МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего образования

**СЕВЕРО-КАВКАЗСКАЯ ГОСУДАРСТВЕННАЯ
ГУМАНИТАРНО-ТЕХНОЛОГИЧЕСКАЯ АКАДЕМИЯ**

А.А. Токова, Хубиева Д.А.-З.

Учебно-методическое пособие

по дисциплине

КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ

для обучающихся на 4 курсе по направлению подготовки

01.03.04 – «Прикладная математика»

Черкесск 2018

УДК 517.95

ББК 22.311

Т 40

Рассмотрено на заседании кафедры «Математика»
Протокол № 2 от « 21 » сентября 2018 г.

Рекомендовано к изданию редакционно-издательским советом СевКавГГТА
Протокол № 15 от «30» октября 2018 г.

Рецензенты:

д.ф.-м.н., профессор А.М. Кочкаров
к.ф.-м.н., доцент З.О. Коркмазова

Т 40 **Токова А.А., Хубиева Д.А.-З.** Учебно-методическое пособие по краевым задачам для обучающихся на 4 курсе по направлению подготовки 01.03.04 – «Прикладная математика» / Токова А.А., Хубиева Д.А.-З. – Черкесск: СевКавГГТА, 2018. – 76 с.

Учебное пособие предназначено для обучающихся по направлению подготовки 01.03.04 «Прикладная математика», содержит краткий теоретический материал по краевым задачам, который сопровождается рассмотрением большого количества примеров и задач.

УДК 517.95

ББК 22.311

ВВЕДЕНИЕ

Сегодня, как никогда ранее, нужны точные знания о факторах, существенно влияющих на процессы социально-исторические, этнические, агро-эко-системы, переноса частиц, долгосрочного прогнозирования и регулирования уровня грунтовых вод и т.д. Возрастающий поток информации в современном мире требует от специалиста любого профиля умения работать с информацией и использовать для этого современные методы и технологии. Поэтому методическое пособие составлено таким образом, чтобы, с одной стороны, рассмотреть постановки краевых задач для уравнений в частных производных, имеющих широкое применение в прикладной математике, а с другой стороны, дать обучающимся возможность использовать полученные знания для прогнозиро вания (предвидения) тех или иных явлений, оказывающих огромное влияние на жизни людей.

В настоящем учебном пособии в краткой форме представлен теоретический материал по всем темам, который сопровождается рассмотрением большого количества примеров и задач. Подробно разобран метод конечных разностей решения краевых задач, даны рекомендации по реализации данного метода (на примере задачи Дирихле) на ЭВМ. В конце каждого раздела приведены задачи для самостоятельной работы обучающихся.

В конце пособия даны 10 вариантов заданий расчетно-графической работы.

Пособие может быть использовано обучающимися для самостоятельного изучения соответствующего материала и выполнения заданий расчетно-графической работы. Оно может быть полезно также преподавателям при планировании и проведении практических занятий и проверочных работ.

Глава 1. УРАВНЕНИЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ТИПА

1.1 Постановка краевых задач для уравнений в частных производных второго порядка гиперболического типа.

Граничные и начальные условия. При математическом описании физического процесса надо прежде всего поставить задачу, т. е. сформулировать условия, достаточные для однозначного определения процесса. Дифференциальные уравнения с обыкновенными и, тем более, с частными производными имеют, вообще говоря, бесчисленное множество решений. Поэтому в том случае, когда физическая задача приводится к уравнению с частными производными, для однозначной характеристики процесса необходимо к уравнению присоединить некоторые дополнительные условия.

В задаче о поперечных колебаниях струны, закрепленной на концах $u(x,t)$ дает отклонение струны от оси x. Если концы струны $0 \le x \le l$ закреплены, то должны выполняться **граничные условия**

$$u(0,t) = 0, \quad u(l,t) = 0. \tag{1}$$

Так как процесс колебаний струны зависит от ее начальной формы и распределения скоростей, то следует задать **начальные условия**:

$$u(x,t_0) = \varphi(x), \quad u_t(x,t_0) = \psi(x). \tag{2}$$

Таким образом, дополнительные условия состоят из граничных и начальных условий, где $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ – заданные функции точки. Если концы струны движутся по заданному закону, то граничные условия (1) принимают другой вид:

$$u(0,t) = \mu_1(t), \quad u(l,t) = \mu_2(t). \tag{1'}$$

где $\mu_1(t)$ и $\mu_2(t)$ – заданные функции времени t.

Три основных типа граничных условий:

граничное условие 1-го рода $u(0,t) = \mu(t)$ – заданный режим,

граничное условие 2-го рода $u_x(0,t) = \nu(t)$ – заданная сила,

граничное условие 3-го рода $u_x(0,t) = -h\Big[u(0,t) - \Theta(t)\Big]$ – упругое закреплен

Аналогично задаются граничные условия и на втором конце $x = l$. Если функции, задаваемые в правой части ($\mu(t), \nu(t)$ или $\Theta(t)$), равны нулю, то граничные условия называются однородными. Комбинируя различные перечисленные типы граничных условий, мы получим шесть типов простейших краевых задач.

Первая краевая задача для уравнения

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} + f(x,t):$$

найти функцию $u(x,t)$, определенную в области $0 \leq x \leq l, \quad t \geq 0$, удовлетворяющую уравнению

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} + f(x,t) \text{ \textit{для} } 0 < x < l, t > 0,$$

граничным

$$u(0,t) = \mu_1(t), \quad u(l,t) = \mu_2(t), \quad (t > 0), \tag{3}$$

и начальным условиям:

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad u_t(x,0) = \psi(x), \quad (0 < x < l). \tag{4}$$

Если на обоих концах берутся граничные условия 2-го или 3-го рода, то соответствующие задачи называются второй или третьей краевыми задачами. Если граничные условия при $x = 0$ и $x = l$ имеют различные типы, то такие краевые задачи называют смешанными, не проводя более подробной их классификации.

Если нас интересует явление в течение малого промежутка времени, когда влияние границ еще несущественно, то рассматривается следующая **задача с начальными условиями** для неограниченной области:

найти решение уравнения

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} + f(x,t) \text{ \textit{для} } -\infty < x < \infty, t > 0,$$

с начальными условиями

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad u_t(x,0) = \psi(x), \quad -\infty < x < \infty. \tag{5}$$

Эту задачу часто называют **задачей Коши**.

Если же мы изучаем явление вблизи одной границы и влияние граничного режима на второй границе не имеет существенного значения на протяжении интересующего нас промежутка времени, то мы приходим к постановке задачи на полуограниченной прямой $0 \leq x < \infty$, когда помимо уравнения даны дополнительные условия:

$$u(0,t) = \mu(t),\ u(x,0) = \varphi(x),\ u_t(x,0) = \psi(x), t \geq 0,\ 0 \leq x < \infty \qquad (6)$$

Характер явления для моментов времени, достаточно удаленных от начального момента $t = 0$, вполне определяется граничными значениями, так как влияние начальных условий благодаря трению, присущему всякой реальной системе, с течением времени ослабевает. Задачи этого типа встречаются особенно часто в случаях, когда система возбуждается периодическим граничным режимом, действующим длительное время. Такие задачи **без начальных условий** (на установившийся режим) формулируются следующим образом:

найти решение изучаемого уравнения для $0 \leq x \leq l$ и $t > -\infty$ при граничных условиях

$$u(0,t) = \mu_1(t), \quad u(l,t) = \mu_2(t). \qquad (7)$$

Аналогично ставится задача без начальных условий для полуограниченной прямой.

Помимо основных краевых задач имеются также предельные задачи:

1. Задачи в бесконечной области, когда одна или обе границы находятся в бесконечности.

2. Задачи без начальных условий (на установившийся режим), когда рассматривается решение, определенное в течение бесконечного промежутка времени.

1.2 Редукция общей задачи. При решении сложной задачи естественно стремиться свести ее решение к решению более простых задач. С этой целью представим решение общей краевой задачи в виде суммы решений ряда частных краевых задач.

Пусть $u_i(x,t) \quad (i = 1, 2, ..., n)$ – функции, удовлетворяющие уравнениям

$$\frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u_i}{\partial x^2} + f^i(x,t) \qquad (8)$$

при $0 < x < l, \quad t > 0$ и дополнительным условиям

$$\begin{cases} u_i(0,t) = \mu_1^i(t), \\ u_i(l,t) = \mu_2^i(t), \\ u_i(x,0) = \varphi^i(t), \\ \frac{\partial u_i}{\partial t}(x,0) = \psi^i(x). \end{cases} \tag{9}$$

Очевидно, что имеет место суперпозиция решений, т. е. функция

$$u^{(0)}(x,t) = \sum_{i=1}^{n} u_i(x,t) \tag{10}$$

удовлетворяет аналогичному уравнению с правой частью

$$f^{(0)}(x,t) = \sum_{i=1}^{n} f^i(x,t) \tag{11}$$

и дополнительным условиям, правые части которых суть функции

$$\begin{cases} \mu_k^{(0)}(t) = \sum_{i=1}^{n} \mu_k^i(t) \quad (k = 1, 2), \\ \varphi^{(0)}(t) = \sum_{i=1}^{n} \varphi_k^i(t), \\ \psi^{(0)}(t) = \sum_{i=1}^{n} \psi_k^i(t) \end{cases} \tag{12}$$

Указанный принцип суперпозиции относится, очевидно, не только к данной задаче, но и к любому линейному уравнению с линейными дополнительными условиями. Этим свойством мы в дальнейшем неоднократно будем пользоваться. Решение общей краевой задачи

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx} + f(x,t) \\ 0 < x < l, t > 0, \\ u(0,t) = \mu_1(t), \\ u(l,t) = \mu_2(t), \\ u(x,0) = \varphi(x), \\ u_t(x,0) = \psi(x). \end{cases} \tag{13}$$

может быть представлено в виде суммы ,

$$u(x,t) = u_1(x,t) + u_2(x,t) + u_3(x,t) + u_4(x,t),$$

где u_1, u_2, u_3, u_4 – решения следующих частных краевых задач:

$$\frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u_i}{\partial x^2} \quad (i = 1, 2, 3),$$

$$(0 < x < l, t > 0),$$

$$\frac{\partial^2 u_4}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u_4}{\partial x^2} + f(x, t),$$

$$\begin{cases} u_1(0, t) = 0, \;\; u_2(0, t) = \mu_1(t), \;\; u_3(0, t) = 0, \;\; u_4(0, t) = 0, \\ u_1(l, t) = 0, \;\; u_2(l, t) = 0, \;\; u_3(l, t) = \mu_2(t), \;\; u_4(l, t) = 0, \\ u_1(x, 0) = \varphi(x), \;\; u_2(x, 0) = 0, \;\; u_3(x, 0) = 0, \;\; u_4(x, 0) = 0, \\ u_{1t}(x, 0) = \psi(x), \;\; u_{2t}(x, 0) = 0, \;\; u_{3t}(x, 0) = 0, \;\; u_{4t}(x, 0) = 0. \end{cases} \tag{14}$$

1.3 Задача Коши для уравнения колебаний струны

Постановка задачи.

Найти регулярное при $t > 0$, $\infty < x < -\infty$ решение u уравнения колебаний струны

$$u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0, \tag{1}$$

удовлетворяющее начальным условиям

$$u(x, 0) = \varphi(x), \qquad u_t(x, 0) = \psi(x), \quad \infty < x < -\infty. \tag{2}$$

Решение задачи Коши имеет вид:

$$u(x, t) = \frac{\varphi(x + at) + \varphi(x - at)}{2} + \frac{1}{2a} \int\limits_{x-at}^{x+at} \psi(\alpha) d\alpha. \tag{3}$$

Формула (3), называется формулой Даламбера.

Неоднородное уравнение.

Задача Коши для неоднородного уравнения колебаний

$$\begin{cases} \frac{1}{a^2} u_{tt} = u_{xx} + f(x, t), \\ -\infty < x < \infty, \quad t > 0, \\ u(x, 0) = \varphi(x), \\ u_t(x, 0) = \psi(x), \\ -\infty < x < \infty. \end{cases} \tag{4}$$

Решение задачи (4) представимо в виде

$$u(x,t) = \frac{\varphi(x+at)+\varphi(x-at)}{2} + \frac{1}{2a}\int\limits_{x-at}^{x+at} \psi(\xi)d\xi +$$

$$+\frac{a}{2}\int\limits_{0}^{t}\int\limits_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(\xi,\tau)d\xi d\tau. \qquad (5)$$

Пример 1.
Решить задачу
$u_{tt} = 9u_{xx} + \sin x, \quad u(x,0) = 1, \quad u_t(x,0) = 1.$

Решение: Воспользуемся формулой нахождения решения задачи Коши для неоднородного одномерного волнового уравнения.

$$u(x,t) = 1 + \frac{1}{6}\int\limits_{x-3t}^{x+3t} d\xi + \frac{1}{6}\int\limits_{0}^{t}\int\limits_{x-3(t-\tau)}^{x+3(t-\tau)} \sin\xi d\xi d\tau =$$

$$= 1 + t - \frac{1}{6}\cos x\int\limits_{0}^{t}\cos 3(t-\tau)d\tau = 1 + t - \frac{1}{18}\cos x\sin 3t.$$

Таким образом,

$$u(x,t) = 1 + t - \frac{1}{18}\cos x\sin 3t.$$

Задачи для решения.

Решить задачи:

1. $u_{tt} = u_{xx} + 6, \quad u(x,0) = x^2, \quad u_t(x,0) = 4x;$

2. $u_{tt} = 4u_{xx} + xt, \quad u(x,0) = x^2, \quad u_t(x,0) = x;$

3. $u_{tt} = a^2u_{xx} + \sin wx, \quad u(x,0) = 0, \quad u_t(x,0) = 0;$

4. $u_{tt} = u_{xx} + \sin x, \quad u(x,0) = \sin x, \quad u_t(x,0) = 0;$

5. $u_{tt} = 9u_{xx} + e^x, \quad u(x,0) = \sin x, \quad u_t(x,0) = x + \cos x.$

1.4 Метод разделения переменных решения первой краевой задачи для уравнения колебаний струны.

1. Метод разделения переменных или метод Фурье, является одним из наиболее распространенных методов решения уравнений с частными производными. Рассмотрим задачу о колебаниях струны, закрепленной на концах.

Будем искать решение уравнения

$$u_{tt} = a^2 u_{xx}, \tag{1}$$

удовлетворяющее однородным граничным условиям

$$u(0,t), \quad u(l,t) = 0 \tag{2}$$

и начальным условиям

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad u_t(x,0) = \psi(x). \tag{3}$$

Уравнение (1) линейно и однородно, поэтому сумма частных решений также является решением этого уравнения. Имея достаточно большое число частных решений можно попытаться при помощи суммирования их с некоторыми коэффициентами найти искомое решение.

Поставим основную вспомогательную задачу:

найти решение уравнения

$$u_{tt} = a^2 u_{xx},$$

не равное тождественно нулю, удовлетворяющее однородным граничным условиям

$$u(0,t) = 0, \quad u(l,t) = 0 \tag{4}$$

и представимое в виде произведения

$$u(x,t) = X(x)T(t), \tag{5}$$

где $X(x)$ – функция только переменного x, $T(t)$ – функция только переменного t.

Подставляя предполагаемую форму решения (5) в уравнение (1), получим:

$$X''T = \frac{1}{a^2}T''X$$

или, после деления на XT,

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{1}{a^2}\frac{T''(t)}{T(t)}. \tag{6}$$

Чтобы функция (5) была решением уравнения (1), равенство (6) должно удовлетворяться тождественно, т. е. для всех значений независимых переменных $0 < x < l, \;\; t > 0$. Правая часть равенства (6) является функцией только переменного t, а левая – только x. Фиксируя, например, кекоторое значение x и меняя t (или наоборот), получим, что правая и левая части равенства (6) при изменении своих аргументов сохраняют постоянное значение

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{1}{a^2}\frac{T''(t)}{T(t)} = -\lambda, \tag{7}$$

где λ – постоянная, которую для удобства последующих выкладок берем со знаком минус, ничего не предполагая при этом о ее знаке. Из соотношения (7) получаем обыкновенные дифференциальные уравнения для определения функций $X(x)$ и $T(t)$

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0, \quad X(x) \not\equiv 0, \tag{8}$$

$$T''(t) + a^2\lambda T(t) = 0, \quad T(t) \not\equiv 0. \tag{9}$$

Граничные условия (4) дают:

$$u(0,t) = X(0)T(t) = 0,$$

$$u(l,t) = X(l)T(t) = 0.$$

Отсюда следует, что функция $X(x)$ должна удовлетворять дополнительным условиям

$$X(0) = X(l) = 0, \tag{10}$$

так как иначе мы имели бы

$$T(t) \equiv 0 \quad \text{и} \quad u(x,t) \equiv 0,$$

в то время как задача состоит в нахождении нетривиального решения. Для функции $T(t)$ в основной вспомогательной задаче никаких дополнительных условий нет.

