МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное

учреждение высшего образования

Северо-Кавказская государственная гуманитарно-
технологическая академия

Токова А.А.

Учебно-методическое пособие
по дисциплине

«Теория вероятностей и математическая статистика»

(для обучающихся на 2 курсе по направлению подготовки
Прикладная математика 01.03.04, Прикладная информатика
09.03.03, Программная инженерия 09.03.04)

Черкесск, 2018

УДК 519.2

ББК 22.17

Т 40

Рассмотрено на заседании кафедры «Математика» Протокол № 2 от « 21 » сентября 2018 г.

Рекомендовано к изданию редакционно-издательским советом СевКавГГТА Протокол № 15 от «30» октября 2018 г.

Рецензенты:
д. ф. – м. н, профессор А.М. Кочкаров
к. ф. – м. н., доцент З.О. Коркмазова

Т 40 Токова А**.**А**.** Учебно-методическое пособие по теории вероятностей и математической статистике для обучающихся на 2 курсе по направлению подготовки Прикладная математика 01.03.04, Прикладная информатика 09.03.03, Программная инженерия 09.03.04 / Токова А.А. – Черкесск: СевКавГГТА, 2018. – 104 с.

Учебно-методическое пособие предназначено для обучающихся на 2 курсе по направлению подготовки Прикладная математика 01.03.04, Прикладная информатика 09.03.03, Программная инженерия 09.03.04, содержит краткий теоретический материал по курсу теории вероятностей и математической статистики, который сопровождается рассмотрением большого количества образцов решения задач расчетно-графической работы и заданий расчетно-графической работы.

УДК 519.2

ББК 22.17

1. Основные понятия и теоремы теории вероятностей

1.1. Классическое и статистическое определение вероятности.

Теория вероятностей есть раздел математики, в котором изучаются случайные явления (события) и выявляются закономерности при массовом их повторении.

Под ***событием*** понимается такой результат эксперимента или наблюдения, который при реализации данного комплекса условий может произойти или не произойти.

Пример 1. Стрелок стреляет по мишени, разделенной на четыре области. Выстрел – это испытание. Попадание в определенную область мишени – событие.

Невозможным называют событие, которое не может произойти, если будет осуществлен комплекс условий.

Пример 2. Появление 12 очков при бросании одной игральной кости – невозможное событие.

Достоверным называют событие, которое обязательно произойдет, если будет осуществлен комплекс условий.

Пример 3. Выпадение не более 6 очков при бросании игральной кости – достоверное событие.

Случайным называют событие, которое при осуществлении комплекса условий может либо произойти, либо не произойти.

Пример 4. Событие «при бросании монеты выпал герб» – случайное.

Событие будем обозначать буквами: A, B, C, ... При этом достоверное событие будем обозначать буквой U, а невозможное – V.

События называются ***равновозможными***, если имеются основания считать, что ни одно из этих событий не является более возможным, чем другие.

Пример 5. Появление «герба» и появление надписи при бросании монеты – равновозможные события.

Случайные события называются ***несовместными***, если ни какие два из них не могут произойти в данном опыте одновременно.

Пример 6. Брошена монета. Появление «герба» исключает появление надписи. События «появился герб» и «появилась надпись» – несовместные.

Несколько событий образуют ***полную группу событий***, если в результате опыта обязательно произойдет хотя бы одно из них.

Пример 7. Стрелок произвел выстрел по цели. Обязательно произойдет одно из следующих двух событий: попадание и промах. Эти два несовместных события образуют полную группу.

Если события, образующие полную группу, несовместны, то появление в результате опыта одного из них является достоверным событием.

Два несовместных события, образующих полную группу, называются ***противоположными***. Они обозначаются A и $\overline{A}$.

По классическому определению, ***вероятностью*** события A называют отношение числа m исходов, благоприятствующих этому событию, к общему числу n всех равновозможных несовместных элементарных исходов, образующих полную группу:

$$P(A) = m/n.$$

Свойства вероятности:

1) Вероятность достоверного события равна единице.
2) Вероятность невозможного события равна нулю.
3) Вероятность случайного события есть положительное число, заключенное между нулем и единицей.

Пример 8. В урне 12 шаров: 3 белых, 4 черных и 5 красных. Какова вероятность вынуть из урны черный шар?

Решение. Здесь $m = 4$ – количество черных шаров в урне, $n = 12$ – количество всех шаров, тогда $P(A) = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$.

Относительной частотой события называют отношение числа m испытаний, в которых событие появилось, к общему числу n фактически проведенных испытаний, т.е. $W(A) = m/n$.

В различных опытах относительная частота изменяется мало (тем меньше, чем больше произведено испытаний), колеблясь около некоторого постоянного числа.

Вероятность вычисляют до опыта, а относительную частоту после опыта.

При статистическом определении в качестве вероятности события принимают его относительную частоту.

1.2. Основные формулы комбинаторики

Комбинаторика – это раздел математики, в котором решаются некоторые задачи, связанные с рассмотрением множеств и составлением различных комбинаций из элементов этих множеств.

Перестановками называют комбинации, состоящие из одних и тех же n различных элементов и отличающиеся только порядком их распределения.

Число всех возможных перестановок из n элементов обозначается P_n и вычисляется по формуле

$$P_n = n!,$$

где $n!$ - n*-факториал,* $n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n$. По определению полагают $0! = 1$.

Пример 1. Сколько трехзначных чисел можно составить из цифр 1, 2, 3, если каждая цифра входит в изображение числа только один раз?

Решение. Искомое число трехзначных чисел

$$P_3 = 3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6.$$

Размещениями называют комбинации, составленные из n различных элементов по m элементов, которые отличаются либо составом элементов, либо их порядком.

Число всех возможных размещений из n элементов по m элементов обозначается A_n^m и вычисляется по формуле

$$A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}.$$

Пример 2. Сколько можно составить сигналов из 6 флажков различного цвета, взятых по 2?

Решение. Искомое число сигналов

$$A_6^2 = \frac{6!}{4!} = 5 \cdot 6 = 30.$$

Сочетаниями называют комбинации, составленные из n различных элементов по m элементов.

Число всех возможных сочетаний из n элементов по m элементов обозначается C_n^m или $\binom{n}{m}$ и вычисляется по формуле

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}.$$

По определению полагают $C_n^0 = 1$.

Пример 3. Сколькими способами можно выбрать две детали из ящика, содержащего 10 деталей?

Решение. Искомое число способов

$$C_{10}^2 = \frac{10!}{2!8!} = 45.$$

Для сочетаний справедливы равенства:

$$C_n^m = C_n^{n-m}; \quad C_{n+1}^{m+1} = C_n^m + C_n^{m+1}; \quad C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \ldots + C_n^{n-1} + C_n^n = 2^n.$$

Последнее равенство иногда формулируется в виде следующей ***теоремы о конечных множествах:*** *число всех подмножеств множества, состоящего из* n *элементов, равно* 2^n.

Выше предполагалось, что все n элементов различны. Если же некоторые элементы повторяются, то в этом случае множества с повторениями вычисляют по другим формулам.

Например, если среди n элементов есть n_1 элементов одного вида, n_2 элементов другого вида и т. д., то число перестановок с повторениями определяется формулой

$$P_n(n_1, n_2, \ldots, n_k) = \frac{n!}{n_1!n_2!\ldots n_k!}, \text{ где } n_1 + n_2 + \ldots + n_k = n.$$

Число размещений по m элементов с повторениями из n элементов равно n^m, то есть $(A_n^m)_{с\ повт} = n^m$.

Число сочетаний с повторениями из n элементов по m элементов равно числу сочетаний без повторений из $n + m - 1$ элементов по m элементов, то есть $(C_n^m)_{с\ повт} = C_{n+m-1}^m$.

При решении задач комбинаторики используют следующие правила.

<u>Правило суммы</u>. Если некоторый объект *А* может быть выбран из множества объектов *m* способами, а другой объект *В* может быть выбран *n* способами, то выбрать либо *А*, либо *В* можно $m + n$ способами.

<u>Правило произведения</u>. Если объект *А* можно выбрать из множества объектов *m* способами и после каждого такого выбора объект *В* можно выбрать *n* способами, то пара объектов (*А, В*) в указанном порядке может быть выбрана $m \cdot n$ способами.

Образцы решения задач

Задача 1. В ящике 10 перенумерованных шаров с номерами от 1 до 10. Вынули один шар. Какова вероятность того, что номер вынутого шара не превышает 10?

Решение. Так как номер любого шара, находящегося в ящике, не превышает 10, то число случаев, благоприятствующих событию *A*, равно числу всех возможных случаев, т.е. $m = n = 10$ и $P(A) = \frac{m}{n} = 1$. В этом случае событие *A* достоверно.

Задача 2. В урне 10 шаров: 6 белых и 4 черных. Вынули два шара. Какова вероятность, что оба шара – белые?

Решение. Число всех исходов $n = C_{10}^{2} = \frac{10 \cdot 9}{1 \cdot 2} = 45.$ Число же исходов, благоприятствующих событию *A*, определяется равенством $m = C_{6}^{2}$, то есть $m = \frac{6 \cdot 5}{1 \cdot 2} = 15$. Итак, $P(A) = \frac{15}{45} = \frac{1}{3}$.

Задача 3. Куб, все грани которого окрашены, распилен на тысячу кубиков одинакового размера. Полученные кубики тщательно перемешаны. Определить вероятность того, что кубик, извлеченный наудачу, будет иметь две окрашенные грани.

Решение. Всего кубиков $n = 1000$. Куб имеет 12 ребер. Каждая грань должна быть разбита на 100 квадратов, каждое ребро на 10 частей, восьми из которых соответствуют кубики с двумя окрашенными гранями. Поэтому $m = 12 \cdot 8 = 96$, $p = \frac{m}{n} = \frac{96}{1000} = 0{,}096$.

Задача 4. Из слова «*НАУГАД*» выбирается наугад одна буква. Какова вероятность того, что эта буква «*Я*»? Какова вероятность того, что это гласная?

Решение. В первом случае $p = 0$, т.к. буквы «*Я*» в слове нет. Во втором $m = 3$ – число гласных, $n = 6$ – всего букв, тогда $p = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$.

Задача 5. При наборе телефонного номера абонент забыл две последние цифры и набрал их наудачу, помня только, что эти цифры нечётные и разные. Найти вероятность того, что номер набран правильно.

Решение. $m = 1$ – единственная пара чисел, благоприятствующая событию. Так как нечётных чисел 5, то два числа в определённом порядке берётся из них A_5^2 раз (число размещений из 5 элементов по 2)

$$n = A_5^2 = \frac{5!}{(5-2)!} = 20, \text{ тогда } p = 1/20.$$

Задача 6. Каждая из букв *А, У, К, С, З* написана на одной из пяти карточек. Карточки раскладываются в произвольном порядке. Найти вероятность того, что при этом образуется слово *«КАЗУС»*.

Решение. $m=1$ – единственная комбинация букв, благоприятствующая событию, $n = P_5 = 5!$ – число перестановок из 5 букв, тогда $P(A) = \frac{m}{n} = \frac{1}{5!} = \frac{1}{120}$.

Задача 7. Телефонный номер состоит из 5 цифр. Найти вероятность того, что все цифры различны.

Решение. $n=10^5$ – всего номеров (номера 00000 и 99999 считаем возможными), $m = A_{10}^5$ – номеров с различными цифрами, тогда $P(A) = \frac{m}{n} = \frac{10!}{5!10^5} = 0{,}3024$.

Задача 8. В конкурсе по 5 номинациям участвуют 10 кинофильмов. Сколько существует вариантов распределения призов, если по каждой номинации установлены: а) различные призы; б) одинаковые призы?

Решение. а) Каждый из вариантов распределения призов представляет собой комбинацию 5 фильмов из 10, отличающуюся от других комбинаций, как составом фильмов, так и их порядком по номинациям (или и тем, и другим), причем одни и те же фильмы могут повторяться несколько раз, т. к. любой фильм может получить призы как по одной, так и по нескольким (включая все пять) номинациям: $(A_{10}^5)_{с\ повт} = 10^5 = 100000$; б) Если по каждой номинации установлены одинаковые призы, то порядок следования фильмов в комбинации 5 призеров значения не имеет, т. е.

$$(C_{10}^5)_{с\ повт.} = C_{10+5-1}^5 = C_{14}^5 = \frac{14 \cdot 13 \cdot 12 \cdot 11 \cdot 10}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} = 2002.$$

Задача 9. При стрельбе была получена частота попадания 0,6. Сколько было сделано выстрелов, если получено 12 промахов?

Решение. Частота 0,6 говорит о том, что на 10 выстрелов приходится 6 попаданий, а значит, 4 промаха. Чтобы получить 12 промахов при данной частоте попаданий, необходимо сделать 30 выстрелов.

Задача 10. В партии из *n* изделий *k* бракованных. Определить вероятность того, что среди выбранных наудачу для проверки *m* изделий равно *l* окажутся бракованными.

Решение. Число возможных способов взять *m* изделий из *n* равно C_n^m. Благоприятствующими являются случаи, когда из общего числа *k* бракованных изделий взято

l (C_k^l способов), а остальные m-l изделий не бракованные, число которых n-k (C_{n-k}^{m-l} способов). Число благоприятствующих случаев $m = C_k^l C_{n-k}^{m-l}$, тогда $p = \dfrac{C_k^l C_{n-k}^{m-l}}{C_n^m}$.

Задачи для решения

1. Наудачу выбрана кость домино из полного набора. Какова вероятность того, что сумма очков на выбранной кости равна пяти?

2. В ящике 10 одинаковых деталей, помеченных номерами 1,2,...,10. Наудачу извлечены 6 деталей. Найти вероятность того, что среди извлеченных деталей окажутся: а) деталь №1; б) детали №1 и №2.

3. Из пяти карточек с буквами *А, Б, В, Г, Д* наугад одна за другой выбираются три и располагаются в ряд в порядке появления. Какова вероятность того, что получится слово «*ДВА»*?

4. В «секретном» замке на общей оси 4 диска, каждый из которых разделен на 5 секторов, на которых написаны различные числа. Замок открывается только в том случае, если диски установлены так, чтобы цифры на них составляли определенное число. Найти вероятность того, что при произвольной установке дисков замок будет открыт.

5. На шести карточках написаны буквы *В, Д, З, О, У, Х.* После перетасовки вынимают наугад одну карточку за другой и раскладывают их в том порядке, в каком они были вынуты. Найти вероятность того, что на карточках будет написано слово *«ВОЗДУХ»*.

6. В цехе работают шесть мужчин и четыре женщины. По табельным номерам наудачу отобраны семь человек. Найти вероятность того, что среди отобранных лиц окажутся три женщины.

7. В ящике лежат 15 красных, 9 синих и 6 зеленых неразличимых одинаковых шаров. Наудачу вынимают 6 шаров. Какова вероятность того, что взяты 1 зеленый, 2 синих и 3 красных шара?

8. Какова вероятность угадывания (выигрыша) $\underline{k}$ видов спорта в игре «Спортлото 5 из 36»?

9. По цели произведено 20 выстрелов, причем зарегистрировано 18 попаданий. Найти относительную частоту попаданий в цель.

10. Набирая номер телефона, абонент забыл последние три цифры и, помня лишь, что эти цифры различны, набрал их наудачу. Найти вероятность того, что набраны нужные цифры.

11. Куб, все грани которого окрашены, распилен на 1000 кубиков одинакового размера, которые затем тщательно перемешаны. Найти вероятность того, что наудачу извлечённый кубик будет иметь окрашенных граней: а) три; б) одну; в) ни одной.

12. Сколькими способами можно выбрать 6 пирожных в кондитерской, где есть 4 разных сорта пирожных?

13*. Какова вероятность того, что в наудачу выбранном двузначном числе цифры одинаковы.

Замечание. Здесь и далее звездочкой отмечены задачи для самостоятельного решения.

14*. В конверте среди 100 фотографий находится одна разыскиваемая. Из конверта наудачу извлечены 10 карточек. Найти вероятность того, что среди них окажется нужная.

15*. Из букв алфавита *а, б, к, о, м*, написанных на отдельных карточках, поочерёдно случайно выбирается по одной. Буква запоминается, и карточка возвращается обратно, карточки тщательно перемешиваются. Определить вероятность того, что в порядке поступления букв получится слово *«МАМА»*.

16*. В коробке 6 одинаковых занумерованных шаров. Наудачу по одному извлекаются все шары. Найти вероятность того, что номера извлечённых шаров появляются в возрастающем порядке.

17*. Из колоды в 36 карт наудачу вынимают три карты. Найдите вероятность того, что среди них окажется два туза.

18*. В группе 12 студентов, среди которых 8 отличников. По списку наудачу отобраны 9 студентов. Найти вероятность того, что среди отобранных студентов пять отличников.

19*. Какова вероятность угадывания (выигрыша) k видов спорта в игре «Спортлото 6 из 49»?

20*. При испытании партии приборов относительная частота годных приборов оказалась равной 0,9. Найти число годных приборов, если было проверено 200 приборов.

21*. Набирая номер телефона, абонент забыл последние две цифры, и набрал их наудачу. Найти вероятность того, что были набраны нужные цифры.

22*. Участники жеребьёвки тянут жетоны с номерами от 1 до 100. Найти вероятность того, что номер первого наудачу извлечённого жетона не содержит цифры 5.

23*. Четыре студента сдают экзамен. Сколько может быть вариантов распределения оценок, если известно, что так или иначе все они экзамены сдали?

24*. Для доступа в компьютерную сеть оператору необходимо набрать пароль из 4 цифр. Оператор забыл или не знает необходимого кода. Сколько всевозможных комбинаций он может составить для набора пароля: а) если цифры в коде не повторяются; б) если повторяются; в) с какой вероятностью можно открыть замок с первой попытки?

1.3. Геометрическая вероятность

Классическое определение вероятности предполагает, что число элементарных исходов конечно. На практике встречаются опыты, для которых множество таких исходов. В таких случаях вводят понятие геометрической вероятности, т.е. вероятности попадания точки в область (отрезок, часть плоскости, часть тела и т.д.).

Пусть имеется некоторая область G и в ней содержится другая область g. Требуется найти вероятность того, что точка, взятая наудачу из области G, попадёт в область g. При этом выражению «точка, взятая наудачу из области G» придаётся следующий смысл: эта точка может попасть в любую точку области G. Вероятность попадания точки в какую-либо область G пропорциональна мере (*mes*) этой части (длине, площади, объёму и т.д.) и не зависит от её расположения и формы:

$$P = \frac{mes g}{mes G}\cdot$$

(*геометрическое определение вероятности*).

Образцы решения задач

Задача 1. На отрезке OA длины α числовой оси Ox наудачу нанесена точка $B(x)$. Найти вероятность того, что меньший из отрезков OB и BA имеют длину, большую $\alpha/3$. Предполагается, что вероятность попадания точки на отрезок пропорциональна длине отрезка и не зависит от его расположения на числовой оси.

Решение. Разобьём отрезок OA точками C и D на три равные части. Требование задачи будет выполнено, если точка $B(x)$ попадёт на отрезок CD длины $\alpha/3$. Искомая вероятность

$$P=(\alpha/3):\ \alpha=1/3.$$

Задача 2. Внутри эллипса $\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{16}=1$ расположен круг $x^2+y^2=9$. Найти вероятность попадания точки в кольцо, ограниченное эллипсом и кругом.

Решение. Пусть событие A – попадание точки в кольцо (рис. 2). Тогда

$P(A)=\dfrac{S_{\text{кол.}}}{S_{\text{эл.}}}$, где $S_{кол.}-S_{кр.}=S_{эл.}-S_{кр.}=\pi ab-\pi r^2$. Так как $a=5$, $b=4$, $r=3$, то

$$P(A)=(20\pi-9\pi)/(20\pi)=\frac{11}{20}=0{,}55.$$

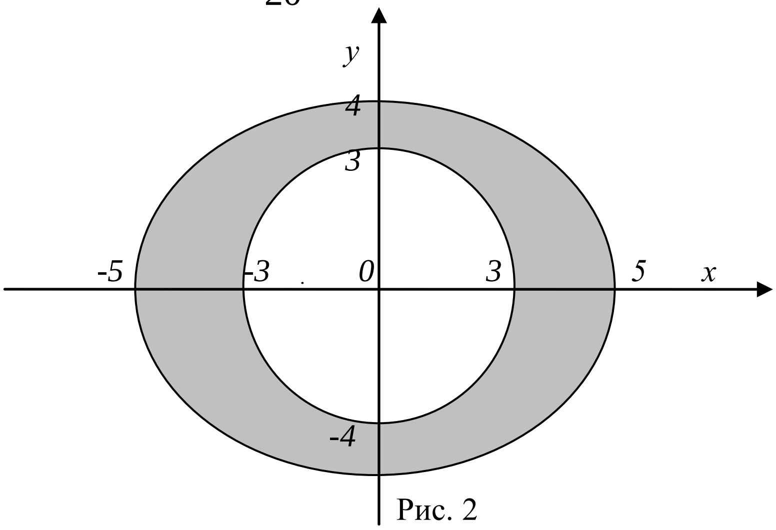


Рис. 2

Задача 3. (Задача о встрече). Два студента A и B условились встретится в определённом месте во время перерыва между 13 ч. и 13 ч. 50 мин. Пришедший первым ждёт другого в течение 10 мин, после чего уходит. Чему равна вероятность их встречи, если приход каждого из них в течение указанных 50 минут может произойти наудачу, и моменты прихода независимы?

Решение. Обозначим момент прихода студента A через x, а студента B – через y. Для того чтобы встреча произошла, необходимо и достаточно, чтобы $|x-y|\le 10$. Изобразим x и y как декартовы координаты на плоскости, а в качестве единицы масштаба выберем одну минуту (рис. 4). Всевозможные исходы изобразятся точками квадрата со стороной 50, а исходы, благоприятствующие встрече, – точками заштрихованной области. Искомая вероятность равна отношению площади заштрихованной фигуры к площади всего квадрата: $P=(50^2-40^2)/50^2=0{,}36.$

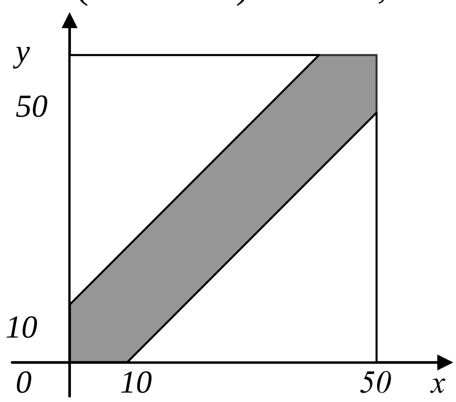


Рис.4.

Задачи для решения

1. Внутрь круга радиуса R наудачу брошена точка. Найти вероятность того, что точка окажется внутри вписанного в круг квадрата. (Предполагается, что вероятность попадания точки в квадрат пропорциональна площади квадрата и не зависит от его расположения относительно круга).
2. Наудачу взяты два положительных числа x и y, каждое из которых не превышает двух. Найти вероятность того, что произведение $x \cdot y$ будет не больше единицы, а частное x / y не больше двух.
3. Плоскость разграфлена параллельными прямыми, отстоящими друг от друга на расстоянии $2a$. На плоскость наудачу брошена монета радиуса $r < a$. Найти вероятность того, что монета не пересечет ни одной из прямых.
4. К причалу для разгрузки между 10 и 14 часами независимо друг от друга в случайный момент времени подходят два танкера. Первый разгружается за 3 часа, а второй за 1 час. Найти вероятность того, что ни одному из танкеров не придётся ждать освобождения причала другим.

5*. На плоскости начерчены две концентрические окружности, радиусы которых 5 и 10 см соответственно. Найти вероятность того, что точка брошенная на удачу в большой круг, попадет в кольцо, образованное построенными окружностями. (Предполагается, что вероятность попадания точки в плоскую фигуру пропорциональна площади этой фигуры и не зависит от ее расположения относительно большого круга).

6*. Наудачу взяты два положительных числа x и y, каждое из которых не превышает единицы. Найти вероятность того, что сумма $x + y$ не превышает единицы, а произведение xy не меньше 0,09.

7*. На отрезке L длины 20 см помещен меньший отрезок l длины 10 см. Найти вероятность того, что точка, наудачу поставленная на большой отрезок, попадет также и на меньший отрезок. (Предполагается, что вероятность попадания точки на отрезок пропорциональна длине отрезка и не зависит от его расположения).

8*. Два парохода должны подойти к одному и тому же причалу. Время подхода обоих пароходов равновозможно в течение суток. Найдите вероятность того, что одному из пароходов придется ждать освобождения причала, если время стоянки первого парохода 1 час, а второго 2 часа.

1.4. Теоремы сложения и умножения вероятностей

Событие, состоящее в наступлении хотя бы одного из событий A или В будем называть ***суммой событий*** A и B и обозначать $A+B$.

Событие, состоящее в наступлении обоих событий A и B, будем называть ***произведением (совмещением) событий*** A и B и обозначать AB.

Операции сложения и умножения событий обладают следующими *свойствами.*

1. $A+B=B+A-$коммутативность сложения.

2. $A+(B+C)=(A+B)+C-$ассоциативность сложения.

3. $AB=BA-$коммутативность умножения.

4. $A(BC)=(AB)C-$ ассоциативность умножения.

5. $A(B+C)=AB+AC; \quad A+BC=(A+B)(A+C)-$ законы дистрибутивности.

