Л.Г. Темирова

КОМПЬЮТЕРНЫЕ ТЕХНОЛОГИИ МАТЕМАТИЧЕСКИХ ИССЛЕДОВАНИЙ

Учебно-методическое пособие
к выполнению практических работ
для студентов 3 курса по направлению подготовки
01.03.04 Прикладная математика

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

СЕВЕРО-КАВКАЗСКАЯ ГОСУДАРСТВЕННАЯ ГУМАНИТАРНО-ТЕХНОЛОГИЧЕСКАЯ АКАДЕМИЯ

Л.Г. Темирова

КОМПЬЮТЕРНЫЕ ТЕХНОЛОГИИ МАТЕМАТИЧЕСКИХ ИССЛЕДОВАНИЙ

Учебно-методическое пособие
к выполнению практических работ
для студентов 3 курса по направлению подготовки
01.03.04 Прикладная математика

Черкесск
2018

УДК 004.
ББК 32.973
Т32

Рассмотрено на заседании кафедры Математика
Протокол №2 от «20» 09 2017 г.
Рекомендовано к изданию редакционно-издательским советом СевКавГГТА.
Протокол №14 от «29» 12 2017 г.

Рецензенты: Кочкаров А.М. – д.ф-м.н., проф. кафедры математики
Бежанова Е.Х. – к.ф-м.н., доц. кафедры математики

Т32 **Темирова, Л.Г.** Компьютерные технологии математических исследований: учебно-методическое пособие к выполнению практических работ для студентов 3 курса по направлению подготовки 01.03.04 Прикладная математика / Л.Г. Темирова – Черкесск: БИЦ СевКавГГТА, 2018. – 52 с.

Учебно-методическое пособие содержит практические работы, выполнение которых способствует освоению математической системы MathCad. Для студентов специальности прикладная математика.

УДК 004.
ББК 32.973

Содержание

Введение

Для решения математических задач, предполагающие сложные вычисления или построения графиков, используются различные программные средства. Одним из них является MathCad.

MathCad был задуман и первоначально написан Алленом Раздовом из Массачусетского технологического института (MIT), соучредителем компании Mathsoft, которая с 2006 года является частью корпорации PTC(Parametric Technology Corporation).

MathCad является интегрированной системой программирования, ориентированной на проведение математических и инженерно-технических расчетов. Он является новой уникальной системой для работы с формулами, числами, текстами и графиками.

Пакет чрезвычайно прост в использовании. Его интерфейс настолько удобно сделан, что пользователь работает с рабочим листом программы, как с листом бумаги, где он пишет формулы и математические выражения в их привычной нотации.

Система MathCad содержит текстовый редактор, мощный вычислитель и графический процессор. Отличительная черта MathCad – использование общепринятой в математике символики. Например, знак деления обозначается горизонтальной чертой, а не наклонной.

Вычислитель обладает уникальными возможностями. Он обеспечивает вычисления по сложным математическим формулам, имеет большой набор встроенных математических функций, позволяет вычислять ряды, суммы и произведения, определенные интегралы и производные, работать с комплексными числами, а также решать линейные и нелинейные уравнения, выполнять векторные и матричные операции.

Графический процессор служит для создания графиков. Простые графики нескольких функций пользователь может начать строить буквально в первые секунды знакомства с системой. Графика ориентирована на решение типичных математических задач. Возможно быстрое изменение графиков, наложение их на текстовые надписи и перемещение в любое место документа.

Объединяя в одном рабочем месте текст, графику и математические вычисления, MathCad облегчает понимание самых сложных вычислений.

Кроме MathCad существуют и другие математические пакеты, например,MathLab, Maple, Mathematics и др. Однако MathCad – самый распространенный.

Краткая информация о математических панелях программы MathCad

Математических панелей в MathCad девять. Обращение к ним осуществляется с помощью меню Вид/Инструменты.

Краткая характеристика панели семейства Math (Математические):

– Calculator (Калькулятор, Арифметика). На данной панели расположены арифметические операторы, цифры от 0 до 9, наиболее распространенные функции и математические константы, а также операторы вывода.