Таким образом, в связи с нахождением функции $X(x)$ мы приходим к простейшей задаче о собственных значениях:

найти те значения параметра λ, при которых существуют нетривиальные решения задачи:

$$\begin{cases} X'' + \lambda X = 0, \\ X(0) = X(l) = 0, \end{cases} \tag{11}$$

а также найти эти решения.

Такие значения параметра λ называются собственными значениями, а соответствующие им нетривиальные решения – собственными функциями задачи (11). Сформулированную таким образом задачу часто называют задачей Штурма – Лиувилля.

Рассмотрим отдельно случаи, когда параметр λ отрицателен, равен нулю или положителен.

1. При $\lambda < 0$ задача не имеет нетривиальных решений. Действительно, общее решение уравнения (8) имеет вид

$$X(x) = C_1 e^{\sqrt{-\lambda}x} + C_2 e^{-\sqrt{-\lambda}x}$$

Граничные условия дают:

$$X(0) = C_1 + C_2 = 0;$$

$$X(l) = C_1 e^{\alpha} + C_2 e^{-\alpha} = 0 \qquad (\alpha = l\sqrt{-\lambda}),$$

т. е.

$$C_1 = -C_2 \quad C_1(e^{\alpha} - e^{-\alpha}) = 0.$$

Но в рассматриваемом случае α – действительно и положительно, так что $e^{\alpha} - e^{-\alpha}) \neq 0$. Поэтому

$$C_1 = 0, \qquad C_2 = 0$$

и, следовательно,

$$X(x) \equiv 0.$$

2. При $\lambda = 0$ также не существует нетривиальных решений. Действительно, в этом случае общее решение уравнения (8) имеет вид

$$X(x) = C_1 x + C_2.$$

Граничные условия дают:

$$X(0) = [C_1 x + C_2]_{x=0} = C_2 = 0,$$

$$X(l) = C_1 l = 0,$$

т. е. $C_1 = 0$ и $C_2 = 0$ и, следовательно,

$$X(x) \equiv 0.$$

3. При $\lambda > 0$ общее решение уравнения может быть записано в виде

$$X(x) = D_1 \cos \sqrt{\lambda} x + D_2 \sin \sqrt{\lambda} x.$$

Граничные условия дают:

$$X(0) = D_1 = 0,$$

$$X(l) = D_2 \sin \sqrt{\lambda} l = 0.$$

Если $X(x)$ не равно тождественно нулю, то $D_2 \neq 0$, поэтому

$$\sin \sqrt{\lambda} l = 0 \tag{12}$$

или

$$\sqrt{\lambda} = \frac{\pi n}{l},$$

где n – любое целое число. Следовательно, нетривиальные решения задачи (11) возможны лишь при значениях

$$\lambda = \lambda_n = \left(\frac{\pi n}{l}\right)^2.$$

Этим собственным значениям соответствуют собственные функции

$$X_n(x) = D_n \sin \frac{\pi n}{l} x,$$

где D_n – произвольная постоянная.

Итак, только при значениях λ, равных

$$\lambda_n = \left(\frac{\pi n}{l}\right)^2, \tag{13}$$

существуют нетривиальные решения задачи (11)

$$X_n(x) = \sin\frac{\pi n}{l}x, \tag{14}$$

определяемые с точностью до произвольного множителя, который мы положили равным единице. Этим же значениям λ_n соответствуют решения уравнения (9)

$$T_n(t) = A_n \cos\frac{\pi n}{l}at + B_n \sin\frac{\pi n}{l}at, \tag{15}$$

где A_n и B_n – произвольные постоянные.

Возвращаясь к задаче (1) – (3), заключаем, что функции

$$u_n(x,t) = X_n(x)T_n(t) = \left(A_n \cos\frac{\pi n}{l}at + B_n \sin\frac{\pi n}{l}at\right)\sin\frac{\pi n}{l}x \tag{16}$$

являются частными решениями уравнения (1), удовлетворяющими граничным условиям (4) и представимыми в виде произведения (5) двух функций, одна из которых зависит только от x, другая – от t. Эти решения могут удовлетворить начальным условиям (3) нашей исходной задачи только для частных случаев начальных функций $\varphi(x)$ и $\psi(x)$.

Обратимся к решению задачи (1) – (3) в общем случае. В силу линейности и однородности уравнения (1) сумма частных решений

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n \cos\frac{\pi n}{l}at + B_n \sin\frac{\pi n}{l}at\right)\sin\frac{\pi n}{l}x \tag{17}$$

также удовлетворяет этому уравнению и граничным условиям (2). Начальные условия позволяют определить A_n и B_n. Потребуем, чтобы функция (17) удовлетворяла условиям (3):

$$\begin{cases} u(x,0) = \varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin\frac{\pi n}{l}x, \\ u_t(x,0) = \psi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\partial u_n}{\partial t}(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\pi n}{l}aB_n \sin\frac{\pi n}{l}x. \end{cases} \tag{18}$$

Из теории рядов Фурье известно, что произвольная кусочно – непрерывная и кусочно – дифференцируемая функция $f(x)$, заданная в промежутке $0 \le x \le l$, разлагается в ряд Фурье

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{\pi n}{l} x, \tag{19}$$

где

$$b_n = \frac{2}{l} \int\limits_0^l f(\xi) \sin \frac{\pi n}{l} \xi d\xi. \tag{20}$$

Если функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ удовлетворяют условиям разложения в ряд Фурье, то

$$\varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n \sin \frac{\pi n}{l} x, \quad \varphi_n = \frac{2}{l} \int\limits_0^l \varphi(\xi) \sin \frac{\pi n}{l} \xi d\xi, \tag{21}$$

$$\psi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \psi_n \sin \frac{\pi n}{l} x, \quad \psi_n = \frac{2}{l} \int\limits_0^l \psi(\xi) \sin \frac{\pi n}{l} \xi d\xi, \tag{22}$$

Сравнение этих рядов с формулами (18) показывает, что для выполнения начальных условий надо положить

$$A_n = \varphi_n, \qquad B_n = \frac{l}{\pi n a} \psi_n, \tag{23}$$

чем полностью определяется функция (17), дающая решение исследуемой задачи.

Пример 2.
Решить задачу

$$u_{tt} = 4u_{xx}, \quad u(x,0) = 11 \cos 6\pi x, \quad u_t(x,0) = 0, \quad u(0,t) = u(2,t) = 0.$$

Решение.
Воспользуемся формулой

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n \cos \frac{\pi n}{l} at + B_n \sin \frac{\pi n}{l} at \right) \sin \frac{\pi n}{l} x$$

$$B_n = 0, \quad A_n = \varphi_n = 11 \int\limits_0^2 \cos 6\pi\xi \sin \frac{\pi n}{l} \xi d\xi = \frac{44(2k+1)}{\pi(2k-11)(2k+13)}.$$

$$u(x,t) = \frac{44}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2k+1}{(2k-11)(2k+13)} \cos(2k+1)\pi t \sin \frac{\pi(2k+1)}{2} x.$$

Задачи для решения.

Решить задачи:

1. $u_{tt} = 16u_{xx}, \quad u(x,0) = 31\cos\pi x, \quad u_t(x,0) = 0,$
$u(0,t) = u(8,t) = 0.$

2. $u_{tt} = 9u_{xx}, \quad u_t(x,0) = 6\pi\cos 2\pi x, \quad u(x,0) = 0,$
$u(0,t) = u(6,t) = 0.$

3. $u_{tt} = 49u_{xx}, \quad u(x,0) = 25\cos 4\pi x, \quad u_t(x,0) = 0,$
$u(0,t) = u(5,t) = 0.$

4. $u_{tt} = u_{xx}, \quad u_t(x,0) = 3\pi\cos 3\pi x, \quad u(x,0) = 0,$
$u(0,t) = u(5,t) = 0.$

5. $u_{tt} = 4u_{xx}, \quad u(x,0) = 29\cos 2\pi x, \quad u_t(x,0) = 0,$
$u(0,t) = u(7,t) = 0.$

2. Неоднородные уравнения. Рассмотрим неоднородное уравнение колебаний

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} + f(x,t), \quad a^2 = \frac{k}{\rho}, \quad 0 < x < l \tag{1}$$

с начальными условиями

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad u_t(x,0) = \psi(x), \quad 0 \le x \le l \tag{2}$$

и однородными граничными условиями

$$u(0,t) = 0, \quad u(l,t) = 0, \quad t > 0. \tag{3}$$

Функция $f(x,t)$ и начальные условия представимы в виде рядов Фурье:

$$\begin{cases} f(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t) \sin \frac{\pi n}{l} x, \quad f_n = \frac{2}{l} \int\limits_0^l f(\xi, t) \sin \frac{\pi n}{l} \xi d\xi; \\ \varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n \sin \frac{\pi n}{l} x, \quad \varphi_n = \frac{2}{l} \int\limits_0^l \varphi(\xi) \sin \frac{\pi n}{l} \xi d\xi; \\ \psi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \psi_n \sin \frac{\pi n}{l} x, \quad \psi_n = \frac{2}{l} \int\limits_0^l \psi(\xi) \sin \frac{\pi n}{l} \xi d\xi. \end{cases} \tag{4}$$

Решение задачи (1) – (3) имеет вид

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{l}{\pi n a} \int\limits_0^t \sin \frac{\pi n}{l} a(t-\tau) \sin \frac{\pi n}{l} x f_n(\tau) d\tau +$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} \left(\varphi_n \cos \frac{\pi n}{l} at + \frac{l}{\pi n a} \psi_n \sin \frac{\pi n}{l} at \right) \sin \frac{\pi n}{l} x. \tag{5}$$

Вторая сумма представляет решение задачи о свободных колебаниях струны при заданных начальных условиях и была рассмотрена в пункте 1.

Первая сумма представляет собой вынужденные колебания струны под действием внешней силы при нулевых начальных условиях. Пользуясь выражением (4) для $f_n(t)$, находим:

$$u_n^{(I)}(x,t) = \int\limits_0^t \int\limits_0^l \left[\frac{2}{l} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{l}{\pi n a} \sin \frac{\pi n}{l} a(t-\tau) \sin \frac{\pi n}{l} x \sin \frac{\pi n}{l} \xi \right] f(\xi, \tau) d\xi d\tau =$$

$$= \int\limits_0^t \int\limits_0^l G(x, \xi, t-\tau) f(\xi, \tau) d\xi d\tau, \tag{6}$$

где

$$G(x, \xi, t-\tau) = \frac{2}{\pi a} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin \frac{\pi n}{l} a(t-\tau) \sin \frac{\pi n}{l} x \sin \frac{\pi n}{l} \xi. \tag{7}$$

Пример 3.

Решить задачу

$u_{tt} = 4u_{xx} + x, \quad u(x,0) = 11\cos 6\pi x, \quad u_t(x,0) = 0, \quad u(0,t) = u(2,t) = 0.$

Решение.

Решение ищем в виде $u(x,y) = u_1(x,y) + u_2(x,y)$. Из решения примера 6 известно, что

$$u_2(x,t) = \frac{44}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2k+1}{(2k-11)(2k+13)}\cos(2k+1)\pi t\sin\frac{\pi(2k+1)}{2}x,$$

а $u_1(x,y)$ вычисляем по нижеследующей формуле

$$u_1(x,y) = \int\limits_0^t\int\limits_0^2 G(x,\xi,t-\tau)f(\xi,\tau)d\xi d\tau,$$

где

$$G(x,\xi,t-\tau) = \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sin\pi n(t-\tau)\sin\frac{\pi n}{2}x\sin\frac{\pi n}{2}\xi.$$

Задачи для решения.

Решить задачи:

1. $u_{tt} = 16u_{xx} + x, \quad u(x,0) = 31\cos\pi x, \quad u_t(x,0) = 0,$
$u(0,t) = u(8,t) = 0.$

2. $u_{tt} = 9u_{xx} + x^2, \quad u_t(x,0) = 6\pi\cos 2\pi x, \quad u(x,0) = 0,$
$u(0,t) = u(6,t) = 0.$

3. $u_{tt} = 49u_{xx} + x + t, \quad u(x,0) = 25\cos 4\pi x, \quad u_t(x,0) = 0,$
$u(0,t) = u(5,t) = 0.$

4. $u_{tt} = u_{xx} + x^2 + t, \quad u_t(x,0) = 3\pi\cos 3\pi x, \quad u(x,0) = 0,$
$u(0,t) = u(5,t) = 0.$

5. $u_{tt} = 4u_{xx} + x + t^2, \quad u(x,0) = 29\cos 2\pi x, \quad u_t(x,0) = 0,$
$u(0,t) = u(7,t) = 0.$

3. Общая первая краевая задача.

Найти решение уравнения

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} + f(x,t), \quad 0 < x < l, \;\; t > 0 \tag{1}$$

с дополнительными условиями

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad u_t(x,0) = \psi(x), \quad 0 \le x \le l \tag{2}$$

$$u(0,t) = \mu_1(t), \quad u(l,t) = \mu_2(t), \quad t \le 0. \tag{3}$$

Введем новую неизвестную фунщию $v(x,t)$, полагая:

$$u(x,t) = U(x,t) + v(x,t),$$

так что $v(x,t)$ представляет отклонение функции $u(x,t)$ от некоторой известной функции $U(x,t)$.

Эта функция $v(x,t)$ будет определяться как решение уравнения

$$v_{tt} = a^2 v_{xx} + \bar{f}(x,t), \quad \bar{f}(x,t) = f(x,t) - [U_{tt} - a^2 U_{xx}]$$

с дополнительными условиями

$$\begin{aligned} v(x,0) &= \bar{\varphi}(x) & \bar{\varphi}(x) &= \varphi(x) - U(x,0), \\ v_t(x,0) &= \bar{\psi}(x) & \bar{\psi}(x) &= \psi(x) - U_t(x,0), \\ v(0,t) &= \bar{\mu}_1(t) & \bar{\mu}_1(t) &= \mu_1(t) - U(0,t), \\ v(l,t) &= \bar{\mu}_2(t) & \bar{\mu}_2(t) &= \mu_2(t) - U(l,t), \end{aligned}$$

Выберем вспомогательную функцию $U(x,t)$, таким образом, чтобы

$$\bar{\mu}_1(t) = 0 \quad и \quad \bar{\mu}_2(t) = 0;$$

для этого достаточно положить

$$U(x,t) = \mu_1(t) + \frac{x}{l}[\mu_2(t) - \mu_1(t)].$$

Тем самым общая краевая задача для функции $u(x,t)$ сведена к краевой задаче для функции $v(x,t)$ при нулевых граничных условиях. Метод решения этой изложен выше.

Пример 4. Решить задачу

$u_{tt} = 25u_{xx} + t^2, \quad u(x,0) = 11\cos 3\pi x - 5 + 6x,$
$u_t(x,0) = 0, \quad u(0,t) = -5\ u(1,t) = 1.$

Решение.

