 | 1 | 7 | -4 | 1 | 1 | 1 | 2 |
| 7. | -1 | 0 | 4 | 3 | 2 | 1 | 1 | 1 | 6 | 1 | 0 | 2 |
| 8. | 1 | 2 | -1 | 8 | 1 | -1 | 1 | -4 | 1 | 1 | 0 | 0 |
| 9. | 2 | 1 | -1 | 1 | -1 | -1 | -1 | 1 | 2 | 1 | 0 | 2 |
| 10. | -8 | -2 | 1 | 0 | -1 | 1 | 6 | 4 | -1 | 0 | 0 | 2 |
| 11. | -4 | -3 | -2 | 0 | 0 | 1 | 6 | 5 | 2 | 1 | 0 | 2 |
| 12. | -2 | 2 | 1 | 0 | -5 | -1 | -6 | -4 | 1 | 1 | 0 | 1 |
| 13. | -2 | 2 | -1 | 6 | 0 | -1 | 2 | -4 | 1 | 2 | 1 | 2 |
| 14. | -1 | 0 | 4 | 3 | 2 | 1 | 1 | 1 | 6 | 1 | 1 | 2 |
| 15. | -8 | -2 | 1 | 0 | -1 | 1 | 6 | 4 | -1 | 1 | 1 | 2 |
| 16. | 2 | 1 | -1 | 1 | -1 | -1 | -1 | 1 | 2 | 2 | 1 | 2 |
| 17. | 1 | 2 | -1 | 8 | 1 | -1 | 1 | -4 | 1 | 1 | 1 | 2 |
| 18. | 9 | 2 | 1 | -6 | 5 | 1 | 7 | -4 | 1 | 1 | 2 | 1 |
| 19. | -2 | 2 | -1 | 6 | 0 | -1 | 2 | -4 | 1 | 1 | 2 | 1 |
| 20. | 8 | 2 | -1 | 0 | 1 | -1 | -6 | -4 | 1 | 1 | 2 | 1 |

## 1.2. РЕШЕНИЕ НЕОДНОРОДНОЙ СИСТЕМЫ ДИФФЕРНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Практическое занятие

Основные положения

Неоднородная система линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами имеет вид:

$$\frac{dX}{dt} = AX(t) + G(t). \tag{1.13}$$

Решение системы (1.13) состоит из суммы двух решений: общего решения однородной системы уравнений (см. раздел 1.1) и частного решения. Рассмотрим методы нахождения частного решения системы дифференциальных уравнений.

## Метод вариации произвольных постоянных
## (метод Лагранжа)

Этим методом можно построить общее решение неоднородной системы (1.13) , исходя из фундаментальной системы решений соответствующей однородной системы.

Согласно методу Лагранжа частное решение системы (1.13) получается в виде:

$$X(t) = e^{A\cdot t}\cdot X_0 + \int_0^t e^{A(t-\tau)}\cdot G(\tau)\cdot d\tau. \tag{1.14}$$

Полученный результат рассматривается как сумма решений соответствующей однородной системы дифференциальных уравнений и частного решения неоднородной системы.

## Метод неопределенных коэффициентов

Частное решение неоднородной линейной системы возможно получить этим методом, если функция $G(t)$ представлена в виде произведения экспоненциальной функции на алгебраический полином (или на гармоническую функцию).

1. *Элементы вектора $G(t)$ можно представить в виде произведения полинома степени m на экспоненциальную функцию:*

$$g_k(t) = P_k^{m_k}\cdot e^{v\cdot t}, \quad (k = 1, 2, \ldots, n),$$

где $P_k^{m_k}(t) = a_{0k} + a_{1k}\cdot t + \cdots + a_{mk}\cdot t^{m_k}$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ полином степени $m$.

Частное решение в этом случае отыскивается в виде:

$$x_k^{\text{частн}}(t) = Q_k^{z+s}(t)\cdot e^{v\cdot t} \quad (k = 1, 2, \ldots, n), \tag{1.15}$$

где $Q_k^{z+s}(t)$ – полиномы степени ($m$+$s$) с неизвестными коэффициентами; $z = \max(m_k)$ $(k = 1, 2, n)$ – максимальная степень полинома $g_k(t)$; $v$ – экспоненциальная степень полинома $g_k(t)$; $s$ –коэффициент.

Величина $s$ находится из следующих условий:

а) $s=0$ , если $v$ не является корнем характеристического уравнения однородной системы;

б) $s=k$ ($k$ – кратность корня), если $v$ является корнем характеристического уравнения однородной системы.

Неизвестные коэффициенты полиномов определяются путем подстановки выражения (1.7) в систему (1.6) и приравниванием коэффициентов при подобных членах уравнений.