– Graph (Графические, Графики). С помощью этой панели можно вызвать шаблоны для построения различных графиков и поверхностей. На панели также расположены ссылки на инструменты для анализа данных.

– Matrix (Матричные, Матрица). На панели расположены операторы: создание, обращение, транспонирование матриц, операторы матричных индексов и колонок, также расположены операторы для работы с векторами.

– Evaluation (Выражения). На панели находятся ссылки на все операторы ввода и вывода в MathCad, а также шаблоны для создания пользовательских операторов.

– Calculus (Вычислительные, Вычисление, Матанализ). На панели находятся применяемые при решении задач математического анализа операторы: определенного и неопределенного интегралов, производных, лимитов, сложений и произведений, символ бесконечности.

– Boolean (Булевые, Логика). Эта панель предназначена для задания логических операторов.

– Programming (Программирование). Панель содержит операторы языка программирования MathCad.

– Greek (Греческие, Греческий Алфавит). На данной панели расположены буквы греческого алфавита.

– Symbolic (Символика, Символы). Панель предназначена для проведения аналитических преобразований.

Объекты программы MathCad: формулы и текстовые блоки располагаются в документе MathCad, который называется рабочий лист.

В процессе выполнения расчетов формулы обрабатываются постепенно, *слева направо и сверху вниз*.

Ввод информации выполняется в место положения курсора, который может быть представлен в одном из трех видов:

- *курсор в виде крестика* используется, если этот курсор определяет местоположение следующего объекта;

- *угловой курсор* используется при введении формул. Этот курсор указывает на текущий элемент выражения;

- *текстовый курсор* (I-образная вертикальная черточка) используется при введении текста.

Практическая работа 1

Тема: <u>Методы отделения корней</u>

1. Графический способ отделения корней

Отделение корней во многих случая можно произвести графически, "учитывая что действительные корни уравнения

$$F(x)=0 \qquad (1)$$

- это есть точки пересечения графика функции $y=F(x)$ с осью абсцисс когда $y=0$. Нужно построить график функции $y=F(x)$, затем на оси OX отметить отрезки, содержащие по одному корню.

Но часто для упрощения построения графика функции $y=F(x)$ исходное уравнение (1) заменяют равносильным ему уравнением

$$f_1(x)=f_2(x) \qquad (2)$$

Далее строятся графики функций $y_1=f_1(x)$ и $y_2=f_2(x)$, а затем по оси OX отмечаются отрезки, локализующие абсциссы точек пересечения двух графиков"[**1**].

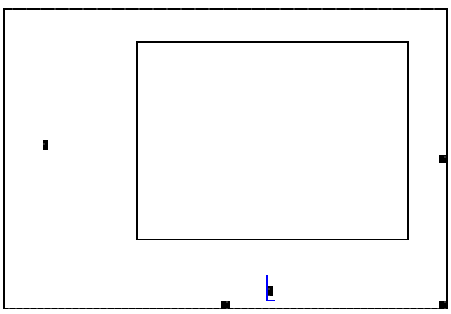
<u>1 способ</u>

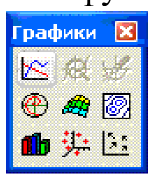
На практике в системе **MathCad** данный способ реализуется следующим образом. Например, требуется отделить корни уравнения **cos(2x)+x-5=0** графически на отрезке [-10;10].

Построим график функции **f(x)=cos(2x)+x-5** в декартовой системе координат. Для этого нужно:

1. Ввести в позиции ввода рабочего аргумента выражение, описывающее функцию f(x):*f(x):=cos(2·x)+x-5.*

2. Выбрать на панели «Графики» - «X-Y-зависимость» – декартовый график и в появившемся шаблоне заполнить поля ввода данных (темные прямоугольники): имя переменной x по оси OX, имя функции f(x) по оси OY:

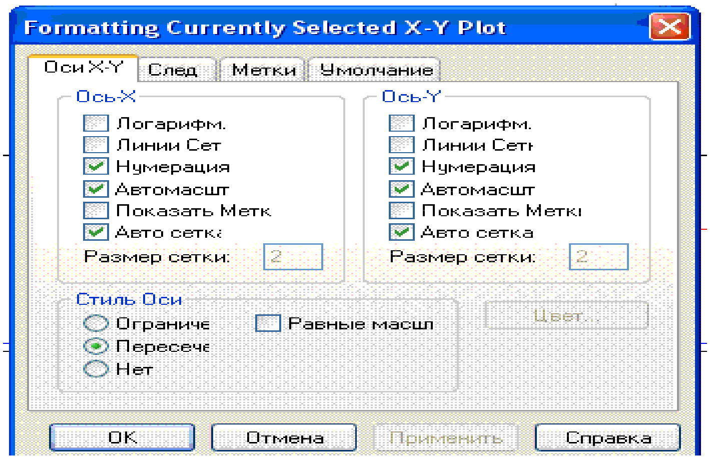




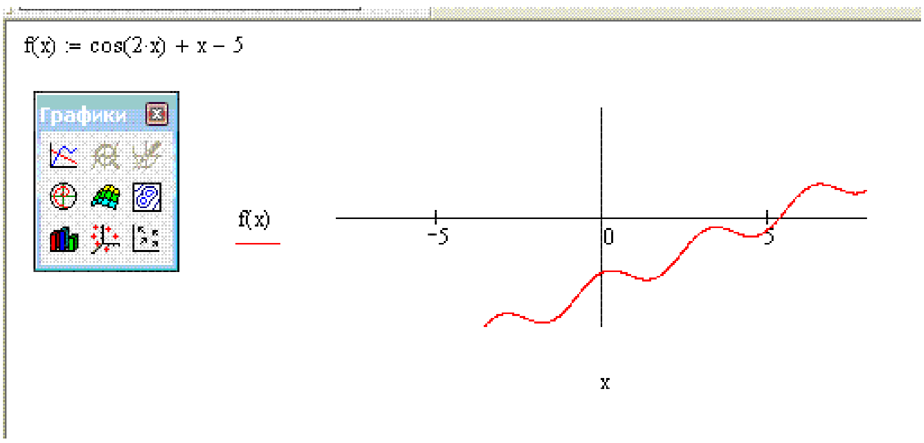
3. Затем появятся поля ввода для указания предельных значений абсцисс и ординат, задающие масштаб изображения (если оставить эти шаблоны незаполненными, то масштабы по осям графика будут устанавливаться автоматически), в нашем случае задать от -10 до 10. Если необходимо построить несколько графиков функций в одном шаблоне, то

имена функций в поле ввода по оси OY следует набирать через запятую. Для построения графика достаточно навести курсор за пределы графического объекта (шаблона) и щелкнуть левой клавишей мыши.

4. Для того чтобы получить пересекающиеся координатные оси, нужно щелкнуть правой кнопкой мыши по полю графика, выбрать «формат» и поставить указатель в окне «стиль оси» на «пересечение», нажать «ОК»:



В итоге получаем следующее:



Анализируя полученное изображение графика, можно сказать, что уравнение **cos(2x)+x-5=0** имеет один корень – это видно из пересечения графика функции **y=cos(2x)+x-5** с осью ОХ. Можно выбрать отрезок, содержащий данный корень: **[5;6] – отрезок изоляции**.