Введем новую неизвестную функцию $v(x,t)$, полагая:

$$u(x,t) = U(x,t) + v(x,t).$$

$$U(x,t) = \mu_1(t) + \frac{x}{l}[\mu_2(t) - \mu_1(t)] = -5 + x[1 - (-5)] = 6x - 5,$$

тогда

$$u(x,t) = 6x - 5 + v(x,t).$$

$$\bar{f}(x,t) = f(x,t) - [U_{tt} - a^2U_{xx}] = t^2 - 0 = t^2$$

Требуется найти решение $v(x,y)$ уравнения

$$v_{tt} = 25v_{xx} + t^2$$

с однородными граничными условиями $\bar{\mu}_1(t) = \bar{\mu}_2(t) = 0$ и дополнительными условиями $\bar{\varphi}(x) = 11\cos 3\pi x - 5 + 6x$, $\bar{\psi}(x) = 0$. Задача сведена к краевой задаче для функции $v(x,t)$ при нулевых граничных условиях, примером решения такой задачи является пример 7.

Задачи для решения.

Решить задачи:

1. $u_{tt} = 49u_{xx} + x, \quad u_t(x,0) = 28\pi\cos 4\pi x + 2 - 4x,$
$u(x,0) = 0,\ \ u(0,t) = 2t,\ u(2,t) = -6t.$
2. $u_{tt} = 36u_{xx} + \cos x, \quad u_t(x,0) = 24\pi\cos 4\pi x + 4 + x,$
$u(x,0) = 0,\ \ u(0,t) = 4t,\ \ u(3,t) = 8t.$
3. $u_{tt} = 25u_{xx} + x + t, \quad u_t(x,0) = 10\pi\cos 2\pi x + 7 - 5x,$
$u(x,0) = 0,\ \ u(0,t) = 7t,\ \ u(2,t) = -3t.$
4. $u_{tt} = 16u_{xx} + x + t, \quad u(x,0) = 7\cos 4\pi x - 2 + x,$
$u_t(x,0) = 0,\ \ u(0,t) = -2,\ \ u(3,t) = 1.$

1.5 Задача Гурса для линейного неоднородного гиперболического уравнения

Задача с данными на характеристиках.

Рассмотрим задачу определения решения по данным на характеристиках. Эту краевую задачу часто называют **задачей Гурса**. Задача с данными на характеристиках представляет большой интерес с точки зрения физических приложений. Она встречается, например, при изучении процессов сорбции и десорбции газов, процессов сушки и многих других задач.

Метод последовательных приближений для задачи Гурса.

Рассмотрим простейшую задачу с данными на характеристиках

$$\begin{cases} u_{xy} = f(x,y), \\ u(x,0) = \varphi_1(x), \\ u(0,y) = \varphi_2(y). \end{cases} \tag{1}$$

Дополнительные условия даны на прямых $x = 0$ и $y = 0$, являющихся характеристиками уравнения (1). Будем предполагать, что функции $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$ дифференцируемы и удовлетворяют условию сопряжения $\varphi_1(0) = \varphi_2(0)$. Интегрируя последовательно по x и y уравнение (1), получим:

$$u_y(x,y) = u_y(0,y) + \int\limits_0^x f(\xi,y)d\xi,$$

$$u(x,y) = u(x,0) + u(0,y) - u(0,0) + \int\limits_0^y d\eta \int\limits_0^x f(\xi,\eta)d\xi$$

или

$$u(x,y) = \varphi_1(x) + \varphi_2(y) - \varphi_1(0) + \int\limits_0^y \int\limits_0^x f(\xi,\eta)d\xi d\eta. \tag{2}$$

Таким образом, для простейшего уравнения, не содержащего первых производных u_x, u_y и искомой функции, решение представляется в явной аналитической форме (2). Из формулы (2) непосредственно следует единственность и существование решения поставленной задачи.

Решению линейного уравнения гиперболического типа

$$u_{xy} = a(x,y)u_x + b(x,y)u_y + c(x,y)u + f(x,y) \tag{3}$$

при дополнительных условиях на характеристиках $x = 0$, $y = 0$

$$u(x,0) = \varphi_1(x), \qquad u(0,y) = \varphi_2(y), \tag{3'}$$

где $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(y)$ удовлетворяют требованиям дифференцируемости и сопряжения. Коэффициенты a, b и c будем предполагать непрерывными функциями x и y.

Формула (3) показывает, что функция $u(x, y)$ удовлетворяет интегро-дифференциальному уравнению

$$u(x,y) = \int\limits_0^y \int\limits_0^x \big[a(\xi,\eta)u_\xi + b(\xi,\eta)u_\eta + c(\xi,\eta)u\big]d\xi d\eta +$$

$$+\varphi_1(x) + \varphi_2(y) - \varphi_1(0) + \int\limits_0^y \int\limits_0^x f(\xi,\eta)d\xi d\eta. \tag{4}$$

Для его решения воспользуемся методом последовательных приближений. Выберем в качестве нулевого приближения функцию

$$u_0(x,y) = 0.$$

Тогда (4) дает для последовательных приближений следующие выражения:

$$\begin{cases} u_1(x,y) = \varphi_1(x) + \varphi_2(y) - \varphi_1(0) + \int\limits_0^y \int\limits_0^x f(\xi,\eta)d\xi d\eta, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ u_n(x,y) = u_1(x,y) + \int\limits_0^y \int\limits_0^x \big[a(\xi,\eta)\frac{\partial u_{n-1}}{\partial \xi} + b(\xi,\eta)\frac{\partial u_{n-1}}{\partial \eta} + c(\xi,\eta)u_{n-1}\big]d\xi d\eta. \end{cases} \tag{5}$$

Отметим попутно, что

$$\begin{cases} \frac{\partial u_n}{\partial x} = \frac{\partial u_1}{\partial x} + \int\limits_0^y \big[a(x,\eta)\frac{\partial u_{n-1}}{\partial x} + b(x,\eta)\frac{\partial u_{n-1}}{\partial \eta} + c(x,\eta)u_{n-1}\big]d\eta \\ \frac{\partial u_n}{\partial y} = \frac{\partial u_1}{\partial y} + \int\limits_0^x \big[a(\xi,y)\frac{\partial u_{n-1}}{\partial \xi} + b(\xi,y)\frac{\partial u_{n-1}}{\partial y} + c(\xi,y)u_{n-1}\big]d\xi. \end{cases} \tag{6}$$

Последовательности

$$\{u_n(x,y)\}, \quad \{\frac{\partial u_n}{\partial x}(x,y)\}, \quad \{\frac{\partial u_n}{\partial y}(x,y)\}$$

равномерно сходятся к предельным функциям, которые обозначим

$$u(x,y) = \lim_{n\to\infty} u_n(x,y),$$

$$v(x,y) = \lim_{n\to\infty} \frac{\partial u_n}{\partial x}(x,y),$$

$$w(x,y) = \lim_{n\to\infty} \frac{\partial u_n}{\partial y}(x,y).$$

Переходя к пределу под знаком интеграла в формулах (5) и (6), будем иметь:

$$\begin{cases} u(x,y) = u_1(x,y) + \int\limits_0^y \int\limits_0^x \big[a(\xi,\eta)v + b(\xi,\eta)w + c(\xi,\eta)u\big]d\xi d\eta, \\ v(x,y) = \frac{\partial u_1}{\partial x}(x,y) + \int\limits_0^y \big[a(x,\eta)v + b(x,\eta)w + c(x,\eta)u\big]d\eta, \\ w(x,y) = \frac{\partial u_1}{\partial y}(x,y) + \int\limits_0^x \big[a(\xi,y)v + b(\xi,y)w + c(\xi,y)u\big]d\xi. \end{cases} \qquad (7)$$

Вытекающие отсюда равенства

$$v = u_x,$$

$$w = u_y$$

позволяют установить, что функция $u(x,y)$ удовлетворяет интегро-дифференциальному уравнению

$$u(x,y) = \varphi_1(x) + \varphi_2(y) - \varphi_1(0) + \int\limits_0^y \int\limits_0^x f(\xi,\eta)d\xi d\eta +$$

$$+ \int\limits_0^y \int\limits_0^x \big[a(\xi,\eta)u_\xi + b(\xi,\eta)u_\eta + c(\xi,\eta)u\big]d\xi d\eta, \qquad (4)$$

а также исходному дифференциальному уравнению (3), что проверяется непосредственно дифференцированием (4) по x и y.

Решение задачи с данными на характеристиках единственно.

Если коэффициенты a, b и c постоянны, то уравнение (3) с помощью подстановки

$$u = ve^{\lambda x + \mu y}$$

приводится к виду

$$v_{xy} + C_1 v = f.$$

При $C_1 = 0$ мы получаем задачу для простейшего уравнения (1), решение которой дается формулой (2). Если $C_1 \neq 0$, то решение задачи для уравнения (8) также может быть получено в явной аналитической форме.

Глава 2. УРАВНЕНИЯ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО ТИПА

2.1 Постановка краевых задач.

Уравнения с частными производными 2-го порядка параболического типа наиболее часто встречаются при изучении процессов теплопроводности и диффузии. Простейшее уравнение параболического типа

$$u_{xx} - u_y = 0 \qquad (y = a^2 t)$$

обычно называют уравнением теплопроводности.

Первая краевая задача состоит в отыскании решения $u = u(x,t)$ уравнения теплопроводности

$$u_t = a^2 u_{xx} \quad \textit{при} \quad 0 < x < l, \;\; 0 < t \leq T,$$

удовлетворяющего условиям

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad 0 \leq x \leq l$$

$$u(0,t) = \mu_1(t), \;\; u(l,t) = \mu_2(t), \qquad 0 \leq t \leq T,$$

где $\varphi(x), \mu_1(t)$ и $\mu_2(t)$ – заданные функции.

Аналогично ставятся и другие краевые задачи с различными комбинациями краевых условий при $x = 0$ и $x = l$.

Задача с начальными условиями (задача Коши) о распределении температуры на бесконечной прямой:

найти решение уравнения теплопроводности в области $-\infty < x < \infty$ и $t \geq t_0$, удовлетворяющее условию

$$u(x,t_0) = \varphi(x) \quad (-\infty < x < \infty),$$

где $\varphi(x)$ – заданная функция.

Аналогично, если участок стержня, температура которого нас интересует, находится вблизи одного конца и далеко от другого, то в этом случае температура практически определяется температурным режимом близкого конца и начальными условиями. В задачах подобного типа обычно считают, что стержень полубесконечен, и координата, отсчитываемая от конца, меняется в пределах $0 \leq x \leq \infty$. Приведем в качестве примера формулировку первой краевой задачи для полубесконечного стержня:

найти решения уравнения теплопроводности в области $0 < x < \infty$ и $t_0 \leq t$, удовлетворяющее условиям

$$\begin{cases} u(x, t_0) = \varphi(x) & 0 < x < \infty \\ u(0, t) = \mu(t) & (t \geq t_0), \end{cases}$$

где $\varphi(x)$ и $\mu(t)$ – заданные функции.

Весьма важной является задача без начальных условий для полубесконечного стержня $(l = \infty)$, когда требуется найти решение уравнения теплопроводности для $0 < x < \infty$, $t > -\infty$ удовлетворяющее условию

$$u(0, t) = \mu(t),$$

где $\mu(t)$ – заданная функция.

Наиболее часто встречаются задачи без начальных условий при периодическом граничном режиме

$$\mu(t) = A \cos wt.$$

Решением первой краевой задачи будем называть функцию $u(x, t)$, обладающую следующими свойствами:

1) $u(x, t)$ определена и непрерывна в замкнутой области

$$0 \leq x \leq l, \quad t_0 \leq t \leq T;$$

2) $u(x, t)$ удовлетворяет уравнению теплопроводности в открытой области

$$0 < x < l, \quad t_0 < t;$$

3) $u(x, t)$ удовлетворяет начальному и граничным условиям, т. е.

$$u(x, t_0) = \varphi(x), \quad u(0, t) = \mu_1(t), \quad u(l, t) = \mu_2(t),$$

где $\varphi(x)$, $\mu_1(t)$, $\mu_2(t)$ – непрерывные функции, удовлетворяющие условиям сопряжения

$$\varphi(0) = \mu_1(t_0), \;\; [= u(0, t_0)] \quad u \quad \varphi(l) = \mu_2(t_0) \;\; [= u(l, t_0)],$$

необходимым для непрерывности $u(x,t)$ в замкнутой области.

В дальнейшем мы под словами "решение уравнения, удовлетворяющее граничным условиям", будем подразумевать функцию, удовлетворяющую требованиям 1), 2), 3), не оговаривая эти условия каждый раз, если в этом нет специальной необходимости. Аналогично ставятся и другие краевые задачи, в том числе задачи на бесконечном стержне и задачи без начальных условий.

2.2 Принцип максимального значения для уравнения теплопроводности.

Рассмотрим уравнение с постоянными коэффициентами

$$v_t = a^2 v_{xx} + \beta v_x + \gamma v$$

Это уравнение подстановкой

$$v = e^{\mu x + \lambda t} u \quad при \quad \mu = -\frac{\beta}{2a^2}, \lambda = \gamma - \frac{\beta^2}{4a^2}$$

приводится к виду

$$u_t = a^2 u_{xx}.$$

Свойство решений этого уравнения, которое называется принципом максимального значения заключается в следующем:

Если функция $u(x,t)$, определенная и непрерывная в замкнутой области $0 \le t \le T$ и $0 \le x \le l$, удовлетворяет уравнению теплопроводности

$$u_t = a^2 u_{xx} \tag{1}$$

в точках области $0 < x < l$, $0 < t \le T$, то максимальное и минимальное значения функции $u(x,t)$ достигаются или в начальный момент, или в точках границы $x = 0$, или $x = l$.

Функция $u(x,t) = const$, очевидно, удовлетворяет уравнению теплопроводности и достигает своего максимального (минималыюто) значения в любой точке. Однако это не противоречит теореме, так как из ее условия следует, что если максимальное (минимальное) значение достигается внутри области, то оно также (а не только) должно достигаться или при $t = 0$, или при $x = 0$, или при $x = l$.

Следствие 1. Если два решения уравнения теплопроводности $u_1(x,t)$ и $u_2(x,t)$ удовлетворяют условиям

$$u_1(x,0) \leq u_2(x,0),$$

$$u_1(0,t) \leq u_2(0,t), \quad u_1(l,t) \leq u_2(l,t),$$

то

$$u_1(x,t) \leq u_2(x,t)$$

для всех значений $0 \leq x \leq l,\ \ 0 \leq t \leq T$.

Следствие 2. Если три решения уравнения теплопроводности

$$u(x,t), \quad \hat{u}(x,t), \ \ \bar{u}(x,t)$$

удовлетворяют условиям

$$\hat{u}(x,t) \leq u(x,t) \leq \bar{u}(x,t) \ \ \textit{при} \ \ t=0, \ \ x=0 \ \ \textit{и} \ \ x=l,$$

то эти же неравенства выполняются тождественно, т. е. для всех $x,\ t$ при

$$0 \leq x \leq l, \ \ 0 \leq t \leq T.$$

Следствие 3. Если для двух решений уравнения теплопроводности $u_1(x,t)$ и $u_2(x,t)$ имеет место неравенство

$$|\ u_1(x,t) - u_2(x,t)\ | \leq \varepsilon \quad \textit{для} \ \ t=0, \ \ x=0 \ \ x=l,$$

то

$$|\ u_1(x,t) - u_2(x,t)\ | \leq \varepsilon$$

тождественно, т. е. имеет место для всех $x,\ t$

$$0 \leq x \leq l, \ \ 0 \leq t \leq T.$$

2.3 Теорема единственности для первой краевой задачи.

Если две функции, $u(x,t)$ и $u_2(x,t)$, определенные и непрерывные в области $0 \leq x \leq l,\ \ 0 \leq t \leq T$, удовлетворяют уравнению теплопроводности

$$u_t = a^2 u_{xx} + f(x,t) \qquad (\textit{для} \ \ 0 < x < l, \ t > 0), \tag{6}$$

одинаковым начальным и граничным условиям

$$u_1(x,0) = u_2(x,0) = \varphi(x),$$

$$u_1(0,t) = u_2(0,t) = \mu_1(t),$$
$$u_1(l,t) = u_2(l,t) = \mu_2(t),$$

то $u_1(x,t) \equiv u_2(x,t)$.

Теорема единственности для бесконечной прямой.