Теорема сложения вероятностей несовместных событий. *Вероятность суммы двух несовместных событий равна сумме вероятностей этих событий*

$$P(A+B)=P(A)+P(B).$$

Лемма 1. Вероятность суммы нескольких попарно несовместных событий, равна сумме вероятностей этих событий:

$$P(A_1+A_2+\ldots+A_n)=P(A_1)+P(A_2)+\ldots+P(A_n).$$

Лемма 2. Сумма вероятностей событий $A_1, A_2, \ldots A_n$, образующих полную группу, равна единице:

$$P(A_1)+P(A_2)+\ldots+P(A_n)=1.$$

Лемма 3. Сумма вероятностей противоположных событий равна единице:

$$P(A)+P(\overline{A})=1.$$

Замечание. При решении задач на отыскание вероятности события A часто выгодно сначала вычислить вероятность события $\bar{A}$, а затем найти искомую вероятность по формуле

$$P(A)=1-P(\overline{A}).$$

Теорема сложения вероятностей совместных событий. *Вероятность появления хотя бы одного из двух совместных событий равна сумме вероятностей этих событий без вероятности их совместного появления:*

$$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB).$$

Теорема может быть обобщена на любое конечное число совместных событий. Например, для трёх совместных событий справедлива формула

$$P(A+B+C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(AC)-P(BC)+P(ABC).$$

Условной вероятностью $P_A(B)$ называют вероятность события B, вычисленную в предположении, что событие A уже наступило.

Событие B называют *независимым от события* A, если появление события A не изменяет вероятности события B, т.е. условная вероятность B равна его безусловной вероятности:

$$P_A(B)=P(B).$$

Если событие B не зависит от события A, то и событие A не зависит от события A. Это означает, что свойство независимости событий взаимно.

Теорема умножение вероятностей. *Вероятность появления двух событий равна произведению вероятности одного из них на условную вероятность другого, вычисленную в предположении, что первое событие уже наступило:*

$$P(AB)=P(A)\,P_A(B) \text{ или } P(AB)=P(B)\,P_B(A).$$

В частности, для независимых событий

$$P(AB)=P(A)P(B),$$

т.е. *вероятность совместного появления двух независимых событий равна произведению вероятностей этих событий.*

__**Следствие.**__ Вероятность совместного появления нескольких событий равна произведению вероятности одного из них на условные вероятности всех остальных, причем вероятность каждого последующего события вычисляют в предположении, что все предыдущие события уже наступили:

$$P(A_1A_2\ldots A_n)=P(A_1)\,P_{A_1}(A_2)\,P_{A_1A_2}(A_3)\ldots P_{A_1A_2\ldots A_{n-1}}(A_n).$$

В частности*, вероятность совместного появления нескольких событий, независимых в совокупности, равна произведению вероятностей этих событий:*

$$P(A_1A_2\ldots A_n)=P(A_1)P(A_2)\ldots P(A_n).$$

Несколько событий называют *попарно независимыми,* если каждые два их них независимы.

Несколько событий называют *независимыми в совокупности*, если независимы каждые два из них и независимы каждое событие и все возможные произведения остальных.

Теорема. *Вероятность наступления события A, состоящего в появлении хотя бы одного из событий $A_1,A_2,\ldots,A_n$, независимых в совокупности, равна разности между единицей и произведением вероятностей противоположных событий* $\overline{A}_1, \overline{A}_2, \ldots, \overline{A}_n$*:*

$$P(A)=1-P(\overline{A}_1)P(\overline{A}_2)\ldots P(\overline{A}_n).$$

В частности, если все n событий имеют одинаковую вероятность, равную p, то вероятность появления хотя бы одного из этих событий:

$$P(A) = 1 - q^n, \text{ где } q = 1 - p.$$

Образцы решения задач

Задача 1. В урне 10 белых, 15 черных, 20 синих и 25 красных шаров. Вынули один шар. Найти вероятность того, что вынутый шар: белый или черный; синий или красный; белый, черный или синий.

Решение. Имеем $n=10+15+20+25=70$, $P(Б)=10/70=1/7$, $P(Ч)=15/70=3/14$, $P(С)=20/70=2/7$, $P(К)=25/70=5/14$.

Применяя теорему сложения вероятностей для несовместных событий, получим

$$P(Б+Ч)=P(Б)+P(Ч)=1/7+13/14=5/14,$$

$$P(С+К)=P(С)+P(К)=2/7+5/14=9/14,$$

$$P(Б+Ч+С)=1-P(К)=1-5/14=9/14.$$

Задача 2. В первом ящике 2 белых и 10 черных шаров, во втором ящике 8 белых и 4 черных шара. Из каждого ящика вынули по шару. Какова вероятность того, что: а) оба шара белые; б) один из вынутых шаров белый, а другой черный.

Решение. а) В данном случае речь идет о совмещении событий A и B, где событие A- появление белого шара из первого ящика; B - появление белого шара из второго ящика. При этом A и B независимые события.

$$P(A)=2/12=1/6; \quad P(B)=8/12=2/3.$$

Применив теорему умножения вероятностей, находим:

$$P(AB)=P(A)P(B)=1/6\cdot 2/3=1/9.$$

б) Пусть C- интересующее нас событие, а A – появление из первого ящика белого шара, B – появление из второго ящика белого шара. Тогда $\bar{A}$– появление из первого ящика черного шара, $\overline{B}$ – появление из второго ящика черного шара.

Определим вероятность того, что шар, вынутый из первого ящика, белый, а из второго ящика – черный:

$$P(A\overline{B})=P(A)P(\overline{B})=1/6(1-2/3)=1/6\cdot 1/3=1/18.$$

Определим вероятность того, что шар, вынутый из первого ящика, черный, а из второго ящика – белый:

$$P(B\bar{A})=P(B)P(\bar{A})=2/3(1-1/6)=2/3\cdot 5/6=5/9.$$

Применив теорему сложения вероятностей, получим

$$P(C)=P(A\overline{B})+P(B\bar{A})=1/18+5/9=11/18.$$

Задача 3. Три стрелка независимо друг от друга стреляют по цели. Вероятность попадания в цель для первого стрелка равна 0,75, для второго– 0,8, для третьего – 0,9. Определим вероятность того, что все три стрелка одновременно попадут в цель; хотя бы один стрелок попадет в цель.

Решение. 1) A – первый стрелок попал, B – второй стрелок попал, C – третий стрелок попал. Тогда

$$P(A)=0,75;\ P(B)=0,8;\ P(C)=0,9.$$

Так как события независимы, то

$$P(ABC)=P(A)P(B)P(C)=0,75\cdot 0,8\cdot 0,9=0,54.$$

2) $P(\bar{A})=1-0,75=0,25$ (вероятность промаха для первого стрелка),

$P(\overline{B})=1-0,8=0,2$ (вероятность промаха для второго стрелка),

$P(\overline{C})=1-0,9=0,1$ (вероятность промаха для третьего стрелка).

Тогда $P(\bar{A}\overline{B}\ \overline{C})=P(\bar{A})P(\overline{B})P(\overline{C})=0,25\cdot 0,2\cdot 0,1=0,005$ (вероятность одновременного промаха всех стрелков).

Событие D –хотя бы один стрелок попал, противоположно событию $\bar{A}\overline{B}\ \overline{C}$, значит,

$$P(D)=1-P(\bar{A}\overline{B}\ \overline{C})=1-0,005=0,995.$$

Задачи для решения

1. Вероятность попадания в мишень для первого стрелка 0,8; а для второго- 0,6. Стрелки независимо друг от друга сделали по одному выстрелу. Какова вероятность того, что в мишень попадёт хотя бы один стрелок?

2. Монета брошена три раза. Найти вероятность того, что герб выпадет ровно два раза.

3. В команде из 12 спортсменов 5 мастеров спорта. По жеребьёвке из команды выбирают три человека. Какова вероятность того, что все выбранные спортсмены являются мастерами спорта?

4. Экзаменационный билет содержит 3 вопроса. Вероятность того, что студент ответит на первый и второй вопросы билета равна 0,9; на третий 0,8. Найти вероятность того, что студент сдаст экзамен, если для этого необходимо ответить: а) на все вопросы, б) хотя бы на два вопроса.

5. В урне 4 белых и 6 чёрных шаров. Из урны вынимают 2 шара. Найти вероятность того, что вынутые шары одного цвета.

6. Охотник выстрелил 3 раза по удаляющейся цели. Вероятность попадания в неё в начале стрельбы равна 0,8; а после каждого выстрела уменьшается на 0,1. Найти вероятность того, что он: а) промахнётся все три раза; б) попадёт хотя бы 1 раз; в) попадёт 2 раза.

7. По статистическим данным ремонтной мастерской, в среднем на 20 остановок токарного станка приходится: 10 - для смены резца; 3 - из-за неисправности привода; 2 - из-за несвоевременной подачи заготовок. Остальные остановки происходят по другим причинам. Найти вероятность остановки по другим причинам.

8. Вероятность хотя бы одного попадания в цель при залпе из двух орудий равна 0,92. Найти вероятность попадания в цель первым орудием, если вероятность попадания вторым орудием равна 0,8.

9*. Два охотника стреляют в волка, причём каждый делает по одному выстрелу. Для первого охотника вероятность попадания в цель 0,7; для второго - 0,8. Какова вероятность попадания в волка (хотя бы при одном выстреле)? Как изменится результат, если охотники сделают по два выстрела?

10*. Брошены монета и игральная кость. Найти вероятность совмещения событий: “появился герб”, “ появилось 6 очков”.

11*. В читальном зале имеется 6 учебников по теории вероятностей, из которых 3 в переплёте. Библиотекарь наудачу взял два учебника. Найти вероятность того, что оба учебника окажутся в переплёте.

12*. Студент знает 20 из 25 вопросов программы. Найти вероятность того, что студент знает предложенные ему экзаменатором 3 вопроса.

13*. В ящике 10 красных и 6 синих пуговиц. Вынимаются наудачу две пуговицы. Какова вероятность того, что пуговицы будут одноцветными.

14*. Два стрелка сделали по одному выстрелу по мишени. Известно, что вероятность попадания в мишень для одного из стрелков равна 0,6; а для другого - 0,7. Найти вероятность того, что: а) только один из стрелков попадёт в мишень, б) оба стрелка попадут в мишень, в) хотя бы один из стрелков попадёт в мишень, г) ни один из стрелков не попадёт в мишень, д) хотя бы один из стрелков не попадёт в мишень.

1.5. Формула полной вероятности. Формулы Байеса

Теорема. *Вероятность события А, которое может наступить лишь при условии появления одного из несовместных событий (гипотез) $B_1, B_2, \ldots B_n$, образующих полную группу, равна сумме произведений вероятностей каждой из гипотез на соответствующую условную вероятность события А:*

$$P(A) = P(B_1)P_{B_1}(A) + P(B_2)P_{B_2}(A) + \ldots + P(B_n)P_{B_n}(A).$$

Эту формулу называют *формулой полной вероятности.*

Пусть событие А может наступить лишь при условии появления одного из несовместных событий (гипотез) $B_1, B_2, \ldots B_n$, которые образуют полную группу событий. Если событие A уже произошло, то вероятности гипотез могут быть переоценены по *формулам Байеса*

$$P_A(B_i) = \frac{P(B_i)P_{B_i}(A)}{P(A)},\ i = \overline{1,n},$$

где $P(A)$ вычисляется по формуле полной вероятности.

Образцы решения задач

Задача 1. Имеются четыре урны. В первой урне 1 белый и 1 черный шар, во второй – 2 белых и 3 черных шара, в третьей – 3 белых и 5 черных шаров, и в четвертой – 4 белых и 7 черных шаров. Событие B_i – выбор i-й урны ($i = 1,2,3,4$). Известно, что вероятность выбора i-й урны равна $i/10$,т.е. $P(B_1)=1/10$; $P(B_2)=1/5$; $P(B_3)=3/10$;$P(B_4)=2/5$. Выбирают наугад одну из урн и вынимают из нее шар. Найти вероятность того, что этот шар белый.

Решение. Пусть A – взятый шар белый. Из условия следует, что $P_{B1}(A)=1/2$ (условная вероятность извлечения белого шара из первой урны); $P_{B2}(A)=2/5$; $P_{B3}(A)=3/8$; $P_{B4}(A)=4/11$. Вероятность извлечения белого шара находим по формуле полной вероятности:

$$P(A)=P(H_1)\,P_{B1}(A)+P(H_2)\,P_{B2}(A)+P(H_3)\,P_{B3}(A)+P(H_4)\,P_{B4}(A)=$$
$$=1/10\cdot 1/2+1/5\cdot 2/5+3/10\cdot 3/8+2/5\cdot 4/11=1707/4400.$$

Задача 2. Имеются три одинаковых по виду ящика. В первом ящике 20 белых шаров, во втором - 10 белых и 10 черных шаров, в третьем – 20 черных шаров. Из выбранного наудачу ящика вынули белый шар. Вычислить вероятность того, что шар вынут из первого ящика.

Решение. События A – взятый наудачу шар белый. Выдвинем гипотезы: B_1 – шар из первого ящика, B_2 – шар из второго ящика, B_3 – шар из третьего ящика. Тогда $P(B_1)=P(B_2)=P(B_3)=1/3$, так как ящики одинаковы.

$P_{B1}(A)=1$ (вероятность извлечения белого шара из первого ящика),

$P_{B2}(A)=10/20=1/2$ (вероятность извлечения белого шара из второго ящика), $P_{B3}(A)=0$ (вероятность извлечения белого шара из третьего ящика).

Искомую вероятность $P_A(B_1)$ – вероятность того, что белый шар взят из первого ящика, находим по формуле Байеса:

$$P_A(B_1)=\frac{P(B_1)P_{B1}(A)}{P(A)}=\frac{1\cdot(1/3)}{1\cdot 1/3+1/2\cdot 1/3+0\cdot 1/3}=\frac{2}{3}.$$

Задача 3. В первой урне 5 белых и 10 черных шаров, во второй 3 белых и 7 черных шаров. Из второй урны в первую переложили один шар, а затем из первой вынули наудачу один шар. Определить вероятность того, что вынутый шар белый.

Решение. Событие A – взятый шар белый. Возможны гипотезы: B_1 – из второй урны в первую переложили белый шар, B_2 – из второй урны в первую переложили черный шар.

Тогда $P(B_1)=3/10$; $P(B_2)=7/10$; $P_{B1}(A)=6/16$ (вероятность того, что из первой урны взяли белый шар, предварительно переложив в нее из второй урны белый шар). Аналогично, $P_{B2}(A)=5/16$.

По формуле полной вероятности найдем

$$P(A)=P(B_1)P_{B1}(A)+P(B_2)P_{B2}(A)=3/10\cdot 6/16+7/10\cdot 5/16=53/160.$$

Задачи для решения

1. В первой урне содержится 10 шаров, из них 8 белых; во второй урне 20 шаров, из них 4 белых. Из наудачу взятой урны извлечён шар. Найти вероятность того, что этот шар белый.

2. Из 20 студентов, пришедших на экзамен, восемь подготовлены отлично, шесть - хорошо, четверо - посредственно и двое - плохо. В экзаменационных билетах имеется 40 вопросов. Студент, подготовленный отлично, знает все вопросы, хорошо - 35, посредственно - 25 и плохо - 10 вопросов. Некоторый студент ответил на все три вопроса билета. Найдите вероятность того, что он подготовлен: а) хорошо; б) плохо.

3. Задача-шутка. Один властелин, которому наскучил его звездочёт со своими ложными предсказаниями, решил казнить его. Однако, будучи добрым правителем, он решил дать звездочету последний шанс. Ему велено распределить по двум урнам 4 шара: 2 черных и 2 белых. Палач выберет наугад одну из урн и из неё вытащит один шар. Если шар будет черным, то звездочета казнят, в противном случае его жизнь будет спасена. Каким образом звездочет должен расположить шары в урнах, чтобы обеспечить себе максимальную вероятность быть спасенным?

4. В первой урне 3 белых и 5 черных шаров; во второй урне 6 белых и 4 черных шара. Из первой урны во вторую переложили один шар, а затем из второй урны взяли один шар, который оказался белым. Найти вероятность того, что был переложен белый шар.

5. В пирамиде пять винтовок, три из которых снабжены оптическим прицелом. Вероятность того, что стрелок поразит мишень при выстреле из винтовки с оптическим прицелом, равна 0,95; для винтовки без оптического прицела эта вероятность равна 0,7. Найти вероятность того, что мишень будет поражена, если стрелок произведет выстрел из наудачу взятой винтовки.

6. Три стрелка делают по мишени по одному выстрелу с вероятностями попадания соответственно 0,8; 0,7; 0,9. Известно, что мишень поражена один раз. Какова вероятность того, что это попадание сделано вторым стрелком.

7*. Для сдачи экзамена студентам необходимо было подготовить 30 вопросов. Из 25 студентов 10 подготовили все вопросы, 8-25 вопросов, 5-20 вопросов и 2-15 вопросов. Вызванный студент ответил на поставленный вопрос. Найти вероятность того, что этот студент: а)подготовил все вопросы; б)подготовил только половину вопросов.

8*. В группе спортсменов 20 лыжников, 6 велосипедистов и 4 бегуна. Вероятность выполнить квалификационную норму такова: для лыжника-0,9; для велосипедиста - 0,8 и для бегуна - 0,75. Найти вероятность того, что спортсмен, выбранный наудачу, выполнит норму.

9*. В каждой из трех урн содержится 6 черных и 4 белых шара. Из первой урны наудачу извлечен шар и переложен во вторую урну, после чего из второй урны наудачу извлечен один шар и переложен в третью урну. Найти вероятность того, что шар, наудачу извлеченный из третьей, урны окажется белым.

10*. Вероятность того, что клиент банка не вернет заем в период экономического роста, равна 0,04; а в период экономического кризиса – 0,13. Предположим, что вероятность того, что начнется период экономического роста, равна 0,65. Чему равна вероятность того, что случайный клиент банка не вернет полученный кредит?

11*. На химическом заводе установлена система аварийной сигнализации. Когда возникает аварийная ситуация, звуковой сигнал срабатывает с вероятностью 0,95. Звуковой сигнал может сработать случайно и без аварийной ситуации с вероятностью 0,02. Реальная вероятность аварийной ситуации равна 0,004. Предположим, что звуковой сигнал сработал. Чему равна вероятность реальной аварийной ситуации?

1.6. Повторение испытаний. Формула Бернулли. Локальная и интегральная теоремы Лапласа. Формула Пуассона

Если производятся испытания, при которых вероятность появления события A в каждом испытании не зависит от исходов других испытаний, то такие испытания называют *независимыми относительно события A*. Далее будем рассматривать такие независимые испытания, в которых событие A имеет одну и ту же вероятность.

Формула Бернулли. *Вероятность того, что в n независимых испытаниях, в каждом из которых вероятность появления события равна p* ($0<p<1$), *событие наступит ровно k раз (безразлично, в какой последовательности), равна*

$$P_n(k)= C_n^k p^k q^{n-k}, \qquad \text{где} \quad q=1-p.$$

Вероятность того, что в n испытаниях событие наступит: менее k раз; более k раз; не менее k раз; не более k раз; находят соответственно по формулам:

$$P_n(m<k)=P_n(0)+P_n(1)+\ldots+P_n(k-1);$$

$$P_n(m>k)=P_n(k+1)+P_n(k+2)+\ldots+P_n(n);$$

$$P_n(m\geq k)=P_n(k)+P_n(k+1)+\ldots+P_n(n);$$

$$P_n(m\leq k)=P_n(0)+P_n(1)+\ldots+P_n(k).$$

Локальная теорема Лапласа. *Вероятность того, что в n независимых испытаниях, в каждом из которых вероятность появления события равна p (0<p<1), событие наступит ровно k раз (безразлично, в какой последовательности), приближенно равна (тем точнее, чем больше n)*

$$P_n(k)\approx\frac{1}{\sqrt{npq}}\varphi(x).$$

Здесь

$$\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}, \quad x=\frac{k-np}{\sqrt{npq}}.$$

Значения функции $\varphi(x)$ для положительных значений x приводится в определенной таблице; для отрицательных значений x пользуются этой же таблицей, т.к. функция $\varphi(x)$ четная, и, следовательно, $\varphi(-x)=\varphi(x)$. При $x>5$ можно считать, что $\varphi(x)=0$.

Интегральная теорема Лапласа. *Вероятность того, что в n независимых испытаниях, в каждом из которых вероятность появления события равна p* ($0<p<1$), *событие наступит от k_1 до k_2 раз, приближенно равна*

$$P_n(k_1\leq k\leq k_2)\approx\Phi(x_2)-\Phi(x_1).$$

Здесь

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-z^2/2} dz \text{ – функция Лапласа,}$$

$$x_1 = \frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}}, \quad x_2 = \frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}}.$$

Таблица значений функции Лапласа для положительных значений x ($0 \leq x \leq 5$) приведена в таблице функции Лапласа; для значений $x > 5$ полагают $\Phi(x) = 0{,}5$. Для отрицательных значений x используют эту же таблицу, учитывая, что функция Лапласа нечетная, т.е. $\Phi(-x) = -\Phi(x)$.

Формула Пуассона. *Вероятность того, что в n независимых испытаниях, в каждом из которых вероятность p появления события мала* ($p \leq 0{,}1$), *событие наступит ровно k раз (безразлично, в какой последовательности), приближенно равна*

$$P_n(k) \approx \lambda^k \, e^{-\lambda}/k!,$$

где $\lambda = np$.

Замечание. Вычисление вероятностей по формуле Бернулли при большом числе испытаний очень громоздко. Поэтому в таких случаях пользуются приближенными формулами Лапласа и Пуассона. При этом следует учесть, что формулы Лапласа дают лучшее приближение, чем формула Пуассона, если $npq \geq 10$, а формула Пуассона – лучшее приближение, чем формула Лапласа, если $npq < 10$.

Оценка отклонения относительной частоты от постоянной вероятности. *Вероятность того, что в n независимых испытаниях, в каждом из которых вероятность появления события равна p* ($0 < p < 1$), *абсолютная величина отклонения относительной частоты появления события от вероятности появления события не превысит положительного числа ε, приближенно равна удвоенной функции Лапласа при* $x = \varepsilon\sqrt{n/pq}$:

$$P\left(\left|\frac{m}{n} - p\right| < \varepsilon\right) \approx 2\Phi\left(\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}\right).$$

Число k_0 наступлений события в n независимых испытаниях, в каждом из которых вероятность появления события равна p, называют *наивероятнейшим*, если вероятность того, что событие наступит в этих испытаниях k_0 раз, превышает (или, по крайней мере, не меньше) вероятности остальных возможных исходов испытаний.

Наивероятнейшее число k_0 определяют из двойного неравенства

$$np - q \le k_0 \le np + p.$$

Образцы решения задач

Задача 1. Вероятность того, что расход электроэнергии в продолжении одних суток не превышает установленной нормы, равна $p=0,75$. Найти вероятность того, что в ближайшие 6 суток расход электроэнергии в течении 4 суток не превысит нормы.

Решение. Вероятность нормального расхода электроэнергии в продолжении каждых из 6 суток постоянна и равна $p=0,75$. Следовательно, вероятность перерасхода электроэнергии в каждые сутки также постоянна и равна $q=1-p=1-0,75=0,25$. Искомая вероятность по формуле Бернулли равна

$$P_6(4) = C_6^4 p^4 q^2 = \frac{6\cdot 5}{1\cdot 2}(0,75)^4\cdot(0,25)^2 = 0,30.$$

Задача 2. В среднем 20% пакетов акций на аукционах продаются по первоначально заявленной цене. Найти вероятность того, что из 9 пакетов акций в результате торгов по первоначально заявленной цене: 1) не будут проданы 5 пакетов; 2) будет продано: а) менее 2 пакетов; б) не более 2; в) хотя бы два пакета; г) наивероятнейшее число пакетов.

Решение. 1) Вероятность того, что пакет акций не будет продан по первоначально заявленной цене, равна $p = 1 - 0,2 = 0,8$. По формуле Бернулли найдём $P_9(5) = C_9^5 \cdot 0,8^5 \cdot 0,2^4 = 0,066.$

2) По условию $p = 0,2$; тогда

а) $P_9(m<2) = P_9(0) + P_9(1) = C_9^0 \cdot 0,2^0 \cdot 0,8^9 + C_9^1 \cdot 0,2^1 \cdot 0,8^8 = 0,436;$

б) $P_9(m \le 2) = P_9(0) + P_9(1) + P_9(2) = C_9^0 \cdot 0,2^0 \cdot 0,8^9 + C_9^1 \cdot 0,2^1 \cdot 0,8^8 +$
$+ C_9^2 \cdot 0,2^2 \cdot 0,8^7 = 0,738;$

в) $P_9(m \ge 2) = P_9(2) + P_9(3) + \ldots + P_9(9)$. Указанную вероятность можно найти проще, если перейти к противоположному событию, т.е. $P_9(m \ge 2) = 1 - P_9(m<2) = 1 - (P_9(0) + P_9(1)) = 1 - 0,436 = 0,564;$

г) наивероятнейшее число проданных акций по первоначально заявленной цене определяется из условия $9\cdot 0,2 - 0,8 \le k_0 \le 9\cdot 0,2 + 0,2$ или $1 \le k_0 \le 2$, то есть наивероятнейших чисел два: $k_0 = 1$ и $k_0' = 2$. Поэтому вероятность $P_{наивер} = P_9(1) + P_9(2) = C_9^1 \cdot 0,2^1 \cdot 0,8^8 + C_9^2 \cdot 0,2^2 \cdot 0,8^7 = 0,604.$

Задача 3. Вероятность появления события *A* в каждом из 625 испытаний равна 0,64. Найти вероятность того, что событие *A* в этих испытаниях появится ровно 415 раз.