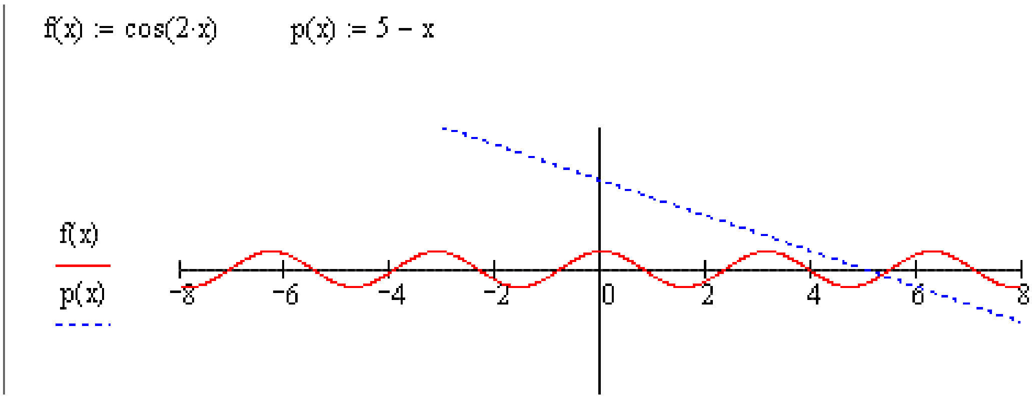
<u>2 способ</u>

Преобразуем уравнение **cos(2x)+x-5=0** к следующему виду: **cos(2x)=5-x**. Затем следует каждую часть уравнения рассмотреть как отдельную функцию, т.е. **f(x)=cos(2x)** и **p(x)=5-x**.

Для решения этой задачи в MathCad необходимо выполнить следующие действия:

1. Ввести в позиции ввода рабочего аргумента выражения, описывающие функции f(x) и p(x):*f(x):=cos(2·x) p(x):=5-x*.
2. Вставить график «X-Y-зависимость» (см. решение первым способом).
3. Заполнить поля ввода данных: имя переменной x по оси OX, имя функции f(x) и через запятую имя функции p(x) по оси OY.
4. Предельные значения абсцисс и ординат заполнить также как и при решении первым способом.
5. Координатные оси сделать пересекающимися (см. первый способ решения).

В итоге получаем:



Анализируя полученный результат, можно сказать, что точка пересечения двух графиков попадает на тот же самый отрезок изоляции [5;6], что и при решении задачи первым способом.

Таким образом, решая один и тот же пример несколькими способами и с помощью двух инструментальных средств, приходим к одному и тому же ответу.

2. Аналитический способ отделения корней

Аналитический способ отделения корней основан на следующей теореме:

Теорема 1.1.

*Если функция **F(x)**, определяющая уравнение **F(x)=0**, на концах отрезка **[a;b]** принимает значения разных знаков, т.е.*

$$F(a)*F(b)<0, \qquad (3)$$

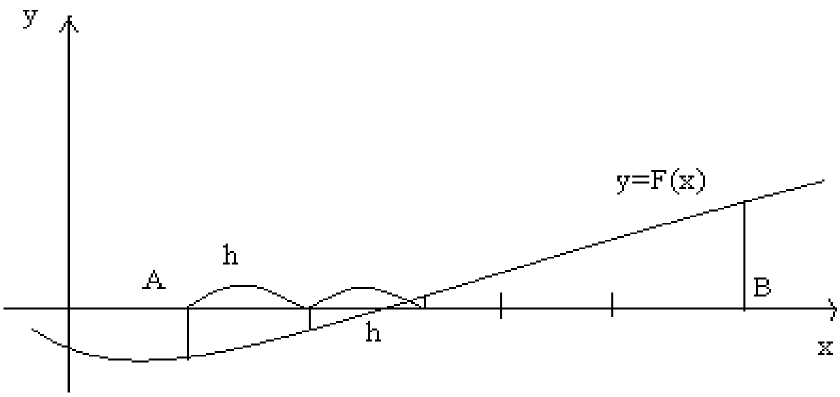
то на этом отрезке содержится, по крайней мере, один корень уравнения"[4].

*Если функция **F(x)** строго монотонна, то корень на **[a,b]** единственный*

$$F'(a)*F'(b)>0 \qquad (4)$$

Для отделения корней аналитическим способом выбирается отрезок **[A;B]**, на котором находятся все интересующие вычислителя корни уравнения. Причем на отрезке **[A;B]** функция **F(x)** определена, непрерывна и **F(a)*F(b)<0**. Требуется указать все частичные отрезки **[a;b]**, содержащие по одному корню.

Будем вычислять значение функции **F(x)**, начиная с точки **x=A**, двигаясь вправо с некоторым шагом **h**. Если **F(x)*F(x+h)<0**, то на отрезке **[x;x+h]** существует корень: [**1**]



Если

$$F(x_k)=0, \qquad (5)$$

то x_k-точный корень.