2 . *Элементы вектора* $G(t)$ *представлены в виде произведения полиномов степени* $m_k, n_k$ *на гармонические функции:*

$$g_k(t) = e^{\alpha t}\left[R_k^{m_k}(t)\cdot\cos(\beta t) + W_k^{n_k}(t)\cdot\sin(\beta t)\right]. \quad (k=1,2,\ldots,n)$$

Частное решение запишется в этом случае:

$$x_k^{\text{частн}}(t) = e^{\alpha t}\left[P_k^{z+s}(t)\cdot\cos(\beta t) + Q_k^{z+s}(t)\cdot\sin(\beta t)\right], \qquad (1.16)$$

где $P_k^{z+s}, Q_k^{z+s}$ – полиномы степени $(z+s)$ с неизвестными коэффициентами; $z=\max(m_k,n_k)$ $(k=1,2,\ldots,n)$ – максимальная степень полинома $g_k(t)$; $(\alpha+i\beta)$ – экспоненциальная степень полинома $g_k(t)$; $s$ – коэффициент.

Величина $s$ находится из следующих условий:

а) $s=0$ , если $\alpha+i\beta$ не является корнем характеристического уравнения однородной системы;

б) $s=k$ ($k$ – кратность корня), если $\alpha+i\beta$ является корнем характеристического уравнения однородной системы.

Неизвестные коэффициенты полиномов определяются путем подстановки выражения (1.15) или (1.16) в систему дифференциальных уравнения (1.13) и приравниванием коэффициентов при подобных членах уравнений.

Пример 4

Найти общее решение системы методом Лагранжа

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = -2\cdot X_2 + 3\cdot t \\ \dfrac{dx_2}{dt} = 2\cdot X_1 + 4 \end{cases}$$

с нач. усл.: $X_0 = \begin{bmatrix} x_{1,0} \\ x_{2,0} \end{bmatrix}$.

Решение

1. Находим общее решение однородной системы уравнений:
а) матрица коэффициентов

$$\mathrm{A} = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix};$$

б) характеристическая матрица:

$$|\lambda E - A| = \begin{bmatrix} \lambda & 2 \\ -2 & \lambda \end{bmatrix};$$

в) характеристическое уравнение:

$$\lambda^2 + 4 = 0;$$

г) корни характеристического уравнения:

$$\lambda_1 = 2 \cdot i; \qquad \lambda_2 = -2 \cdot i \quad \text{(корни мнимые)};$$

д) модальная матрица:

$$H = \begin{bmatrix} i & -i \\ 1 & 1 \end{bmatrix};$$

е) фундаментальная матрица:

$$\varPhi(t) = \begin{bmatrix} i(e^{(2\cdot i)\cdot t} + e^{(-2\cdot i)\cdot t}) & -(e^{(2\cdot i)\cdot t} - e^{(-2\cdot i)\cdot t}) \\ (e^{(2\cdot i)\cdot t} - e^{(-2\cdot i)\cdot t}) & i(e^{(2\cdot i)\cdot t} + e^{(-2\cdot i)\cdot t}) \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \cos 2t & -\sin 2t \\ \sin 2t & \cos 2t \end{bmatrix};$$

ж) общее решение однородной системы:

$$X_{общ}(t)=\begin{bmatrix} x_{1,0}\cdot\cos 2t - x_{2,0}\sin 2t \\ x_{1,0}\cdot\sin 2t + x_{2,0}\cdot\cos 2t \end{bmatrix}.$$

2. Находим частное решение системы по формуле (1.14), преобразовывая ее следующим образом:

$$X(t)=\Phi(t)\cdot\int_0^t \Phi^{-1}(\tau)\cdot G(\tau)d\tau.$$

Для этого производим следующие операции:

а) обращаем матрицу $\Phi$(t):

$$\Phi^{-1}(t)=\begin{bmatrix} \cos 2\tau & \sin 2\tau \\ -\sin 2\tau & \cos 2\tau \end{bmatrix};$$

б) перемножаем матрицы $\Phi^{-1}$(t) и $G$(t):

$$\Phi^{-1}(\tau)\cdot G(\tau)=\begin{bmatrix} \cos 2\tau & \sin 2\tau \\ -\sin 2\tau & \cos 2\tau \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 3\tau \\ 4 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 3\tau\cos 2\tau + 4\cdot\sin 2\tau \\ 3\tau\cdot\sin 2\tau + 4\cdot\cos 2\tau \end{bmatrix};$$

в) берем интеграл от полученного вектор-столбца (по частям):

$$\int_0^t \Phi(\tau)\cdot G(\tau)d\tau=\int_0^t \begin{bmatrix} 3\tau\cdot\cos 2\tau + 4\cdot\sin 2\tau \\ 3\tau\cdot\sin 2\tau + 4\cdot\cos 2\tau \end{bmatrix}\cdot d\tau=\begin{bmatrix} \frac{3}{2}\cdot t\cdot\cos 2t - \frac{5}{4}\cos 2t \\ \frac{3}{2}\cdot\cos 2t + \frac{5}{4}\cdot\sin 2t \end{bmatrix};$$

г) умножаем фундаментальную матрицу на полученный интегрированием вектор и вычисляем частное решение системы:

$$x_{\text{част}}(t)=e^{At}\cdot\int_0^t e^{-A\tau}\cdot g(\tau)\cdot d\tau=\begin{bmatrix} \cos 2t & -\sin 2t \\ \sin 2t & \cos 2t \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} -\frac{5}{4}\cos 2t + \frac{3}{2}\sin 2t + \frac{5}{4} \\ \frac{5}{4}\sin 2t + \frac{3}{2}\cdot\cos 2t \end{bmatrix}$$