Если $u_1(x,t)$ и $u_2(x,t)$ – непрерывные, ограниченные во всей области изменения переменных (x,t) функции, удовлетворяющие уравнению теплопроводности

$$u_t = a^2 u_{xx} \quad (-\infty < x < \infty,\ t > 0) \tag{1}$$

и условию

$$u_1(x,0) = u_2(x,0) \quad (-\infty < x < \infty),$$

то

$$u_1(x,0) \equiv u_2(x,0) \quad (-\infty < x < \infty,\ t \geq 0).$$

2.4 Решение первой краевой задачи для уравнения теплопроводности методом разделения переменных.

1. Метод разделения переменных.

Однородная краевая задача. Перейдем к решению первой краевой задачи для уравнения теплопроводности на отрезке:

$$u_t = a^2 u_{xx} + f(x,t), \quad (0 < x < l, \quad t > 0) \tag{1}$$

с начальным условием

$$u(x,0) = \varphi(x), \ \ (0 \leq x \leq l) \tag{2}$$

и граничными условиями

$$\begin{cases} u(0,t) = \mu_1(t), \\ u(l,t) = \mu_2(t) \end{cases} \quad (t \geq 0). \tag{3}$$

Изучение общей первой краевой задачи начинается с решения следующей простейшей задачи I:

найти непрерывное в замкнутой области ($0 \le x \le l, \quad 0 \le t \le T$) решение однородного уравнения

$$u_t = a^2 u_{xx}, \quad 0 < x < l, \quad 0 < t \le T, \tag{4}$$

удовлетворяющее начальному условию (2)

и однородным граничным условиям

$$u(0,t) = 0, \qquad u(l,t) = 0, \qquad 0 \le t \le T. \tag{5}$$

Для решения этой задачи рассмотрим, как принято в методе разделения переменных, сначала основную вспомогательную задачу:

найти решение уравнения

$$u_t = a^2 u_{xx}$$

не равное тождественно нулю, удовлетворяющее однородным граничным условиям

$$u(0,t) = 0, \qquad u(l,t) = 0 \tag{5}$$

и представимое в виде

$$u(x,t) = X(x)T(t), \tag{6}$$

где $X(x)$ – функция только переменного x, $T(t)$ – функция только переменного t.

Подставляя предполагаемую форму решения (6) в уравнение (4) и производя деление обеих частей равенства на $a^2 X\,T$, получим:

$$\frac{1}{a^2}\frac{T'}{T} = \frac{X''}{X} = -\lambda, \tag{7}$$

где $\lambda = const$, так как левая часть равенства зависит только от t, а правая – только от x. Отсюда следует, что

$$X'' + \lambda X = 0, \tag{8}$$

$$T' + a^2\lambda T = 0. \tag{8'}$$

граничные условия (5) дают:

$$X(0) = 0, \qquad X(l) = 0. \tag{9}$$

Таким образом, для определения функции $X(x)$ мы получили задачу о собственных значениях (задачу Штурма - Лиувилля)

$$X'' + \lambda X = 0, \quad X(0) = 0, \qquad X(l) = 0, \tag{10}$$

исследованную ранее при решении уравнения колебаний. При этом было показано, что только для значений параметра λ, равных

$$\lambda_n = \left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 \qquad (n = 1, 2, 3, ...,), \tag{11}$$

существуют нетривиальные решения уравнения (8), равные

$$X_n(x) = \sin\frac{\pi n}{l}x. \tag{12}$$

Этим значениям λ_n соответствуют решения уравнения (8')

$$T_n(t) = C_n e^{-a^2\lambda_n t}, \tag{13}$$

где C_n – не определенные пока коэффициенты.

Возвращаясь к основной вспомогательной задаче, видим, что функции

$$u_n(x,t) = X_n(x)T_n(t) = C_n e^{-a^2\lambda_n t}\sin\frac{\pi n}{l}x, \tag{14}$$

являются частными решениями уравнения (4), удовлетворяющими нулевым граничным условиям.

Обратимся теперь к решению задачи (I). Составим формально ряд

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n e^{-\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 a^2 t}\sin\frac{\pi n}{l}x. \tag{15}$$

Функция $u(x,t)$ удовлетворяет граничным условиям, так как им удовлетворяют все члены ряда. Требуя выполнения начальных условий, получаем:

$$\varphi(x) = u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin\frac{\pi n}{l}x, \tag{16}$$

т. е. C_n являются коэффициентами Фурье функции $\varphi(x)$ при разложении ее в ряд по синусам на интервале $(0, l)$:

$$C_n = \varphi_n = \frac{2}{l}\int\limits_0^l \varphi(\xi)\sin\frac{\pi n}{l}\xi d\xi. \tag{17}$$

Ряд (15) с коэффициентами C_n, определяемыми по формуле (17) удовлетворяет всем условиям задачи (I).

Если функция $\varphi(x)$ непрерывна, имеет кусочно – непрерывную производную и удовлетворяет условиям $\varphi(0) = 0$ и $\varphi(l) = 0$, то ряд

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n e^{-\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 a^2 t}\sin\frac{\pi n}{l}x. \tag{15}$$

определяет непрерывную функцию при $t \geq 0$.

Задача нахождения решения первой краевой задачи для однородного уравнения с нулевыми граничными условиями и непрерывным, кусочно – гладким начальным условием решена полностью.

2. Функция источника.

Преобразуем полученное решение (15), заменяя C_n их значениями:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n e^{-\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 a^2 t}\sin\frac{\pi n}{l}x =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{2}{l}\int\limits_0^l \varphi(\xi)\sin\frac{\pi n}{l}\xi d\xi\right] e^{-\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 a^2 t}\sin\frac{\pi n}{l}x =$$

$$= \int\limits_0^l\left[\frac{2}{l}\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 a^2 t}\sin\frac{\pi n}{l}x\sin\frac{\pi n}{l}\xi\right]\varphi(\xi)d\xi.$$

Изменение порядков суммирования и интегрирования всегда законно при $t > 0$ в силу того, что ряд в скобках сходится равномерно по ξ при $t > 0$.

Обозначим

$$G(x,\xi,t) = \frac{2}{l}\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 a^2 t} \sin\frac{\pi n}{l}x \sin\frac{\pi n}{l}\xi.$$

Пользуясь функцией $G(x,\xi,t)$, можно представить функцию $u(x,t)$ в виде

$$u(x,t) = \int_0^l G(x,\xi,t)\varphi(\xi)d\xi. \tag{19}$$

Функция $G(x,\xi,t)$ называется функцией мгновенного точечного источника или, более подробно, функцией температурного влияния мгновенного точечного источника тепла.

Пример 5. Решить задачу

$$u_t = 4u_{xx}, \quad u(x,0) = \cos 3\pi x, \quad u(0,t) = u(8,t) = 0.$$

Решение.

$$u(x,t) = \int_0^8 \left[\frac{1}{4}\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\left(\frac{\pi^2 n^2}{16}\right)t} \sin\frac{\pi n}{8}x \sin\frac{\pi n}{8}\xi\right] \cos 3\pi\xi d\xi =$$

$$= \frac{1}{4}\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\left(\frac{\pi^2 n^2}{16}\right)t} \sin\frac{\pi n}{8}x \int_0^8 \cos 3\pi\xi \sin\frac{\pi n}{8}\xi d\xi =$$

$$= \frac{1}{8}\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\left(\frac{\pi^2 n^2}{16}\right)t} \sin\frac{\pi n}{8}x \Big[\int_0^8 \sin(3-\frac{n}{8})\pi\xi d\xi + \int_0^8 \sin(3+\frac{n}{8})\pi\xi d\xi\Big] =$$

$$= \frac{2}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\Big(\frac{1}{23-2k} + \frac{1}{25+2k}\Big) e^{-\left(\frac{\pi^2(2k+1)^2}{16}\right)t} \sin\frac{\pi(2k+1)}{8}x.$$

Задачи для решения.

Решить задачи:

1. $u_t = 9u_{xx}, \quad u(x,0) = 31\cos 3\pi x, \quad u(0,t) = u(9,t) = 0.$

2. $u_t = 3u_{xx}, \quad u(x,0) = 30\cos 3\pi x + 7\sin \pi x, \quad u(0,t) = u(1,t) = 0.$

3. $u_t = 7u_{xx}, \quad u(x,0) = 27\cos 2\pi x, \quad u(0,t) = u(7,t) = 0.$

4. $u_t = 8u_{xx}, \quad u(x,0) = 19\cos 4\pi x, \quad u(0,t) = u(3,t) = 0.$

5. $u_t = 6u_{xx}, \quad u(x,0) = 24\sin 2\pi x + 18\cos 4\pi, \quad u(0,t) = u(9,t) = 0.$

2.5 Решение однородной первой краевой задачи для неоднородного уравнения теплопроводности.

1. Неоднородное уравнение теплопроводности.

Рассмотрим неоднородное уравнение теплопроводности

$$u_t = a^2 u_{xx} + f(x,t) \tag{1}$$

с начальным условием

$$u(x,0) = 0 \tag{2}$$

и граничными условиями

$$u(0,t) = 0, \quad u(l,t) = 0. \tag{3}$$

Будем искать решение этой задачи $u(x,t)$ в виде ряда Фурье по собственным функциям $\{\sin \frac{\pi n}{l} x\}$:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t) \sin \frac{\pi n}{l} x, \tag{4}$$

считая при этом t параметром. Для нахождения функции $u(x,t)$ надо определить функции $u_n(t)$. Представим функцию $f(x,t)$ в виде ряда

$$f(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t) \sin \frac{\pi n}{l} x,$$

где

$$f_n(t) = \frac{2}{l} \int\limits_0^l f(\xi,t) \sin \frac{\pi n}{l} \xi d\xi. \tag{5}$$

Подставляя предполагаемую форму решения в исходное уравнение (1), будем иметь:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{\pi n}{l} x \left[\left(\frac{\pi n}{l} \right)^2 a^2 u_n(t) + u'(t) - f_n(t) \right] = 0.$$

Это уравнение будет удовлетворено, если все коэффициенты разложения равны нулю, т. е.

$$u_n'(t) = -a^2 \left(\frac{\pi n}{l} \right)^2 u_n(t) + f_n(t). \tag{6}$$

Пользуясь начальным условием для $u(x, t)$

$$u(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(0) \sin \frac{\pi n}{l} x = 0,$$

получаем начальное условие для $u_n(t)$:

$$u_n(0) = 0. \tag{7}$$

Решая обыкновенное дифференциальное уравнение (6) с нулевым начальным условием (7), находим:

$$u_n(t) = \int_0^t e^{-\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 a^2 (t-\tau)} f_n(\tau) d\tau. \tag{8}$$

Подставляя выражение (8) для $u_n(\tau)$ в формулу (4), получим решение исходной задачи в виде

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\int_0^t e^{-\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 a^2 (t-\tau)} f_n(\tau) d\tau \right] \sin \frac{\pi n}{l} x. \tag{9}$$

Воспользуемся выражением (5) для $f_n(\tau)$ и преобразуем найденное решение (9):

$$u(x, t) = \int_0^t \int_0^l \left[\frac{2}{l} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 a^2 (t-\tau)} \sin \frac{\pi n}{l} x \sin \frac{\pi n}{l} \xi \right] f(\xi, \tau) d\xi d\tau =$$

$$= \int\limits_0^t \int\limits_0^l G(x, \xi, t-\tau) f(\xi, \tau) d\xi d\tau, \qquad (10)$$

где

$$G(x, \xi, t-\tau) = \frac{2}{l} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 a^2 (t-\tau)} \sin \frac{\pi n}{l} x \sin \frac{\pi n}{l} \xi. \qquad (11)$$

Мы рассматривали здесь неоднородное уравнение с нулевыми начальными условиями. Если начальное условие отлично от нуля, то к этому решению следует прибавить решение однородного уравнения с заданным начальным условием, найденное нами ранее.

Пример 6.

Решить задачу

$$u_t = 4u_{xx} + t, \quad u(x,0) = 0, \quad u(0,t) = u(4,t) = 0.$$

Решение.

$$u(x,t) = \int\limits_0^t \int\limits_0^4 \left[\frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\pi^2 n^2 (t-\tau)} \sin \frac{\pi n}{4} x \sin \frac{\pi n}{4} \xi\right] \tau d\xi d\tau.$$

Изменив порядок суммирования и интегрирования получаем

$$u(x,y) = \frac{4}{\pi^5} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^5} e^{-\pi^2 t (2k+1)^2} \times$$

$$\times \left[e^{\pi^2 t (2k+1)^2} (\pi^2 t (2k+1)^2 - 1) + 1\right] \sin \frac{\pi(2k+1)}{4} x.$$

Задачи для решения.

Решить задачи:

1. $u_t = 9u_{xx} + t^2, \quad u(x,0) = 0, \quad u(0,t) = u(9,t) = 0.$
2. $u_t = 3u_{xx} + x, \quad u(x,0) = 0, \quad u(0,t) = u(1,t) = 0.$
3. $u_t = 7u_{xx} + x^2, \quad u(x,0) = 0, \quad u(0,t) = u(7,t) = 0.$
4. $u_t = 8u_{xx} + e^t, \quad u(x,0) = 0, \quad u(0,t) = u(3,t) = 0.$

5. $u_t = 6u_{xx} + e^x, \quad u(x,0) = 0, \quad u(0,t) = u(9,t) = 0.$

2. Общая первая краевая задача. Рассмотрим общую первую краевую задачу для уравнения теплопроводности:

найти решение уравнения

$$u_t = a^2 u_{xx} + f(x,t) \tag{1}$$

с дополнительными условиями

$$u(x,0) = \varphi(x), \tag{12}$$

$$\begin{cases} u(0,t) = \mu_1(t), \\ u(l,t) = \mu_2(t). \end{cases} \tag{13}$$

Введем новую неизвестную функцию $v(x,t)$

$$u(x,t) = U(x,t) + v(x,t), \tag{14}$$

представляющую отклонение от некоторой известной функции $U(x,t)$.

Эта функция $v(x,t)$ будет определяться как решение уравнения

$$v_t - a^2 v_{xx} = \bar{f}(x,t)$$

$$\bar{f}(x,t) = f(x,t) - [U_t - a^2 U_{xx}]$$

с дополнительными условиями

$$v(x,0) = \bar{\varphi}(x), \qquad \bar{\varphi}(x) = \varphi(x) - U(x,0),$$

$$v(0,t) = \bar{\mu_1}(t), \qquad \bar{\mu_1}(t) = \mu_1(t) - U(0,t),$$

$$v(l,t) = \bar{\mu_2}(t), \qquad \bar{\mu_2}(t) = \mu_2(t) - U(l,t).$$

Выберем вспомогательную функцию $U(x,t)$ таким образом, чтобы

$$\bar{\mu_1}(t) = 0 \quad и \quad \bar{\mu_2}(t) = 0,$$

для чего достаточно положить

$$U(x,t) = \mu_1(t) + \frac{x}{l}[\mu_2(t) - \mu_1(t)].$$

Таким образом, нахождение функции $u(x,t)$, дающей решение общеи краевой задачи, сведено к нахождению функции $v(x,t)$, дающей решение краевой задачи с нулевыми граничными условиями. Метод нахождения функции $v(x,t)$ дан в предыдущем пункте.

Пример 7.

Рассмотрим задачу для ограниченного стержня $(0,l)$ концы которого поддерживаются при постоянных температурах u_0 и u_1:

$$u_t = a^2 u_{xx}$$

$$u(x,0) = \varphi(x),$$
$$u(0,t) = u_0,$$
$$u(l,t) = u_1.$$

Решение будем искать в виде суммы

$$u(x,t) = \bar{u}(x) + v(x,t),$$

где $\bar{u}(x)$ – стационарная температура, а $v(x,t)$ – отклонение от стационарной температуры.

Для функций $\bar{u}(x)$ и $v(x,t)$ будем иметь условия

$$\bar{u}''(x) = 0, \qquad v_t = a^2 v_{xx};$$

$$\bar{u}(0) = u_0, \quad v(x,0) = \varphi(x) - \bar{u}(x) = \varphi_1(x);$$
$$\bar{u}(l) = u_1, \;\; v(0,t) = 0, \;\; v(l,t) = 0.$$

Отсюда находим:

$$\bar{u}(x) = u_0 + \frac{x}{l}(u_1 - u_0).$$

Функцию $v(x,t)$, определяемую начальным условием и однородными граничными условиями, без труда находим методом разделения переменных.