Решение. Так как число испытаний *n* велико, то применим приближённую формулу Лапласа. По условию $p=0,64$; $q=1-0,64=0,36$; $n=625$, $k=415$, тогда

$$x=\frac{415-625\cdot 0,64}{\sqrt{625\cdot 0,64\cdot 0,36}}=1,25.$$

По таблице находим, что $\varphi(1,25)=0,1826$. Следовательно,

$$P_{625}(415)\approx\frac{1}{\sqrt{625\cdot 0,64\cdot 0,36}}\cdot 0,1826\approx 0,015.$$

Задача 4. Среди семян ржи *0,04%* сорняков. Какова вероятность того, что при случайном отборе *5000* семян обнаружить *5* семян сорняков?

Решение. Т.к. вероятность события $p=0,0004$ мала, то применим формулу Пуассона. По условию $n=5000$, $k=5$, $p=0,0004$; $\lambda=5000\cdot 0,0004=2$, используя таблицу, нашли, что

$$P_{5000}(5)\approx\frac{2^5}{5!}e^{-2}\approx 0,036089\,.$$

Задача 5. Вероятность попадания в цель при отдельном выстреле равна 0,6. Найти вероятность того, что число попаданий при 600 выстрелах будет заключено в пределах от 330 до 375.

Решение. Применим интегральную теорему Лапласа:

$$P_n(k_1\le k\le k_2)\approx\Phi(x_2)-\Phi(x_1).$$

По условию $n=600$, $p=0,6$; $k_1=330$, $k_2=375$. Найдём x_1 и x_2:

$$x_1=\frac{330-600\cdot 0,6}{\sqrt{600\cdot 0,6\cdot 0,4}}=-2,5;\quad x_2=\frac{375-600\cdot 0,6}{\sqrt{600\cdot 0,6\cdot 0,4}}=1,25.$$

По таблице находим $\Phi(1,25)=0,3944$, $\Phi(-2,5)=-\Phi(2,5)=-0,4938$. Подставив эти значения в формулу, получим искомую вероятность

$$P_{600}(300\le m\le 375)\approx 0,3944-(-0,4938)=0,8882.$$

Задача 6. В страховой компании 10 тыс. клиентов. Страховой взнос каждого клиента составляет 500 руб. При наступлении страхового случая, вероятность которого по оценкам экспертов можно считать равной $p=0,005$; страховая компания обязана выплатить клиенту страховую сумму размером 50 тыс. руб. На какую прибыль может рассчитывать страховая компания с надежностью 0,95?

Решение. Размер прибыли компании составляет разность между суммарным взносом всех клиентов и суммарной страховой суммой, выплаченной n_0 клиентам при наступлении страхового случая, то есть

$$П = 500 \cdot 10 - 50n_0 = 50(100 - n_0) \text{ тыс.руб.}$$

Для определения n_0 применим интегральную формулу Лапласа (требование $npq = 10000 \cdot 0{,}005 \cdot 0{,}995 = 49{,}75 \geq 10$ выполнено).

По условию задачи $P_{10000}(0 \leq m \leq n_0) = \frac{1}{2}\left[\Phi(x_2) - \Phi(x_1)\right] = 0{,}95$, где m – число клиентов, которым будет выплачена страховая сумма; $x_1 = \frac{0 - np}{\sqrt{npq}} = -\sqrt{\frac{np}{q}} = -\sqrt{\frac{10000 \cdot 0{,}005}{0{,}995}} = 7{,}09$; $x_2 = \frac{n_0 - np}{\sqrt{npq}}$, откуда

$$n_0 = np + x_2\sqrt{npq} = 10000 \cdot 0{,}005 + x_2\sqrt{49{,}75} = 50 + x_2\sqrt{49{,}75}.$$

$\Phi(x_2) = 1{,}9 + \Phi(x_1) = 1{,}9 + \Phi(-7{,}09) \approx 1{,}9 + (-1) = 0{,}9$. По таблице находим x_2, для которого $\Phi(x_2) = 0{,}9$. Теперь $n_0 = 50 + 1{,}645\sqrt{49{,}75} = 61{,}6$ и $П = 50(100 - 61{,}6) = 1920$, то есть с надежностью 0,95 ожидаемая прибыль составит 1,92 млн. руб.

Задачи для решения

1. Монета брошена 3 раза. Найти вероятность того, что герб выпадет ровно 2 раза.

2. Наблюдениями установлено, что в некоторой местности в сентябре в среднем бывает 12 дождливых дней. Найти вероятность того, что из случайно взятых в этом месяце 4 дней окажутся дождливыми: а) 3 дня, б) менее 3 дней, в) не менее 3 дней.

3. Вероятность получения удачного результата при производстве сложного химического опыта равна 2/3. Найти наивероятнейшее число удачных опытов, если общее их количество равно 7.

4. Вероятность рождения мальчика примем равной 0,5. Найти вероятность того, что среди 200 новорождённых детей будет: а) 90 мальчиков, б) 110 мальчиков, в) от 90 до 110 мальчиков.

5. Из склада в магазин отправлено 1000 бутылок минеральной воды. Для каждой бутылки вероятность того, что она разобьётся в пути, равна 0,003. Найти вероятность того, что магазин получит разбитых бутылок: а) две, б) менее двух, в) более двух, г) хотя бы одну. Найти наиболее вероятное число разбитых бутылок и соответствующую ему вероятность.

6. Найти вероятность того, что частота выпадения герба при 10000 подбрасываниях монеты отклонится от 0,5 менее, чем на $\varepsilon=0{,}01$.

7. В среднем левши составляют 1%. Какова вероятность того, что среди 200 студентов найдётся: а) ровно 4 левши, б) не менее чем 4 левши.

8*. В партии товаров товаровед отбирает бракованные изделия. Вероятность того, что наудачу взятое изделие окажется бракованным, равна 0,1. Найти вероятность того, что из 3 взятых на проверку изделий одно бракованное.

9*. В семье 5 детей. Найти вероятность того, что среди них: а) 2 мальчика, б) не более 2 мальчиков; в) более двух мальчиков. Вероятность рождения мальчика принять равной 0,51.

10*. Какова вероятность того, что в столбике из 100 наугад отобранных монет число монет, расположенных "гербом" вверх будет: а) 45, б) 55, в) от 45 до 55?

11*. Завод отправил на базу 5000 доброкачественных изделий. Вероятность повреждения каждого изделия в пути равна 0,0002. Найти вероятность того, что среди 5000 изделий в пути будет повреждено: а) ровно 3 изделия, б) ровно 1 изделие, в) не более 3 изделий, г) более 3 изделий.

12*. Вероятность появления события в каждом из 625 независимых испытаниях равна 0,8. Найти вероятность того, что относительная частота появления события отклонится от его вероятности по абсолютной величине не более чем на 0,04.

2 Случайные величины

2.1. Понятие случайной величины. Закон распределения дискретной случайной величины. Математические операции над случайными величинами

Случайной называют величину, которая в результате испытания примет одно и только возможное значение, наперёд не известное и зависящее от случайных причин, которые заранее не могут быть учтены.

Дискретной называют случайную величину, которая принимает отдельные, изолированные возможные значения с определёнными вероятностями. Число возможных значений дискретной случайной величины (ДСВ) может быть конечным или бесконечным.

Непрерывной называют случайную величину, которая может принимать все значения из некоторого конечного или бесконечного промежутка.

Законом распределения ДСВ называют соответствие между возможными значениями и их вероятностями.

Закон распределения ДСВ *X* обычно задаётся *рядом распределения:*

x_i	x_1	x_2	x_3	. . .	x_n
p_i	p_1	p_2	p_3	. . .	p_n

При этом $\sum\limits_{i=1}^{n} p_i = 1.$

Для наглядности закон распределения ДСВ можно изобразить графически, для чего в прямоугольной системе координат строят точки (x_i ,p_i), а затем соединяют их отрезками прямых. Полученную фигуру называют ***многоугольником распределения.***

Биномиальным называют распределение вероятностей, определяемое формулой Бернулли.

Закон **распределения Пуассона** вероятностей массовых (n велико) и редких (p мало) событий:

$$P_n(k) = \lambda^k e^{-\lambda} / k!, \qquad \lambda = np.$$

Пусть в первых *k-1* испытаниях событие *A* не наступило, а в *к*-м испытании появилось. Вероятность этого «сложного события», по теореме умножения вероятностей независимых событий,

$$P(X = x) = q^{k-1} p.$$

Это распределение называют **геометрическим**.

Две случайные величины называются ***независимыми***, если закон распределения одной из них не меняется от того, какие возможные значения приняла другая величина. В противном случае случайные величины называются ***зависимыми.***

Определим ***математические операции*** над дискретными случайными величинами.

Пусть даны две случайные величины

X:

x_i	x_1	x_2	x_3	. . .	x_n
p_i	p_1	p_2	p_3	. . .	p_n

Y:

y_i	y_1	y_2	y_3	. . .	y_n
p_i	p_1	p_2	p_3	. . .	p_n

Произведением kX *случайной величины X на постоянную величину* k называется случайная величина, которая принимает значения kx_i с теми же вероятностями $p_i \ (i=\overline{1,n})$, *m-й степенью случайной величины X,* то есть X^m, называется случайная величина, которая принимает значения x_i^m с теми же вероятностями $p_i \ (i=\overline{1,n})$.

Суммой (***разностью*** или ***произведением***) случайной величины X и Y называется случайная величина, которая принимает все возможные значения вида $x_i + y_j$ ($x_i - y_j$ или $x_i \cdot y_j$), где $i=\overline{1,n}$; $j=\overline{1,m}$, с вероятностями p_{ij} того, что случайная величина X примет значение x_i, а Y – значение y_j: $p_{ij} = P[(X = x_i)(Y = y_j)]$.

Если случайные величины X и Y независимы, то есть независимы любые события $X = x_i$, $Y = y_j$, то по теореме умножения вероятностей для независимых событий

$$p_{ij} = P(X = x_i)P(Y = y_j) = p_i p_j.$$

Образцы решения задач

Задача 1. Из партии, содержащей 100 изделий, среди которых имеется 10 дефектных, выбраны случайным образом пять изделий для проверки их качества. Построить ряд распределений случайной величины X – числа дефектных изделий, содержащихся в выборке.

Решение. В выборке число дефектных изделий может быть любым целым числом в пределах 0 до 5 включительно, поэтому возможные значения x_i величины X равны: $x_1=0$; $x_2=1$; $x_3=2$; $x_4=3$; $x_5=4$; $x_6=5$.

Вероятность $P(X=k)$ того, что в выборке окажется ровно k (k=0,1,2,3,4,5) дефектных изделий, равна $P(X=k)=\frac{C_{10}^{k}C_{90}^{5-k}}{C_{100}^{5}}$.

В результате расчётов по данной формуле с точностью до 0,001 получим $p_1=P(X=0)=0{,}583$, $p_2=P(X=1)=0{,}340$, $p_3=P(X=2)=0{,}070$, $p_4=P(X=3)=0{,}007$, $p_5=P(X=4)=0$, $p_6=P(X=5)=0$.

Используя для проверки равенство $\sum_{i=1}^{6} p_i = 1$, убеждаемся, что расчёты и округления произведены правильно.

Результаты занесём в таблицу:

x_i	0	1	2	3	4	5
p_i	0,583	0,340	0,070	0,007	0	0

Задача 2. Построить ряд распределения случайной величины X - числа попаданий мячом в корзину при одном броске, если вероятность попадания мячом в корзину при одном броске p=0,3.

Решение. Случайная величина X может принимать два значения: $x_2=1$ (попадание); $x_1=0$ (промах). Вероятности возможных значений $P(x_2)=0{,}3$; $P(x_1)=1-P(x_1)=0{,}7$.

Закон распределения имеет вид:

x_i	0	1
p_i	0,7	0,3

Задача 3. Производятся последовательные независимые испытания пяти приборов на надёжность. Каждый следующий прибор испытывается только в том случае, если предыдущий оказался надёжным. Построить ряд распределения случайной величины X – числа испытанных приборов, если вероятность выдержать испытание для каждого из них равна 0,9.

Решение. Случайная величина X может принимать пять значений: $x_1=1$, $x_2=2$, $x_3=3$, $x_4=4$, $x_5=5$. Тогда $P(x_1)=0{,}1=1-0{,}9$ (1-й испытанный прибор ненадёжен), $P(x_2)=0{,}9\cdot 0{,}1=0{,}09$ (1-й прибор надёжен, а 2-й нет), $P(x_3)=0{,}9\cdot 0{,}9\cdot 0{,}1=0{,}081$ (1-й и 2-й приборы надёжны, а 3-й нет), $P(x_4)=0{,}9\cdot 0{,}9\cdot 0{,}9\cdot 0{,}1=0{,}0729$ (1-й, 2-й, 3-й, приборы надёжны, а 4-й нет), $P(x_5)=0{,}9\cdot 0{,}9\cdot 0{,}9\cdot 0{,}9=0{,}6561$.

Закон распределения имеет вид:

x_i	1	2	3	4	5
p_i	0,1	0,09	0,081	0,0729	0,06561

Задача 4. Опыт состоит из трёх независимых бросании монеты, при каждом из которых герб выпадает с вероятностью $p=0,5$. Для случайного числа появлений герба построить: а) ряд распределения;

б) многоугольник распределения.

Решение. а) Случайная величина X может принимать 4 значения $x_1=0,\ x_2=1,\ x_3=2,\ x_4=3$.

Так как в каждом опыте вероятность выпадения герба постоянна и равна $p = 0,5$; то для вычисления вероятностей возможных значений воспользуемся формулой Бернулли

$$P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k}.$$

Тогда

$$P(x_1) = P_3(0) = C_3^0 \cdot (0,5)^0 \cdot (0,5)^3 = 0,125.$$

$$P(x_2) = P_3(1) = C_3^1 \cdot (0,5)^1 \cdot (0,5)^2 = 0,375.$$

Аналогично, $P(x_3)=0,375$, $P(x_4)=0,125$

Контроль: $\sum_{i=1}^{4} p_i = 0,125 + 0,375 + 0,375 + 0,125 = 1.$

Получили биноминальный закон распределения:

x_i	*0*	*1*	*2*	*3*
p_i	*0,125*	*0,375*	*0,375*	*0,125*

б) Построим многоугольник распределения.

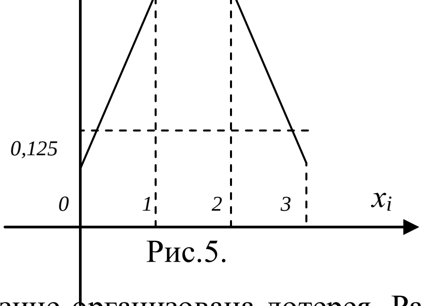


Рис.5.

Задача 5. В книжном магазине организована лотерея. Разыгрываются две книги стоимостью по 10 руб. и одна стоимостью в 30 руб. Составить закон распределения случайной величины X – суммы чистого (возможного) выигрыша для того, кто приобрел один билет за 1 руб., если всего продано 50 билетов.

Решение. СВ X может принимать три значения – 1 руб. (если владелец билета не выиграет, а проиграет 1 руб., уплаченный им за билет); 9 руб.; 29 руб. (фактический выигрыш уменьшается на стоимость билета – 1 руб.) Первому результату благоприятствует 47 исходов из 50, второму – два, а третьему – один. Поэтому вероятности таковы:

$$P(X=-1)=\frac{47}{50}=0{,}94;\quad P(X=9)=\frac{2}{50}=0{,}04,\quad P(X=29)=\frac{1}{50}=0{,}02.$$

Закон распределения СВ X имеет вид:

Сумма выигрыша X	-1	9	29
Вероятность	0,94	0,04	0,02

Контроль: $\sum_{i=1}^{3} p_i = 0{,}94+0{,}04+0{,}02=1$.

Задача 6. Дана случайная величина

X:

x_i	-2	1	2
p_i	0,5	0,3	0,2

Найти закон распределения случайных величин: а) $Y=3X$; б) $Z=X^2$.

Решение. а) значения случайной величины Y будут: $3(-2)=-6;\ 3\cdot 1=3;\ 3\cdot 2=6$ с теми же вероятностями, то есть

Y:

y_i	-6	3	6
p_i	0,5	0,3	0,2

б) значения случайной величины Z будут: $(-2)^2=4,\ 1^2=1,\ 2^2=4$ с теми же вероятностями. Так же значение Z=4 может быть получено возведением в квадрат значения (-2) с вероятностью 0,5 и (+2) с вероятностью 0,2. По теореме сложения вероятностей

$$P(Z=4)=0{,}5+0{,}2=0{,}7.$$

Итак, закон распределения СВ:

Z:

z_i	1	4
p_i	0,3	0,7

Задачи для решения

1. На пути движения автомобиля 6 светофоров, каждый из них или разрешает, или запрещает дальнейшее движение с вероятностью 0,5. Найдите закон распределения случайной величины X, равной числу светофоров, пройденных автомобилем до первой остановки.

2. Игральная кость брошена три раза. Написать закон распределения числа появлений шестёрки.

3. В партии из 10 деталей имеется 8 стандартных. Наудачу отобраны две детали. Составить закон распределения числа стандартных деталей среди отобранных.

4. В урне 6 белых и 4 черных шара. Из неё пять раз подряд извлекают шар, причём каждый раз вынутый шар возвращают в урну и шары перемешивают. Приняв за случайную величину X число извлеченных белых шаров, составить закон распределения этой величины.

5. В урне имеются четыре шара с номерами от 1 до 4. Вынули два шара. Случайная величина X - сумма номеров шаров. Построить ряд распределения случайной величины X.

6. Стрелок производит по мишени три выстрела. Вероятность попадания в мишень при каждом выстреле равна 0,3. Построить ряд распределения числа попаданий.

7*. Устройство состоит их трех независимо работающих элементов. Вероятность отказа каждого элемента в одном опыте равна 0,1. Составить закон распределения числа отказавших элементов в одном опыте и построить многоугольник распределения.

8*. В партии из шести деталей имеется четыре стандартных. Наудачу отобраны три детали. Составить закон распределения дискретной случайной величины X - числа стандартных деталей среди отобранных.

9*. Возможные значения случайной величины таковы: $x_1 = 2$, $x_2 = 5$, $x_3 = 8$. Известны вероятности первых двух возможных значений: $p_1 = 0{,}4$, $p_2 = 0{,}15$. Найти вероятность x_3.

10*. Вероятности того. что студент сдаст семестровый экзамен в сессию по дисциплинам A и B, равны соответственно 0,7 и 0,9. Составить закон распределения числа семестровых экзаменов, которые сдаст студент.

2.2. Числовые характеристики дискретной случайной величины

Числовыми характеристиками случайной величины называются числа, которые описывают случайную величину суммарно.

Математическим ожиданием ДСВ называют сумму произведений всех ее возможных значений на их вероятности:

$$M(X)=x_1p_1+x_2p_2+\ldots+x_np_n.$$

Происхождение термина «математическое ожидание» связано с начальным периодом возникновения теории вероятностей, когда область ее применения ограничивалась азартными играми. Игрока интересовало среднее значение ожидаемого выигрыша или, иначе, математическое ожидание выигрыша.

Математическое ожидание обладает следующими **свойствами**.

1^0. Математическое ожидание постоянной величины равно самой постоянной:

$$M(C)=C.$$

2^0. Постоянный множитель можно выносить за знак математического ожидания:

$$M(CX)=CM(X).$$

3^0. Математическое ожидание произведения двух независимых случайных величин равно произведению их математических ожиданий:

$$M(XY)=M(X)M(Y).$$

4^0. Математическое ожидание суммы двух случайных величин равно сумме математических ожиданий слагаемых:

$$M(X+Y) = M(X) + M(Y).$$

5^0. Если все значения случайной величины увеличить(уменьшить) на постоянную С, то на эту же постоянную С увеличится (уменьшится) математическое ожидание этой случайной величины:

$$M(X \pm C) = M(X) \pm C.$$

6^0. Математическое ожидание отклонения случайной величины от ее математического ожидания равно нулю:

$$M[X - M(X)] = 0.$$

Отклонением называют разность между случайной величиной и ее математическим ожиданием.

Теорема. *Математическое ожидание биномиального распределения равно произведению числа испытаний на вероятность появления события в одном испытании:*

$$M(X) = np.$$

Дисперсией (рассеянием) ДСВ называют математическое ожидание квадрата отклонения случайной величины от ее математического ожидания:

$$D(X)=M[X-M(X)]^2.$$

Теорема. *Дисперсия равна разности между математическим ожиданием квадрата случайной величины X и квадратом ее математического ожидания:*

$$D(X) = M(X^2) - [M(X)]^2.$$

Дисперсия обладает следующими **свойствами**.

1^0. Дисперсия постоянной равна нулю:

$$D(C)=0.$$

2^0. Постоянный множитель можно выносить за знак дисперсии, возведя его в квадрат:

$$D(CX) = C^2D(X).$$

3^0. Дисперсия суммы двух независимых случайных величин равна сумме дисперсий этих величин:

$$D(X+Y)=D(X)+D(Y).$$

4^0. Дисперсия разности двух независимых случайных величин равна сумме их дисперсий :

$$D(X-Y)=D(X)+D(Y).$$

Теорема. *Дисперсия биномиального распределения равна произведению числа испытаний на вероятности появления и не появления события в одном испытании:*

$$D(X) = npq.$$

Средним квадратическим отклонением случайной величины называют квадратный корень из дисперсии:

$$\sigma(X) = \sqrt{D(x)}.$$

Начальным моментом порядка k случайной величины X называют математическое ожидание величины X^k:

$$\upsilon_k = M\left(X^k\right)$$

В частности, начальный момент первого порядка равен математическому ожиданию: $\upsilon_1=M(X)$.

Центральным моментом порядка k случайной величины X называют математическое ожидание величины $[X-M(X)]^k$:

$$\mu_k = M[X-M(X)]^k.$$

В частности, центральный момент первого порядка равен нулю:

$$\mu_1 = M[X-M(X)]=0;$$

центральный момент второго порядка равен дисперсии:

$$\mu_2= M[X-M(X)]^2 = D(X).$$

Центральные моменты целесообразно вычислять, используя формулы, выражающие центральные моменты через начальные:

$$\mu_2=\upsilon_2-\upsilon_1^2,$$

$$\mu_3=\upsilon_3-3\,\upsilon_1\upsilon_2+2\upsilon_1^3,$$

$$\mu_4=\upsilon_4-4\,\upsilon_1\upsilon_3+6\,\upsilon_1^2\,\upsilon_2-3\upsilon_1^4.$$

Модой дискретной случайной величины X называют ее наиболее вероятное значение.

Образцы решения задач

Задача 1. Случайная величина X характеризуется рядом распределения:

x_i	0	1	2	3	4
p_i	0,2	0,4	0,3	0,08	0,02

Определить математическое ожидание и дисперсию.

Решение. По формуле $M(X)=\sum_{i=1}^{n} x_i p_i$ найдем математическое ожидание:

$$M(X) = 0\cdot 0{,}2 + 1\cdot 0{,}4 + 2\cdot 0{,}3 + 3\cdot 0{,}08 + 4\cdot 0{,}02 = 1{,}32.$$

Дисперсию найдем по формуле $D(X) = M[X^2] - (M(X))^2$.

Построим дополнительную таблицу:

x^2_i	0	1	4	9	16
p_i	0,2	0,4	0,3	0,08	0,02

$M(X^2) = 0\cdot 0{,}02 + 1\cdot 0{,}4 + 4\cdot 0{,}3 + 9\cdot 0{,}08 + 16\cdot 0{,}02 = 2{,}64;$ тогда $D(X) = 2{,}64 - (1{,}32)^2 = 0{,}8976$; $\sigma = \sqrt{0{,}8976} \approx 0{,}95$ (среднее квадратичное отклонение).

Задача 2. Найти математическое ожидание и дисперсию числа очков при одном бросании игральной кости и суммы очков при бросании двух игральных костей.

Решение. Случайная величина принимает 6 значений (x_i=1,2,3,4,5,6), каждому из которых соответствует вероятность $p = 1/6$.

$$M(X)=1\cdot 1/6+2\cdot 1/6+3\cdot 1/6+4\cdot 1/6+5\cdot 1/6+6\cdot 1/6=3{,}5.$$

Найдем $D(X)=M(X^2)-(M(X))^2$.

x^2_i	1	4	9	16	25	36
p_i	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6

$M(X^2)=1\cdot 1/6+4\cdot 1/6+9\cdot 1/6+16\cdot 1/6+25\cdot 1/6+36\cdot 1/6=91/6$, тогда

$D(X)=M(X^2)-(M(X))^2=(91/6)-(21/6)^2=546/36-441/36=35/12$.

Для двух костей число очков $Z=X+Y$, где X - число очков на первой кости, Y - число очков на второй кости.

Тогда $M(Z)=M(X)+M(Y)=7$, $D(Z)=D(X)+D(Y)=35/6$.