После перемножения матриц имеем:

$$x_{\text{частн}}(t)=\begin{bmatrix}\frac{5}{4}\cos 2t-\frac{5}{4}\\ \frac{5}{4}\sin 2t+\frac{3}{2}t\end{bmatrix};$$

c) общее решение системы записывается как сумма общего решения однородного уравнения и частного решения:

$$\mathrm{X}(t)=\mathrm{X}_{\textit{общ}}(t)+\mathrm{X}_{\textit{частн}}(t)=\begin{bmatrix}x_{1,0}\cdot\cos 2t-x_{2,0}\cdot\sin 2t\\ x_{1,0}\cdot\sin 2t+x_{2,0}\cdot\cos 2t\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\frac{5}{4}\cdot\cos 2t-\frac{5}{4}\\ \frac{5}{4}\cdot\sin 2t+\frac{3}{2}\cdot t\end{bmatrix}=$$

$$=\begin{bmatrix}(x_{1,0}+\frac{5}{4})\cdot\cos 2t-x_{2,0}\cdot\sin 2t-\frac{5}{4}\\ (x_{1,0}+\frac{5}{4})\cdot\sin 2t+x_{2,0}\cdot\cos 2t+\frac{3}{2}\cdot t\end{bmatrix}.$$

Пример 5

Найти общее решение системы методом неопределенных коэффициентов

$$\begin{cases}\dfrac{dx_1}{dt}=x_1-2\cdot x_2+3\\ \dfrac{dx_2}{dt}=x_1-x_2+1\end{cases}$$

с начальными условиями $\mathrm{X}_0=\begin{bmatrix}x_{1,0}\\ x_{2,0}\end{bmatrix}$.

Решение

1. Находим общее решение однородной системы уравнений:

a) матрица коэффициентов:

$$\mathrm{A}=\begin{bmatrix}1 & -2\\ 1 & -1\end{bmatrix};$$

б) характеристическая матрица:

$$|\mathrm{A}-\lambda E|=\begin{bmatrix}1-\lambda & -2\\ 1 & -1-\lambda\end{bmatrix};$$

в) характеристическое уравнение:

$$\Delta=(1-\lambda)\cdot(-1-\lambda)+2=\lambda^2-1+2=\lambda^2+1=0;$$

г) корни характеристического уравнения:

$$\lambda_1=i;\quad \lambda_2=-i, \qquad\qquad \text{(корни мнимые)};$$

д) для нахождения решения однородной системы находим собственный вектор, соответствующий корню $\lambda_1=i$. Для этой цели составляем систему уравнений:

$$\begin{cases}(1-\lambda)\cdot h_1-2\cdot h_2=0\\ h_1-(1+\lambda)\cdot h_2=0\end{cases};$$

е) поскольку уравнения линейно зависимы, принимаем одну из переменных в виде произвольной константы ( $h_1=2$) и находим другую переменную $h_2=1-i$;

ж) собственный вектор равен:

$$h^{(1)}=\begin{bmatrix}2\\ 1-i\end{bmatrix};$$

з) тогда составляющие решения однородной системы имеют вид:

$$x_1(t)=2\cdot e^{i\cdot t};\qquad x_2(t)=(1-i)\cdot e^{i\cdot t};$$

ж) преобразуем экспоненциальные функции по формуле Эйлера, производим разделение вещественной и мнимой части составляющих решения и находим общее решение однородной системы:

$$x_1^{\text{общ}}(t) = 2 \cdot c_1 \cdot \cos t + 2 \cdot c_2 \cdot \sin(t);$$

$$x_2^{\text{общ}}(t) = (c_1 - c_2) \cdot \cos(t) + (c_1 + c_2) \cdot \sin(t),$$

где $c_1$, $c_2$ – постоянные интегрирования, определяемые из начальных условий.

2. Частное решение неоднородной системы найдем по методу неопределенных коэффициентов.

Имеем $g_1(t) = 3;\quad g_2(t) = 1$. Это полиномы степеней $m_1 = m_2 = 0$.

Тогда степень полинома решения $z = m_{\max} = 0$. Коэффициент $v = 0 \neq \lambda_i$, следовательно, $s$=0. Поэтому частное решение отыскиваем в виде полиномов нулевого порядка:

$$x_1^{(1)} = a;\quad x_2^{(1)} = b.$$

Подставляя $x_1^{(1)}$ и $x_2^{(1)}$ в неоднородную исходную систему (1.13), находим коэффициенты частного решения:

$$a=1,\ \ b=2.$$

3. Решением системы является сумма общего и частного решений:

$$x_1(t) = 2 \cdot C_1 \cdot \cos(t) + 2 \cdot C_2 \cdot \sin(t) + 1;$$

$$x_2(t) = (C_1 - C_2) \cdot \cos(t) + (C_1 + C_2) \cdot \sin(t) + 2\,.$$

**Задание №2 расчетно-графической работы**

Дана система дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = a_{11} \cdot x_1 + a_{12} \cdot x_2 + g_1 \\ \dfrac{dx_2}{dt} = a_{21} \cdot x_1 + a_{22} \cdot x_2 + g_2 \end{cases}$$

с начальными условиями $\begin{bmatrix} x_{01} \\ x_{02} \end{bmatrix}$.