На практике данный способ реализуется следующим образом: например, дана такая задача: на основании найденного отрезка изоляции (см.графический способ отделения корней) доказать существование и единственность корня на полученном отрезке с помощью условного оператора: if(f(a)·f(b) < 0,существует_корень,не_существует_корень)

Решение подобной задачи можно представить в MathCad в следующем виде:

Рассмотрим полученный отрезок изоляции **[5;6]**. Для доказательства существования корня на отрезке изоляции необходимо выполнить следующие действия:

1. Запустить MathCad.
2. Ввести в позиции ввода рабочего аргумента выражение, описывающее функцию **f(x)**: *f(x):=cos(2·x)+x-5.*
3. Вести граничные значения отрезка изоляции: **a:=5** и **b:=6**.
4. Посчитать значения функции на заданных конца отрезка, для этого в поле ввода ввести **f(a)** и поставить знак равенства, затем ввести **f(b)** и тоже поставить знак равенства.

5. Выбрать меню *«Вставить»* - *«функция»* - *категория «всё»* - *имя «if»*, нажать **«ОК»**.
6. В результате получается условие с тремя полями ввода, где первый темный прямоугольник – ввод условия, второй темный прямоугольник – вывод, если условие выполняется и последний – это вывод при невыполнении условия.
7. Заполнить шаблон функции следующим образом:

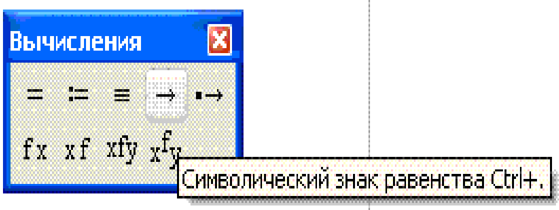
   $\mathrm{if}(f(a)\cdot f(b) < 0, \text{существует\_корень}, \text{не\_существует\_корень})$

8. На панели инструментов найти кнопку $x=$ - «инструменты некоторых знаков», затем на панели *«Вычисления»* выбрать символический знак равенства нажать Enter, в результате чего получим следующее:

$f(x) := \cos(2\cdot x) + x - 5$

$a := 5$

$b := 6$



$f(a) = -0.839$

$f(b) = 1.844$

$\mathrm{if}(f(a)\cdot f(b) < 0, \text{существует\_корень}, \text{не\_существует\_корень}) \rightarrow \text{существует\_корень}$

Таким образом, на отрезке изоляции корень существует.

Для доказательства **единственности корня** нужно продолжить работу в этом же документе.

Необходимо выполнить следующие действия:

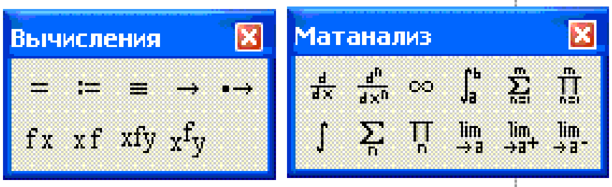
1. Найти значения производной первого порядка, для этого в поле ввода ввести **f1(x):=**, затем на панели инструментов выбрать кнопку *«операторы математического анализа»* и на панели *«матанализ»* выбрать производную: $\frac{d}{dx}$, где в нижнем темном прямоугольнике указать **x**, а в верхнем – **f(x)**.
2. Ниже вывести значение производной, для этого набрать **f1(x)**, затем выбрать символический знак равенства и Enter.
3. Вывести значения: **f1(a)=** и **f1(b)=**.
4. Затем задать условие с помощью функции **«if»**:

   $\mathrm{if}(f1(a)\cdot f1(b) > 0, \text{корень\_единственный}, \text{корень\_не\_единственный})$

5. Вывести результат с помощью символического знака равенства.

В результате получаем следующее:

$$f1(x) := \frac{d}{dx}f(x)$$



$$f1(x) \rightarrow -2\cdot\sin(2\cdot x) + 1$$

$$f1(a) = 2.088$$

$$f1(b) = 2.073$$

if(f1(a)·f1(b) > 0,корень_единственный,корень_не_единственный) → корень_единственный

Таким образом доказана единственность корня на отрезке изоляции.

Ставится задача отделения корней уравнения **cos(2x)+x-5=0** аналитическим способом с шагом 1 на отрезке [-10;10], используя программу **MathCad**;

В MathCad можно отделить корни уравнения с помощью *задания диапазона дискретной величины*. Отметим, что данным способом можно решать задачи с целыми величинами и с шагом 1.