Задача 3. Найти математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение величины $Z=X+Y$, где X и Y независимые случайные величины, заданные законами распределения.

x_i	1	2	3
p_i	0,2	0,3	0,5

y_i	-1	0	1
p_i	0,1	0,3	0,6

Решение. Так как по условию X и Y независимые величины, то

$$M(Z)=M(X)+M(Y),\ D(Z)=D(X)+D(Y).$$

Находим $M(X)=1\cdot 0{,}2+2\cdot 0{,}3+3\cdot 0{,}5=2{,}3;$ $M(Y)=(-1)\cdot 0{,}1+0\cdot 0{,}3+0{,}6\cdot 1=0{,}5;$

$M(X^2)=1\cdot 0{,}2+4\cdot 0{,}3+9\cdot 0{,}5=5{,}9;$ $D(X)=5{,}9-2{,}3^2=0{,}61;$ $\sigma(X)=\sqrt{0{,}61}\approx 0{,}78.$

$M(Y^2)=1\cdot 0{,}1+0\cdot 0{,}3+1\cdot 0{,}6=0{,}7;$ $D(Y)=0{,}7-0{,}5^2=0{,}45;$ $\sigma(Y)=\sqrt{0{,}45}\approx 0{,}67.$

$M(Z)=2{,}3+0{,}5=2{,}8;$ $D(Z)=0{,}61+0{,}45=1{,}06;$ $\sigma(Z)\approx 1{,}03.$

Задача 4. Дискретная СВ X задана законом распределения:

x_i	1	2
y_i	0,4	0,6

Найти центральные моменты первого, второго и третьего порядков СВ X.

Решение. Находим сначала начальные моменты:

$$v_1=M(X)=1\cdot 0{,}4+2\cdot 0{,}6=1{,}6;\ v_2=M(X^2)=1^2\cdot 0{,}4+2^2\cdot 0{,}6=2{,}8;$$

$$v_3=M(X^3)=1^3\cdot 0{,}4+2^3\cdot 0{,}6=5{,}2.$$

Вычислим центральные моменты:

$$\mu_1=0;\ \mu_2=v_2-v_1^2=2{,}8-(1{,}6)^2=0{,}24;$$

$$\mu_3=v_3-3v_1v_2+2v_1^3=5{,}2-3\cdot 1{,}6\cdot 2{,}8+2\cdot(1{,}6)^3=-0{,}48.$$

Задачи для решения

1. Вероятность попадания стрелком в мишень равна 2/3. Стрелком сделано 15 выстрелов. Случайная величина X - число попаданий в мишень. Найти математическое ожидание и дисперсию случайной величины X.

2. Дискретная случайная величина X принимает три возможные значения: $x_1 = 4$ с вероятностью $p_1 = 0{,}5;$ $x_2 = 6$ с вероятностью $p_2 = 0{,}3$ и x_3 с вероятностью p_3. Найти x_3 и p_3, зная, что $M(X) = 8$.

3. Найти дисперсию и среднее квадратическое отклонение дискретной случайной величины X, заданной законом распределения:

x_j	- 5	2	3	4
p_j	0,4	0,3	0,1	0,2

4. Дискретные независимые случайные величины заданы законами распределения

x_i	1	2
p_i	0,2	0,8

y_i	0,5	1
p_i	0,3	0,7

Найти математическое ожидание произведения XY двумя способами: а) составив закон распределения XY; б) пользуясь свойствами математического ожидания.

5. Дисперсия случайной величины X равна 5. Найти дисперсии следующих величин: а) $X-1$, б) $-2X$, в) $3X+6$.

6. Случайная величина X может принимать два возможных значения: x_1 с вероятностью $0,3$ и x_2 с вероятностью $0,7$; причём $x_2>x_1$. Найти x_1 и x_2, зная, что $M(X)=2,7$ и $D(X)=0,21$.

7. Найти математическое ожидание дискретной случайной величины X - числа таких бросаний пяти игральных костей, в каждом из которых на двух костях появится по одному очку, если общее число бросаний равно 20.

8*. Найти математическое ожидание и дисперсию лотерейных билетов, на которые выпадут выигрыши, если приобретено 40 билетов, причём вероятность выигрыша равна 0,05.

9*. Производятся независимые испытания с одинаковой вероятностью появления события А в каждом испытании. Найти вероятность появления события А, если дисперсия числа появлений события в трёх независимых испытаниях равна 0,63.

10*. Найти дисперсию и среднее квадратическое отклонение дискретной случайной величины X, заданной законом распределения:

x_i	4,3	5,1	10,6
p_i	0,2	0,3	0,5

11*. Дискретные независимые случайные величины заданы законами распределения:

x_i	1	2
p_i	0,2	0,8

y_i	0,5	1
p_i	0,3	0,7

Найти математическое ожидание суммы $X+Y$ двумя способами: а) составив закон распределения $X+Y$; б) пользуясь свойством математического ожидания.

12*. Математическое ожидание случайной величины X равно 4. Найти математические ожидания следующих величин: а) $X+2$, б) $3X$, в) $-2X+5$.

13*. Найти дисперсию дискретной случайной величины X - числа появлений события A в двух независимых испытаниях, если вероятности появления события в этих испытаниях одинаковы и известно, что $M(X)$=0,9.

14*. Дискретная СВ X задана законом распределения:

x_i	2	3
y_i	0,4	0,6

Найти центральные моменты первого, второго и третьего порядков СВ *X*.

2.3. Закон больших чисел. Неравенство Чебышева. Теорема Чебышева. Теорема Бернулли.

Условия при выполнении которых совокупное действие очень многих случайных причин приводит к результату, почти не зависящему от случая позволяют предвидеть ход явлений. Эти условия и указываются в теоремах, носящих общее название закона больших чисел. К ним относятся теоремы Чебышева и Бернулли.

Неравенство Чебышева. *Вероятность того, что отклонение случайной величины* X *от ее математического ожидания по абсолютной величине меньше положительного числа* ε*, не меньше, чем* $1 - D(X)/\varepsilon^2$*:*

$$P(|X - M(X)| < \varepsilon) \ge 1 - D(X)/\varepsilon^2.$$

Теорема Чебышева. *Если* $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$*- попарно независимые случайные величины, причем дисперсии их равномерно ограничены (не превышают постоянного числа С), то, как бы мало ни было положительное число* ε*, вероятность неравенства*

$$\left| \frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{n} - \frac{M(X_1) + M(X_2) + \ldots + M(X_n)}{n} \right| < \varepsilon$$

будет как угодно близка к единице, если число случайных величин достаточно велико.
Другими словами

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left| \frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{n} - \frac{M(X_1) + M(X_2) + \ldots + M(X_n)}{n} \right| < \varepsilon \right) = 1.$$

Теорема Бернулли. *Если в каждом из* **n** *независимых испытаний вероятность* **p** *появления события А постоянна, то как угодно близка к единице вероятность того, что отклонение относительной частоты от вероятности* p *по абсолютной величине будет сколь угодно малым, если число испытаний достаточно велико.*

Другими словами, если ε - сколь угодно малое положительное число, то при соблюдении условий теоремы имеет место равенство

$$\lim_{n\to\infty} P(|m/n - p| < \varepsilon) = 1.$$

Образцы решения задач

Задача 1. Используя неравенство Чебышева, оценить вероятность того, что $\left| X - M(X) \right| < 0{,}1$, если по модулю *D(X)=0,001*.

Решение. Воспользовавшись, неравенством Чебышева получим

$$P(\left| X - M(X) \right| < 0{,}1) \geq 1 - 0{,}001 / 0{,}01$$

или
$$P(\left| X - M(X) \right| < 0{,}1) \geq 0{,}9.$$

Задача 2. Дискретная случайная величина X задана законом распределения

X	0,3	0,6
p	0,2	0,8

Используя неравенство Чебышева, оценить вероятность того, что $\left| X - M(X) \right| < 0{,}2$.

Решение. Найдем математическое ожидание и дисперсию величины X:

$$M(X) = 0{,}3 \cdot 0{,}2 + 0{,}6 \cdot 0{,}8 = 0{,}54;$$

$$D(X) = M(X^2) - \left[M(X) \right]^2 =$$

$$= (0{,}3^2 \cdot 0{,}2 + 0{,}6^2 \cdot 0{,}8) - 0{,}54^2 = 0{,}0144.$$

Воспользовавшись неравенством Чебышева в форме

$$P(\left| X - M(X) \right| < \varepsilon) \geq 1 - D(X) / \varepsilon^2.$$

Подставляя M(X)=0,54, D(X)=0,0144, ε *=0.2,* окончательно получим

$$P(\left| X - 0{,}54 \right| < 0{,}2) \geq 1 - 0{,}0144 / 0{,}04 = 0{,}64.$$

Задача 3. Последовательность независимых случайных величин $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$ задана законом распределения

X_n	$-n\alpha$	0	$n\alpha$
p	$1/(2n^2)$	$1-1/n^2$	$1/(2n^2)$

Применима ли к заданной последовательности теорема Чебышева?

Решение. Для того, чтобы к последовательности случайных величин была применима теорема Чебышева, достаточно, чтобы эти величины были попарно независимы, имели конечные математические ожидания и равномерно ограниченные дисперсии. Поскольку случайные величины независимы, то они подавно попарно независимы, т.е. первое требование теоремы Чебышева выполняется.

Проверим, выполняется ли требование конечности математических ожиданий:

$$M(X_n) = -n\alpha(1/2n^2) + 0(1 - 1/n^2) + n\alpha(1/2n^2) = 0.$$

Таким образом, каждая случайная величина имеет конечное (равное нулю) математическое ожидание, т.е. второе требование теоремы выполняется.

Проверим, выполняется ли требование равномерной ограниченности дисперсий. Напишем закон распределения X_n^2:

X_n^2	$n^2\alpha^2$	0	$n^2\alpha^2$
p	$1/(2n^2)$	$1-1/n^2$	$1/(2n^2)$

или, сложив вероятности одинаковых возможных значений,

X_n^2	$n^2\alpha^2$	0
p	$1/(2n^2)$	$1-1/n^2$

Найдем математическое ожидание М(X_n^2):

$$M(X_n^2) = n^2\alpha^2 1/n^2 = \alpha^2.$$

Найдем дисперсию $D(X_n)$, учитывая, что

$$D(X_n) = M(X_n^2) - [M(X_n)]^2 = \alpha^2.$$

Таким образом, дисперсии заданных случайных величин равномерно ограничены числом α^2, т.е. третье требование выполняется.

Итак, поскольку все требования выполняются, к рассматриваемой последовательности случайных величин теорема Чебышева выполнима.

2.4. Функция и плотность распределения вероятностей случайной величины

Функцией распределения называют функцию $F(x)$, определяющую вероятность того, что случайная величина X в результате испытания примет значение меньшее x, т.е. $F(x)=P(X < x)$.

Часто вместо термина «функция распределения» используют термин *«интегральная функция распределения»*.

Функция распределения обладает следующими **свойствами**.

1⁰. Значения функции распределения принадлежат отрезку [0;1]:
$0 \le F(x) \le 1$.

2⁰. Функция распределения есть неубывающая функция:
$F(x_2) \ge F(x_1)$, если $x_2 > x_1$.

3⁰. Вероятность того, что случайная величина X примет значение, заключенное в интервале $(a;b)$, равна приращению функции распределения на этом интервале:

$$P(a<X<b) = F(b) - F(a).$$

4⁰. Вероятность того, что непрерывная случайная величина X примет одно определенное значение, например x_1, равна нулю:

$$P(X = x_1) = 0.$$

5⁰. Если все возможные значения случайной величины X принадлежат интервалу $(a;b)$, то

$$F(x) = 0 \quad \text{при } x \le a; \ F(x) = 1 \text{ при } x \ge b.$$

6⁰. Если возможные значения непрерывной случайной величины расположены на всей числовой оси, то справедливы следующие предельные отношения:

$$\lim_{x\to-\infty} F(x) = 0, \quad \lim_{x\to+\infty} F(x) = 1.$$

Плотностью распределения вероятностей непрерывной случайной величины называют первую производную от функции распределения:

$$f(x) = F'(x).$$

Часто вместо термина «плотность распределения» используют термины «*плотность вероятностей*» и «*дифференциальная функция*».

Теорема. *Вероятность того, что непрерывная случайная величина X примет значение, принадлежащее интервалу* $(a;b)$, *равна определенному интегралу от плотности распределения, взятому в пределах от a до b:*

$$P(a < X < b) = \int_a^b f(x)dx.$$

Зная плотность распределения $f(x)$ можно найти функцию распределения $F(x)$ по формуле:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx.$$

Плотность распределения обладает следующими **свойствами**.

1⁰. Плотность распределения – неотрицательная функция:

$$f(x) \ge 0.$$

2⁰. Несобственный интеграл от плотности распределения в пределах от $-\infty$ до $+\infty$ равен единице:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1.$$

Геометрически это означает, что площадь криволинейной трапеции, ограниченной осью *Ox* и кривой распределения, равна единице.

В частности, если все возможные значения случайной величины принадлежат интервалу (a,b), то

$$\int_a^b f(x)dx = 1.$$

Образцы решения задач

Задача 1. Дан ряд распределения случайной величины X:

x_i	10	20	30	40	50
p_i	0,2	0,3	0,35	0,1	0,05

Найти функцию распределения вероятности этой случайной величины.

Решение. Если $x \le 10$, то $F(x)=P(X<x)=0$;

при $10<x\le 20$, $F(x)=P(X<x) = 0{,}2$;

$20<x\le 30$, то $F(x)=P(X<x) = 0{,}2+0{,}3 = 0{,}5$;

$30<x\le 40$, то $F(x)=P(X<x) = 0{,}2+0{,}3+0{,}35 = 0{,}85$;

$40<x\le 50$, то $F(x)=P(X<x) = 0{,}2+0{,}3+0{,}35+0{,}1 = 0{,}95$;

$x>50$, то $F(x)=P(X<x) = 0{,}2+0{,}3+0{,}35+0{,}1+0{,}05 = 1$.

Построим график функции $F(x)$ (рис. 6).

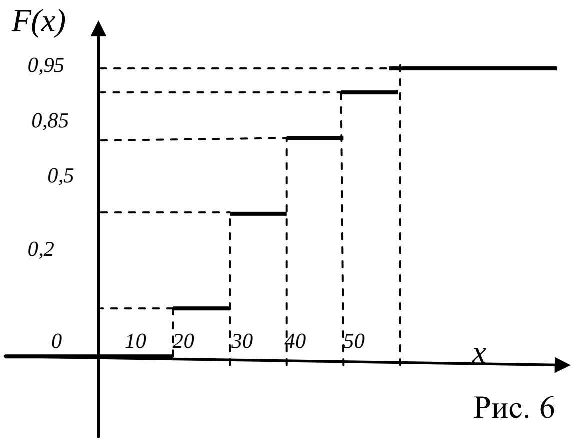


Рис. 6

Задача 2. Случайная величина X задана функцией распределения (интегральной функцией)

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x<1, \\ (x-1)/2 & \text{при } 1 \le x \le 3, \\ 1 & \text{при } x>3. \end{cases}$$

Вычислить вероятности попадания случайной величины X в интервалы (1,5;2,5) и (2,5;3,5).

Решение. $P_1= F(2{,}5) – F(1{,}5) = (2{,}5–1)/2–(1{,}5–1)/2=0{,}75–0{,}25=0{,}5$;

$P_2= F(3{,}5) – F(2{,}5) = 1–(2{,}5–1)/2=1–0{,}75=0{,}25$.

Задача 3. Случайная величина X задана функцией распределения

$$F(x)=\begin{cases}0 & \text{при } x<2,\\ (x-2)^3 & \text{при } 2\le x\le 3,\\ 1 & \text{при } x>3.\end{cases}$$

Найти плотность распределения (дифференциальную функцию распределения) случайной величины.

Решение. Плотность распределения равна производной от функции распределения, т.е. $f(x)=F'(x)$, поэтому

$$f(x)=\begin{cases}0 & \text{при } x<2,\\ 3(x-2)^2 & \text{при } 2\le x< 3,\\ 0 & \text{при } x>3.\end{cases}$$

Задача 4. Случайная величина X подчинена закону распределения с плотностью $f(x)$, причем

$$f(x)=\begin{cases}0 & \text{при } x<0,\\ a(3x-x^2)/2 & \text{при } 0\le x\le 3,\\ 0 & \text{при } x>3.\end{cases}$$

Требуется: 1) найти коэффициент a; 2) построить график распределения плотности $y = f(x)$; 3) найти вероятность попадания X в промежуток (1,2)

Решение. 1) Так как все значения данной случайной величины заключены на отрезке [0,3], то

$$\int_0^3 \frac{1}{2}a\left(3x-x^2\right)dx=1,$$

откуда

$$\frac{1}{2}a\left[\frac{3}{2}x^2-\frac{1}{3}x^3\right]_0^3=1,\ a\left(\frac{27}{2}-9\right)=1, \text{т.е. } a=\frac{4}{9}.$$

2) Графиком функции $f(x)$ на отрезке [0,3] является парабола $y = (2/3)x – (2/9)x^2$, а вне этого интервала графиком служит сама ось абсцисс (рис. 7).

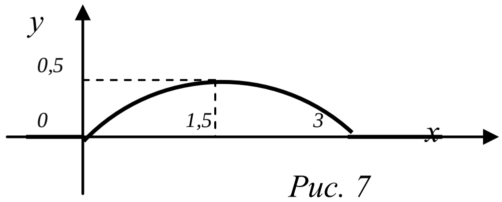


Рис. 7

3) Вероятность попадания случайной величины X в промежуток (1;2) равна:

$$P(1 < X < 2) = \int_1^2 \left(\frac{2}{3}x - \frac{2}{9}x^2\right)dx = \left[\frac{x^2}{3} - \frac{2x^3}{27}\right] = \frac{4}{3} - \frac{16}{27} - \frac{1}{3} + \frac{2}{27} = \frac{13}{27}.$$

Задача 5. Плотность вероятности случайной величины X имеет вид

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x < 0, \\ 2x & \text{при } 0 \le x \le 1, \\ 0 & \text{при } x > 1. \end{cases}$$

Найти функцию распределения случайной величины X .

Решение. Функция распределения $F(x)$ есть интеграл от дифференциальной функции, поэтому

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad x < 0, \\ x^2 & \text{при} \quad 0 \le x \le 1, \\ 1 & \text{при} \quad x > 1. \end{cases}$$

Задачи для решения

1. Бросают 3 монеты. Требуется: а) задать случайную величину X, равную числу выпавших “надписей”, б) построить ряд распределения и функцию распределения $F(x)$ величины X, если вероятность выпадения “герба” равна 0,5.

2. Дискретная случайная величина X задана законом распределения:

x_i	2	4	7
p_i	0,5	0,2	0,3

Найти функцию распределения $F(x)$ и построить её график.

3. Случайная величина X задана функцией распределения:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \le -1, \\ \frac{3}{4}x + \frac{3}{4} & \text{при } -1 < x \le \frac{1}{3}, \\ 1 & \text{при } x > \frac{1}{3}. \end{cases}$$

Найти вероятность того, что в результате испытания величина X примет значение, заключённое в интервале (0,1/3).

4. Дана функция распределения непрерывной случайной величины X:

$$F(x)=\begin{cases} 0 \quad \text{при} \;\; x \le 0, \\ \sin x \;\; \text{при} \;\; 0 < x \le \dfrac{\pi}{2}, \\ 1 \;\; \text{при} \;\; x > \dfrac{\pi}{2}. \end{cases}$$

Найти плотность распределения.

5. Непрерывная случайная величина задана плотностью распределения $f(x)=\dfrac{3}{2}\sin 3x$ в интервале (0,π/3); вне этого интервала $f(x)=0$. Найти вероятность того, что X примет значение, принадлежащее интервалу (π/6, π/4).

6. Задана плотность распределения непрерывной случайной величины X:

$$f(x)=\begin{cases} 0 \quad \text{при} \;\; x \le 0, \\ \cos x \;\; \text{при} \;\; 0 < x \le \dfrac{\pi}{2}, \\ 0 \;\; \text{при} \; x > \dfrac{\pi}{2}. \end{cases}$$

Найти функцию распределения $F(x)$.

7. Дана плотность распределения случайной величины X:

$$f(x)=\begin{cases} 0 \quad \text{при} \quad x \le 0, \\ a\sin \; x \;\; \text{при} \;\; 0 < x \le \pi, \\ 0 \quad \text{при} \quad x > \pi. \end{cases}$$

Найти коэффициент a и функцию распределения $F(x)$.

8. Случайная величина X задана функцией распределения

$$F(x)=\begin{cases} 0 \quad \text{при} \; x \le 0, \\ x^2 \;\; \text{при} \; 0 < x < 1, \\ 1 \quad \text{при} \; x > 1. \end{cases}$$

Найти вероятность того, что в результате 4 независимых испытаний величина X ровно 3 раза примет значение, принадлежащее интервалу (0,25; 0,75).

9*. Построить ряд распределения и функцию распределения числа попаданий мячом в корзину при двух бросках, если вероятность попадания равна 0,4.

10*. Дискретная случайная величина задана законом распределения:

x_i	3	4	7	10
p_i	0,2	0,1	0,4	0,3

Найти функцию распределения $F(x)$ и построить её график.

11*. Случайная величина X задана функцией распределения:

$$F(x)=\begin{cases} 0 \quad \text{при } x\le 2, \\ (x-2) \text{при } \ 2<x\le 3, \\ 1 \text{ при } \ x>3. \end{cases}$$

Вычислить вероятность попадания случайной величины X в интервалы (1;2,5) и (2,5; 3,5).

12*. Случайная величина X задана функцией распределения, указанной в предыдущей задаче. Найти плотность распределения случайной величины.

13*. Случайная величина имеет плотность распределения:

$$f(x)=\begin{cases} 0 \quad \text{при } x\le 0, \\ \frac{1}{2}\sin x \text{ при } \ 0<x\le \pi, \\ 0 \ \text{ при } \ x>\pi. \end{cases}$$

Найти вероятность того, что в результате испытания величина X примет значение, заключённое в интервале (0;1/4).

14*. Задана плотность распределения непрерывной случайной величины X:

$$f(x)=\begin{cases} 0 \quad \text{при } x\le 0, \\ \sin x \text{ при } \ 0<x\le \frac{\pi}{2}, \\ 0 \ \text{ при } x>\frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

Найти функцию распределения *F(x)*.

15*. Случайная величина задана плотностью распределения:

$$f(x)=\begin{cases} 0 \quad \text{при } \ x\le -\frac{\pi}{2}, \\ a\cos x \quad \text{при } \ -\frac{\pi}{2}<x\le \frac{\pi}{2}, \\ 0 \ \text{ при } \ x>\frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

Найти *a* и *F(x)*.

2.5. Числовые характеристики непрерывных случайных величин. Равномерное, нормальное и показательное распределения

Математическое ожидание непрерывной случайной величины X определяется равенством:

$$M(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx,$$

где $f(x)$ –плотность распределения случайной величины X.

Дисперсия непрерывной случайной величины X определяется равенством:

$$D(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}\left[x-M(X)\right]^2 f(x)dx,$$

или равносильным равенством:

$$D(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)dx-\left[M(X)\right]^2.$$

Среднее квадратичное отклонение непрерывной случайной величины определяется равенством:

$$\sigma(X)=\sqrt{D(X)}.$$

Модой $M_0(X)$ непрерывной случайной величины X называют то ее значение, при котором плотность распределения максимальна.

Медианой $M_e(X)$ непрерывной случайной величины X называется такое ее значение, для которого одинаково вероятно, окажется ли случайная величина меньше или больше $M_e(X)$, т.е.

$$P(X< M_e(X))=P(X>M_e(X))=0,5.$$

Плотности распределения непрерывных случайных величин называют также *законами распределения.*

Распределение вероятностей называют *равномерным*, если на интервале, которому принадлежат все возможные значения случайной величины, плотность распределения сохраняет постоянное значение, а именно

$$f(x)=\begin{cases} 0 & \text{при} \quad x\le a, \\ 1/(b-a) & \text{при} \quad a<x<b, \\ 0 & \text{при} \quad x\ge b. \end{cases}$$

Числовые характеристики равномерного распределения:

$$M(X)=(a+b)/2,\ D(X)=(b-a)^2/12,\ \sigma(X)=(b-a)/(2\sqrt{3}).$$

Если случайная величина X распределена равномерно, то

$$F(x)=\begin{cases} 0 & \text{при} \quad x\le a, \\ \dfrac{x-a}{b-a} & \text{при} \quad a<x<b, \\ 1 & \text{при} \quad x\ge b, \end{cases}$$

а также

$$P(\alpha < X < \beta) = \frac{\beta - \alpha}{b - a}.$$

Нормальным называют распределение вероятностей случайной величины, которое описывается плотностью:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-(x-a)^2/2\sigma^2}.$$

Числовые характеристики нормального распределения:

$$M(X)=a,\ D(X)=\sigma^2,\ \sigma(X)=\sigma.$$

Если случайная величина X распределена нормально, то

$$F(x) = \Phi\left(\frac{x-a}{\sigma}\right) + \frac{1}{2},$$

где $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_0^x e^{-t^2/2} dt$ – функция Лапласа.

Вероятность того, что случайная величина X, распределённая по нормальному закону, примет значение, принадлежащее интервалу (α,β), равна

$$P(\alpha < X < \beta) = \Phi\left(\frac{\beta - a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha - a}{\sigma}\right).$$

Показательным (экспоненциальным) называют распределение вероятностей непрерывной случайной величины X, которое описывается плотностью

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad x < 0, \\ \lambda e^{-\lambda x} & \text{при} \quad x \ge 0. \end{cases}$$

где λ – постоянная положительная величина.