Требуется: решить систему уравнений и построить графики зависимостей $x_1(t)$ и $x_2(t)$.

Варианты заданий

| Варианты задания | $a_{11}$ | $a_{12}$ | $a_{21}$ | $a_{22}$ | $g_1$ | $g_2$ | $x_{10}$ | $x_{20}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1. | -3 | 4 | 1 | 0 | $e^{3t}$ | $-e^{3t}$ | 1 | 2 |
| 2. | -5 | 1 | -2 | 1 | $e^{3t}$ | $-e^{3t}$ | 0 | 1 |
| 3. | 6 | 2 | -4 | 2 | sin(t) | -cos(t) | 0 | 2 |
| 4. | 4 | -2 | 5 | 2 | cos(2t) | - cos(2t) | 1 | 2 |
| 5. | -5 | -2 | -8 | 2 | sin(2t) | - cos(2t) | 3 | 2 |
| 6. | 2 | 8 | 4 | 2 | $(3t)^2$ | -(-2t) | 4 | 0 |
| 7. | -3 | -5 | 7 | -2 | $e^{-7t}$ | $-5e^{-7t}$ | 5 | 1 |
| 8. | 9 | 2 | -7 | 6 | sin(5t) | - cos(5t) | 3 | 1 |
| 9. | -8 | -2 | -7 | 6 | $e^{6t}$ | $-e^{6t}$ | 3 | 4 |
| 10. | -1 | 3 | -5 | 6 | cos(2t) | -2 sin(2t) | 3 | 5 |
| 11. | -4 | 3 | 1 | 5 | cos(t) | -2 sin(-t) | 2 | -2 |
| 12. | -8 | -4 | 2 | -3 | $(8t)^2$ | -3 | -1 | 0 |
| 13. | 7 | 2 | -4 | 8 | $e^{5t}$ | $-te^{5t}$ | 4 | -3 |
| 14. | 3 | 2 | -1 | 5 | 2 cos(4t) | -sin(4t) | 1 | -1 |
| 15. | -1 | -8 | 5 | 4 | $e^{7t}$ | $-e^{7t}$ | 5 | 2 |
| 16. | -8 | 4 | -2 | 6 | cos(3t) | - sin(3t) | 1 | 3 |
| 17. | 1 | 2 | -2 | 5 | cos(6t) | - sin(6t) | 2 | 1 |
| 18. | 5 | 3 | 2 | 4 | cos(2t) | - sin(2t) | 1 | 1 |
| 19. | -3 | 4 | 1 | 0 | $e^{t}$ | $-te^{t}$ | 1 | 2 |
| 20. | -5 | 1 | -2 | 1 | $3e^{-t}$ | $-te^{-t}$ | 0 | 1 |

## 2. УПРАВЛЯЕМОСТЬ И НАБЛЮДАЕМОСТЬ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ

Практическое занятие

**Основные положения**

При рассмотрении физической системы как объекта проектирования, контроля или управления все переменные, характеризующие систему можно разделить на три множества (рисунок 2.1):

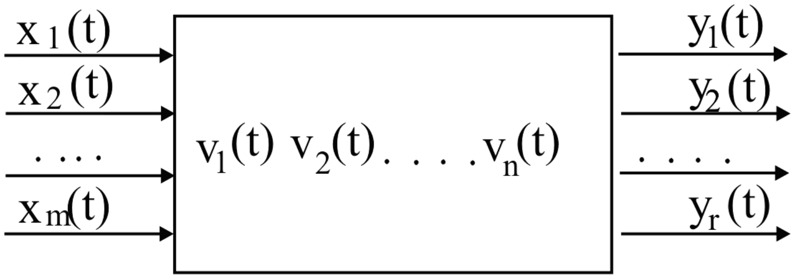


*Рисунок 2.1. Переменные, характеризующие систему*

1) входные переменные $x_1(t), x_2(t),\ldots, x_m(t)$, характеризующие внешние воздействия на вход системы;
2) переменные состояния $v_1(t), v_2(t),\ldots, v_n(t)$ – внутренние (промежуточные) переменные, совокупность которых полностью характеризует свойства системы;
3) выходные переменные $y_1(t), y_2(t),\ldots, y_r(t)$, представляющие реакции на внешние воздействия и состояния системы, которые интересны для исследователя.

Сама система в общем виде представляется "черным ящиком" с $m$ входами и $r$ выходами, с каждым из которых связана соответствующая переменная.

После упорядочения (нумерации) элементов этих множеств получаем соответственно три вектора:

– входной (задающий) вектор $X(t)= x_1(t), x_2(t),\ldots, x_m(t)$ ;

– вектор состояния $V(t)= v_1(t), v_2(t),\ldots, v_n(t)$ ;

– выходной вектор $Y(t)= y_1(t), y_2(t),\ldots, y_r(t)$ .