2.6 Задача Коши для уравнения теплопроводности.

Рассмотрим на бесконечной прямой задачу с начальными данными (задачу Коши):

найти ограниченную функцию $u(x,t)$, определенную в области $-\infty < x < \infty$, $t \geq 0$, удовлетворяющую уравнению теплопроводности

$$u_t = a^2 u_{xx}, \qquad -\infty < x < \infty, \;\; t > 0, \tag{1}$$

и начальному условию

$$u(x,0) = \varphi(x), \qquad -\infty < x < \infty. \tag{2}$$

Если $\varphi(x)$ – непрерывная функция, то выполнение начального условия будем понимать в том смысле, что $u(x,t)$ непрерывно при $t = 0$, т. е.

$$\lim_{t\to 0 \;\; x\to x_0} u(x,t) = \varphi(x_0).$$

Решение поставленной задачи, основанное на методе разделения переменных имеет следующий вид:

$$u(x,t) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} G(x,\xi;t)\varphi(\xi)d\xi,$$

где

$$G(x,\xi;t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi a^2 t}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}}.$$

Функцию $G(x,\xi;t)$ определенную выше, часто называют фундаментальным решением уравнения теплопроводности.

Формула

$$u(x,t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{a^2 t}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}} \varphi(\xi)d\xi, \tag{3}$$

называемая интегралом Пуассона, для любой ограниченной функции $\mid \varphi(\xi) \mid < M$ представляет при $t > 0$ ограниченное решение уравнения теплопроводности, непрерывно примыкающее при $t = 0$ к $\varphi(x)$ во всех точках непрерывности этой функции.

Если начальное значение задается не при $t = 0$, а при $t = t_0$, то выражение для $u(x,t)$ приобретает вид

$$u(x,t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{a^2(t-t_0)}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2(t-t_0)}} \varphi(\xi)d\xi,$$

Единственность полученного решения для непрерывной функции $\varphi(x)$ следует из теоремы:
Решение уравнения теплопроводности

$$u_t = a^2 u_{xx} \qquad (0 < x < l, \;\; t > 0),$$

непрерывное в замкнутой области $0 \le x \le l, \;\; 0 \le t \le T$ и удовлетворяющее условиям

$$u(0,t) = u(l,t) = 0, \quad t \ge 0,$$
$$u(x,0) = \varphi(x), \qquad 0 \le x \le l,$$

где $\varphi(x)$ – произвольная непрерывная функция, обращающаяся в нуль при $x = 0$, $x = l$, определено однозначно и представляется формулой

$$u(x,t) = \int\limits_0^l G(x,\xi,t)\varphi(\xi)d\xi.$$

Пример 8.
Рассмотрим в качестве примера следующую задачу:
найти решение уравнения теплопроводности, если начальная температура (при $t = t_0 = 0$) имеет постоянные, но различные значения для $x > 0$ и $x < 0$, а именно:

$$u(x,0) = \varphi(x) = \begin{cases} T_1 & \text{для} \quad x > 0, \\ T_2 & \text{для} \quad x < 0. \end{cases}$$

Пользуясь формулой (3), получаем решение задачи в виде

$$u(x,t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{a^2 t}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}} \varphi(\xi) d\xi =$$

$$= \frac{T_2}{\sqrt{\pi}} \int\limits_{-\infty}^{0} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}} \frac{d\xi}{2\sqrt{a^2 t}} + \frac{T_1}{\sqrt{\pi}} \int\limits_{0}^{\infty} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}} \frac{d\xi}{2\sqrt{a^2 t}} =$$

$$= \frac{T_2}{\sqrt{\pi}} \int\limits_{-\infty}^{-\frac{x}{2\sqrt{a^2 t}}} e^{-\alpha^2} d\alpha + \frac{T_1}{\sqrt{\pi}} \int\limits_{-\frac{x}{2\sqrt{a^2 t}}}^{\infty} e^{-\alpha^2} d\alpha =$$

$$= \frac{T_1 + T_2}{2} + \frac{T_1 - T_2}{\sqrt{\pi}} \int\limits_0^{\frac{x}{2\sqrt{a^2 t}}} e^{-\alpha^2} d\alpha,$$

так как

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int\limits_{-\infty}^{-z} e^{-\alpha^2} d\alpha = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int\limits_{-\infty}^{0} e^{-\alpha^2} d\alpha - \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int\limits_0^z e^{-\alpha^2} d\alpha = \frac{1}{2} - \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int\limits_0^z e^{-\alpha^2} d\alpha$$

и

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int\limits_{-z}^{\infty} e^{-\alpha^2} d\alpha = \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int\limits_{-z}^{0} e^{-\alpha^2} d\alpha = \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int\limits_0^z e^{-\alpha^2} d\alpha \quad \left(z = \frac{x}{2\sqrt{a^2 t}}\right).$$

В частности, если

$$T_2 = 0, \quad T_1 = 1,$$

то

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int\limits_0^z e^{-\alpha^2} d\alpha\right) \quad \left(z = \frac{x}{2\sqrt{a^2 t}}\right).$$

Профиль температуры в заданный момент t дается кривой

$$f(z) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int\limits_0^z e^{-\alpha^2} d\alpha,$$

где z представляет абсциссу точки, в которой определяется температура, если за единицу длины, в зависимости от t, принимается значение $2\sqrt{a^2 t}$. Построение этой кривой не представляет труда, так как интеграл

$$\Phi(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int\limits_0^z e^{-\alpha^2} d\alpha,$$

называемый обычно интегралом ошибок, часто встречается в теории вероятностей и для него существуют подробные таблицы.

Формула (13) при произвольных T_1 и T_2 может быть записана в виде

$$u(x,t) = \frac{T_1 + T_2}{2} + \frac{T_1 - T_2}{2} \Phi\left(\frac{x}{2\sqrt{a^2 t}}\right).$$

Отсюда видно, что в точке $x = 0$ температура все время постоянна и равна полусумме начальных значений справа и слева, так как $\Phi(0) = 0$.

Решение неоднородного уравнения

$$u_t = a^2 u_{xx} + f(x,t) \qquad (-\infty < x < \infty, \;\; t > 0)$$

с нулевыми начальными условиями

$$u(x,0) = 0,$$

очевидно, должно представляться формулой

$$u(x,t) = \int\limits_0^t \int\limits_{-\infty}^{\infty} G(x,\xi,t-\tau) f(\xi,\tau) d\xi d\tau,$$

как то следует из смысла функции $G(x,\xi,t)$.

2.7 Первая краевая задача для полубесконечной прямой.

В тех случаях, когда интересуются распределением температуры вблизи одного из концов стержня, а влияние другого конца несущественно, принимают, что этот конец находится в бесконечности. Это приводит к задаче об определении решения уравнения теплопроводности

$$u_t = a^2 u_{xx}, \quad x > 0, \;\; t > 0$$

на полубесконечной прямой $x > 0$ для значений $t > 0$, удовлетворяющего начальному условию

$$u(x,0) = \varphi(x) \qquad (x > 0)$$

и граничному условию, которое, в зависимости от заданного характера граничного режима, берется в одном из следующих видов:

$$u(0,t) = \mu(t)$$

(первая краевая задача),

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0,t) = \nu(t)$$

(вторая краевая задача)
или

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0,t) = \lambda[u(0,t) - \theta(t)]$$

(третья краевая задача).

В дальнейшем мы ограничимся подробным исследованием только первой краевой задачи, заключающейся в отыскании решения уравнения теплопроводности при дополнительных условиях

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad u(0,t) = \mu(t). \tag{1}$$

Для того чтобы условия задачи определяли единственное решение, необходимо наложить некоторые условия в бесконечности. Потребуем в качестве дополнительного требования, чтобы функция $u(x,t)$ была всюду ограничена

$$| u(x,t) |< M \quad \textit{для} \;\; 0 < x < \infty \;\; \textit{и} \;\; t \geq 0,$$

где M – некоторая постоянная. Отсюда следует, что начальная функция $\varphi(x)$ должна также удовлетворять условию ограниченности

$$| \varphi |< M.$$

Решение поставленной задачи можно представить в виде суммы

$$u(x,t) = u_1(x,t) + u_2(x,t),$$

где $u_1(x,t)$ представляет влияние только начальных условий, а $u_2(x,t)$ – влияние только граничного условия. Эти функции можно определить как решения уравнения (1), удовлетворяющие условиям

$$u_1(x,0) = \varphi(x), \quad u_1(0,t) = 0 \tag{$1'$}$$

и

$$u_2(x,0) = 0, \quad u_2(0,t) = \mu(t). \tag{$1''$}$$

Очевидно, что сумма этих функций будет удовлетворять условиям (1). Сформулируем две леммы относительно функции $u(x,t)$, определяемой интегралом Пуассона,

$$u(x,t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{a^2 t}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}} \psi(\xi) d\xi. \tag{2}$$

1. Если функция $\psi(x)$ является нечетной функцией, т. е.

$$\psi(x) = -\psi(-x),$$

то функция (2)

$$u(x,t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{a^2 t}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}} \psi(\xi) d\xi$$

обращается в нуль при $x = 0$,

$$u(0,t) = 0.$$

При этом, конечно, предполагается, что интеграл, определяющий функцию $u(x,t)$, сходится, что имеет место, если $\psi(x)$ ограничена. Подынтегральная функция в интеграле

$$u(0,t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{a^2 t}} e^{-\frac{\xi^2}{4a^2 t}} \psi(\xi) d\xi$$

нечетна относительно ξ, так как является произведением нечетной функции на четную. Интеграл же от нечетной функции в пределах, симметричных относительно начала координат, равняется нулю; следовательно,

$$u(0,t) = 0,$$

что и доказывает лемму.

2. Если функция $\psi(x)$ является четной функцией, т. е.

$$\psi(x) = \psi(-x),$$

то производная функция $u(x,t)$ из формулы (2) равна нулю при $x = 0$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0,t) = 0$$

для всех $t > 0$.

Используя сформулированные леммы и некоторые преобразования, получим

$$u_1(x,t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int\limits_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt{a^2 t}} \left\{ e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}} - e^{-\frac{(x+\xi)^2}{4a^2 t}} \right\} \varphi(\xi) d\xi, \tag{3}$$

$$u_2(x,t) = \frac{a^2}{2\sqrt{\pi}} \int\limits_{t_0}^{t} \frac{x}{[a^2(t-\tau)]^{3/2}} e^{-\left[\frac{x^2}{4a^2(t-\tau)}\right]} \mu(\tau) d\tau. \tag{4}$$

Сумма функций

$$u_1(x,t) + u_2(x,t)$$

дает решение первой краевой задачи для полубесконечной прямой для однородного уравнения.

Пользуясь формулой

$$u(x,t) = \int\limits_0^t \int\limits_{-\infty}^{\infty} G(x,\xi,t-\tau) f(\xi,\tau) d\xi d\tau,$$

и принципом нечетного продолжения, нетрудно убедиться в том, что решение неоднородного уравнения

$$u_t = a^2 u_{xx} + f(x,t) \qquad (0 < x < \infty, \;\; t > 0)$$

при нулевом начальном и нулевом граничном условии $(u(0,t) = 0)$ дается формулой

$$u_3(x,t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int\limits_0^{\infty} \int\limits_0^{t} \frac{1}{\sqrt{a^2(t-\tau)}} \left\{ e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}} - e^{-\frac{(x+\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}} \right\} f(\xi,\tau) d\xi d\tau. \tag{5}$$

Сумма

$$u_1(x,t) + u_2(x,t) + u_3(x,t) = u(x,t)$$

дает решение первой краевой задачи

$$u_t = a^2 u_{xx} + f(x,t),$$

$$u(0,t) = \mu(t), \quad u(x,0) = \varphi(x)$$

Глава 3 ГИПЕРБОЛИЧЕСКОЕ УРАВНЕНИЕ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

3.1 Вывод гиперболического уравнения теплопроводности

Количество теплоты проходящее в единицу времени через единицу площади изотермической называется плотностью теплового потока. Пусть $U(x, y)$ температура теплового поля точки x в момент времени t. Эмпирический закон Фурье имеет вид

$$q(x,t) = -kU_x(x,t).$$

Обобщенный закон Фурье записывается следующим образом

$$q(x,t+\tau) = -kU_x(x,t), \tag{1}$$

где τ – время релоксации. Предпологая, что функция $q(x, t+\tau)$ дважды непрерывно – дифференцируема по t в интервале $t,\ t+\tau$, разложим ее по формуле Тейлора:

$$q(x,t+\tau) = q(x,t) + \tau\frac{\partial q}{\partial t}(x,t) + \frac{\tau^2}{2!}\frac{\partial^2 q}{\partial t^2}(x,t) + \Theta(\tau),$$

где $0 < \Theta < 1$. Пренебрегая величиной остаточного члена, закон (1) запишем в виде

$$q(x,t) + \tau\frac{\partial q}{\partial t}(x,t) = -kU_x(x,t). \tag{2}$$

Для решения этого уравнения относительно $q(x,t)$ представим q как произведение двух функций $q = W\ \ V$ с непрерывными частными производными первого порядка. Подставляя это выражение в (2) получим

$$W\ V + \tau\frac{\partial W}{\partial t}V + \tau\frac{\partial V}{\partial t}W = -kU_x(x,t)$$

или

$$W\Big(V + \tau\frac{\partial V}{\partial t}\Big) + \tau\frac{\partial W}{\partial t}V = -kU_x(x,t).$$

Для того, чтобы найти V решаем уравнение $V + \tau\frac{\partial V}{\partial t} = 0$ методом разделения переменных и получаем $V = e^{-\frac{t}{\tau}}$ и подставляя V в исходное уравнение $\tau\frac{\partial W}{\partial t}e^{-\frac{t}{\tau}} = -kU_x(x,t)$ получаем

$$W = -\frac{k}{\tau}\int\limits_0^t e^{\frac{\Theta}{\tau}}U_x(x,\Theta)d\Theta$$

Следовательно

$$q = -\frac{k}{\tau}\int\limits_0^t e^{\frac{\Theta-t}{\tau}}U_x(x,\Theta)d\Theta \tag{3}$$

Получили плотность теплового потока, равное количеству тепла проходящего за единицу времени единицу площади. Количество тепла, протекающее через сечение x за промежуток времени $(t, t+dt)$ равно

$$dQ = qSdt,$$

где $q = -\frac{k}{\tau}\int\limits_0^t e^{\frac{\Theta-t}{\tau}}U_x(x,\Theta)d\Theta$.

Можно придать интегральную форму

$$Q = -S\int\limits_{t_1}^{t_2} -\frac{k}{\tau}\int\limits_0^t e^{\frac{\Theta-t}{\tau}}U_x(x,\Theta)d\Theta d\tau. \tag{4}$$

Если стержень неоднороден, то k – функция от x.

Количество тепла, которое необходимо сообщить однородному телу, чтобы повысить его температуру на ΔU равно

$$Q = cm\Delta U = c\rho S\Delta x\Delta U,$$

где c – удельная теплоемкость, m – масса тела, ρ – плотность, S – площадь.

Если изменение температуры имеет различную величину на разных участках стержня или если стержень неоднороден, то

$$Q = \int\limits_{x_1}^{x_2} c\rho S\Delta U(x)dx. \tag{5}$$

Внутри стержня может возникать и поглащаться тепло. Выделение тепла может быть охарактеризовано объемной плотностью тепловых источников $F(x,t)$ в точке x в момент t. В результате действий этих источников на участке стержня $(x, x+dx)$ за промежуток времени $(t, t+dt)$ выделяется количество тепла

$$Q = SF(x,t)dxdt.$$

В нашем случае мы считаем, что внутренних источников нет. Уравнение теплопроводности получается при подсчете баланса тепла на некотором отрезке (x_1, x_2) за некоторый промежуток времени (t_1, t_2).