Для решения задачи, необходимо выполнить следующие действия:

1. Ввести в позиции ввода рабочего аргумента выражение, описывающее функцию **f(x)**:
   f(x):=cos(2·x)+x-5.
2. Задать диапазон дискретной величины: на панели инструментов выбрать *«векторные и матричные операции»*, в окне *«Матрицы»* выбрать *«Задать диапазон дискретной величины»*, в появившихся черных квадратах записать значения **-10** и **10** соответственно.
3. Вывести **k=**.
4. Рядом вывести **F(k)=**.
5. В поле ввода ввести соответствующее условие
   (см. нижеприведенный рисунок).
6. Под заданным выражением вывести значение: **G(k+1)=**.

В итоге получается следующая картина:

F(x):=cos(2·x)+x-5)

k:=-10..10

G(k):=if(F(k-1)=0,"корень единственный", if(F(k-1)·(k-2)<0,"корень существует","-"))

k =	F(k) =	G(k + 1) =
-10	-14.5919179381866	"-"
-9	-13.3396832917559	"-"
-8	-13.9576594803234	"-"
-7	-11.8632627817922	"-"
-6	-10.1561460412675	"-"
-5	-10.8390715290765	"-"
-4	-9.1455000338086	"-"
-3	-7.0398297133496	"-"
-2	-7.6536436208636	"-"
-1	-6.4161468365471	"-"
0	-4	"-"
1	-4.4161468365471	"-"
2	-3.6536436208636	"-"
3	-1.0398297133496	"-"
4	-1.1455000338086	"-"
5	-0.8390715290765	"-"
6	1.8438539587325	"корень существует"
7	2.1367372182078	"-"
8	2.0423405196766	"-"
9	4.6603167082441	"-"
10	5.4080820618134	"-"

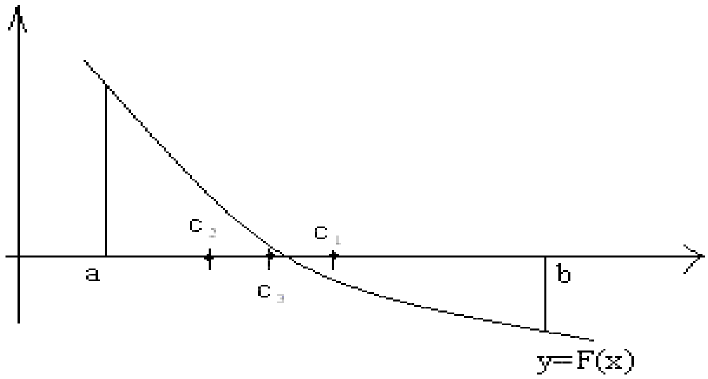
Ответ: Корень уравнения существует на отрезке [5;6].

Практическая работа 2

Тема: Методы уточнения корней

1. Метод половинного деления

Пусть корень уравнения (1) отделен на отрезке [a;b]. Требуется найти значение корня с точностью **ε**.



Процедура уточнения положения корня заключается в построении последовательности вложенных друг в друга отрезков, каждый из которых содержит корень уравнения. Для этого находится середина текущего интервала неопределенности:

$$c_k = \frac{a_k + b_k}{2}, \quad k = 0,1,... \qquad (6)$$

В качестве следующего интервала неопределенности из двух возможных выбирается тот, на концах которых функция **F(x)=0** имеет разные знаки [8]. Точность будет достигнута, если: $|b_n - a_n| \le 2\varepsilon$.