Векторное представление позволяет рассматривать систему с одним обобщенным входом, переменной состояния и одним обобщенным выходом (рисунок 2.2).

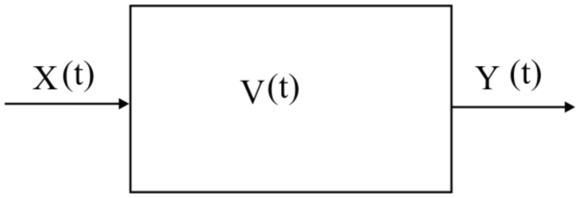


*Рисунок 2.2. Переменные системы в матричной форме*

Непрерывные линейные детерминированные системы в каждый момент времени t можно описать при помощи двух матричных уравнений:

1) уравнением состояния:

$$\frac{dV(t)}{dt} = A \cdot V(t) + B \cdot X(t), \tag{2.1}$$

где: $A$ – матрица системы; $V(t)$ – вектор переменных состояния системы; $B(t)$ – матрица управления;

2) выходным уравнением:

$$Y(t) = C(t) \cdot V(t) + D(t) \cdot X(t) \tag{2.2}$$

где: $C(t)$ – матрица выхода; $D(t)$ – матрица входа;

Если элементы этих матриц зависят от времени, то система называется линейной нестационарной (или параметрической).

Если элементы матриц *A, B, C, D* выражаются постоянными числами, то система называется линейной стационарной.

Дальнейшее рассмотрение понятий управляемости и наблюдаемости проведем на примере линейных стационарных систем.

Понятия управляемости и наблюдаемости систем впервые введены Р. Е. Калманом.

Система является управляемой, если она может быть переведена из любого состояния $V(t_0)$ в момент времени $t=t_0$ в любое желаемое состояние $V(t_1)$ за конечный интервал времени $\tau = (t_1 - t_0)$ путем приложения кусочно-непрерывного входного воздействия *X(t)*, где $t \in (t_0, t_1)$.

Понятие наблюдаемости дополняет понятие управляемости. Если управляемость требует, чтобы каждое состояние системы было чувствительно к воздействию входного сигнала, то наблюдаемость призывает, чтобы каждое состояние системы влияло на измеряемый выходной сигнал.

Система наблюдаемая, если ее состояние можно непосредственно или косвенно определить по выходному вектору системы. Поэтому, когда определенное состояние (или изменение этого состояния) не влияет на выходной вектор, система не наблюдаема.

Система называется идентифицируемой, если по измерениям координат состояния можно определить ее матрицу $A$.

Для определения управляемости и наблюдаемости систем разработаны различные методы. Рассмотрим некоторые из них.

### Критерий Гильберта управляемости и наблюдаемости систем

Критерий Гильберта используется для исследования управляемости и наблюдаемости линейной системы, представленной в канонической форме.

Достоинством критерия Гильберта по сравнению с другими методами является более полное отражение физических свойств исследуемой системы. Однако, применимость этого критерия ограничена только системами с различными собственными значениями матрицы коэффициентов.

Критерий требует предварительного приведения уравнений системы к канонической форме. Эта форма удобна тем, что в ней отсутствует взаимосвязь между переменными состояния.

Канонические преобразования заключаются в следующем.

Применим в уравнении состояния (2.1) линейное преобразование к переменной $X^{*}(t)$:

$$X(t) = H \cdot X^{*}(t).$$

Матрицей преобразования является модальная матрицы $H$. Из предыдущего выражения получаем:

$$X^{*}(t) = H^{-1} \cdot X(t). \qquad (2.3)$$

Аналогичным образом преобразуем переменную $V^{*}(t)$:

$$V(t) = H \cdot V^{*}(t).$$

Откуда:

$$V^*(t) = H^{-1} \cdot V(t)\,. \qquad (2.4)$$

Преобразованный вектор состояния $V^*(t)$ является линейной комбинацией *n* компонент вектора $V(t)$. С учетом (2.3) и (2.4) выражение (2.1) преобразуется следующим образом:

$$H \cdot \frac{dV^*(\mathrm{t})}{dt} = A \cdot H \cdot V^*(\mathrm{t}) + B \cdot X(\mathrm{t})\,. \qquad (2.5)$$

Разделим правую и левую части уравнение (2.6) на матрицу $H$:

$$\frac{dV^*(\mathrm{t})}{dt} = H^{-1} \cdot A \cdot H \cdot V^*(\mathrm{t}) + H^{-1} \cdot B \cdot X(\mathrm{t})\,.$$

Обозначая через $A^* = H^{-1} \cdot A \cdot H$ и $B^* = H^{-1} \cdot B$, получаем уравнение состояния в канонической форме:

$$\frac{dV^*(\mathrm{t})}{dt} = A^* \cdot V^*(\mathrm{t}) + B^* \cdot X(\mathrm{t}). \qquad (2.6)$$

В новых координатах матрица системы $A^*$ преобразуется к диагональной или жордановой форме. По ее главной диагонали стоят собственные значения матрицы $A$.