Функция распределения показательного закона

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{при} \quad x < 0, \\ 1 - e^{-\lambda x} & \text{при} \quad x \ge 0. \end{cases}$$

Числовые характеристики показательного распределения:

$$M(X)=1/\lambda,\ D(X)=1/\lambda^2,\ \sigma(X)=1/\lambda.$$

Вероятность попадания в интервал (α,β) непрерывной случайной величины X, распределённой по показательному закону, равна

$$P(\alpha < X < \beta) = e^{-\lambda\alpha} - e^{-\lambda\beta}$$

Образцы решения задач

Задача1. Случайная величина X задана плотностью распределения $f(x)=1-\dfrac{x}{2}$ на промежутке [0;2). Вне этого промежутка $f(x)=0$. Найти математическое ожидание $M(X)$.

Решение. Известно, что $M(X)=\int\limits_a^b xf(x)dx$, значит,

$$M(X)=\int\limits_0^2 x\left(1-\frac{x}{2}\right)dx=\int\limits_0^2 xdx-\frac{1}{2}\int\limits_0^2 x^2dx=\frac{x^2}{2}\Bigg|_0^2-\frac{1}{2}\cdot\frac{x^3}{3}\Bigg|_0^2=\frac{2}{3}.$$

Задача 2. Плотность распределения случайной величины

$$f(x)=\begin{cases} 0 & \text{при} \quad x\le 0, \\ 2x^2 & \text{при} \quad 0<x\le 1, \\ 0 & \text{при} \quad x>1. \end{cases}$$

Найти дисперсию $D(X)$.

Решение.

$$D(X)=\int\limits_a^b x^2 f(x)dx-\left(\int\limits_a^b xf(x)dx\right)^2=\int\limits_0^1 x^2\cdot 2x^2dx-\left(\int\limits_0^1 x\cdot x^2\cdot 2dx\right)^2=$$

$$=2\int\limits_0^1 x^4dx-\left(2\int\limits_0^1 x^3dx\right)^2=2\cdot\frac{x^5}{5}\Bigg|_0^1-\left(2\cdot\frac{x^4}{4}\Bigg|_0^1\right)^2=\frac{3}{20}.$$

Задача 3. Определить математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратичное отклонение для случайной величины с равномерным распределением.

Решение. Плотность вероятности равномерно распределённой случайной величины равна

$$f(x)=\begin{cases} 0 & \text{при} \quad x<a, \\ 1/(b-a) & \text{при} \quad a\le x\le b, \\ 0 & \text{при} \quad x>b. \end{cases}$$

Тогда

$$M(X)=\int\limits_a^b xf(x)dx=\int\limits_a^b \frac{x}{b-a}dx=\frac{1}{b-a}\cdot\frac{1}{2}x^2\Bigg|_a^b=\frac{1}{b-a}\cdot\frac{b^2-a^2}{2}=\frac{a+b}{2},$$

$D(X)=M(X^2)-[M(X)]^2$.

Найдём $M(X)^2$:

$$M\left(X^2\right)=\int_a^b \frac{x^2}{b-a}dx=\frac{1}{3(b-a)}\cdot x^3\Big|_a^b=\frac{b^3-a^3}{3(b-a)}=\frac{b^2+ab+a^2}{3},$$

значит,

$$D(X)=\frac{b^2+ab+a^2}{3}-\frac{(a+b)^2}{4}=\frac{(b-a)^2}{12}.$$

Следовательно, $\sigma(X)=\sqrt{D(X)}=\dfrac{b-a}{2\sqrt{3}}$.

Задача 4. Случайная величина X имеет нормальное распределение с $M(X)=0$ и $D(X)=1$. Что больше, $P(-0{,}5<X<-0{,}1)$ или $P(1<x<2)$?

Решение. Вероятность попадания в интервал $(\alpha,\ \beta)$ случайной величины X, подчинённой нормальному закону, определяется через значения функции Лапласа по формуле:

$$P(\alpha<X<\beta)=\Phi\left(\frac{\beta-a}{\sigma}\right)-\Phi\left(\frac{\alpha-a}{\sigma}\right).$$

Поэтому

$$P(-0{,}5<X<-0{,}1)=\Phi\left(\frac{-0{,}1-0}{1}\right)-\Phi\left(\frac{-0{,}5-0}{1}\right)=\Phi(-0{,}1)-\Phi(-0{,}5)=$$

$$=-\Phi(0{,}1)+\Phi(0{,}5)=-0{,}0398+0{,}1915=0{,}1517.$$

$$P(1<X<2)=\Phi\left(\frac{2-0}{1}\right)-\Phi\left(\frac{1-0}{1}\right)=\Phi(2)-\Phi(1)=0{,}4772-0{,}3414=0{,}1359.$$

Таким образом, $P(-0{,}5<X<-0{,}1)>P(1<X<2)$.

Задача 5. Диаметр детали, изготавливаемой на станке,- случайная величина, распределенная по нормальному закону с математическим ожиданием $a=25$ *см* и средним квадратичным отклонением $\sigma=0{,}4$ *см*. Найти вероятность того, что две взятые наудачу детали имеют отклонение от математического ожидания по абсолютной величине не более 0,16 *см*.

Решение. Вероятность того, что наудачу взятая деталь имеет отклонение δ от математического ожидания, равна

$$P(|X-a|<\delta)=2\Phi(\delta/\sigma),$$

тогда

$$P(|X-25|<0{,}16)=2\Phi(0{,}16/0{,}4)=2\Phi(0{,}4)=2\cdot 0{,}1554=0{,}3108.$$

Следовательно, для двух наудачу взятых деталей искомая вероятность составит $(0{,}3108)^2\approx 0{,}096$.

Задача 6. Непрерывная СВ X имеет показательное распределение с параметром $\lambda = 0{,}4$. Найти характеристики случайной величины, интегральную функцию и вероятность того, что случайная величина примет значение в интервале (6,10).

Решение. Плотность распределения имеет вид:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad x < 0; \\ 0{,}4e^{-0{,}4x}, & \text{если} \quad x > 0; \end{cases}$$

$$M(X) = \sigma(X) = \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{0{,}4} = 2{,}5; \quad D(X) = 6{,}25,$$

тогда

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad x < 0; \\ 1 - e^{-0{,}4x}, & \text{если} \quad x \ge 0; \end{cases}$$

$$P(0 < X < 10) = e^{-0{,}4 \cdot 6} - e^{-0{,}4 \cdot 10} = 0{,}0907 - 0{,}0183 = 0{,}0724.$$

Задачи для решения

1. Случайная величина X задана плотностью распределения $f(x)=2x$ в интервале (0,1); вне этого интервала $f(x)=0$. Найти математическое ожидание величины X.

2. Найти дисперсию случайной величины X, заданной функцией распределения:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при} \ x \le -2, \\ \dfrac{x}{4} + \dfrac{1}{2} & \text{при} \ -2 < x \le 2, \\ 1 & \text{при} \ x > 2. \end{cases}$$

3. Определить математическое ожидание случайной величины, если $f(x)=0{,}5$ в интервале (2,4); вне этого интервала $f(x)=0$.

4. Цена деления шкалы амперметра равна 0,1 *А*. Показания округляют до ближайшего целого деления. Найти вероятность того, что при отсчёте будет сделана ошибка, превышающая 0,02 *А*.

5. Поезда данного маршрута городского трамвая идут с интервалом 5 минут. Пассажир подходит к трамвайной остановке в некоторый момент времени. Какова вероятность появления пассажира не ранее, чем через минуту после ухода предыдущего поезда, но не позднее, чем за две минуты до отхода следующего поезда?

6. Математическое ожидание нормально распределённой случайной величины X равно 3, а среднее квадратическое отклонение равно 2. Написать плотность и функцию распределения величины X.

7. Нормально распределённая случайная величина X задана плотностью распределения $f(x)=\dfrac{1}{5\sqrt{2\pi}}e^{-(x-1)^2/50}$. Найти математическое ожидание и дисперсию случайной величины X.

8. Математическое ожидание и среднее квадратическое отклонение нормально распределенной случайной величины X равны соответственно 10 и 2. Найти вероятность того, что в результате испытания X примет значение, заключённое в интервале (12,14).

9. Автомат изготовляет шарики. Шарик считается годным, если отклонение диаметра от проектного размера по абсолютной величине меньше 0,7 *мм.* Считая, что случайная величина X распределена нормально со средним квадратическим отклонением σ =0,4 *мм* найти, сколько в среднем будет годных шариков среди 100 изготовленных.

10. Написать плотность и функцию распределения показательного закона, если параметр $\lambda=5$.

11. Найти параметр λ показательного распределения, заданного плотностью $f(x)=0$ при $x<0$, $f(x)=2e^{-2x}$ при $x\geq0$.

12. Непрерывная случайная величина X распределена по показательному закону, заданному плотностью вероятности $f(x)=3e^{-3x}$ при $x\geq0$; при $x<0$ $f(x)=0$. Найти вероятность того, что в результате испытания X попадёт в интервал (0,13; 0,7).

13. Найти математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение показательного распределения, заданного плотностью вероятности $f(x)=10e^{-10x}$ (при $x\geq0$).

14*. Случайная величина X задана плотностью распределения $f(x)=1/2x$ в интервале (0,2); вне этого интервала $f(x)=0$. Найти математическое ожидание величины X.

15*. Случайная величина X в интервале (0,5) задана плотностью распределения $f(x)=(2/25)x$; вне этого интервала $f(x)=0$. Найти дисперсию X.

16*. Вычислить дисперсию и среднее квадратическое отклонение случайной величины, если $f(x)=1/6$ в интервале (0,6); вне этого интервала $f(x)=0$.

17*. Цена деления шкалы измерительного прибора равна 0,2. Показания прибора округляют до ближайшего целого деления. Найти вероятность того, что при отсчёте будет сделана ошибка: а) меньшая 0,04; б) большая 0,05.

18*. Все значения равномерно распределённой случайной величины лежат на отрезке [2,8]. Найти вероятность попадания случайной величины в интервал (3,5).

19*. Написать плотность и функцию распределения нормально распределённой случайной величины X, зная, что $M(X)=3$, $D(X)=16$.

20*. Нормально распределённая случайная величина X задана плотностью распределения $f(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{\pi}}e^{-(x-3)^2/4}$. Найти математическое ожидание и дисперсию случайной величины X.

21*. Математическое ожидание и среднее квадратическое отклонение нормально распределенной случайной величины X соответственно равны 20 и 5. Найти вероятность того, что в результате испытания X примет значение, заключённое в интервале (15,20).

22*. Деталь, изготовленная автоматом, считается годной, если отклонение ее контрольного размера от проектного не превышает 10 *мм*. Случайные отклонения контролируемого размера от проектного подчинены нормальному закону со средним квадратическим отклонением $\sigma=5$ *мм* и математическим ожиданием $a=0$. Сколько процентов годных деталей изготавливает автомат?

23*. Написать плотность и функцию распределения показательного закона, если параметр $\lambda=6$.

24*. Найти параметр λ показательного распределения, заданного функцией распределения $F(x)=0$ при $x<0$ и $F(x)=1-e^{-0,4x}$ при $x\geq0$.

25*. Непрерывная случайная величина X распределена по показательному закону, заданному при $x\geq0$ плотностью распределения $f(x)=0{,}04\ e^{-0.04x}$; при $x<0$ функция $f(x)=0$. Найти вероятность того, что в результате испытания X попадёт в интервал (1,2).

26*. Найти математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение показательного закона, заданного функцией распределения $F(x)=1-e^{-0,4x}$ при $x\geq0$.

Указание. После проведения занятий по разделам 2.1–2.4 рекомендуем провести контрольную работу № 2.

2.6. Система двух случайных величин

Двумерной называют случайную величину (X,Y), возможные значения которой есть пары чисел (x,y). Составляющие X и Y, рассматриваемые одновременно, образуют *систему* двух случайных величин.

Дискретной называют двумерную величину, составляющие которой дискретны.

Непрерывной называют двумерную величину, составляющие которой непрерывны.

Законом распределения дискретной двумерной случайной величины называют перечень возможных значений этой величины, т.е. пар чисел (x_i, y_j) и их вероятностей $p(x_i, y_j)$, $(i=1,2,...,n;\ j=1,2,...,m)$.

Закон распределения дискретной двумерной случайной величины может быть задан с помощью таблицы с двойным входом.

$x \backslash y$	y_1	y_2	...	y_m
x_1	$p(x_1,y_1)$	$p(x_1,y_2)$	...	$p(x_1,y_m)$
x_2	$p(x_2,y_1)$	$p(x_2,y_2)$	...	$p(x_2,y_m)$
. . .	. . .	. . .	. . .	
x_n	$p(x_n,y_1)$	$p(x_n,y_2)$	...	$p(x_n,y_m)$

При этом $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} p\left(x_i, y_j\right)=1.$

Функцией распределения вероятностей двумерной случайной величины называют функцию $F(x,y)$, определяющую для каждой пары чисел (x,y) вероятность того, что X примет значение, меньшее x, и при этом Y примет значение, меньшее y:

$$F(x,y)=P(X<x,Y<y).$$

Функция распределения обладает следующими **свойствами**.

1^0. Значения функции распределения удовлетворяют двойному неравенству

$$0 \le F(x,y) \le 1.$$

2^0. $F(x,y)$ есть неубывающая функция по каждому аргументу:

$$F(x_2,y) \ge F(x_1,y), \text{если } x_2 > x_1;$$

$$F(x,y_2) \ge F(x,y_1), \text{если } y_2 > y_1.$$

3^0. Имеют место предельные соотношения:

$$1)\ F(-\infty,y)=0, \quad 3)\ F(-\infty,-\infty)=0,$$

$$2)\ F(x,-\infty)=0, \quad 4)\ F(+\infty,+\infty)=1.$$

4⁰. а) При $y=+\infty$ функция распределения системы становится функцией распределения составляющей X:

$$F(x,+\infty)=F_1(x).$$

б) При $x=+\infty$ функция распределения системы становится функцией распределения составляющей Y:

$$F(+\infty,y)=F_2(y).$$

Теорема. *Вероятность попадания случайной точки в прямоугольник, ограниченный прямыми $X=x_1$, $X=x_2$, $Y=y_1$, $Y=y_2$ равна*

$$P(x_1\leq X\leq x_2,\, y_1\leq Y\leq y_2)=[F(x_2, y_2)-F(x_1, y_2)]-[F(x_2, y_1)-F(x_1, y_1)].$$

Закон распределения непрерывной двумерной случайной величины задаётся плотностью распределения $f(x,y)$.

Плотностью совместного распределения вероятностей $f(x,y)$ двумерной непрерывной случайной величины (X,Y) называют вторую смешанную частную производную от функции распределения:

$$f(x,y)=\frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x\partial y}.$$

Геометрически эту функцию можно истолковать как поверхность, которую называют *поверхностью распределения.*

Зная плотность совместного распределения $f(x,y)$, можно найти функцию распределения $F(x,y)$ по формуле

$$F(x,y)=\int_{-\infty}^{y}\int_{-\infty}^{x} f(x,y)dxdy.$$

Двумерная плотность вероятности обладает следующими **свойствами**.

1⁰. Двумерная плотность вероятности неотрицательна:

$$f(x,y)\geq 0.$$

2⁰. Двойной несобственный интеграл с бесконечными пределами от двумерной плотности вероятности равен единице:

$$F(x,y)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dxdy=1.$$

Математические ожидания дискретных случайных величин X и Y, входящих в систему, определяются по формулам

$$m_x=M(X)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}x_i p_{ij}, \qquad m_y=M(Y)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}y_j p_{ij},$$

а математическое ожидание непрерывных случайных величин – по формулам

$$m_x = M(X) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} x\, f(x,y)dxdy, \qquad m_y = M(Y) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} y\, f(x,y)dxdy.$$

Точка (m_x; m_y) называется *центром рассеивания* системы случайных величин.

Дисперсии дискретных случайных величин X и Y определяется по формулам

$$D(X) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} p_{ij}(x_i - m_x)^2, \qquad D(y) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} p_{ij}(y_j - m_y)^2.$$

Дисперсии непрерывных случайных величин X и Y, входящих в систему, находятся по формулам.

$$D(X) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} (x - m_x)^2 f(x,y)dxdy, D(Y) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} (y - m_y)^2 f(x,y)dxdy.$$

Средние квадратические отклонения случайных величин X и Y определяются по формулам

$$\sigma_x = \sqrt{D(X)}, \qquad \sigma_y = \sqrt{D(y)}.$$

Для вычисления дисперсий могут быть применены формулы

$$D(X) = M(X^2) - (M(X))^2, \qquad D(Y) = M(Y^2) - (M(Y))^2.$$

Корреляционным моментом μ_{xy} случайных величин X и Y называют математическое ожидание произведения отклонений этих величин:

$$\mu_{xy} = M[(X - M(X))(Y - M(Y))].$$

Для вычисления корреляционного момента дискретных величин используют формулу

$$\mu_{xy} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} [x_i - M(X)][y_j - M(Y)]p(x_i, y_j),$$

а для непрерывных величин – формулу

$$\mu_{xy} = \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} [X - M(X)][y - M(Y)] f(x,y)dxdy.$$

Коэффициентом корреляции r_{xy} случайных величин X и Y называют отношение корреляционного момента к произведению средних квадратическим отклонений этих величин:

$$r_{xy} = \mu_{xy} / (\sigma_x \sigma_y).$$

Коэффициент корреляции – безразмерная величина, причем $|r_{xy}| \le 1$. Коэффициент корреляции служит для оценки тесноты линейной связи между X и Y: чем ближе абсолютная величина коэффициента корреляции к единице, тем связь сильнее; чем ближе абсолютная величина коэффициента корреляции к нулю, тем связь слабее.

Коррелированными называют две случайные величины, если их корреляционный момент отличен от нуля.

Некоррелированными называют две случайные величины если их корреляционный момент равен нулю.

Образцы решения задач

Задача 1. Задано распределение двумерной случайной величины:

x, *y*	1	2	3
1	1/18	1/12	1/36
2	1/9	1/6	1/18
3	1/6	1/4	1/12

Найти математическое ожидание случайных величин X и Y.

Решение. Имеем

$$m_x = 1\cdot\frac{1}{18}+2\cdot\frac{1}{9}+3\cdot\frac{1}{6}+1\cdot\frac{1}{12}+2\cdot\frac{1}{6}+3\cdot\frac{1}{4}+1\cdot\frac{1}{36}+2\cdot\frac{1}{18}+3\cdot\frac{1}{12}=\frac{7}{3},$$

$$m_y = 1\cdot\frac{1}{18+}2\cdot\frac{1}{12}+3\cdot\frac{1}{36}+1\cdot\frac{1}{9}+2\cdot\frac{1}{6}+3\cdot\frac{1}{18}+1\cdot\frac{1}{6}+2\cdot\frac{1}{4}+3\cdot\frac{1}{12}=\frac{11}{6}.$$

Точка $\left(\frac{7}{3};\frac{11}{6}\right)$ является центром рассеивания для заданной системы (X,Y).

Задача 2. Найти дисперсии случайных величин X и Y по условию предыдущей задачи.

Решение. $D(X)=M(X^2)-[M(X)]^2$; $D(Y)=M(Y^2)-[M(Y)]^2$.

$$M\left(X^2\right)=\frac{1}{18}+\frac{4}{9}+\frac{9}{6}+\frac{1}{12}+\frac{4}{6}+\frac{9}{4}+\frac{1}{36}+\frac{4}{18}+\frac{9}{12}=\frac{54}{9};\ D(X)=\frac{54}{9}-\frac{49}{9}=\frac{5}{9}.$$

$$M\left(Y^2\right)=\frac{1}{18}+\frac{4}{12}+\frac{1}{9}+\frac{4}{6}+\frac{1}{18}+\frac{9}{18}+\frac{1}{6}+\frac{4}{4}+\frac{9}{12}=\frac{138}{36};\ D(Y)=\frac{138}{36}-\frac{121}{36}=\frac{17}{36}.$$

Задача 3. Дана плотность вероятности системы случайных величин (X,Y):

$$f(x, y)=0{,}5\ \sin(x+y)\ (0\le x\le \pi/2,\ 0\le y\le \pi/2).$$

Определить: а) функцию распределения системы; б) математические ожидания X и Y; в) корреляционный момент; г) коэффициент корреляции.

Решение. а) Находим функцию распределения (при $0\le x\le \pi/2$, $0\le y\le\pi/2$)

$$F(x,y)=P(X<x, Y<y)=\int_0^x\int_0^y 0{,}5\sin(x+y)dxdy=0{,}5[\sin x+\sin y-\sin(x+y)].$$

б) Математическое ожидание случайной величины X:

$$M(X)=0{,}5\int_0^{\pi/2}\int_0^{\pi/2}x\sin(x+y)dxdy=0{,}5\int_0^{\pi/2}x\left[-\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)+\cos x\right]dx=\frac{\pi}{4}\approx 0{,}785.$$

Дисперсия случайной величины X:

$$D(X)=0{,}5\int_0^{\pi/2}\int_0^{\pi/2}x^2\sin(x+y)dxdy-\frac{\pi^2}{16}=0{,}5\int_0^{\pi/2}x^2\left[-\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)+\cos x\right]dx-\frac{\pi^2}{16}=$$

$$=\frac{\pi^2}{16}+\frac{\pi}{2}-2\approx 0{,}188.$$

Из симметрии плотности вероятности относительно X и Y следует, что

M(Y) =M(X), D(Y)=D(X).

в) Корреляционный момент

$$\mu_{xy}=0{,}5\int_0^{\pi/2}\int_0^{\pi/2}x\,y\sin\,(x+y)dxdy-\frac{\pi^2}{16}=$$

$$=0{,}5\int_0^{\pi/2}x\left[\sin\,\left(x+\frac{\pi}{2}\right)-\sin x-\frac{\pi}{2}\cos\,\left(x+\frac{\pi}{2}\right)\right]dx-\frac{\pi^2}{16}=\frac{\pi}{2}-1-\frac{\pi^2}{16}\approx-0{,}046.$$

г) $\sigma_x\cdot\sigma_y=D(X)=D(Y)=\left(\pi^2+8\pi-32\right)116.$ Тогда

$$\mathrm{r_{xy}}=\frac{\mu_{xy}}{\sigma_x\sigma_y}=\frac{8\pi-16-\pi^2}{\pi^2+8\pi-32}\approx\frac{-0{,}73688}{3{,}00232}\approx-0{,}2454.$$

Задача 4. Задано распределение вероятностей дискретной двумерной случайной величины:

y \ *x*	3	10	12
4	0,17	0,13	0,25
5	0,10	0,30	0,05

Найти законы распределения составляющих X и Y.

Решение. Сложив вероятности по столбцам, получим вероятности возможных значений X: $P(x_1=3)=0{,}27$; $P(x_2=10)=0{,}43$; $P\,(x_3=12)=\,=0{,}30$

x_i	3	10	12
p_i	0,27	0,43	0,30

Контроль: 0,27 + 0,43 + 0,30 = 1

Аналогично, сложив по строкам, найдем распределение составляющей Y:

y_i	4	5
p_j	0,55	0,45

Контроль: 0,55 + 0,45 = 1.

Задача 5. Найти вероятность того, что в результате испытания составляющая X двумерной случайной величины $(X,У)$ примет значение $X<2$ и при этом составляющая $У$ примет значение$У<3$, если известна функция распределения системы

$$F(x,y)=\left(\frac{1}{\pi}arctg\,\frac{x}{2}+\frac{1}{2}\right)\cdot\left(\frac{1}{\pi}arctg\,\frac{y}{3}+\frac{1}{2}\right)$$

Решение. По определению функции распределения двумерной случайной величины, $F(x,y) = P(X<x, Y<y)$.

Положив $x = 2$, $y = 3$, получим искомую вероятность:

$$P(X<2, У<3) = F(2,3) = \left(\frac{1}{\pi}arctg\frac{2}{2}+\frac{1}{2}\right)\cdot\left(\frac{1}{\pi}arctg\frac{3}{3}+\frac{1}{2}\right) =$$

$$= \left(\frac{1}{\pi}\cdot\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\right)\cdot\left(\frac{1}{\pi}\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{4}\cdot\frac{3}{4} = \frac{9}{16}.$$

Задача 6. Найти функцию распределения двумерной случайной величины по данной плотности совместного распределения

$$f(x,y) = \frac{1}{\pi^2(1+x^2)(1+y^2)}.$$

Решение. Воспользуемся формулой

$$F(x,y) = \int_{-\infty}^{y}\int_{-\infty}^{x} f(x,y)dxdy.$$

$$F(x,y) = \frac{1}{\pi^2}\int_{-\infty}^{y}\left(\frac{1}{1+y^2}\int_{-\infty}^{x}\frac{dx}{1+x^2}\right)dy = \frac{1}{\pi^2}\int_{-\infty}^{y}\frac{1}{1+y^2}\left(arctg\,x+\frac{\pi}{2}\right)dy =$$

$$= \left(\frac{1}{\pi}arctg\,x+\frac{1}{2}\right)\cdot\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{y}\frac{dy}{1+y^2} = \left(\frac{1}{\pi}arctg\,x+\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{\pi}arctg\,y+\frac{1}{2}\right).$$

Задача 7. Плотность распределения двумерной случайной величины

$$f(x,y) = \frac{1}{\pi^2(1+x^2)(1+y^2)}.$$

Найти вероятность попадания случайной точки в прямоугольник с вершинами К (1;1); L ($\sqrt{3}$;1); M (1;10); N ($\sqrt{3}$;0).