Применяя закон сохранения энергии и пользуясь формулами (4) и (5) можно написать равенство

$$\int\limits_{t_1}^{t_2}\Bigg[-\frac{k}{\tau}\int\limits_0^t e^{\frac{\Theta-t}{\tau}}U_x(x,\Theta)d\Theta|_{x=x_2}+\frac{k}{\tau}\int\limits_0^t e^{\frac{\Theta-t}{\tau}}U_x(x,\Theta)d\Theta|_{x=x_1}\Bigg]d\tau =$$

$$= \int\limits_{x_1}^{x_2} c\rho\Big[U(\xi,t_2)-U(\xi,t_1)\Big]d\xi. \qquad (6)$$

Чтобы получить уравнение теплопроводности в дифференциальной форме, предположим, что функция $U(x,t)$ имеет непрерывные производные U_{xx}, U_t, U_{tt}. Пользуясь теоремой о среднем получаем равенство

$$\Bigg[-\frac{k}{\tau}\int\limits_0^t e^{\frac{\Theta-t}{\tau}}U_x(x,\Theta)d\Theta|_{x=x_2}+\frac{k}{\tau}\int\limits_0^t e^{\frac{\Theta-t}{\tau}}U_x(x,\Theta)d\Theta|_{x=x_1}\Bigg]|_{t=t_3}\Delta t =$$

$$= \Big(c\rho\Big[U(\xi,t_2)-U(\xi,t_1)\Big]\Big)|_{\xi=x_3}\Delta x, \qquad (7)$$

которое при помощи теоремы о конечных приращениях можно преобразовать к виду

$$\frac{\partial}{\partial x}\Big[-\frac{k}{\tau}\int\limits_0^t e^{\frac{\Theta-t}{\tau}}U_x(x,\Theta)d\Theta\Big]_{x=x_5 \quad t=t_3}\Delta x\Delta t = \Big[c\rho\frac{\partial U}{\partial t}(x,t)\Big]_{x=x_5 \quad t=t_3}\Delta x\Delta t$$

где $t_3,\ t_4,\ t_5,\ x_3,\ x_4,\ x_5$ – промежуточные точки интервалов (t_1, t_2) и (x_1, x_2). Отсюда после сокращения на произведения $\Delta x \Delta t$ находим

$$\frac{\partial}{\partial x}\Big[-\frac{k}{\tau}\int\limits_0^t e^{\frac{\Theta-t}{\tau}}U_x(x,\Theta)d\Theta\Big]_{x=x_5\quad t=t_3} = \left[c\rho\frac{\partial U}{\partial t}(x,t)\right]_{x=x_5\quad t=t_3}.$$

Все эти рассуждения относятся к произвольным промежуткам (x_1, x_2) и (t_1, t_2). Переходя к пределу при $x_1,\ x_2 \to x$ и $t_1,\ t_2 \to t$, получим уравнение

$$\frac{\partial}{\partial x}\Big[-\frac{k}{\tau}\int\limits_0^t e^{\frac{\Theta-t}{\tau}}U_x(x,\Theta)d\Theta\Big] = \left[c\rho\frac{\partial U}{\partial t}(x,t)\right]$$

преобразуем это выражение

$$-\frac{k}{\tau}\int\limits_0^t e^{\frac{\Theta-t}{\tau}}U_{xx}(x,\Theta)d\Theta = c\rho\frac{\partial U}{\partial t}(x,t),$$

$$-\frac{k}{\tau}\int\limits_0^t e^{\frac{\Theta}{\tau}}U_{xx}(x,\Theta)d\Theta = c\rho e^{\frac{t}{\tau}}\frac{\partial U}{\partial t}(x,t),$$

$$-\frac{k}{\tau}\int\limits_0^t e^{\frac{\Theta}{\tau}}U_{xx}(x,\Theta)d\Theta = -\frac{c\rho}{\tau}\int\limits_0^t e^{\frac{t}{\tau}}\Big[\frac{\partial U}{\partial t}(x,\Theta) + \tau\frac{\partial^2 U}{\partial t}(x,\Theta^2)\Big]d\Theta,$$

$$-\frac{c\rho}{\tau}U_t - c\rho U_{tt} = -\frac{k}{\tau}U_{xx}$$

$$U_t + \tau U_{tt} = a^2 U_{xx}, \qquad (8)$$

где $a^2 = \frac{k}{c\rho}$, (8) уравнение теплопроводности.

3.2 Типы краевых задач для уравнения теплопроводности

Первая краевая задача.

Рассматриваются граничные условия I рода. Задается распределение температуры на поверхности тела для каждого момента времени.

В области $\Omega = \{(x, y): \ 0 < x < l, \ t > 0\}$ найти регулярное решение уравнения (8) непрерывное в $\bar{\Omega}$, имеющее непрерывную производную первого порядка U_t при $t = 0$ удовлетворяющее условиям

$$U(x, 0) = \varphi(x), \quad 0 \le x \le l, \tag{9}$$

$$U_t(x, 0) = 0, \quad 0 < x < l, \tag{10}$$

$$U(0, t) = \mu_1(t), \quad t > 0, \tag{11}$$

$$U(l, t) = \mu_2(t), \quad t > 0, \tag{12}$$

где $\varphi(x), \ \mu_1(t), \ \mu_2(t)$ – заданные функции.

Вторая краевая задача.

Задаются граничные условия второго рода. При этом задаются значения теплового потока для каждой точки поверхности тела и любого момента времени.

В области $\Omega = \{(x, y): \ 0 < x < l, \ t > 0\}$ найти регулярное решение уравнения (8) непрерывное в $\bar{\Omega}$, имеющее непрерывную производную первого порядка U_t при $t = 0$ удовлетворяющее условиям

$$U(x, 0) = \varphi(x), \quad 0 \le x \le l, \tag{13}$$

$$U_t(x, 0) = \psi(x), \quad 0 < x < l, \tag{14}$$

$$-\frac{k}{\tau} \int\limits_0^t e^{\frac{\Theta - t}{\tau}} U_x(0, \Theta) d\Theta = \mu_1(t), \quad t > 0, \tag{15}$$

$$-\frac{k}{\tau} \int\limits_0^t e^{\frac{\Theta - t}{\tau}} U_x(l, \Theta) d\Theta = \mu_2(t), \quad t > 0, \tag{16}$$

где $\varphi(x), \ \psi(x), \ \mu_1(t), \ \mu_2(t)$ – заданные функции.

Третья краевая задача.

Задаются граничные условия третьего рода. При этом задаются температура окружающей среды и закон теплообмена между поверхностью тела и окружающей средой. Граничное условие третьего рода характеризует закон теплообмена между поверхностью и окружающей средой в процессе охлаждения и нагревания тела. Для описания процесса теплообмена между поверхностью тела и средой используется закон Ньютона.

В области $\Omega = \{(x,y):\ 0 < x < l,\ t > 0\}$ найти регулярное решение уравнения (8) непрерывное в $\bar{\Omega}$, имеющее непрерывную производную первого порядка U_t при $t = 0$ удовлетворяющее условиям

$$U(x,0) = \varphi(x), \quad 0 \le x \le l, \tag{17}$$

$$U_t(x,0) = 0, \quad 0 < x < l, \tag{18}$$

$$-\frac{k}{\tau}\int\limits_0^t e^{\frac{\Theta-t}{\tau}} U_x(0,\Theta)d\Theta + \alpha_1 u(0,t) = \mu_1(t), \quad t > 0, \tag{19}$$

$$-\frac{k}{\tau}\int\limits_0^t e^{\frac{\Theta-t}{\tau}} U_x(l,\Theta)d\Theta + \alpha_2 u(l,t) = \mu_2(t), \quad t > 0, \tag{20}$$

где $\alpha_1, \quad \alpha_2$ – заданные числа, а $\varphi(x),\ \mu_1(t),\ \mu_2(t)$ – заданные функции.

Глава 4. УРАВНЕНИЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО ТИПА

4.1 Постановка краевых задач. При исследовании стационарных процессов различной физической природы (колебания, теплопроводность, диффузия и др.) обычно приходят к уравнениям эллиптического типа. Наиболее распространенным уравнением этого типа является уравнение Лапласа

$$\Delta u = 0. \tag{1}$$

Функция u называется гармонической в области T, если она непрерывна в этой области вместе со своими производными до 2-го порядка и удовлетворяет уравнению Лапласа.

Неоднородное уравнение Лапласа часто называют уравнением Пуассона.

При изучении свойств гармонических функций были разработаны различные математические методы, оказавшиеся плодотворными и в применении к уравнениям гиперболического и параболического типов.

Рассмотрим некоторый объем T, ограниченный поверхностью Σ. Задача о стационарном распределении температуры $u(x, y, z)$ внутри тела T формулируется следующим образом:

найти функцию $u(x, y, z)$, удовлетворяющую внутри T уравнению

$$\Delta u = -f(x, y, z) \tag{2}$$

и граничному условию, которое может быть взято в одном из следующих видов:

$$I. \;\; u = f_1 \;\; \text{на} \;\; \Sigma$$

(первая краевая задача),

$$II. \;\; \frac{\partial u}{\partial n} = f_2 \;\; \text{на} \;\; \Sigma$$

(вторая краевая задача),

$$III. \;\; \frac{\partial u}{\partial n} + h(u - f_3) = 0 \;\; \text{на} \;\; \Sigma$$

(третья краевая задача),
где f_1, f_2, f_3, h – заданные функции, $\frac{\partial u}{\partial n}$ – производная по внешней нормали к поверхности Σ.

Первую краевую задачу для уравнения Лапласа часто называют задачей Дирихле, а вторую задачу – задачей Неймана.

Если ищется решение в области T_0, внутренней (или внешней) по отношению к поверхности Σ, то соответствующую задачу называют внутренней (или внешней) краевой задачей.

Потенциальное течение жидкости, потенциал стационарного тока и электростатического поля удовлетворяют уравнению Лапласа.

4.2 Уравнение Лапласа в криволинейной системе координат.

Пусть в пространстве вместо декартовых координат x, y, z введены криволинейные координаты $q_1,\ q_2,\ q_3$ с помощью соотношений

$$q_1 = f_1(x,t,z), \quad q_2 = f_2(x,t,z), \quad q_3 = f_3(x,t,z), \tag{3}$$

разрешая которые относительно x, y, z, можно написать

$$x = \varphi_1(q_1,q_2,q_3), \quad y = \varphi_2(q_1,q_2,q_3), \quad z = \varphi_3(q_1,q_2,q_3). \tag{4}$$

Уравнение Лапласа $\Delta u = 0$ в ортогональных, криволинейных координатах $q_1,\ q_2$ и q_3 записывается следующим образом:

$$\Delta u = \frac{1}{H_1H_2H_3}\Big[\frac{\partial}{\partial q_1}\Big(\frac{H_2H_3}{H_1}\frac{\partial u}{\partial q_1}\Big) + \frac{\partial}{\partial q_2}\Big(\frac{H_3H_1}{H_2}\frac{\partial u}{\partial q_2}\Big) +$$

$$+\frac{\partial}{\partial q_3}\Big(\frac{H_1H_2}{H_3}\frac{\partial u}{\partial q_3}\Big)\Big] = 0 \tag{5}$$

где

$$\begin{cases} H_1^2 = \left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial q_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi_2}{\partial q_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi_3}{\partial q_1}\right)^2, \\ H_2^2 = \left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial q_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi_2}{\partial q_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi_3}{\partial q_2}\right)^2, \\ H_3^2 = \left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial q_3}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi_2}{\partial q_3}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi_3}{\partial q_3}\right)^2. \end{cases} \tag{6}$$

Рассмотрим два частных случая.

1. Сферические координаты. В этом случае $q_1 = r,\ q_2 = \theta,\ q_3 = \varphi$, и формулы преобразования (4) принимают вид

$$x = r\sin\theta\cos\varphi, \quad y = r\sin\theta\sin\varphi, \quad z = r\cos\theta.$$

$$H_1 = 1, \quad H_2 = r, \quad H_3 = r \sin\theta.$$

Уравнение Лапласа в сферических координатах имеет вид

$$\frac{1}{r^2 \sin\theta}\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \sin\theta \frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta \frac{\partial u}{\partial \theta}\right) + \frac{\partial}{\partial \varphi}\left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial u}{\partial \varphi}\right)\right] = 0$$

или

$$\Delta_{r,\theta,\varphi} u = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2 \sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta \frac{\partial u}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{r^2 \sin^2\theta}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} = 0. \qquad (7)$$

2. Цилиндрические координаты.

В этом случае $q_1 = \rho$, $q_3 = z$, $q_2 = \varphi$,

$$x = \rho \cos\varphi, \quad y = \rho \sin\varphi, \quad z = z,$$

так что

$$H_1 = 1, \quad H_2 = \rho, \quad H_3 = 1.$$

Уравнение Лапласа в цилиндрических координатах принимает вид

$$\Delta_{\rho,\varphi,z} u = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}\left(\rho \frac{\partial u}{\partial \rho}\right) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0. \qquad (8)$$

Если искомая функция u не зависит от z, то уравнение упрощается:

$$\Delta_{\rho,\varphi} u = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}\left(\rho \frac{\partial u}{\partial \rho}\right) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} = 0.$$

Примеры частных решении уравнения Лапласа.

Большой интерес представляют решения уравнения Лапласа, обладающие сферической или цилиндрической симметрией, т. е. зависящие только от одной переменной r или ρ.

Решение уравнения Лапласа $u = U(r)$, обладающее сферической симметрией, будет определяться из обыкновенного дифференциального уравнения

$$\frac{d}{dr}\left(r^2 \frac{dU}{dr}\right) = 0.$$

Интегрируя это уравнение, находим:

$$U = \frac{C_1}{r} + C_2,$$

где C_1 и C_2 – произвольные постоянные. Полагая например, $C_1 = 1$, $C_2 = 0$, получаем функцию

$$U_0 = \frac{1}{r},$$

которую часто называют фундаментальным решением уравнения Лапласа в пространстве.

Аналогично, полагая

$$u = U(\rho)$$

найдем решение, обладающее цилиндрической или круговой симметрией (в случае двух независимых переменных), в виде

$$U(\rho) = C_1 ln\ \rho + C_2.$$

Выбирая $C_1 = -1$ и $C_2 = 0$,

$$U_0 = ln\frac{1}{\rho},$$

функцию $U_0(\rho)$ часто наэывают фундаментальным решением уравнения Лапласа на плоскости (для двух независимых переменных).

4.3 Гармонические функции и аналитические функции комплексного переменного

Весьма общим методом решения двумерных задач для уравнения Лапласа является метод, использующий функции комплексного переменного.

Пусть

$$w = f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$$

– некоторая функция комплексного переменного $z = x + iy$, причем u и v являются вещественными функциями переменных x и y. Наибольший интерес представляют так называемые аналитические функции, для которых существует производная

$$\frac{dw}{dz} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta w}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z}.$$

Приращение $\Delta z = \Delta x + i\Delta y$, очевидно, может стремиться к нулю многими

способами. Для каждого из способов стремления приращения функции к нулю, говоря, может получиться свое значение предела. Однако если функция $w = f(z)$ аналитическая, то предел

$$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta z} = f'(z)$$

не зависит от выбора пути.

Необходимыми и достаточными условиями аналитичности функции являются так называемые условия Коши – Римана

$$\begin{cases} u_x = v_y, \\ u_y = -v_x. \end{cases}$$

Дифференцируя первое равенство формулы по x, а второе по y, получим:

$$u_{xx} + u_{yy} = 0 \quad \text{\textit{или}} \;\; \Delta_2 v = 0.$$

Подобным же образом, меняя порядок дифференцирования, находим:

$$v_{xx} + v_{yy} = 0 \quad \text{\textit{или}} \;\; \Delta_2 u = 0.$$

Таким образом, действительная и мнимая части аналитической функции удовлетворяют уравнению Лапласа. Обычно говорят, что u и v, удовлетворяющие условию Коши – Римана, являются сопряженными гармоническими функциями.

4.4 Формулы Грина. Интегральное представление решения.

При изучении уравнений эллиптического типа мы часто будем пользоваться формулами Грина, являющимися прямым следствием формулы Остроградского.