Аналогичным образом производим каноническое преобразование выходного уравнения. Производя подстановку (2.3) в уравнение (2.2), получаем:

$$Y^*(t) = C^*(t) \cdot V^*(t) + D(t) \cdot X(t) \qquad (2.7)$$

где $C^* = C \cdot H$ – преобразованная матрица входа.

При проведении преобразований надлежит учесть следующие замечания:

1) указанное преобразование возможно только в том случае, когда существует матрица $H^{1}$ ; собственные значения: $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ матрицы $A$ различные;

2) ни одна преобразованная переменная не может рассматриваться как переменная состояния, если она является линейной комбинацией других переменных состояния;

3) матрица $A$ и преобразованная матрицы $A^*$ имеют одинаковые собственные значения: $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$.

Преобразованное уравнение состояния (2.6) можно записать в виде системы $n$ скалярных уравнений:

$$\frac{dV_i^*}{dt} = \lambda_i \cdot V_i^* + b^*_{(i)} \cdot X_i(t), \quad (i = 1, 2, \ldots, n), \tag{2.8}$$

где $\lambda_i$ – собственные значения матрицы $A$; $b_{(i)}$ $-i$ -тая строка матрицы B*.

Как видно из выражения (2.8), система будет управляемой, если все переменные $V^*(t)$ зависят от входных воздействий. Это означает, что переменные состояния $V^*(t)$ не содержат свободных (неуправляемых компонентов). Очевидным условием полной управляемости системы является отсутствие нулевой строки в матрице $B^*$, т. е. все строки $b_{(i)}$ должны быть ненулевыми векторами- строками.

Система полностью наблюдаема по критерию Гильберта, если ни один из столбцов матрицы $C^*(t) = C(t) \cdot H$ не является нулевым. Если по крайней мере один столбец матрицы $C^*(t)$ нулевой, то система становится не полностью наблюдаемой.

### Критерий управляемости и наблюдаемости системы Р. Е. Калмана

Критерий основан на полиномиальном разложении матрицы $e^{A \cdot t}$.

Применимость этого критерия не ограничена системами, с различными собственными значениями матрицы $A$. Несомненным достоинством этого критерия является отсутствие расчетов собственных значений, собственных векторов, а также отсутствие последующего преобразования уравнений состояния, что может представлять значительный объем вычислений.

Система полностью **управляема**, если $n$ независимых скалярных уравнений удовлетворяют матричному уравнению. Иначе говоря, система полностью управляема, если матрица

$$M = \begin{bmatrix} B & AB & A^2B & \ldots\ldots & A^{n-1}B \end{bmatrix} \tag{2.9}$$

имеет ранг $n$, где $n$ – порядок системы.

Для расчета наблюдаемости систем используется выходное уравнение системы. Для полной наблюдаемости системы требуется, чтобы $n$ столбцов матрицы

$$L^T = \left[ C^T, \quad A^T \cdot C^T, \quad (A^T)^2 \cdot C^T, \quad ...., \quad (A^T)^{n-1} \cdot C^T \right], \tag{2.10}$$

где индекс $T$ означает операцию транспонирования, были линейно независимы. То есть, матрица $L^T$ имела ранг $n$, где $n$ – порядок системы.

Пример 6

Определить управляемость системы с заданными параметрами по критерию Гильберта $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$; $B = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$; $C = 1 \quad 1$ .

Решение

1. Производим расчет матрицы $\lambda E - A$ :

$$\begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} - A = \begin{bmatrix} \lambda - 1 & -2 \\ -4 & \lambda - 3 \end{bmatrix}.$$

2. Для определения собственных значений матрицы $A$ вычислим коэффициенты характеристического многочлена и приравняем его к нулю:

$$\det |\lambda \cdot E - A| = \lambda^2 - 4 \cdot \lambda - 5 = 0.$$

3. Вычисляем корни характеристического многочлена:

$$\lambda_1 = -1; \qquad \lambda_2 = 5.$$

4. Вычисляем модальную матрицу $H$:

$$H = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

5. Вычисляем обратную матрицу $H^{-1}$:

$$H^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{-1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}.$$

6. Делаем проверку правильности диагонализации матрицы $A$:

$$\Lambda = H^{-1} \cdot A \cdot H = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{-1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}.$$

По главной диагонали матрицы $\Lambda$ стоят собственные значения матрицы $A$. Следовательно, процедура диагонализации выполнена правильно.

7. Рассчитываем матрицу:

$$B^{*} = H^{-1} \cdot B = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{-1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Так как на состояние $v_1$ не влияет входной сигнал управления, система не полностью управляема.

## Пример 7

Определить управляемость системы по критерию Калмана, заданной следующими параметрами:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 7 \\ 5 & 8 \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} 4 \\ 7 \end{bmatrix}.$$

### Решение

1. Составляем матрицу $M = B, \ AB$. Для этой цели рассчитываем произведение матриц:

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} 3 & 7 \\ 5 & 8 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 4 \\ 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 61 \\ 76 \end{bmatrix}.$$

и записываем соответствующие столбцы матрицы $M$:

$$M = \begin{bmatrix} 4 & 61 \\ 7 & 76 \end{bmatrix}.$$

2. Рассчитываем ранг матрицы $M$:

$$rang(M) = 2.$$

Так как ранг равен порядку уравнения n=2 система управляемая.