Решение. *I способ.* Вероятность попадания случайной точки в произвольную область D находится по формуле:

$$P((X,Y)\subset D) = \iint_D f(x,y)dxdy.$$

Тогда

$$P((X,Y)\subset D) = \iint_D \frac{1}{\pi^2(1+x^2)(1+y^2)}dxdy = \frac{1}{\pi^2}\int_0^1\left[\frac{1}{1+y^2}\int_1^{\sqrt{3}}\frac{dx}{1+x^2}\right]dy =$$

$$= \frac{1}{\pi^2}arctgx\Big|_1^{\sqrt{3}}\int_0^1\frac{dy}{1+y^2} = \frac{1}{\pi^2}\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right)arctg\;y\Big|_0^1 = \frac{1}{\pi^2}\cdot\frac{\pi}{12}\cdot\frac{\pi}{4} = \frac{1}{48}.$$

II способ. По известной плотности распределения системы двух случайных величин можно найти функцию распределения (см. предыдущую задачу). Вероятность попадания случайной точки (X,Y) в прямоугольник равна

$$P(x_1 < X < x_2, y_1 < Y < y_2) = [F(x_2,y_2) - F(x_1,y_2)] - [F(x_2,y_1) - F(x_1,y_1)].$$

Для функции

$$F(x,y) = \left(\frac{1}{\pi} arctg\ x + \frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{\pi} arctg\ y + \frac{1}{2}\right)$$

соответствующая вероятность равна

$$P(1 < X < \sqrt{3}, 0 < Y < 1) = \left[\left(\frac{1}{\pi} arctg\sqrt{3} + \frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{\pi} arctg 1 + \frac{1}{2}\right) - \left(\frac{1}{\pi} arctg 1 + \frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{\pi} arctg 1 + \frac{1}{2}\right)\right] -$$

$$-\left[\left(\frac{1}{\pi} arctg\sqrt{3} + \frac{1}{2}\right)\cdot\left(\frac{1}{\pi} arctg\ 0 + \frac{1}{2}\right) - \left(\frac{1}{\pi} arctg\ 1 + \frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{\pi} arctg\ 0 + \frac{1}{2}\right)\right] =$$

$$= \left[\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{2}\right) - \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{2}\right)\right] - \left[\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2}\right)\cdot\frac{1}{2} - \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{2}\right)\frac{1}{2}\right] = \frac{1}{48}.$$

Задача 8. Найти плотность совместного распределения $f(x,y)$ по известной функции распределения.

$$F(x,y) = \sin x \sin y \left(0 \le x \le \frac{\pi}{2}; 0 \le y \le \frac{\pi}{2}\right).$$

Решение. Плотность совместного распределения находится по формуле:

$$f(x,y) = \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}.$$

Найдем $\frac{\partial F}{\partial x}$: $\frac{\partial F}{\partial x} = \cos x \sin y$; тогда

$$f(x,y) = \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}. = \cos x \cos y \qquad (0 \le x \le \pi/2;\ 0 \le y \le \pi/2).$$

Задачи для решения

1. Задано распределение вероятностей дискретной двумерной случайной величины:

y \ x	26	30	41	50
2,3	0,05	0,12	0,08	0,04
2,7	0,09	0,3	0,11	0,21

Найти законы распределения составляющих.

2. Найти вероятность того, что составляющая X двумерной случайной величины примет значение $x<1/2$ при этом составляющая Y примет значение $y<1/3$, если известна функция распределения системы $F(x, y) = (1/\pi\ arctg2x + 1/2)\ (1/\pi\ arctg\ 2y + 1/2)$.

3. Найти вероятность попадания случайной точки (X, Y) в прямоугольник, ограниченный прямыми $x = \pi/4$, $x = \pi/2$, $y = \pi/6$, $y = \pi/3$. Если известна функция распределения $F(x,y) = sinx\ siny$ $(0<x<\pi/2)$.

4. Найти вероятность попадания случайной величины (X,Y) в прямоугольник, ограниченный прямыми $x=1$, $x=2$, $y=3$, $y=5$, если известна функция распределения

$$F(x, y) = \begin{cases} 1 - 2^{-x} - 2^{-y} + 2^{-x-y} \text{ при } x \ge 0, y \ge 0; \\ 0 \qquad\qquad \text{ при } x < 0 \text{ или } y < 0. \end{cases}$$

5. Найти плотность распределения системы двух случайных величин по известной функции распределения

$$F(x,y)=(1-e^{-2x})(1-e^{-3y}) \qquad (x<0,\ y<0).$$

6. Задана функция распределения двумерно случайной величины

$$F(x, y) = \begin{cases} 1 - 3^{-x} - 3^{-y} + 3^{-x-y} \text{ при } x \ge 0, y \ge 0; \\ 0 \qquad\qquad \text{ при } x < 0 \text{ или } y < 0. \end{cases}$$

Найти двумерную плотность вероятности системы.

7. Задана двумерная случайная величина (X,Y):

$y \backslash x$	$x_1=2$	$x_2=5$	$x_3=8$
$y_1=0{,}4$	0,15	0,30	0,35
$y_2=0{,}8$	0,05	0,12	0,03

Найти корреляционный момент и коэффициент корреляции.

8*. Задано распределение вероятностей дискретной двумерной случайной величины:

$y \backslash x$	x_1	x_2	x_3
y_1	0,12	0,18	0,10
y_2	0,10	0,11	0,39

Найти законы распределения составляющих.

9*. Найти вероятность того, что составляющая X двумерной случайной величины примет значение $X<2$, при этом составляющая Y примет значение $Y<3$, если известна функция распределения системы

$$F(x, y) = \frac{(x-4)(y-10)}{10}.$$

10*. Задана функция распределения двумерной случайной величины

$$F(x,y)=\begin{cases}\sin x\sin y & \text{при } 0\le x\le\dfrac{\pi}{2}, 0\le y\le\dfrac{\pi}{2};\\ 0 & \text{при } x<0 \text{ или } y<0.\end{cases}$$

Найти вероятность попадания случайной точки (X,Y) в прямоугольник, ограниченный прямыми $x=0$, $x=\pi/4$, $y=\pi/6$, $y=\pi/4$.

11*. Задана функция распределения двумерной случайной величины:

$$F(x,y)=\begin{cases}(1-e^{-4x})(1-e^{-2y}) & \text{при } x\ge 0, y\ge 0;\\ 0 & \text{при } x<0 \text{ или } y<0.\end{cases}$$

Найти двумерную плотность вероятности системы (X, Y).

3. Элементы математической статистики

3.1. Статистическое распределение выборки. Эмпирическая функция распределения. Полигон и гистограмма

Выборочной совокупностью (или выборкой) называется совокупность случайно отобранных объектов.

Генеральной совокупностью называется совокупность объектов, из которых производится выборка.

Объемом совокупности (выборочной или генеральной) называется число объектов этой совокупности.

Пусть для изучения количественного признака X из генеральной совокупности извлечена выборка, причем x_1 наблюдалось n_1 раз, x_2 – n_2 раз,… x_k – n_k раз и $\sum_{i=1}^{k} n_i = n$ – объем выборки. Наблюдаемые значения x_i называют **вариантами**, а последовательность вариант, записанных в возрастающем порядке – **вариационным рядом**. Числа наблюдений называют *частотами*, а их отношения к объему выборки $n_i/n=w_i$ – *относительными частотами.*

Статистическим распределением выборки называют перечень вариант и соответствующих им частот или относительных частот. Статистическое распределение можно задать также в виде последовательности интервалов и соответствующих им частот (в качестве частоты, соответствующей интервалу, принимают сумму частот вариант, попавших в этот интервал).

Эмпирической функцией распределения называют функцию $F^*(x)$, определяющую для каждого значения x относительную частоту события $X<x$:

$$F^*(x)= n_x/n,$$

где n_x – число вариант, меньших x; n – объем выборки.

Эмпирическая функция обладает следующими **свойствами**.

1^0. Значения эмпирической функции принадлежат отрезку [0,1].

2^0. $F^*(x)$ – неубывающая функция.

3^0. Если x_1 – наименьшая варианта, а x_k – наибольшая, то $F^*(x)=0$ при $x\le x_1$, $F^*(x)=1$ при $x>x_k$.

Полигоном частот называют ломанную, отрезки которой соединяют точки (x_1, n_1), (x_1, n_2),..., (x_k, n_k), *где* x_i - варианты выборки, n_i – соответствующие им частоты.

Полигоном относительных частот называют ломаную, отрезки которой соединяют точки (x_1, w_1), (x_2, w_2),...,(x_k, w_k), *где* x_i - варианты выборки, w_i – соответствующие им относительные частоты.

В случае непрерывного признака весь интервал, в котором заключены все наблюдаемые значения признака, разбивают на несколько частичных интервалов длиной h и находят для каждого частичного интервала n_i – сумму частот вариант, попавших в i–й интервал.

Гистограммой частот называют ступенчатую фигуру, состоящую из прямоугольников, основаниями которых служат частичные интервалы длиною h, а высоты равны отношению n_i/h (плотность частоты).

Гистограммой относительных частот называют ступенчатую фигуру, состоящую из прямоугольников, основаниями которых служат частичные интервалы длиною h, а высоты равны отношению w_i/h (плотность относительной частоты).

Образцы решения задач

Задача 1. Задано распределение частот выборки объема n=20. Написать распределение относительных частот.

x_i	2	6	12
n_i	3	10	7

Решение. Найдем относительные частоты, для чего разделим частоты на объем выборки: W_1=3/20=0,15; W_2=10/20=0,50;
W_3=7/20=0,35.Тогда

x_i	2	6	12
W_i	0,15	0,50	0,35

Контроль: 0,15+0,50+0,35=1.

Задача 2. Построить эмпирическую функцию по данному распределению выборки:

x_i	2	6	10
n_i	12	18	30

Решение. Найдем объем выборки 12+18+30=60.

Наименьшая варианта равна 2, следовательно,

$$F^*(x)=0 \text{ при } x\leq 2.$$

Значение x<6, а именно x_1=2, наблюдалось 12 раз, следовательно,

$F^*(x)=12/60=0{,}2$ при $2< x \le 6$.

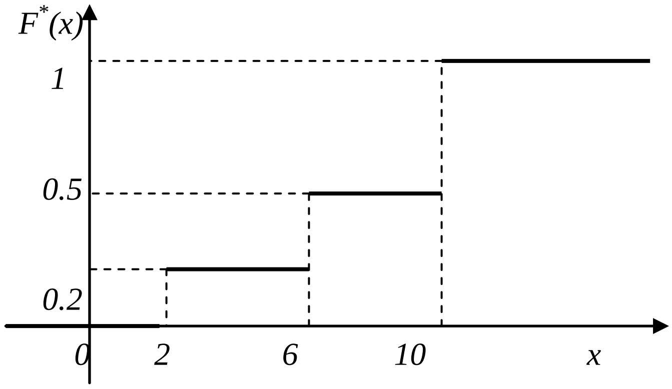
Значение $x < 10$, а именно $x_1=2$; $x_2=6$, наблюдались 12+18=30 раз, следовательно, $F^*(x)=30/60=0{,}5$ при $6< x\le 10$.

Так как $x=10$ наибольшая варианта, то $F^*(x) = 1$ при x>10.

Искомая эмпирическая функция

$$F^* = \begin{cases} 0 & \text{при } x \le 2, \\ 0{,}2 & \text{при } 2 < x \le 6, \\ 0{,}5 & \text{при } 6 < x \le 10, \\ 1 & \text{при } x > 10. \end{cases}$$

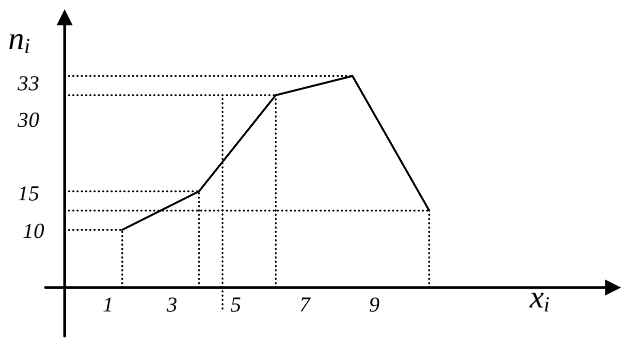
Построим график эмпирической функции распределения.



Задача 3. Построить полигон частот и относительных частот распределения.

x_i	1	3	5	7	9
n_i	10	15	30	33	12

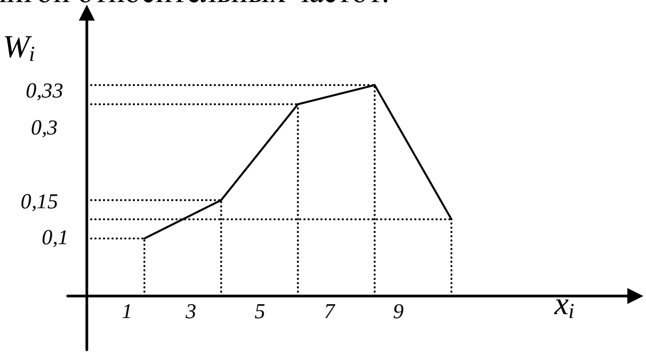
Решение. Для построения полигона частот на оси абсцисс отложим варианты x_i, а на оси ординат – соответствующие частоты n_i. Точки (x_i, n_i) соединим отрезками прямых.



Для построения полигона относительных частот предварительно найдем распределение относительных частот, для чего разделим частоты на объем выборки n=100.

x_i	*1*	*3*	*5*	*7*	*9*
W_i	*0,1*	*0,15*	*0,3*	*0,33*	*0,12*

Построим полигон относительных частот.



Задачи для решения

1. Записать выборку 5, 3, 7, 10, 5, 2, 10, 7, 2, 7, 7, 4, 2, 4 в виде вариационного ряда.

2. Выборка задана в виде распределения частот:

x_i	2	5	7
n_i	1	3	6

Найти распределение относительных частот.

3. Найти эмпирическую функцию по данному распределению выборки:

x_i	1	4	6
n_i	10	15	25

4. Построить полигон частот по данному распределению выборки:

x_i	1	4	5	7
n_i	20	10	14	6

5. Построить полигон относительных частот по данному распределению выборки:

x_i	2	4	5	7	10
n_i	15	20	10	10	45

6. Построить гистограмму частот по данному распределению выборки объёма $n=100$:

Номер интервала i	Частичный интервал x_i-x_{i+1}	Сумма частот вариант интервала n_i	Плотность частоты n_i/h
1	1-5	10	
2	5-9	20	
3	9-13	50	
4	13-17	12	
5	17-21	8	

7. Построить гистограмму относительных частот по данному распределению выборки:

Номер интер-вала i	Частич-ный интер-вал x_i-x_{i+1}	Сумма частот вариант интер-вала n_i	Сумма относи-тель-ных частот интер-вала w_i	Плотность от-носитель-ной частоты w_i/h
1	0-2	20		
2	2-4	30		
3	4-6	50		

8*. Записать выборку -1, 0, 3, 5, -1, 0, -3, -3 в виде вариационного ряда.

9*. Выборка задана в виде распределения частот:

x_i	4	7	8	12
n_i	5	2	3	10

Найти распределение относительных частот.

10*. Найти эмпирическую функцию по данному распределению выборки:

а)

x_i	2	5	7	8
n_i	1	3	2	4

б)

x_i	4	7	8
n_i	5	2	3

3.2. Статистические оценки параметров распределения

Статистической оценкой θ* неизвестного параметра θ теоретического распределения называют функцию от наблюдаемых случайных величин.

Точечной называют оценку, которая определяется одним числом.

Несмещенной называют точечную оценку, математическое ожидание которой равно оцениваемому параметру при любом объеме выборки.

Смещенной называют точечную оценку, математическое ожидание которой не равно оцениваемому параметру.

Эффективной называют статистическую оценку, которая (при заданном объеме выборки n) имеет наименьшую возможную дисперсию.

Состоятельной называют статистическую оценку, которая при $n \to \infty$ стремится по вероятности к оцениваемому параметру.

Генеральной средней $\overline{x_{\text{г}}}$ называют среднее арифметическое значений признака генеральной совокупности:

$$\overline{x_{\text{г}}} = \left(\sum_{i=1}^{k} x_i N_i \right) / N,$$

где x_i – значения признака, N_i – соответствующие им частоты, $N = \sum_{i=1}^{k} N_i$ –объем генеральной совокупности.

Выборочной средней $\overline{x_в}$ называют среднее арифметическое значение признака выборочной совокупности:

$$\overline{x_в} = \left(\sum_{i=1}^{k} x_i n_i \right) / n,$$

где x_i – варианта выборки, n_i – частота варианты x_i, $n = \sum_{i=1}^{k} n_i$ – объем выборки.

Выборочная средняя является несмещенной оценкой генеральной средней.

<u>**Замечание 1**</u>**.** Если первоначальные варианты x_i – большие числа, то для упрощения вычисления выборочной средней целесообразно вычесть из каждой варианты одно и тоже число C, т.е. перейти к условным вариантам $u_i = x_i – C$ (в качестве C выгодно принять число, близкое к выборочной средней, поскольку выборочная средняя неизвестна, число C выбирают «на глаз»). Тогда

$$\overline{x}_в = c + \overline{x_u} = c + \left(\sum_{i=1}^{k} n_i u_i \right) / n.$$

Генеральной дисперсией $D_г$ называют среднее арифметическое квадратов отклонений значений признака генеральной совокупности от их среднего значения $\overline{x_г}$:

$$D_г = \left(\sum_{i=1}^{k} \left(x_i - \overline{x_г} \right)^2 \right) / N.$$

Генеральным средним квадратическим отклонением (стандартом) называют квадратный корень из генеральной дисперсии:

$$\sigma_г = \sqrt{D_г} .$$

Выборочной дисперсией $D_в$ называют среднее арифметическое квадратов отклонений наблюдаемых значений признака от их среднего значения $\overline{x_в}$:

$$D_в = \left(\sum_{i=1}^{k} \left(x_i - \overline{x_в} \right)^2 \right) / n.$$

При вычислении дисперсии удобно пользоваться формулой:

$$D_{\text{в}} = \overline{x^2} - \left(\overline{x}\right)^2 = \frac{\sum n_i x_i^{\ 2}}{n} - \left(\frac{\sum n_i x_i}{n}\right)^2.$$

Выборочным средним квадратическим отклонением (стандартом) называют квадратный корень из выборочной дисперсии:

$$\sigma_{\text{в}} = \sqrt{D_{\text{в}}}.$$

<u>**Замечание 2**</u>**.** Если первоначальные варианты x_i – большие числа, то при нахождении выборочной дисперсии целесообразно вычесть из всех вариант одно и то же число C, равное выборочной средней или близкое к ней, т.е. перейти к условным вариантам $u_i = x_i – C$. Тогда

$$D_{\text{в}}(X)=D_{\text{в}}(U).$$

<u>**Замечание 3**</u>**.** Если первоначальные варианты являются десятичными дробями с k десятичными знаками после запятой, то, чтобы избежать действий с дробями, умножают первоначальные варианты на постоянное число $C = 10^k$, т.е переходят к условным вариантам $u_i = C\,x_i$. Тогда

$$D_{\text{в}}(X)=D_{\text{в}}(U)/C^2.$$

Выборочная дисперсия является смещенной оценкой генеральной дисперсии, т.к.

$$M\left(D_{\text{в}}\right) = \frac{n-1}{n} D_{\text{г}}.$$

Несмещенной оценкой генеральной дисперсии является **исправленная выборочная дисперсия:**

$$S^2 = \frac{n}{n-1} \cdot D_{\text{в}}.$$

Исправленным средним квадратическим отклонением называется корень квадратный из исправленной дисперсии:

$$S = \sqrt{S^2}.$$

Образцы решения задач

Задача 1. Выборочная совокупность задана таблицей распределения:

x_i	1	2	3	4
n_i	20	15	10	5

Найти: а) выборочную среднюю; б) выборочную дисперсию; в) выборочное среднее квадратичное отклонение.

Решение. а) Найдем выборочную среднюю по формуле

$$\bar{x}_{\text{в}} = \frac{\sum_{i=1}^{k} n_i x_i}{n}, \text{ где } n = \sum_{i=1}^{k} n_i; \ \bar{x}_{\text{в}} = \frac{20 \cdot 1 + 15 \cdot 2 + 10 \cdot 3 + 5 \cdot 4}{20 + 15 + 10 + 5} = \frac{100}{50} = 2.$$

б) Дисперсию можно искать двумя способами.

Первый способ. Будем использовать формулу

$$D_B = \frac{\sum_{i=1}^{n} \left(x_i - \bar{x}_B\right)^2 n_i}{n},$$

тогда $D_B = \dfrac{20(1-2)^2 + 15(2-2)^2 + 10(3-2)^2 + 5(4-2)^2}{50} = \dfrac{50}{50} = 1.$

Второй способ. Воспользуемся формулой

$$D_B = \overline{x^2} - \left[\bar{x}\right]^2, \quad \text{где} \quad \bar{x} = \frac{\sum n_i x_i}{n}, \ \overline{x^2} = \frac{\sum n_i x_i^{\ 2}}{n};$$

Тогда

$$\bar{x} = \frac{20 \cdot 1 + 15 \cdot 2 + 10 \cdot 3 + 5 \cdot 4}{20 + 15 + 10 + 5} = 2, \quad \overline{x^2} = \frac{20 \cdot 1^2 + 15 \cdot 2^2 + 10 \cdot 3^2 + 5 \cdot 4^2}{20 + 15 + 10 + 5} = 5.$$

$$D_B = \overline{x^2} - \left[\bar{x}\right]^2 = 5 - 2^2 = 1.$$

в) Среднее квадратичное отклонение $\sigma_B = \sqrt{D_B} = 1.$

Задача 2. Найти исправленную выборочную дисперсию по данному распределению выборки объёма $n = 20$:

x_i	0,1	0,5	0,7	0,9
n_i	6	12	1	1

Решение. Перейдём к условным вариантам $u_i = 10\, x_i$.

Получим распределение*:*

u_i	1	5	7	9
n_i	6	12	1	1

Найдём исправленную выборочную дисперсию условных вариантов

$$S_u^2 = \frac{\sum n_i u_i^2 - \left[\sum n_i u_i\right]^2 / n}{n-1} = \frac{439 - 82^2/20}{20-1} \approx 5{,}41.$$

Тогда $S_x^2 = S_u^2 / 10^2 = 5.41/100 = 0.0541.$

Задачи для решения

1. Из генеральной совокупности извлечена выборка объёма $n=50$:

варианта x_i	2	5	7	10
частота n_i	16	12	8	14

Найти несмещённую оценку генеральной средней.

2. Найти выборочную среднюю по данному распределению выборки объёма $n=10$:

x_i	1250	1270	1280
n_i	2	5	3

3. По выборке объёма n=41 найдена смещённая оценка $D_в=3$ генеральной дисперсии. Найти несмещённую оценку дисперсии генеральной совокупности.

4. В итоге пяти измерений длины стержня одним прибором получены следующие результаты (в *мм*): 92, 94, 103, 105, 106. Найти: а) выборочную среднюю длину стержня; б) выборочную и исправленную дисперсию ошибок прибора.

5. Найти выборочную дисперсию по данному распределению выборки объёма $n=10$:

x_i	186	192	194
n_i	2	5	3

6. Найти выборочную дисперсию по данному распределению выборки объёма $n=50$:

x_i	0,1	0,5	0,6	0,8
n_i	5	15	20	10

7. Найти исправленную выборочную дисперсию по данному распределению выборки $n=10$:

x_i	102	104	108
n_i	2	3	5

8. Найти исправленную выборочную дисперсию по данному распределению выборки объёма $n=10$:

x_i	0,01	0,05	0,09
n_i	2	3	5

9. На телефонной станции производились наблюдения за числом неправильных соединений в минуту. Наблюдения в течение часа дали следующие результаты:

3	1	3	4	2	1	1	3	2	7	2	0
2	4	0	3	0	2	0	1	3	3	1	2
2	0	2	1	4	3	4	2	0	2	3	1
3	1	4	2	2	1	2	5	1	1	0	1
1	2	1	0	3	4	1	2	2	1	1	5

Найти среднее и дисперсию распределения.

10.* Из генеральной совокупности извлечена выборка объёма n=60:

варианта x_i	1	8	6	26
частота n_i	8	40	10	2

Найти несмещённую оценку генеральной средней.

3.3. Доверительный интервал для оценки математического ожидания нормального распределения при известном σ

Интервальной называют оценку, которая определяется двумя числами – концами интервала.

Надёжностью (доверительной вероятностью) оценки Θ по Θ^* называют вероятность γ, с которой осуществляется неравенство $|\Theta - \Theta^*| < \delta$. Положительное число δ характеризует **точность оценки.**

Доверительным называют интервал, который с заданной надёжностью γ покрывает неизвестный параметр.

Интервальной оценкой (с надёжностью γ) математического ожидания a нормально распределённого количественного признака X по выборочной средней $\overline{x_B}$ при известном среднем квадратичном отклонении δ генеральной совокупности служит доверительный интервал

$$\overline{x_B} - \frac{t\sigma}{\sqrt{n}} < a < \overline{x_B} + \frac{t\sigma}{\sqrt{n}},$$

где $t\sigma/\sqrt{n} = \delta$ – точность оценки, n– объём выборки, t– значение функции Лапласа $\Phi(t)$, при котором $\Phi(t)= \gamma/2$.

<u>**Замечание.**</u> Если требуется оценить математическое ожидание с наперёд заданной точностью δ и надёжность γ, то минимальный объём выборки, который обеспечит эту точность, находят по формуле

$$n= t^2\sigma^2/\delta^2$$

(следствие равенства $\delta = t\sigma/\sqrt{n}$).