Формула Остроградского в простейшем случае имеет вид

$$\int\int_T\int \frac{\partial R}{\partial z} dxdydz = \int_\Sigma\int R\cos\gamma d\sigma, \qquad (1)$$

где T – некоторый объем, ограниченный достаточно гладкой поверхностью Σ, $R(x, y, t)$ – произвольная функция, непрерывная внутри $T + \Sigma$

и имеющая непрерывные производные внутри T, γ – угол между направлением оси z и внешней нормалью к Σ. В справедливости этой формулы нетрудно убедиться, выполняя интегрирование по t.

Формулу Остроградского обычно записывают в виде

$$\int\int_T\int\Big(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\Big)d\tau=\int_\Sigma\int\{P\cos\alpha+Q\cos\beta+R\cos\gamma\}d\sigma, \quad (2)$$

где $d\tau = dxdydz$ – элемент объема, $\alpha = \widehat{nx}, \beta = \widehat{ny},\ \gamma = \widehat{nz}$ – углы внешней нормали n к поверхности Σ с координатными осями, $P,\ Q, R$ – произвольные дифференцируемые функции.

Если $P,\ Q, R$ рассматривать как компоненты некоторого вектора $A = Pi + Qj + Rk$, то формулу Остроградского (2) можно записать следующим образом:

$$\int\int_T\int div\ A\ d\tau=\int_\Sigma\int A_n d\sigma, \qquad (2')$$

где

$$div\ A=\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}$$

и

$$A_n = P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma$$

– составляющая вектора A вдоль внешней нормали.

Пусть $u = u(x, y, z)$ и $v = v(x, y, z)$ – функции, непрерывные вместе со своими первыми производными внутри $T + \Sigma$ и имеющие непрерывные вторые производные внутри T.

Полагая

$$P=u\frac{\partial v}{\partial x},\quad Q=u\frac{\partial v}{\partial y},\quad R=u\frac{\partial v}{\partial z}$$

и пользуясь формулой Остроградского (2'), приходим к так называемой первой формуле Грина

$$\int\int_T\int u\Delta v d\tau=\int_\Sigma\int u\frac{\partial v}{\partial n}d\sigma-\int\int_T\int\Big(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial v}{\partial z}\Big)d\tau, \quad (3)$$

где $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ – оператор Лапласа, $\cos\alpha\frac{\partial}{\partial x} + \cos\beta\frac{\partial}{\partial y} + \cos\gamma\frac{\partial}{\partial z}$ – производная по направлению внешней нормали.

Учитывая соотношение

$$grad\ u\ grad\ v = \bigtriangledown u\ \bigtriangledown v = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial v}{\partial z},$$

получаем вторую формулу Грина

$$\int\int_T\int (u\Delta v - v\Delta u)d\tau = \int_\Sigma\int \Big(u\frac{\partial v}{\partial n} - v\frac{\partial u}{\partial n}\Big)d\sigma. \qquad (5)$$

Область T может быть ограничена несколькими поверхностями. Формулы Грина применимы и в этом случае, причем поверхностные интегралы следует брать по всем поверхностям, ограничивающим область T.

Для функций $u = u(x,y), v = v(x,y)$ двух переменных имеют место аналогичные формулы Грина. Вторая формула Грина в области S с границей C имеет вид

$$\int_S\int (u\Delta_2 v - v\Delta_2 u)dS = \int_C \Big(u\frac{\partial v}{\partial n} - v\frac{\partial u}{\partial n}\Big)ds,$$

где $dS = dxdy$, ds – элемент дуги вдоль C, $\Delta_2 v = v_{xx} + v_{yy}$, $\frac{\partial}{\partial n}$ – производная по направлению внешней к контуру C нормали n.

4.5 Решение краевых задач для простейших областей методом разделения переменных

Решение краевых задач для уравнений Лапласа может быть найдено методом разделения переменных в случае некоторых простейших областей (круг, прямоугольник, шар и цилиндр и др.). Получающиеся при этом задачи на собственные значения (задачи Штурма – Лиувилля) приводят к различным классам специальных функций. В этом пункте мы рассмотрим задачи Дирихле (внутреннюю и внешнюю), при решении которых используются только тригонометрические функции.

Первая краевая задача для круга.

Решим первую краевую задачу для круга:
найти функцию u, удовлетворяющую уравнению:

$$\Delta u = 0 \quad \textit{внутри круга} \tag{1}$$

и граничному условию

$$u = f \quad \textit{на границе круга} \tag{2}$$

где f – заданная функция.

Введем полярную систему координат (ρ, φ) с началом в центре круга. Уравнение (1) в полярных координатах имеет вид

$$\Delta u = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}\Big(\rho \frac{\partial u}{\partial \rho}\Big) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} = 0 \tag{3}$$

Будем решать задачу методом разделения переменных, т. е. будем искать частное решение уравнения (1), вида

$$u(\rho, \varphi) = R(\rho)\varPhi(\varphi) \not\equiv 0.$$

Подставляя предполагаемую форму решения в уравнение (3), получим

$$\frac{\frac{d}{d\rho}\Big(\rho\frac{dR}{d\rho}\Big)}{\frac{R}{\rho}} = -\frac{\varPhi''}{\varPhi} = \lambda,$$

где $\lambda = const$. Отсюда получаем два уравнения:

$$\varPhi'' + \lambda\varPhi = 0, \quad \varPhi \not\equiv 0, \tag{4}$$

$$\rho\frac{d}{d\rho}\Big(\rho\frac{dR}{d\rho}\Big) - \lambda R = 0, \quad R \not\equiv 0. \tag{5}$$

Первое из этих уравнений дает:

$$\varPhi(\varphi) = A\cos\sqrt{\lambda}\varphi + B\sin\sqrt{\lambda}\varphi.$$

Заметим, что при изменении угла φ на величину 2π однозначная функция $u(\rho, \varphi)$ должна вернуться к исходному значению

$$u(\rho, \varphi + 2\pi) = u(\rho, \varphi)$$

(условие периодичности).
Отсюда следует, что $\Phi(\varphi + 2\pi) = \Phi(\varphi)$, т. е. $\Phi(\varphi)$ является периодической функцией угла φ с периодом 2π. Это возможно только, если $\sqrt{\lambda} = n$, где n – целое число, и

$$\Phi_n(\varphi) = A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi.$$

Функцию $R(\rho)$ будем искать в виде $R(\rho) = \rho^\mu$. Подставляя в уравнение (5) и сокращая на ρ^μ, найдем:

$$n^2 = \mu^2 \;\; \textit{или} \;\; \mu = \pm n \;\; (n > 0).$$

Следовательно,

$$R(\rho) = C\rho^n + D\rho^{-n},$$

где C и D – постоянные.

Для решения внутренней задачи надо положить $R = C\rho^n (\mu = n)$, так как, если $D \neq 0$, то функция $u = R(\rho)\Phi(\varphi)$ обращается в бесконечность при $\rho = 0$ и не является гармонической функцией внутри круга.

Для решения внешней задачи, наоборот, надо брать $R = D\rho^{-n}$ $(\mu = -n)$, так как решение внешней задачи должно быть ограничено в бесконечности.

Итак, частные решения нашей задачи найдены:

$$u_n(\rho, \varphi) = \rho^n (A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi) \textit{для} \;\; \rho \le a,$$

$$u_n(\rho, \varphi) = \frac{1}{\rho^n} (A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi) \textit{для} \;\; \rho \ge a.$$

Суммы этих решений

$$u(\rho, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} \rho^n (A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi)$$

для внутренней задачи,

$$u(\rho, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\rho^n} (A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi)$$

для внешней задачи
при достаточно хорошей сходимости также будут гармоническими функциями.

Для определения коэффициентов A_n и B_n используем граничное условие

$$u(a, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} a^n (A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi) = f. \tag{6}$$

Считая, что f задана как функция угла φ, возьмем ее разложение в ряд Фурье

$$f(\varphi) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (\alpha_n \cos n\varphi + \beta_n \sin n\varphi), \tag{7}$$

где

$$\alpha_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\psi) d\psi,$$

$$\alpha_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\psi) \cos n\psi d\psi \qquad (n = 1, 2, ...),$$

$$\beta_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\psi) \sin n\psi d\psi \qquad (n = 1, 2, ...).$$

Сравнивая ряды (6) и (7), получаем:

$$A_0 = \frac{\alpha_0}{2}, \qquad A_n = \frac{\alpha_n}{a^n}, \quad B_n = \frac{\beta_n}{a^n}$$

для внутренней задачи,

$$A_0 = \frac{\alpha_0}{2}, \qquad A_n = \alpha_n a^n, \quad B_n = a^n \beta_n$$

для внешней задачи.

Таким образом, получено решение первой внутренней задачи для круга в виде ряда

$$u(\rho, \varphi) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\rho}{a}\right)^n (\alpha_n \cos n\varphi + \beta_n \sin n\varphi), \tag{8}$$

а решение внешней задачи в виде

$$u(\rho, \varphi) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a}{\rho}\right)^n (\alpha_n \cos n\varphi + \beta_n \sin n\varphi), \tag{9}$$

Пример 9.

Решить задачу Дирихле для уравнения Лапласа в круге $0 \leq r < 1$, $0 \leq \varphi < 2\pi$ (r, φ – полярные координаты), на границе которого искомая функция $u(r,\ \varphi)$ имеет значение

$$u(1, \varphi) = \sin^3 \varphi.$$

Решение

$$u(1, \varphi) = \sin^3 \varphi = \frac{3}{4} \sin \varphi - \frac{1}{4} \sin 3\varphi.$$

Используя формулу

$$u(r, \varphi) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \rho^n \Big(\alpha_n \cos n\varphi + \beta_n \sin n\varphi)$$

получим

$$u(1, \varphi) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \Big(\alpha_n \cos n\varphi + \beta_n \sin n\varphi) = \frac{3}{4} \sin \varphi - \frac{1}{4} \sin 3\varphi.$$

Следовательно,

$$A_0 = 0, \quad \beta_1 = \frac{3}{4}, \quad \beta_2 = 0, \quad \beta_3 = -\frac{1}{4},$$

$$\beta_n = 0, \quad (n = 4, 5, 6, ...), \quad \alpha_n = 0, \quad (n = 1, 2, 3, ...).$$

Исходя из общего решения получим

$$u(r, \varphi) = \frac{3}{4} r \sin \varphi - \frac{1}{4} r^3 \sin 3\varphi.$$

4.6 Интеграл Пуассона.

Преобразуем теперь формулы (8) и (9) к более простому виду. Для определенности рассмотрим внутреннюю задачу, а для внешней напишем результат по аналогии.

Подставляя выражения для коэффициентов Фурье в формулу (8) и меняя порядок суммирования и интегрирования, будем иметь:

$$u(\rho,\varphi) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(\psi)\left[\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\rho}{a}\right)^n (\cos n\psi\ \cos n\varphi + \sin n\psi\ \sin n\varphi)\right] d\psi =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(\psi)\left[\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\rho}{a}\right)^n \cos n(\varphi-\psi)\right] d\psi \qquad (12)$$

Произведем следующие тождественные преобразования:

$$\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} t^n \cos n(\varphi - \psi) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} t^n [e^{in(\varphi-\psi)} + e^{-in(\varphi-\psi)}] =$$

$$= \frac{1}{2}\left[1 + \sum_{n=1}^{\infty}[(te^{i(\varphi-\psi)})^n + (te^{-i(\varphi-\psi)})^n]\right] = \frac{1}{2}\left[1 + \frac{te^{i(\varphi-\psi)}}{1-te^{i(\varphi-\psi)}} + \frac{te^{-i(\varphi-\psi)}}{1-te^{-i(\varphi-\psi)}}\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\frac{1-t^2}{1-2t\cos(\varphi-\psi)+t^2} \qquad \left(t = \frac{\rho}{a} < 1\right).$$

Подставляя полученные результаты в равенство (12), получаем:

$$u(\rho,\varphi) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(\psi)\frac{a^2-\rho^2}{\rho^2 - 2\rho a\cos(\varphi-\psi) + a^2} d\psi. \qquad (13)$$

Полученная формула, дающая решение первой краевой задачи внутри круга, называется интегралом Пуассона, а подинтегральное выражение

$$K(\rho,\varphi,a,\psi) = \frac{a^2-\rho^2}{\rho^2 - 2\rho a\cos(\varphi-\psi) + a^2} d\psi$$

– ядром Пуассона. Отметим, что $K(\rho,\varphi,a,\psi) > 0$ при $\rho < a$, так как $2a\rho < a^2 + \rho^2$, если $\rho \neq a$.

Функция, определенная формулой

$$u(\rho,\varphi) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(\psi)\frac{a^2-\rho^2}{\rho^2-2\rho a\cos(\varphi-\psi)+a^2} d\psi & \text{при } \rho < a, \\ f(\varphi) & \text{при } \rho = a, \end{cases} \qquad (13')$$

удовлетворяет уравнению $\Delta u = 0$ при $\rho < a$, непрерывна в замкнутой области, включая окружность $\rho = a$. Решение внешней краевой задачи, очевидно, имеет вид

$$u(\rho,\varphi) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(\psi)\frac{\rho^2-a^2}{\rho^2-2\rho\cos(\varphi-\psi)+a^2}d\psi & при \;\; \rho > a, \\ f(\varphi) \quad при \;\; \rho = a, \end{cases} \tag{14}$$

Интеграл Пуассона дает решение первой краевой задачи и в том случае, когда функция $f(\varphi)$ только непрерывна.

Глава 5. МЕТОД КОНЕЧНЫХ РАЗНОСТЕЙ НАХОЖДЕНИЯ ПРИБЛИЖЕННЫХ РЕШЕНИЙ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

В основе решения уравнений в частных производных методом конечных разностей лежит конечно – разностная аппроксимация производных.

Аппроксимация осуществляется в три этапа. Сначала в области решения вводят, как правило, равномерную сетку «узловых точек», соответствующую характеру задачи и граничным условиям.

Затем решаемое уравнение в частных производных записывают в наиболее удобной системе координат и, представляя производные в конечно-разностной форме, приводят к виду разностного уравнения. Затем разностное уравнение записывают для всех узлов сетки и получают в результате систему из n уравнений с n неизвестными. И, наконец, полученную систему из n уравнений с n неизвестными решают одним из численных методов.

Если исходное дифференциальное уравнение линейное (нелинейное), то полученная система уравнений также линейна (нелинейна).

Матрицы коэффициентов системы содержат много нулевых элементов, т.к. в большинстве вычислительных схем используются несколько соседних узлов, а не все узлы сетки. Такие матрицы называют «разряженными». Методы решения таких систем делятся на прямые и итерационные.

Прямые методы позволяют получить точное решение, выполнив конечное число итераций. Примером прямого метода может служить правило Крамера для решения систем совместных линейных алгебраических уравнений. Обычно для больших систем уравнений прямые методы неэффективны, т.к. при их применении требуется выполнение огромного объема памяти ЭВМ. Поэтому чаще пользуются итерационными методами.

Сущность итерационных методов заключается в многократном повторении одного и того же простого алгоритма, который дает результат, постепенно приближающийся к точному решению.

Поясним вышеприведенные рассуждения на конкретном примере.

С этой целью решим нижеследующую задачу методом конечных разностей:

Требуется найти стационарное распределение температуры в квадратной пластине, для которой заданы следующие граничные условия:

$$x = 0, \qquad T = 0,$$

$$x = 1.0, \qquad T = 100,$$

$$y = 0, \qquad T = 100x,$$

$$y = 1.0, \qquad T = 100x^2.$$

Распределение температуры в подобных случаях, как известно, описывается уравнением Лапласа с двумя независимыми переменными:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0 \tag{1}$$

Введем равномерную сетку:

$$x = ih, \quad y = jh \quad (i = 1, 2, ..., N; \quad j = 1, 2, ..., N)$$

Значение искомой функции в точке (ih, jh) обозначим через $T_{i,j}$.