Пример 8

Определить наблюдаемость системы с заданными параметрами по критерию Гильберта:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}; \qquad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}; \qquad C = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Решение

1. Производим расчет матрицы $\lambda E - A$ :

$$\begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} - A = \begin{bmatrix} \lambda - 1 & -2 \\ -4 & \lambda - 3 \end{bmatrix}.$$

2. Для определения собственных значений матрицы $A$ вычислим коэффициенты характеристического многочлена и приравняем его к нулю

$$\det|\lambda \cdot E - A| = \lambda^2 - 7 \cdot \lambda + 22 = 0.$$

3. Вычисляем корни характеристического многочлена:

$\lambda_1$= -1; $\lambda_2$=5.

4.Вычисляем модальную матрицу *H:*

$$H = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

5. Вычисляем обратную матрицу $H^{-1}$:

$$H^{-1} = \begin{bmatrix} \dfrac{2}{3} & \dfrac{-1}{3} \\ \dfrac{1}{3} & \dfrac{1}{3} \end{bmatrix}.$$

6. Делаем проверку правильности диагонализации матрицы $A$:

$$A^{*} = H^{-1} \cdot A \cdot H = \begin{bmatrix} \dfrac{2}{3} & \dfrac{-1}{3} \\ \dfrac{1}{3} & \dfrac{1}{3} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}.$$

По главной диагонали матрицы $A^{*}$ стоят собственные значения матрицы $A$. Следовательно, процедура диагонализации выполнена правильно.

7. Рассчитываем матрицу $C^{*} = C \cdot H$:

$$C^{*} = \begin{matrix} 1 & 1 \end{matrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} = \begin{matrix} 0 & 3 \end{matrix}.$$

Поскольку первый столбец матрицы $C^{*}$ равен нулю, система не полностью наблюдаема.

Пример 9

Определить наблюдаемость системы по критерию Калмана, заданной следующими параметрами:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 4 & 9 \end{bmatrix}; \qquad C = \begin{bmatrix} 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Решение

1. Транспонируем матрицы $C$ и $A$:

$$C^T = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}; \qquad A^T = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 9 \end{bmatrix}.$$

2. Находим произведение матриц:

$$A^T \cdot C^T = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 9 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 19 \end{bmatrix}.$$

3. Составляем матрицу $L^T$:

$$L^T = \begin{bmatrix} C^T & A^T \cdot C^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 8 \\ 1 & 19 \end{bmatrix}.$$

2. Рассчитываем ранг матрицы $L^T$:

$$rang\ L^T = 2.$$

Так как он равен порядку системы, она наблюдаема.

## Задание №3 расчетно-графической работы

Определить управляемость или наблюдаемость системы с заданными параметрами :

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}; \qquad B = \begin{bmatrix} e \\ f \end{bmatrix}; \qquad C = \begin{bmatrix} g & h \end{bmatrix}.$$

Варианты заданий

| № варианта | a | b | c | d | e | f | g | h | Критерий расчета |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1. | 2 | 3 | 4 | 5 | 1 | 1 | 1 | 1 | Управляемость по Гильберту |
| 2. | 3 | 7 | 9 | 5 | 2 | 1 | 2 | 1 | Наблюдаемость по Гильберту |

Варианты заданий (продолжение)

| № варианта | a | b | c | d | e | f | g | h | Критерий расчета |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 3. | 3 | 8 | 7 | 5 | 2 | 2 | 1 | 1 | Управляемость по Калману |
| 4. | 3 | 7 | 9 | 1 | 2 | 1 | 2 | 1 | Наблюдаемость по Калману |
| 5. | 1 | 5 | 4 | 1 | 2 | 1 | 0 | 1 | Управляемость по Гильберту |
| 6. | 3 | 0 | 9 | 5 | 2 | 1 | 0 | 1 | Наблюдаемость по Гильберту |
| 7. | 1 | 0 | 2 | 5 | 0 | 1 | 0 | 1 | Управляемость по Калману |
| 8. | 3 | 2 | 0 | 1 | 2 | 1 | 2 | 1 | Наблюдаемость по Калману |
| 9. | 2 | 2 | 0 | 1 | 2 | 1 | 2 | 0 | Наблюдаемость по Калману |
| 10. | 2 | 3 | 4 | 1 | 0 | 2 | 1 | 1 | Управляемость по Гильберту |
| 11. | 5 | 1 | 4 | 1 | 0 | 2 | 1 | 1 | Управляемость по Гильберту |
| 12. | 3 | 2 | 0 | 1 | 2 | 1 | 2 | 0 | Наблюдаемость по Гильберту |
| 13. | 5 | 1 | 5 | 1 | 0 | 2 | 1 | 1 | Наблюдаемость по Калману |
| 14. | 1 | 0 | 9 | 1 | 2 | 1 | 1 | 0 | Управляемость по Гильберту |
| 15. | 5 | 0 | 2 | 5 | 0 | 1 | 0 | 1 | Наблюдаемость по Гильберту |
| 16. | 1 | 0 | 9 | 1 | 2 | 1 | 1 | 0 | Наблюдаемость по Гильберту |
| 17. | 5 | 0 | 2 | 5 | 0 | 1 | 0 | 1 | Управляемость по Калману |
| 18. | 5 | 2 | 4 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | Наблюдаемость по Гильберту |
| 19. | 5 | 0 | 8 | 5 | 5 | 1 | 8 | 0 | Управляемость по Калману |
| 20. | 9 | 0 | 2 | 8 | 0 | 1 | 0 | 1 | Наблюдаемость по Гильберту |