Задачи для решения

1. Найти доверительный интервал для оценки с надёжностью γ =0,95 неизвестного математического ожидания a, нормально распределённого признака X генеральной совокупности, если среднее квадратическое отклонение $\sigma=5$, выборочная средняя $\overline{x}_{\text{в}}=14$ и объём выборки $n=25$.

2. Найти минимальный объём выборки при котором с надёжностью 0,975 точность оценки математического ожидания a генеральной совокупности по выборочной средней равна $\delta=0{,}3$; если известно среднее квадратическое отклонение $\sigma=1{,}2$ нормально распределённой генеральной совокупности.

3. Одним и тем же прибором со средним квадратическим отклонением случайных ошибок измерений $\sigma=40$ *м* произведено пять равноточных измерений от орудия до цели. Найти доверительный интервал для оценки истинного расстояния a до цели с надёжностью $\gamma=0{,}95$; зная среднее арифметическое результатов измерений $\overline{x}_{\text{в}}=2000$ *м*. Предполагается, что результаты измерений распределены нормально.

4.* Найти доверительный интервал для оценки с надёжностью $\gamma=0{,}99$ неизвестного математического ожидания a нормально распределённого признака X генеральной совокупности, если известны генеральное среднее квадратическое отклонение $\sigma=4$, выборочная средняя $\overline{x}_{\text{в}}=10{,}2$; объём выборки $n=16$.

5.* Найти минимальный объём выборки, при котором с надёжностью 0,925 точность оценки математического ожидания нормально распределённой генеральной совокупности по выборочной средней равна 0,2; если известно среднее квадратическое отклонение генеральной совокупности $\sigma=15$.

6.* Выборка из большой партии электроламп содержит 100 ламп. Средняя продолжительность горения лампы выборки оказалась равной 1000 часов. Найти с надёжностью 0,95 доверительный интервал для средней продолжительности a горения лампы всей партии, если известно, что среднее квадратическое отклонение продолжительности горения лампы $\sigma=40$ часов. Предполагается, что продолжительность горения лампы распределена нормально.

3.4. Статистическая проверка статистических гипотез

Статистической называют гипотезу о виде неизвестного распределения или о параметрах известных распределений.

Нулевой называют выдвинутую гипотезу H_0.

Конкурирующей (альтернативной) называют гипотезу H_1, которая противоречит нулевой.

Различают гипотезы, которые содержат одно и более одного предположений.

Простой называют гипотезу, содержащую только одно предположение.

Сложной называют гипотезу, которая состоит из конечного или бесконечного числа простых гипотез.

В итоге статистической проверки гипотезы могут быть допущены ошибки двух родов.

Ошибка первого рода состоит в том, что будет отвергнута правильная нулевая гипотеза.

Вероятность ошибки первого рода называют **уровнем значимости (уровнем существенности)** и обозначают через α.

Ошибка второго рода состоит в том, что будет принята неправильная нулевая гипотеза. Вероятность ошибки второго рода обозначаю через β.

Статистическим критерием (или просто критерием) называют случайную величину (t, F, χ^2) которая служит для проверки гипотезы.

Наблюдаемым (эмпирическим) значением ($t_{набл.}$, $F_{набл.}$, $\chi^2_{набл.}$) называют то значение критерия, которое вычислено по выборкам.

Критической областью называют совокупность значений критерия, при которых нулевую гипотезу отвергают.

Областью принятия гипотезы (областью допустимых значений) называют совокупность значений критерия, при которых нулевую гипотезу принимают.

Основной принцип проверки статистических гипотез: если наблюдаемое значение критерия принадлежит критической области, то нулевую гипотезу отвергают; если наблюдаемое значение критерия принадлежит области принятия гипотезы, то гипотезу принимают.

Критерий χ^2 («хи-квадрат») К. Пирсона позволяет установить степень соответствия эмпирически наблюдаемых и теоретически ожидаемых данных и определить степень соответствия двух вариационных рядов.

Наиболее общая формула критерия χ^2 имеет вид

$$\chi^2 = \sum \frac{(Э - T)^2}{T}, \tag{1}$$

где $Э$- эмпирические данные, фактически наблюдаемая величина; T - теоретические данные, математическое ожидание события.

<u>**Замечание 1.**</u> Из формулы видно, что при уменьшении расхождения между эмпирическими и теоретическими данными значение χ^2 уменьшается и обращается в нуль при полном их совпадении.

Оценка достоверности различия между сравниваемыми данными производится по общему правилу оценки нулевых гипотез с помощью специальной таблицы (приложение 4) при выбранном уровне значимости: если $\chi^2_{набл.} > \chi^2_{кр.}$, различие считается существенным и нуль – гипотеза отбрасывается.

Число степеней свободы в общем случае вычисляется по формуле $k=s-1-r$, где s - число групп (частичных интервалов) выборки; r - число параметров предполагаемого распределения, которые оценены по данным выборки.

В частности, если предполагаемое распределение - нормальное, то оценивают два параметра (математическое ожидание и среднее квадратическое отклонение), поэтому $r=2$ и число степеней свободы $k=s-1-r=s-1-2=s-3$. Если же предполагают, что генеральная совокупность распределена по показательному закону, то оценивают один параметр λ, поэтому $r=1$ и $k=s-2$.

Пусть эмпирическое распределение задано в виде последовательности равноотстоящих вариант и соответствующих им частот:

x_i	x_1	X_2	…	x_s
n_i	n_1	n_2	…	n_s

Сформируем правило проверки нулевой гипотезы.

Правило. Для того, чтобы при заданном уровне значимости α проверить гипотезу о нормальном распределении генеральной совокупности, надо:

1. Вычислить непосредственно (при малом числе наблюдений) или упрощенным методом (при большом числе наблюдений) выборочную среднюю $\overline{x_{в}}$ и выборочное среднее квадратическое отклонение $\sigma_в$.

2. Вычислить теоретические частоты

$$n_i' = \frac{nh}{\sigma_в} \cdot \varphi(u_i),$$

где n – объем выборки (сумма всех частот), h – шаг (разность между двумя соседними вариантами),

$$u_i = \frac{x_i - \overline{x_в}}{\sigma_в}, \quad \varphi(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-u^2/2}.$$

3. Сравнить эмпирические и теоретические частоты с помощью **критерия Пирсона**. Для этого:

а) составляют расчетную таблицу (см. табл. 3.2), по которой находят наблюдаемое значение критерия

$$\chi^2_{\text{набл}} = \sum \frac{\left(n_i - n_i'\right)^2}{n_i'}; \qquad (2)$$

б) по таблице критических точек распределения χ^2, по заданному уровню значимости α и числу степеней свободы k=s–3 (s – число групп выборки) находят критическую точку $\chi^2_{\text{кр}}(\alpha;k)$ критической области.

Если $\chi^2_{\text{набл.}}<\chi^2_{\text{кр.}}$ – нет оснований отвергнуть гипотезу о нормальном распределении генеральной совокупности. Другими словами, эмпирические и теоретические частоты различаются незначимо (случайно). Если $\chi^2_{\text{набл.}} > \chi^2_{\text{кр.}}$ – гипотезу отвергают. Другими словами, эмпирические и теоретические частоты различаются значимо.

Замечание 2. Малочисленные частоты ($n_i<5$) следует объединить; в этом случае и соответствующие им теоретические частоты также надо сложить. Если производилось объединение частот, то при определении числа степеней свободы по формуле $k=s–3$ следует в качестве s принять число групп выборки, оставшихся после объединения частот.

Замечание 3. Для контроля вычислений формулу (2) преобразуют к виду

$$\chi^2_{\text{набл}} = \left(\sum n_i^2 / n_i'\right) - n.$$

Образцы решения задач

Задача 1. При многогибридном скрещивании томатов с желтым и красным плодом теоретически (по закону Менделя) ожидается соотношение 3:1. В действительности из 400 плодов получено 310 красных и 90 желтых (вместо ожидаемых 300:100). Оцените, имеется ли в этом опыте существенное отклонение от закона Менделя?

Решение. Используя формулу (1), получаем

$$\chi^2_{\text{набл}} = \frac{(310-300)^2}{300} + \frac{(90-100)^2}{100} = 1{,}33.$$

При k=2-1=1 теоретическое значение $\chi^2_{кр}$(0,05;5)=3,841 (приложение 4), откуда $\chi^2_{набл.}<\chi^2_{кр}$, отклонение не существенно, т.е. полученное соотношение 310:90 не противоречит закону Менделя.

Задача 2. Используя критерий Пирсона, при уровне значимости 0,05 проверить, согласуется ли гипотеза о нормальном распределении генеральной совокупности X с эмпирическим распределением выборки объема n = 200:

x_i	5	7	9	11	13	15	17	19	21
n_i	15	26	25	30	26	21	24	20	13

Решение.

1. Найдем выборочную среднюю $\overline{x_{\text{в}}}$ =12,63 и выборочное среднее квадратическое отклонение $\sigma_{\text{в}}$=4,695.

2. Вычислим теоретические частоты, учитывая, что *n=200, h=2,* $\sigma_{в}$*=4,695*, по формуле

$$n_i' = \frac{nh}{\sigma_{\text{в}}} \cdot \varphi(u_i) = \frac{200 \cdot 2}{4{,}695} \cdot \varphi(u_i) = 85{,}2 \cdot \varphi(u_i).$$

Составим расчетную табл. 3.1 (значения функции φ (u_i) помещены в приложении 1).

3. Сравним эмпирические и теоретические частоты.

а) Составим расчетную табл. 3.2 из которой найдем наблюдаемое значение критерия

$$\chi^2_{\text{набл}} = \sum (n_i - n_i')^2 / n_i'.$$

Таблица 3.1.

i	x_i	$u_i = \dfrac{x_i - \overline{x_{\text{в}}}}{\sigma_{\text{в}}}$	$\varphi(u_i)$	$n_i' = 85{,}2\ \varphi(u_i)$
1	5	–1,62	0,1074	9,1
2	7	–1,20	0,1942	16,5
3	9	–0,77	0,2966	25,3
4	11	–0,35	0,3752	32,0
5	13	0,08	0,3977	33,9
6	15	0,51	0,3503	29,8
7	17	0,93	0,2589	22,0
8	19	1,36	0,1582	13,5
9	21	1,78	0,0818	7,0

Таблица 3.2.

i	n_i	n'_i	$n_i - n'_i$	$(n_i - n'_i)^2$	$(n_i - n'_i)^2/n'_i$
1	15	9,1	5,9	34,81	3,8
2	26	16,5	9,5	90,25	5,5
3	25	25,3	–0,3	0,09	0,0
4	30	32,0	–2,0	4,00	0,1
5	26	33,9	–7,9	62,41	1,8
6	21	29,8	–8,8	77,44	2,6
7	24	22,0	2,0	4,00	0,2
8	20	13,5	6,5	42,25	3,1
9	13	7,0	6,0	36,00	5,1
Σ	200				$\chi^2_{набл} = 22,2$

Из табл. 3.2 находим $\chi^2_{набл} = 22,2$.

б) По таблице критических точек распределения χ^2 (см. приложение 4), по уровню значимости α=0,05 и числу степеней свободы
$k=s–3=9–3=6$ находим критическую точку

$$\chi^2_{кр}\,(0,05;\,6)=12,6.$$

Так как $\chi^2_{набл}>\chi^2_{кр}$ – гипотезу о нормальном распределении генеральной совокупности отвергаем. Другими словами, эмпирические частоты различаются значимо.

Задача 3. Используя критерий Пирсона, при уровне значимости 0,01 установить, случайно или значимо расхождение между эмпирическими частотами n_i и теоретическими частотами n_i'

n_i	8	16	40	72	36	18	10
n'_i	6	18	36	76	39	18	7

Решение. Найдем наблюдаемое значение критерия Пирсона: $\chi^2_{набл}=\Sigma(n_i–n'_i)^2/n'_i$. Составим расчетную табл. 3.3.

Таблица 3.3

i	n_i	n'_i	$n_i - n'_i$	$(n_i - n'_i)^2$	$(n_i - n'_i)^2/n'_i$
1	8	6	2	4	0,667
2	16	18	–2	4	0,222
3	40	36	4	16	0,444
4	72	76	–4	16	0,211
5	36	39	–3	9	0,231
6	18	18	–	–	–
7	10	7	3	9	1,286
Σ	n=200				$\chi^2_{набл}$ = 3,061

Из таблицы 3.3 наблюдаемое значение критерия: $\chi^2_{набл}$=3,061. По таблице критических точек распределения χ^2 (см. приложение 4), по уровню значимости 0,01 и числу степеней свободы $k=s–3=7–3=4$ находим критическую точку $\chi^2_{кр}$(0,01; 4)=13,3.

Так как $\chi^2_{набл}<\chi^2_{кр}$, то нет оснований отвергнуть гипотезу о нормальном распределении генеральной совокупности. Другими словами, расхождение между эмпирическими и теоретическими частотами незначимо (случайно).

Задача 4. При уровне значимости 0,05 проверить гипотезу о нормальном распределении генеральной совокупности, если известны эмпирические и теоретические частоты: эмп. частоты............. 6 13 38 74 106 85 30 14

теорет. частоты......... 3 14 42 82 99 76 37 13

Решение. Вычислим $\chi^2_{набл}$, для чего составим расчетную таблицу 3.4.

Таблица 3.4

1	2	3	4	5	6	7	8
i	n_i	n'_i	n_i- n'_i	$(n_i$- $n'_i)^2$	$(n_i$- $n'_i)^2/ n'_i$	n^2_i	n^2_i / n'_1
1	6	3	3	9	3	36	12
2	13	14	–1	1	0,07	169	12,07
3	38	42	–4	16	0,38	1444	34,38
4	74	82	–8	64	0,78	5476	66,78
5	106	99	7	49	0,49	11236	113,49
6	85	76	9	81	1,07	7225	95,07
7	30	37	–7	49	1,32	900	24,32
8	14	13	1	1	0,08	196	15,08
∑	366	366			$\chi^2_{набл}$=7,19		373,19

Контроль: $\chi^2_{набл}$=7,19:

$$[\sum n^2_i / n'_i] - n = 373{,}19 - 366 = 7{,}19.$$

Вычисления произведены правильно.

Найдём число степеней свободы, учитывая, что число групп выборки (число различных вариант) $s=8$; $k=8-3=5$. По таблице критических точек распределения χ^2 (см. приложение 4), по уровню значимости $\alpha=0{,}05$ и числу степеней свободы $k=5$ находим $\chi^2_{кр}(0{,}05;5)=11{,}1$.

Так как $\chi^2_{набл}<\chi^2_{кр}$ – нет оснований отвергнуть нулевую гипотезу. Другими словами, расхождение эмпирических и теоретических частот незначимое. Следовательно, данные наблюдений согласуются с гипотезой о нормальном распределении генеральной совокупности.

Задачи для решения

1. Используя критерий Пирсона, при уровне значимости 0,05 проверить, согласуется ли гипотеза о нормальном распределении генеральной совокупности X с эмпирическим распределением выборки объема $n=200$:

x_i	0,3	0,5	0,7	0,9	1,1	1,3	1,5	1,7	1,9	2,1	2,3
n_i	6	9	26	25	30	26	21	24	20	8	5

2. Используя критерий Пирсона, при уровне значимости 0,05 установить, случайно или значимо расхождение между эмпирическими частотами n_i и теоретическими частотами n'_i, которые вычислены, исходя из гипотезы о нормальном распределении генеральной совокупности X:

а)

n_i	5	10	20	8	7
n'_i	6	14	18	7	5

б)

n_i	6	8	13	15	20	16	10	7	5
n'_i	5	9	14	16	18	16	9	6	7

в*)

n_i	14	18	32	70	20	36	10
n'_i	10	24	34	80	18	22	12

Задания расчетно-графической работы

Вариант 1

1. Библиотечка состоит из десяти различных книг, причём пять книг стоят по 4 тыс. руб. каждая, три книги - по 1 тыс. руб. и две книги - по 3 тыс. руб. Найти вероятность того, что взятые наудачу две книги стоят 5 тыс. руб.

2. Три станка работают независимо. Вероятности того, что в течение смены 1,2 и 3 станки выйдут из строя, равны соответственно 0,05; 0,1; 0,15. Найти вероятность того, что за смену выйдет из строя только один станок.

3. В пирамиде 10 винтовок, из которых 4 снабжены оптическим прицелом. Вероятность того, что стрелок поразит мишень при выстреле из винтовки с оптическим прицелом, равна 0,95; для винтовки без оптического прицела эта вероятность равна 0,8. Стрелок поразил цель из наудачу взятой винтовки. Что вероятнее: стрелок стрелял из винтовки с оптическим прицелом или без него?

4. Требуется найти вероятность того, что в 4 независимых испытаниях событие появится не менее 2 раз, зная, что в каждом испытании вероятность появления события равна 0,1.

5. 100 станков работают независимо друг от друга, причём вероятность бесперебойной работы каждого из них в течение смены равна 0,7. Найти вероятность того, что в течение смены бесперебойно проработают: а) 80 станков; б) от 60 до 80 станков.

6. Завод отправил на базу 1000 доброкачественных изделий. Вероятность повреждения каждого изделия при транспортировке равна 0,002. Найти вероятность повреждения при транспортировке: а) трёх изделий; б) от 2 до 4 изделий.

7. Мишень разделена на зоны 1,2,3. За попадание в зону 1 дается a_1 очков, в зону 2 - a_2 очков, в зону 3 - a_3 очков. Для данного стрелка вероятности попадания в зоны 1,2,3 равны соответственно p_1, p_2 , p_3. Найти закон распределения числа X очков, получаемых стрелком при двух независимых выстрелах и функцию распределения $F(x)$, построить её график.

$$a_1 = 9,\ a_2 = 4,\ a_3 = 2,\ p_1 = 0.3,\ p_2 = 0.2,\ p_3 = 0.5$$

8. Найти: а) математическое ожидание, б) дисперсию, в) среднее квадратическое отклонение дискретной случайной величины X по закону её распределения, заданному рядом распределения (в первой строке таблицы указаны возможные значения, во второй строке - вероятности возможных значений).

x_i	12	14	18	24	27
p_i	0,4	0,3	0,1	0,1	0,1

9. Случайная величина X задана функцией распределения $F(x)$. Найти плотность распределения вероятностей, математическое ожидание, дисперсию случайной величины, вероятность попадания случайной величины в интервал (0,1/2) и построить графики $f(x)$,$F(x)$.

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0, \\ x^2, & 0 < x \le 1, \\ 1, & x > 1. \end{cases}$$

10. Заданы математическое ожидание a и среднее квадратическое отклонение σ нормально распределенной случайной величины. Найти: а) вероятность того, что X примет значение, принадлежащее интервалу (α,β);б) вероятность того, что абсолютная величина отклонения $|X - a|$ окажется меньше δ.

$$a = 10,\ \sigma = 4,\ \alpha = 8,\ \beta = 20,\ \delta = 8.$$

11. Дана плотность распределения непрерывной случайной величины X:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0, \\ 2\sin x, & 0 < x < \pi/3, \\ 0, & x > \pi/3. \end{cases}$$

Найти функцию распределения $F(x)$.

Вариант 2

1. В ящике 5 изделий первого сорта, 3 - второго и 2 - третьего сорта. Для контроля из ящика наудачу берут 6 деталей. Найти вероятность того, что среди них окажется 2 детали первого сорта и 2 детали второго сорта.
2. Устройство состоит из трех элементов, работающих независимо. Вероятности безотказной работы (за время t) первого, второго и третьего элементов соответственно равны 0,6; 0,7; 0,8. Найти вероятность того, что за время t безотказно будут работать только два элемента.
3. В двух ящиках содержится по 20 деталей, причём стандартных деталей в первом ящике 13, а во втором 18. Из второго ящика извлечена одна деталь и переложена в первый ящик. После этого из первого ящика извлечена деталь, оказавшаяся стандартной. Найти вероятность того, что из второго ящика в первый была переложена стандартная деталь.
4. Требуется найти вероятность того, что в 5 независимых испытаниях событие появится менее 3 раз, зная, что в каждом испытании вероятность появления события равна 0,2.
5. 200 станков работают независимо друг от друга, причём вероятность бесперебойной работы каждого из них в течение смены равна 0,6. Найти вероятность того, что в течение смены бесперебойно проработают: а) 130 станков; б) от 110 до 130 станков.
6. Завод отправил на базу 3000 доброкачественных изделий. Вероятность повреждения каждого изделия при транспортировке равна 0,001. Найти вероятность повреждения при транспортировке: а) двух изделий; б) от 5 до 7 изделий.
7. Мишень разделена на зоны 1,2,3. За попадание в зону 1 дается a_1 очков, в зону 2 - a_2 очков, в зону 3 - a_3 очков. Для данного стрелка вероятности попадания в зоны 1,2,3 равны соответственно p_1, p_2 , p_3. Найти закон распределения числа X очков, получаемых стрелком при двух независимых выстрелах и функцию распределения $F(x)$, построить её график.
$$a_1 = 7,\ a_2 = 4,\ a_3 = 1,\ p_1 = 0.2,\ p_2 = 0.2,\ p_3 = 0.6.$$
8. Найти: а) математическое ожидание, б) дисперсию, в) среднее квадратическое отклонение дискретной случайной величины X по закону её распределения, заданному рядом распределения (в первой строке таблицы указаны возможные значения, во второй строке - вероятности возможных значений).

x_i	10	13	17	19	22
p_i	0,2	0,1	0,2	0,4	0,1

9. Случайная величина X задана функцией распределения $F(x)$. Найти плотность распределения вероятностей, математическое ожидание, дисперсию случайной величины, вероятность попадания случайной величины в интервал (1;1,5) и построить графики $f(x)$,$F(x)$.
$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \le 1, \\ (x^2 - x)/2, & 1 < x \le 2, \\ 1, & x > 2. \end{cases}$$
10. Заданы математическое ожидание a и среднее квадратическое отклонение σ нормально распределенной случайной величины. Найти : а) вероятность того, что X примет значение, принадлежащее интервалу (α , β) ; б) вероятность того, что абсолютная величина отклонения $|X - a|$ окажется меньше δ.
$$a = 7,\ \sigma = 3,\ \alpha = 3,\ \beta = 13,\ \delta = 6.$$
11. Дана плотность распределения непрерывной случайной величины X:
$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < 1, \\ 2x - 2, & 1 < x < 2, \\ 0, & x > 2. \end{cases}$$

Найти функцию распределения $F(x)$.

Вариант 3

1. В ящике 12 белых и 8 черных шаров. Наудачу взяли 6 шаров. Какова вероятность того, что среди них 4 белых шара.
2. Для сигнализации об аварии установлены два независимо работающих сигнализатора. Вероятность того, что при аварии сигнализатор сработает, равна 0,95 для первого и 0,9 для второго сигнализатора. Найти вероятность того, что при аварии сработает хотя бы один сигнализатор.
3. В ящике 50 деталей, из них 40 высшего сорта. Наудачу извлекается одна, а затем вторая деталь, оказавшаяся высшего сорта. Определить вероятность того, что и первая деталь была высшего сорта.
4. Требуется найти вероятность того, что в 6 независимых испытаниях событие появится не более 4 раз, зная, что в каждом испытании вероятность появления события равна 0,3.
5. 100 станков работают независимо друг от друга, причём вероятность бесперебойной работы каждого из них в течение смены равна 0,6. Найти вероятность того, что в течение смены бесперебойно проработают: а) 70 станков; б) от 50 до 70 станков.
6. Завод отправил на базу 6000 доброкачественных изделий. Вероятность повреждения каждого изделия при транспортировке равна 0,0001. Найти вероятность повреждения при транспортировке: а) двух изделий; б) от 1 до 3 изделий.
7. Мишень разделена на зоны 1,2,3. За попадание в зону 1 дается a_1 очков, в зону 2 - a_2 очков, в зону 3 - a_3 очков. Для данного стрелка вероятности попадания в зоны 1,2,3 равны соответственно p_1, p_2, p_3. Найти закон распределения числа X очков, получаемых стрелком при двух независимых выстрелах и функцию распределения $F(x)$, построить её график.

$$a_1 = 6,\ a_2 = 4,\ a_3 = 1,\ p_1 = 0.3,\ p_2 = 0.2,\ p_3 = 0.5.$$

8. Найти: а) математическое ожидание, б) дисперсию, в) среднее квадратическое отклонение дискретной случайной величины X по закону её распределения, заданному рядом распределения (в первой строке таблицы указаны возможные значения, во второй строке - вероятности возможных значений).

x_i	120	135	150	180	185
p_i	0,1	0,2	0,4	0,2	0,1

9. Случайная величина X задана функцией распределения $F(x)$. Найти плотность распределения вероятностей, математическое ожидание, дисперсию случайной величины, вероятность попадания случайной величины в интервал (0,1/2) и построить графики $f(x)$,$F(x)$.

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0, \\ x^3, & 0 < x \le 1, \\ 1, & x > 1. \end{cases}$$

10. Заданы математическое ожидание a и среднее квадратическое отклонение σ нормально распределенной случайной величины. Найти : а) вероятность того, что X примет значение, принадлежащее интервалу (α , β) ; б) вероятность того, что абсолютная величина отклонения $|X - a|$ окажется меньше δ.

$$a = 8,\ \sigma = 2,\ \alpha = 4,\ \beta = 14,\ \delta = 6.$$

11. Дана плотность распределения непрерывной случайной величины X:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0, \\ 2/3\,x - 2/9\,x^2, & 0 < x \le 3, \\ 0, & x > 3. \end{cases}$$

Найти функцию распределения $F(x)$.