Разложение по формуле Тейлора функции $T(x, y) \in C^{(4)}$ в окрестности точки (ih, jh) имеет вид:

$$T(x,y) = T_{i,j} + \frac{\partial T}{\partial x}(ih, jh)(x - ih) + \frac{\partial T}{\partial y}(ih, jh)(y - jh) +$$

$$+\frac{1}{2!}\left[\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}(ih, jh)(x - ih)^2 + 2\frac{\partial^2 T}{\partial x \partial y}(ih, jh)(x - ih)(y - jh) + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}(ih, jh)(y - jh)^2\right] +$$

$$+\frac{1}{3!}\left[\frac{\partial^3 T}{\partial x^3}(ih, jh)(x - ih)^3 + 3\frac{\partial^3 T}{\partial x^2 \partial y}(ih, jh)(x - ih)^2(y - jh) +\right.$$

$$\left. +3\frac{\partial^3 T}{\partial x \partial y^2}(ih, jh)(x - ih)(y - jh)^2 + \frac{\partial^3 T}{\partial y^3}(ih, jh)(y - jh)^3\right] + R_h(x, y), \tag{2}$$

где $R_h(x, y)$ – остаточный член, имеющий порядок $O(h^4)$.

Применяя (2) для вычисления $T_{i+1,j}$ и $T_{i-1,j}$ получим

$$T_{i+1,j} = T_{i,j}+\frac{\partial T}{\partial x}(ih,jh)h+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}(ih,jh)h^2+\frac{1}{3!}\frac{\partial^3 T}{\partial x^3}(ih,jh)h^3+O(h^4), \quad (3)$$

$$T_{i-1,j} = T_{i,j}-\frac{\partial T}{\partial x}(ih,jh)h+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}(ih,jh)h^2-\frac{1}{3!}\frac{\partial^3 T}{\partial x^3}(ih,jh)h^3+O(h^4). \quad (4)$$

Вычитая (4) из (3), получим

$$2h\frac{\partial T}{\partial x}(ih,jh) = T_{i+1,j} - T_{i-1,j} + O(h^3)$$

Отсюда

$$\frac{\partial T}{\partial x}(ih,jh) = \frac{T_{i+1,j} - T_{i-1,j}}{2h} + O(h^2).$$

Складывая (3) и (4), получим

$$T_{i+1,j} - T_{i-1,j} = 2T_{i,j} + \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}(ih,jh)h^2 + O(h^4).$$

Отсюда

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}(ih,jh) = \frac{T_{i+1,j} - 2T_{i,j} + T_{i-1,j}}{h^2} + O(h)$$

или

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \approx \frac{T_{i+1,j} - 2T_{i,j} + T_{i-1,j}}{h^2}.$$

Аналогично можно получить

$$\frac{\partial T}{\partial y}(ih,jh) \approx \frac{T_{i,j+1} - T_{i,j-1}}{2h};$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}(ih,jh) \approx \frac{T_{i,j+1} - 2T_{i,j} + T_{i,j-1}}{h^2},$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x \partial y}(ih,jh) \approx \frac{T_{i+1,j+1} - T_{i-1,j+1} - T_{i+1,j-1} + T_{i-1,j-1}}{4h^2}.$$

Подставляя в уравнение Лапласа значения производных $\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$ и $\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}$, получим

$$\frac{T_{i+1,j} - 2T_{i,j} + T_{i-1,j}}{h^2} + \frac{T_{i,j+1} - 2T_{i,j} + T_{i,j-1}}{h^2} = 0.$$

Отсюда

$$T_{i,j} = 0,25\Big(T_{i-1,j} + T_{i+1,j} + T_{i,j-1} + T_{i,j+1}\Big) \tag{5}$$

Уравнение (5) называют уравнением в конечных разностях или разностной схемой.

Пусть нам требуется найти решение искомой задачи с точностью 0,1.

Положим $h = 0,25$.

Тогда сетка содержит 25 узлов, в 16 из которых температура известна согласно граничным условиям. Задача состоит в определении температуры во всех 9 внутренних узлах сетки.

Записав уравнение (5) для каждого внутреннего узла сетки, получим систему 9 линейных алгебраических уравнений с 9 неизвестными. Для решения этой системы используем метод последовательных смещений (метод итераций Либмана).

Задания расчетно-графической работы.

Вариант задания расчетно-графической работы обучающимся необходимо выбирать по порядковому номеру в списке обучающихся.

Задания вариантов 11-20, 21-30 соответствуют соответственно заданиям вариантов 1-10.

I. Решить задачу Коши для одномерного волнового уравнения

1. $u_{tt} = 4u_{xx} + 8, \quad u(x,0) = \sin 9\pi x, \quad u_t(x,0) = 0;$

2. $u_{tt} = u_{xx} + xt, \quad u(x,0) = 2\cos 7\pi x, \quad u_t(x,0) = x;$

3. $u_{tt} = a^2 u_{xx} + \sin wx, \quad u(x,0) = 1, \quad u_t(x,0) = 0;$

4. $u_{tt} = u_{xx} + \sin x, \quad u(x,0) = \sin x, \quad u_t(x,0) = x;$

5. $u_{tt} = 9u_{xx} + e^x, \quad u(x,0) = \sin x, \quad u_t(x,0) = x + \cos x.$

6. $u_{tt} = 16u_{xx}, \quad u(x,0) = 9\sin 9\pi x, \quad u_t(x,0) = x^2;$

7. $u_{tt} = 25u_{xx} + 2x, \quad u(x,0) = 13\sin 5\pi x, \quad u_t(x,0) = x + 2;$

8. $u_{tt} = 36u_{xx} + x^2, \quad u(x,0) = 18\pi\sin 9\pi x, \quad u_t(x,0) = 1;$

9. $u_{tt} = u_{xx}, \quad u(x,0) = \sin x, \quad u_t(x,0) = x;$

10. $u_{tt} = 9u_{xx} + x, \quad u(x,0) = e^x, \quad u_t(x,0) = x.$

II. Решить задачу.

1. $u_{tt} = 81u_{xx}, \quad u(x,0) = \cos \pi x, \quad u_t(x,0) = 0,$

$u(0,t) = u(5,t) = 0.$

2. $u_{tt} = 64u_{xx}, \quad u_t(x,0) = 8\pi\cos\pi x, \quad u(x,0) = 0,$
$u(0,t) = u(6,t) = 0.$

3. $u_{tt} = 36u_{xx}, \quad u_t(x,0) = 12\pi\cos 2\pi x, \quad u(x,0) = 0,$
$u(0,t) = u(5,t) = 0.$

4. $u_{tt} = 16u_{xx}, \quad u_t(x,0) = 12\pi\cos 3\pi x, \quad u(x,0) = 0,$
$u(0,t) = u(4,t) = 0.$

5. $u_{tt} = 9u_{xx}, \quad u(x,0) = 7\cos 4\pi x, \quad u_t(x,0) = 0,$
$u(0,t) = u(2,t) = 0.$

6. $u_{tt} = 81u_{xx}, \quad u_t(x,0) = 27\pi\cos 3\pi x, \quad u(x,0) = 0,$
$u(0,t) = u(4,t) = 0.$

7. $u_{tt} = u_{xx}, \quad u_t(x,0) = 19\cos 7\pi x, \quad u_t(x,0) = 0,$
$u(0,t) = u(2,t) = 0.$

8. $u_{tt} = 64u_{xx}, \quad u(x,0) = 17\cos 3\pi x, \quad u_t(x,0) = 0,$
$u(0,t) = u(5,t) = 0.$

9. $u_{tt} = 4u_{xx}, \quad u(x,0) = 29\cos 2\pi x, \quad u_t(x,0) = 0,$
$u(0,t) = u(7,t) = 0.$

10. $u_{tt} = 16u_{xx}, \quad u(x,0) = 13\cos 5\pi x, \quad u_t(x,0) = 0,$
$u(0,t) = u(3,t) = 0.$

III. Решить задачу

1. $u_{tt} = 9u_{xx} + x, \quad u(x,0) = \cos 6\pi x, \quad u_t(x,0) = 0,$
$u(0,t) = -8, \;\; u(2,t) = 2.$

2. $u_{tt} = 9u_{xx} + x^2, \quad u_t(x,0) = 12\pi\cos 4\pi x, \quad u(x,0) = 7 - 5x,$

$u(0,t)=-6, \;\; u(3,t)=6.$

3. $u_{tt}=16u_{xx}+x+t, \quad u(x,0)=5\cos 2\pi x-4+3x, \quad u_t(x,0)=0,$
$u(0,t)=-4, \;\; u(1,t)=-1.$

4. $u_{tt}=16u_{xx}+3xt, \quad u_t(x,0)=12\pi\cos 3\pi x, \quad u(x,0)=3+2x,$
$u(0,t)=3, \;\; u(2,t)=7.$

5. $u_{tt}=4u_{xx}+3x^2t, \quad u(x,0)=7\cos 4\pi x-2+x, \quad u_t(x,0)=0,$
$u(0,t)=-2, \;\; u(3,t)=1.$

6. $u_{tt}=49u_{xx}+x, \quad u_t(x,0)=28\pi\cos 4\pi x, \quad u(x,0)=0,$
$u(0,t)=2t, \;\; u(2,t)=-6t.$

7. $u_{tt}=36u_{xx}+\cos x, \quad u_t(x,0)=24\pi\cos 4\pi x+4+x, \quad u(x,0)=0,$
$u(0,t)=4t, \;\; u(4,t)=8t.$

8. $u_{tt}=25u_{xx}+t^2, \quad u_t(x,0)=10\pi\cos 2\pi x+7-5x, \quad u(x,0)=0,$
$u(0,t)=7t, \;\; u(2,t)=-3t.$

9. $u_{tt}=16u_{xx}+9t^2x, \quad u_t(x,0)=28\pi\cos 7\pi x+1-x, \quad u(x,0)=0,$
$u(0,t)=t, \;\; u(2,t)=-t.$

10. $u_{tt}=4u_{xx}+3e^tx, \quad u(x,0)=7\cos 5\pi x+2-xt, \quad u_t(x,0)=0,$
$u(0,t)=-2t, \;\; u(3,t)=1.$

IV. Решить задачи для данного неонородного уравнения теплопроводности с нулевыми начальным и граничным условиями

$$u(x,0)=u(0,t)=u(\pi,t)=0.$$

1. $u_t=\frac{1}{9}u_{xx}+5\sin 2t\sin 3x.$

2. $u_t=\frac{1}{16}u_{xx}+e^{-2t}\sin 4x.$

3. $u_t = \frac{1}{4}u_{xx} + 10\cos 3t \sin 2x$.

4. $u_t = 2u_{xx} + 7e^{-16t}\sin 3x$.

5. $u_t = \frac{1}{16}u_{xx} + 10\sin 3t \sin 4x$.

6. $u_t = \frac{1}{4}u_{xx} + 2e^{-3t}\sin 2x$.

7. $u_t = \frac{1}{9}u_{xx} + 2\cos t \sin 3x$.

8. $u_t = 4u_{xx} + 8e^{-64t}\sin 4x$.

9. $u_t = \frac{1}{4}u_{xx} + 5\cos 2t \sin 2x$.

10. $u_t = 7u_{xx} + 4e^{-3t}\sin 5x$.

V. Решить задачи для данного неоднородного уравнения теплопроводности

1. $u_t = \frac{1}{36}u_{xx} + 5\sin 2t \sin 6x, \quad u(x,0) = \sin 12x + \pi + 3x,$
$u(0,t) = \pi, \quad u(\pi,t) = 4\pi.$

2. $u_t = \frac{1}{4}u_{xx} + 5\cos 2t \sin 2x, \quad u(x,0) = 2\sin 6x - \pi + 2x,$
$u(0,t) = -\pi, \quad u(\pi,t) = \pi.$

3. $u_t = \frac{1}{9}u_{xx} + 10\sin 3t \sin 3x, \quad u(x,0) = 3\sin 12x + 2\pi - x,$
$u(0,t) = 2\pi, \quad u(\pi,t) = \pi.$

4. $u_t = \frac{1}{16}u_{xx} + 10\cos 3t \sin 4x, \quad u(x,0) = 4\sin 8x - 2\pi + x,$
$u(0,t) = -2\pi, \quad u(\pi,t) = -\pi.$

5. $u_t = \frac{1}{25}u_{xx} + 17\sin 4t \sin 5x, \quad u(x,0) = 5\sin 15x + 3\pi - 2x,$
$u(0,t) = 3\pi, \quad u(\pi,t) = \pi.$

6. $u_t = \frac{1}{36}u_{xx} + 17\cos 4t \sin 6x, \quad u(x,0) = 6\sin 24x - 4\pi + 2x,$
$u(0,t) = -4\pi, \;\; u(\pi,t) = -2\pi.$

7. $u_t = \frac{1}{4}u_{xx} + 26\sin 5t \sin 2x, \quad u(x,0) = 7\sin 8x + 4\pi - 3x,$
$u(0,t) = 4\pi, \;\; u(\pi,t) = \pi.$

8. $u_t = \frac{1}{9}u_{xx} + 26\cos 5t \sin 3x, \quad u(x,0) = 8\sin 9x - 3\pi + 3x,$
$u(0,t) = -3\pi, \;\; u(\pi,t) = 0.$

9. $u_t = \frac{1}{16}u_{xx} + 37\sin 6t \sin 4x, \quad u(x,0) = 9\sin 8x + 5\pi - 4x,$
$u(0,t) = 5\pi, \;\; u(\pi,t) = \pi.$

10. $u_t = \frac{1}{25}u_{xx} + 10\cos 3t \sin 5x, \quad u(x,0) = 20\sin 10x - \pi + 2x,$
$u(0,t) = -\pi, \;\; u(\pi,t) = \pi.$

VI. Решить задачу Дирихле для уравнения Лапласа в круге $0 \le r < 1$, $0 \le \varphi < 2\pi$ (r, φ – полярные координаты), на границе которого искомая функция $u(r,\ \varphi)$ имеет следующие значения:

1. $u(1,\varphi) = \cos 9\varphi.$
2. $u(1,\varphi) = 3\cos 7\varphi.$

3. $u(1,\varphi) = 2\sin 8\varphi.$
4. $u(1,\varphi) = 4\cos 6\varphi.$

5. $u(1,\varphi) = 5\cos 5\varphi.$
6. $u(1,\varphi) = 6\sin 4\varphi.$

7. $u(1,\varphi) = 7\cos 3\varphi.$
8. $u(1,\varphi) = 8\sin 2\varphi.$

9. $u(1,\varphi) = 9\cos 2\varphi.$
10. $u(1,\varphi) = 10\sin 3\varphi.$

Литература

[1] *А.Н. Тихонов, А.А. Самарский.* Уравнения математической физики. М.: Наука, 1977.

[2] *С. Фарлоу.* Уравнения с частными производными для научных работников и инженеров., М.: Мир, 1985.

[3] *В.П. Михайлов.* Дифференциальные уравнения в частных производных. М.: Наука, 1983.

[4] *И.Г. Петровский.* Лекции об уравнениях с частными производными., М.: Физматгиз, 1961.

[5] *В.С. Владимиров, В.П. Михайлов и др.* Сборник задач по уравнениям математической физики. М.: Наука, 1974.

[6] *А.В. Бицадзе, Д.Ф. Калиниченко.* Сборник задач по уравнениям математической физики., М.: Наука, 1977.

[7] *А.М. Нахушев.* Уравнения математической биологии. М.: Высшая школа, 1995.

[8] *Б.М. Будак, А.А. Самарский, А.Н. Тихонов.* Сборник задач по математической физике. М.: Наука, 1980.

[9] *Н.С. Пискунов.* Дифференциальное и интегральное исчисление. т. 2, М.: Наука, 1978.

[10] *И.Г. Араманович, В.И. Левин.* Уравнения математической физики. М.: Наука, 1969.

[11] *Н.Н. Калиткин.* Численные методы. М.: Наука, 1978.

Содержание

ТОКОВА А.А.

ХУБИЕВА Д.А.-З.

КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ

Учебно-методическое пособие для обучающихся 4 курса
по направлению подготовки
01.03.04 " Прикладная математика "

Корректор Джукаев У.М.
Редактор Джукаев У.М.
Сдано в набор 30.10.2018 г.
Формат 60х84/16
Бумага офсетная
Печать офсетная
Усл.печ.л. 4,4
Заказ №3711
Тираж 100 экз.

Оригинал-макет подготовлен
В Библиотечно-издательском центре СевКавГГТА
369000, г. Черкесск, ул. Ставропольская, 36