## Список литературы


1. Романько, И.Е. Теория управления [Электронный ресурс]: учебное пособие/ И.Е. Романько. — Электрон. текстовые данные. — Ставрополь: Северо-Кавказский федеральный университет, 2016. — 190 с. — 2227-8397. — Режим доступа: http://www.iprbookshop.ru/62876.html
2. Тяжев, А.И. Теория автоматического управления [Электронный ресурс]: учебник/ А.И. Тяжев. — Электрон. текстовые данные. — Самара: Поволжский государственный университет телекоммуникаций и информатики, 2016. — 164 с. — 978-5-904029-64-7. — Режим доступа: http://www.iprbookshop.ru/71889.html
3. Федосенков, Б.А. Теория автоматического управления [Электронный ресурс]: современные разделы теории управления. Учебное пособие/ Б.А. Федосенков. — Электрон. текстовые данные. — Кемерово: Кемеровский технологический институт пищевой промышленности, 2014. — 153 с. — 978-5-89289-863-8. — Режим доступа: http://www.iprbookshop.ru/61292.html
4. Шевцова, Н.М. Теория управления [Электронный ресурс]: учебное пособие/ Н.М. Шевцова, Т.В. Сабетова, И.Ю. Федулова. — Электрон. текстовые данные. — Воронеж: Воронежский Государственный Аграрный Университет им. Императора Петра Первого, 2015. — 183 с. — 2227-8397. — Режим доступа: http://www.iprbookshop.ru/72766.html
5. Егоркин, О.В. Теория автоматического управления [Электронный ресурс]: методические указания к выполнению расчетно-графической работы по дисциплине «Теория автоматического управления» для студентов направления 15.03.05 «Конструкторско-технологическое обеспечение машиностроительных производств»/ О.В. Егоркин, Н.В. Назарова. — Электрон. текстовые данные. — Саратов: Вузовское образование, 2018. — 59 с. — 978-5-4487-0184-9. — Режим доступа: http://www.iprbookshop.ru/73607.html
6. Лубенцова, Е.В. Теория автоматического управления [Электронный ресурс]: учебно-методическое пособие/ Е.В. Лубенцова, В.Ф. Лубенцов. — Электрон. текстовые данные. — Ставрополь: Северо-Кавказский федеральный университет, 2013. — 143 с. — 2227-8397. — Режим доступа: http://www.iprbookshop.ru/63227.html
7. Шишмарев, В.Ю. Основы автоматического управления [Текст]: учеб. пособие для студ. вузов/ В.Ю. Шишмарев.- М.: Академия, 2008.- 352 с.
8. Методы оптимизации и теории управления [Электронный ресурс]: методические указания к самостоятельной работе по дисциплинам «Методы оптимизации», «Математические методы теории управления»/. — Электрон. текстовые данные. — Липецк: Липецкий государственный технический университет, ЭБС АСВ, 2013. — 18 с. — 2227-8397. — Режим доступа: http://www.iprbookshop.ru/22891.html
9. Сигорский В. П. Математический аппарат инженера. Изд. 2-е. – Киев: Техника, 1977. – 728 с.
10. Ющенко А.С. Математические основы теории автоматического управления. / В.А. Иванов, В.С. Медведев, Б.К. Чемоданов. – В 3-х т. – М.: Изд-во МГТУ им. Баумана, 2006. –Т.1. – 552 с.
11. Гроп Д . Методы идентификации систем. – М.: Мир, 1979. – 302 с.

**Содержание**

## ДЛЯ ПРИМЕЧАНИЙ

# ДЛЯ ПРИМЕЧАНИЙ

**ТОКОВА Алла Аскербиевна**

# ТЕОРИЯ УПРАВЛЕНИЯ

Учебно-методическое пособие для обучающихся 3 курса
по направлению подготовки
01.03.04 " Прикладная математика "

Корректор Джукаев У.М.
Редактор Джукаев У.М.
Сдано в набор 30.10.2018 г.
Формат 60х84/16
Бумага офсетная
Печать офсетная
Усл.печ.л. 2,3
Заказ №3710
Тираж 100 экз.

Оригинал-макет подготовлен
В Библиотечно-издательском центре СевКавГГТА
369000, г. Черкесск, ул. Ставропольская, 36