Вариант 4

1. Мишень разделена на зоны 1,2,3. За попадание в зону 1 дается a_1 очков, в зону 2 - a_2 очков, в зону 3 - a_3 очков. Для данного стрелка вероятности попадания в зоны 1,2,3 равны соответственно p_1, p_2 , p_3. Найти закон распределения числа X очков, получаемых стрелком при двух независимых выстрелах и функцию распределения $F(x)$, построить её график.

$$a_1 = 5,\ a_2 = 4,\ a_3 = 2,\ p_1 = 0.4,\ p_2 = 0.2,\ p_3 = 0.4.$$

2. Найти: а) математическое ожидание, б) дисперсию, в) среднее квадратическое отклонение дискретной случайной величины X по закону её распределения, заданному рядом распределения (в первой строке таблицы указаны возможные значения, во второй строке - вероятности возможных значений).

x_i	1,4	2,2	3,5	4,1	5,2
p_i	0,3	0,2	0,3	0,1	0,1

3. Случайная величина X задана функцией распределения $F(x)$. Найти плотность распределения вероятностей , математическое ожидание, дисперсию случайной величины, вероятность попадания случайной величины в интервал (0,1/4) и построить графики $f(x)$,$F(x)$.

$$F(x)=\begin{cases} 0, & x \le 0, \\ 3x^2+2x, & 0 < x \le 1/3, \\ 1, & x > 1/3. \end{cases}$$

4. Требуется найти вероятность того, что в 5 независимых испытаниях событие появится более 3 раз, зная, что в каждом испытании вероятность появления события равна 0,1.
5. 500 станков работают независимо друг от друга, причём вероятность бесперебойной работы каждого их них в течение смены равна 0,8. Найти вероятность того, что в течение смены бесперебойно проработают: а) 410 станков; б) от 390 до 410 станков.
6. Завод отправил на базу 1000 доброкачественных изделий. Вероятность повреждения каждого изделия при транспортировке равна 0,0002. Найти вероятность повреждения при транспортировке: а) двух изделий; б) от 2 до 5 изделий.
7. Мишень разделена на зоны 1,2,3. За попадание в зону 1 дается a_1 очков, в зону 2 - a_2 очков, в зону 3 - a_3 очков. Для данного стрелка вероятности попадания в зоны 1,2,3 равны соответственно p_1, p_2 , p_3. Найти закон распределения числа X очков, получаемых стрелком при двух независимых выстрелах и функцию распределения $F(x)$, построить её график.

$$a_1 = 8,\ a_2 = 5,\ a_3 = 2,\ p_1 = 0.3,\ p_2 = 0.1,\ p_3 = 0.6.$$

8. Найти: а) математическое ожидание, б) дисперсию, в) среднее квадратическое отклонение дискретной случайной величины X по закону её распределения, заданному рядом распределения (в первой строке таблицы указаны возможные значения, во второй строке - вероятности возможных значений).

x_i	35	45	55	65	75
p_i	0,1	0,1	0,1	0,4	0,3

10. Заданы математическое ожидание a и среднее квадратическое отклонение σ нормально распределенной случайной величины. Найти : а) вероятность того, что X примет значение, принадлежащее интервалу (α , β) ; б) вероятность того, что абсолютная величина отклонения $|X-a|$ окажется меньше δ.

$$a = 9,\ \sigma = 5,\ \alpha = 5,\ \beta = 15,\ \delta = 8.$$

11.Дана плотность распределения непрерывной случайной величины X:

$$f(x)=\begin{cases} 0, & x \le 2, \\ 2x-4, & 2 < x \le 3, \\ 0, & x > 3. \end{cases}$$

Найти функцию распределения $F(x)$.

Вариант 5

1. В урне 4 белых и 6 черных шаров. Из урны вынимают 2 шара. Найти вероятность того, что вынутые шары разных цветов.
2. Два стрелка производят по одному выстрелу в мишень. Вероятность попадания в мишень первым стрелком равна 0,9, а вторым - 0,8. Найти вероятность того, что мишень поразит только один стрелок
3. Два автомата производят детали, которые поступают на общий конвейер. Вероятность получения стандартной детали на первом автомате равна 0,95, а на втором 0,8. Производительность второго автомата вдвое больше, чем первого. Наудачу взятая с конвейера деталь оказалась стандартной. Найти вероятность того, что эта деталь изготовлена на первом автомате.
4. Требуется найти вероятность того, что в 6 независимых испытаниях событие появится более 4 раз, зная, что в каждом испытании вероятность появления события равна 0,5.
5. 300 станков работают независимо друг от друга, причём вероятность бесперебойной работы каждого их них в течение смены равна 0,8. Найти вероятность того, что в течение смены бесперебойно проработают: а) 250 станков; б) от 230 до 250 станков.
6. Завод отправил на базу 1000 доброкачественных изделий. Вероятность повреждения каждого изделия при транспортировке равна 0,0005. Найти вероятность повреждения при транспортировке: а) двух изделий; б) от 3 до 5 изделий.
7. Мишень разделена на зоны 1,2,3. За попадание в зону 1 дается a_1 очков, в зону 2 - a_2 очков, в зону 3 - a_3 очков. Для данного стрелка вероятности попадания в зоны 1,2,3 равны соответственно p_1, p_2 , p_3. Найти закон распределения числа X очков, получаемых стрелком при двух независимых выстрелах и функцию распределения $F(x)$, построить её график.

$$a_1 = 6,\ a_2 = 3,\ a_3 = 1,\ p_1 = 0.4,\ p_2 = 0.1,\ p_3 = 0.5.$$

8. Найти: а) математическое ожидание, б) дисперсию, в) среднее квадратическое отклонение дискретной случайной величины X по закону её распределения, заданному рядом распределения (в первой строке таблицы указаны возможные значения, во второй строке - вероятности возможных значений).

x_i	12,6	13,4	15,2	17,4	18,6
p_i	0,2	0,2	0,4	0,1	0,1

9. Случайная величина X задана функцией распределения $F(x)$. Найти плотность распределения вероятностей, математическое ожидание, дисперсию случайной величины, вероятность попадания случайной величины в интервал (2,3) и построить графики $f(x)$,$F(x)$.

$$F(x)=\begin{cases} 0, & x \le 2, \\ x/2 - 1, & 2 < x \le 4, \\ 1, & x > 4. \end{cases}$$

10. Заданы математическое ожидание a и среднее квадратическое отклонение σ нормально распределенной случайной величины. Найти : а) вероятность того, что X примет значение, принадлежащее интервалу (α ,β) ; б) вероятность того, что абсолютная величина отклонения $|X - a|$ окажется меньше δ.

$$a = 10,\ \sigma = 4,\ \alpha = 6,\ \beta = 16,\ \delta = 10.$$

11. Дана плотность распределения непрерывной случайной величины X

$$f(x)=\begin{cases} 0, & x \le 0, \\ 1/2 \sin x, & 0 < x \le \pi, \\ 0, & x > \pi. \end{cases}$$

Найти функцию распределения $F(x)$.

Вариант 6

1. В ящике 20 деталей, из которых 12 стандартных. Из ящика взяли 6 деталей. Найти вероятность того, что их них 4 детали стандартные.
2. В ящике 10 деталей, из которых 4 окрашенных. Сборщик наудачу взял 3 детали. Найти вероятность того, что среди них хотя бы одна деталь окрашена.
3. Сборщик получил три ящика деталей. В первом ящике 40 деталей, из них 20 высшего сорта, во втором 50 деталей, из них 10 высшего сорта, в третьем 30 деталей, из них 12 высшего сорта. Из наудачу взятого ящика извлечена деталь высшего сорта. Определить вероятность того, что эта деталь извлечена из 1 - го ящика.
4. Требуется найти вероятность того, что в 4 независимых испытаниях событие появится менее 3 раз, зная, что в каждом испытании вероятность появления события равна 0,6.
5. 200 станков работают независимо друг от друга, причём вероятность бесперебойной работы каждого их них в течение смены равна 0,8. Найти вероятность того, что в течение смены бесперебойно проработают: а) 180 станков; б) от 150 до 170 станков.
6. Завод отправил на базу 1000 доброкачественных изделий. Вероятность повреждения каждого изделия при транспортировке равна 0,0004. Найти вероятность повреждения при транспортировке: а) трёх изделий; б) от 1 до 3 изделий.
7. Мишень разделена на зоны 1,2,3. За попадание в зону 1 дается a_1 очков, в зону 2 - a_2 очков, в зону 3 - a_3 очков. Для данного стрелка вероятности попадания в зоны 1,2,3 равны соответственно p_1, p_2 , p_3. Найти закон распределения числа X очков, получаемых стрелком при двух независимых выстрелах и функцию распределения $F(x)$, построить её график.

$$a_1 = 8 , a_2 = 3 , a_3 = 2 , \; p_1 = 0.3, \; p_2 = 0.3 , \; p_3 = 0.4$$

8. Найти: а) математическое ожидание, б) дисперсию, в) среднее квадратическое отклонение дискретной случайной величины X по закону её распределения, заданному рядом распределения (в первой строке таблицы указаны возможные значения, во второй строке - вероятности возможных значений).

x_i	15	20	25	30	35
p_i	0,1	0,2	0,3	0,2	0,2

9. Случайная величина X задана функцией распределения $F(x)$. Найти плотность распределения вероятностей, математическое ожидание, дисперсию случайной величины, вероятность попадания случайной величины в интервал (1;2) и построить графики $f(x)$,$F(x)$.

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0, \\ x^2/9, & 0 < x \le 3, \\ 1, & x > 3. \end{cases}$$

10. Заданы математическое ожидание a и среднее квадратическое отклонение σ нормально распределенной случайной величины. Найти : а) вероятность того, что X примет значение, принадлежащее интервалу (α , β) ; б) вероятность того, что абсолютная величина отклонения $|X - a|$ окажется меньше δ.

$$a = 11, \sigma = 3, \alpha = 7, \beta = 17, \delta = 6.$$

10. Дана плотность распределения непрерывной случайной величины X

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \le -\pi/2, \\ 1/2 \cos x, & -\pi/2 < x \le \pi/2, \\ 0, & x > \pi/2. \end{cases}$$

Найти функцию распределения $F(x)$.

Вариант 7

1. В урне 3 белых и 7 черных шаров. Из урны наудачу вынимают 2 шара. Какое событие более вероятно: а) шары одного цвета; б) шары разных цветов?
2. Найдите вероятность того, что наудачу взятое двузначное число окажется кратным либо 2, либо 5.
3. Имеется три ящика деталей, причём бракованных в 1 - ом, 2 - ом и 3 - ем ящиках соответственно 25%, 20% и 15%. Наудачу взятая деталь из наудачу взятого ящика оказалась бракованной. Найти вероятность того, что эта деталь извлечена из первого ящика.
4. Требуется найти вероятность того, что в 5 независимых испытаниях событие появится более 3 раз, зная, что в каждом испытании вероятность появления события равна 0,7.
5. 400 станков работают независимо друг от друга, причём вероятность бесперебойной работы каждого их них в течение смены равна 0,6. Найти вероятность того, что в течение смены бесперебойно проработают: а) 260 станков; б) от 230 до 250 станков.
6. Завод отправил на базу 1000 доброкачественных изделий. Вероятность повреждения каждого изделия при транспортировке равна 0,0003. Найти вероятность повреждения при транспортировке: а) одного изделия; б) от 2 до 3 изделий.
7. Мишень разделена на зоны 1,2,3. За попадание в зону 1 дается a_1 очков, в зону 2 - a_2 очков, в зону 3 - a_3 очков. Для данного стрелка вероятности попадания в зоны 1,2,3 равны соответственно p_1, p_2 , p_3. Найти закон распределения числа X очков, получаемых стрелком при двух независимых выстрелах и функцию распределения $F(x)$, построить её график.

$$a_1 = 8,\ a_2 = 5,\ a_3 = 3,\ p_1 = 0.2,\ p_2 = 0.4,\ p_3 = 0.4.$$

8. Найти: а) математическое ожидание, б) дисперсию, в) среднее квадратическое отклонение дискретной случайной величины X по закону её распределения, заданному рядом распределения (в первой строке таблицы указаны возможные значения, во второй строке - вероятности возможных значений).

x_i	44	52	60	73	82
p_i	0,6	0,1	0,1	0,1	0,1

9. Случайная величина X задана функцией распределения $F(x)$. Найти плотность распределения вероятностей, математическое ожидание, дисперсию случайной величины, вероятность попадания случайной величины в интервал (1;2) и построить графики $f(x)$,$F(x)$.

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0, \\ x^2/4, & 0 < x \le 2, \\ 1, & x > 2. \end{cases}$$

10. Заданы математическое ожидание a и среднее квадратическое отклонение σ нормально распределенной случайной величины. Найти : а) вероятность того, что X примет значение, принадлежащее интервалу (α , β) ; б) вероятность того, что абсолютная величина отклонения $|X - a|$ окажется меньше δ.

$$a = 12,\ \sigma = 5,\ \alpha = 8,\ \beta = 18,\ \delta = 10.$$

11. Дана плотность распределения непрерывной случайной величины X

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0, \\ 3x^2, & 0 < x < 1, \\ 0, & x > 1. \end{cases}$$

Найти функцию распределения $F(x)$.

Вариант 8

1. В лотерее 10 билетов, из них 5 билетов выигрышных. Наудачу берётся 2 билета. Найти вероятность того, что среди них оба билета выигрышные.
2. В ящике 40 деталей, из них 10 высшего сорта. Наудачу извлечены 2 детали. Найти вероятность того, что среди них высшего сорта хотя бы одна деталь.
3. Из 100 деталей 60 первого, 30 второго и 10 третьего сорта. Вероятность брака среди деталей первого, второго и третьего сорта соответственно равна 0,01; 0,03; и 0,05. Наудачу взятая деталь оказалась не бракованной. Найти вероятность того, что взята деталь первого сорта.
4. Требуется найти вероятность того, что в 6 независимых испытаниях событие появится не менее 4 раз, зная, что в каждом испытании вероятность появления события равна 0,8.
5. 400 станков работают независимо друг от друга, причём вероятность бесперебойной работы каждого их них в течение смены равна 0,7. Найти вероятность того, что в течение смены бесперебойно проработают: а) 300 станков; б) от 270 до 290 станков.
6. Завод отправил на базу 1000 доброкачественных изделий. Вероятность повреждения каждого изделия при транспортировке равна 0,0006. Найти вероятность повреждения при транспортировке: а) четырёх изделий; б) от 3 до 4 изделий.
7. Мишень разделена на зоны 1,2,3. За попадание в зону 1 дается a_1 очков, в зону 2 - a_2 очков, в зону 3 - a_3 очков. Для данного стрелка вероятности попадания в зоны 1,2,3 равны соответственно p_1, p_2 , p_3. Найти закон распределения числа X очков, получаемых стрелком при двух независимых выстрелах и функцию распределения $F(x)$, построить её график.
$$a_1 = 9,\ a_2 = 2,\ a_3 = 1,\ p_1 = 0.1,\ p_2 = 0.5,\ p_3 = 0.4.$$
8. Найти: а) математическое ожидание, б) дисперсию, в) среднее квадратическое отклонение дискретной случайной величины X по закону её распределения, заданному рядом распределения (в первой строке таблицы указаны возможные значения, во второй строке - вероятности возможных значений).

x_i	115	135	150	175	180
p_i	0,1	0,5	0,2	0,1	0,1

9. Случайная величина X задана функцией распределения $F(x)$. Найти плотность распределения вероятностей, математическое ожидание, дисперсию случайной величины, вероятность попадания случайной величины в интервал (7,8) и построить графики $f(x)$,$F(x)$.
$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \le 6, \\ x/3 - 2, & 6 < x \le 9, \\ 1, & x > 9. \end{cases}$$
10. Заданы математическое ожидание a и среднее квадратическое отклонение σ нормально распределенной случайной величины. Найти : а) вероятность того, что X примет значение, принадлежащее интервалу (α , β) ; б) вероятность того, что абсолютная величина отклонения $|X - a|$ окажется меньше δ.
$$a = 13,\ \sigma = 3,\ \alpha = 9,\ \beta = 19,\ \delta = 4.$$
11. Дана плотность распределения непрерывной случайной величины X:
$$f(x)=\begin{cases} 0, & x \le 0, \\ 2/9\, x, & 0 < x < 3, \\ 0, & x > 3. \end{cases}$$

Найти функцию распределения $F(x)$.

Вариант 9

1. В ящике 10 деталей, среди которых 6 стандартных. Сборщик наудачу извлекает 3 детали. Найти вероятность того, что все три детали стандартные.
2. Вероятность того, что стандартная деталь находится в первом и втором ящиках, равна соответственно 0,6 и 0,8. Сборщик взял из каждого ящика по одной детали. Какова вероятность того, что из них хотя бы одна деталь стандартная.
3. Сборщик получил 100 деталей, из них 50 деталей изготовлены заводом № 1, 30 деталей - заводом № 2, 20 деталей - заводом № 3. Заводы № 1, № 2, № 3 выпускают деталей отличного качества соответственно 70%, 80%, 90%. Наудачу взятая сборщиком деталь оказалась отличного качества. Найти вероятность того, что эта деталь изготовлена заводом № 1.
4. Требуется найти вероятность того, что в 5 независимых испытаниях событие появится менее 4 раз, зная, что в каждом испытании вероятность появления события равна 0,9.
5. 400 станков работают независимо друг от друга, причём вероятность бесперебойной работы каждого их них в течение смены равна 0,9. Найти вероятность того, что в течение смены бесперебойно проработают: а) 370 станков; б) от 350 до 370 станков.
6. Завод отправил на базу 1000 доброкачественных изделий. Вероятность повреждения каждого изделия при транспортировке равна 0,0007. Найти вероятность повреждения при транспортировке: а) трёх изделий; б) от 1 до 4 изделий.
7. Мишень разделена на зоны 1,2,3. За попадание в зону 1 дается a_1 очков, в зону 2 - a_2 очков, в зону 3 - a_3 очков. Для данного стрелка вероятности попадания в зоны 1,2,3 равны соответственно p_1, p_2 , p_3. Найти закон распределения числа X очков, получаемых стрелком при двух независимых выстрелах и функцию распределения $F(x)$, построить её график.

$$a_1 = 10,\ a_2 = 4,\ a_3 = 1,\ p_1 = 0.2,\ p_2 = 0.3,\ p_3 = 0.5$$

8. Найти: а) математическое ожидание, б) дисперсию, в) среднее квадратическое отклонение дискретной случайной величины X по закону её распределения, заданному рядом распределения (в первой строке таблицы указаны возможные значения, во второй строке - вероятности возможных значений).

x_i	4,6	5,2	6,8	7,2	8,4
p_i	0,3	0,3	0,1	0,2	0,1

9. Случайная величина X задана функцией распределения $F(x)$. Найти плотность распределения вероятностей, математическое ожидание, дисперсию случайной величины, вероятность попадания случайной величины в интервал (-1/2;0) и построить графики $f(x), F(x)$.

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \le -1, \\ x^3 + 1, & -1 < x \le 0, \\ 1, & x > 0. \end{cases}$$

10. Заданы математическое ожидание a и среднее квадратическое отклонение σ нормально распределенной случайной величины. Найти : а) вероятность того, что X примет значение, принадлежащее интервалу (α , β) ; б) вероятность того, что абсолютная величина отклонения $|X - a|$ окажется меньше δ.

$$a = 14,\ \sigma = 4,\ \alpha = 10,\ \beta = 20,\ \delta = 10.$$

11. Дана плотность распределения непрерывной случайной величины X:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < -\pi/2, \\ -\sin x, & -\pi/2 < x \le 0, \\ 0, & x > 0. \end{cases}$$

Найти функцию распределения $F(x)$.

Вариант 10

1. Студент знает 40 из 50 вопросов программы. Найти вероятность того, что из двух содержащихся в экзаменационном билете вопросов студент знает оба вопроса.
2. Вероятность того, что стрелок при одном выстреле выбьет 10 очков, равна 0,3; вероятность выбить 8 или меньше очков 0,6. Найти вероятность того, что при одном выстреле стрелок выбьет не менее 9 очков.
3. По шоссе в среднем проезжает легковых машин вдвое больше, чем грузовых. Вероятность того, что легковая машина будет заправляться, равна 0,1; для грузовой машины эта вероятность равна 0,2. К бензоколонке для заправки подъехала машина. Найти вероятность того, что это легковая машина.
4. Требуется найти вероятность того, что в 5 независимых испытаниях событие появится более 3 раз, зная, что в каждом испытании вероятность появления события равна 0,1.
5. 500 станков работают независимо друг от друга, причём вероятность бесперебойной работы каждого их них в течение смены равна 0,8. Найти вероятность того, что в течение смены бесперебойно проработают: а) 410 станков; б) от 390 до 410 станков.
6. Завод отправил на базу 1000 доброкачественных изделий. Вероятность повреждения каждого изделия при транспортировке равна 0,0002. Найти вероятность повреждения при транспортировке: а) двух изделий; б) от 2 до 5 изделий.
7. Мишень разделена на зоны 1,2,3. За попадание в зону 1 дается a_1 очков, в зону 2 - a_2 очков, в зону 3 - a_3 очков. Для данного стрелка вероятности попадания в зоны 1,2,3 равны соответственно p_1, p_2 , p_3. Найти закон распределения числа X очков, получаемых стрелком при двух независимых выстрелах и функцию распределения $F(x)$, построить её график.

$$a_1 = 8,\ a_2 = 5,\ a_3 = 2,\ p_1 = 0.3,\ p_2 = 0.1,\ p_3 = 0.6.$$

8. Найти: а) математическое ожидание, б) дисперсию, в) среднее квадратическое отклонение дискретной случайной величины X по закону её распределения, заданному рядом распределения (в первой строке таблицы указаны возможные значения, во второй строке - вероятности возможных значений).

x_i	35	45	55	65	75
p_i	0,1	0,1	0,1	0,4	0,3

9. Случайная величина X задана функцией распределения $F(x)$. Найти плотность распределения вероятностей, математическое ожидание, дисперсию случайной величины, вероятность попадания случайной величины в интервал (0,1/2) и построить графики $f(x)$,$F(x)$.

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0, \\ x^4, & 0 < x \le 1, \\ 1, & x > 1. \end{cases}$$

10. Заданы математическое ожидание a и среднее квадратическое отклонение σ нормально распределенной случайной величины. Найти : а) вероятность того, что X примет значение, принадлежащее интервалу (α , β) ; б) вероятность того, что абсолютная величина отклонения $|X - a|$ окажется меньше δ.

$$a = 15,\ \sigma = 5,\ \alpha = 11,\ \beta = 21,\ \delta = 6.$$

11. Дана плотность распределения непрерывной случайной величины X:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0, \\ 1/2\, x, & 0 < x < 2, \\ 0, & x > 2. \end{cases}$$

Найти функцию распределения $F(x)$.

Список литературы

1.Кочетков, Е.С. Теория вероятностей и математическая статистика [Текст]: учебник/ Е.С. Кочетков, С.О. Смерчинская, В.В. Соколов.- 2-е изд.- М.: Форум, ИНФРА-М, 2013.- 240 с.

2. Логинов, В.А. Теория вероятностей и математическая статистика [Электронный ресурс]: лекции для студентов, обучающихся по специальности 080100.62 (Экономика)/ Логинов В.А.— Электрон. текстовые данные.— М.: Московская государственная академия водного транспорта, 2013.— 188 с.— Режим доступа: http://www.iprbookshop.ru/46854.— ЭБС «IPRbooks»

3. Седаев, А.А. Теория вероятностей и математическая статистика [Электронный ресурс]: учебное пособие/ Седаев А.А., Каверина В.К.— Электрон. текстовые данные.— Воронеж: Воронежский государственный архитектурно-строительный университет, ЭБС АСВ, 2015.— 132 с.— Режим доступа: http://www.iprbookshop.ru/55060.— ЭБС «IPRbooks»

4. Теория вероятностей и математическая статистика [Электронный ресурс]: учебное пособие/ Т.А. Гулай [и др.].— Электрон. текстовые данные.— Ставрополь: Ставропольский государственный аграрный университет, АГРУС, 2013.— 257 с.— Режим доступа: http://www.iprbookshop.ru/47360.— ЭБС «IPRbooks»

5. Теория вероятностей и математическая статистика [Электронный ресурс]: учебное пособие/ В.С. Мхитарян [и др.].— Электрон. текстовые данные.— М.: Московский финансово-промышленный университет «Синергия», 2013.— 336 с.— Режим доступа: http://www.iprbookshop.ru/17047.— ЭБС «IPRbooks», по паролю

6. Шилова, З.В. Теория вероятностей и математическая статистика [Электронный ресурс]: учебное пособие/ Шилова З.В., Шилов О.И.— Электрон. текстовые данные.— Саратов: Ай Пи Ар Букс, 2015.— 158 с.— Режим доступа: http://www.iprbookshop.ru/33863.— ЭБС «IPRbooks»

7. Вентцель, Е.С. Теория случайных процессов и ее инженерные приложения [Текст]: учеб. пособие/ Е.С. Вентцель, Л.А. Овчаров - М.: Высш.шк., 2000.- 383 с.

1. Гмуран, В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика [Текст]: учеб. пособие/ В.Е. Гмурман.- 12-е изд., перераб. и доп.- М.: Юрайт; ИД Юрайт, 2011.- 479 с.

2. Гмурман, В.Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистики [Текст]: учеб. пособие/ Гмурман, В.Е.- М.: Юрайт, 2001.- 479 с.

Содержание

ДЛЯ ПРИМЕЧАНИЙ

ДЛЯ ПРИМЕЧАНИЙ