Корень уравнения вычисляется по формуле:

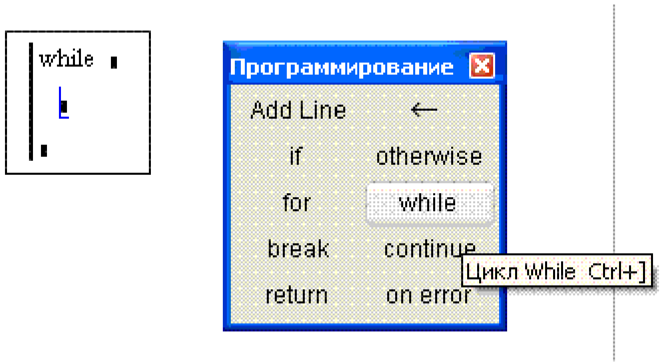
$$x=(a_n+b_n)/2 \qquad (7)$$

Пусть дана задача следующего характера: Уточнить корни уравнения **cos(2x)+x-5=0** [1] методом половинного деления с точностью до 0,00001, используя систему **MathCad**.

Для этого необходимо выполнить следующие действия:

1. Запустить MathCad.
2. Ввести в позиции ввода рабочего аргумента выражение, описывающее функцию **f(x):** *f(x):=cos(2·x)+x-5*.
3. Вести граничные значения отрезка изоляции: **a:=5** и **b:=6**.
4. Ввести значение данной погрешности: **e:=0,00001**.
5. Выбрать на панели инструментов кнопку *"инструменты программирования"*.

6. Ввести в позиции поля ввода имя новой функции и знак присвоить значение: **pol(f,a,b,e):=**
7. На панели *«Программирование»* выбрать *«Add Line»* - добавить строку программы.
8. В первый темный прямоугольник добавить запись **«while»**, находящуюся на панели *«Программирование»*:



9. Условие циклы в темном прямоугольнике, стоящем после **while: |b-a|>e**.
10. В следующем темном прямоугольнике, расположенным под **while**, задать тело цикла: добавить строку программы, в первом темном прямоугольнике ввести:

$$c \leftarrow \frac{a+b}{2}$$

Для ввода использовать кнопку "Локальное присвоение" на панели "Программирование": ←

11. В следующем темном прямоугольнике, прежде чем вводить выражение, добавить строку программы, а затем в нем же ввести выражение:

$$b \leftarrow c \;\; \text{if} \;\; f(a) \cdot f(c) < 0$$

(функцию **if** выбрать на панели *«Программирование»* перед тем как вводить выражение).

12. Затем строкой ниже ввести:

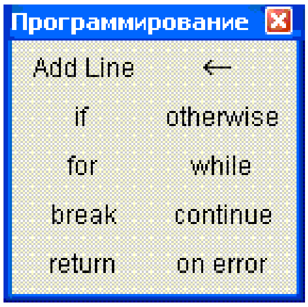
$$a \leftarrow c \quad \text{otherwise}$$

(данную функцию выбрать на панели «Программирование» перед тем как вводить выражение).

13. В самом нижнем темном прямоугольнике ввести переменную вывода: **c**.
14. В поле ввода, под программой, набрать pol(f,a,b,e), затем нажать знак равенства.

В итоге получится следующий листинг программы:

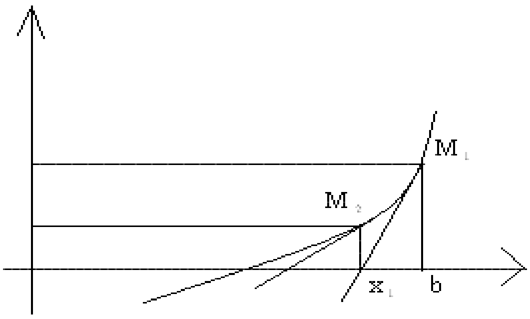
```
f(x) := cos(2·x) + x − 5

a := 5     b := 6

e := 0.00001

pol(f,a,b,e) := | while |b − a| > e
                |    | c ← (a + b)/2
                |    | b ← c  if  f(a)·f(c) < 0
                |    | a ← c  otherwise
                | c

pol(f,a,b,e) = 5.32977
```



Ответ: Корень уравнения cos(2x)+x-5=0 равен 5,32977.

2. Метод касательных (Ньютона)

" В отличие от метода хорд, в методе касательных вместо хорды на каждом шаге проводится касательная к кривой **y=F(x)** при **$x=x_n$** и ищется точка пересечения касательной с осью абсцисс:



Формула для (n+1) приближения имеет вид **(10)**:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{F(x_n)}{F'(x_n)}$$

Если **F(a)*F"(a)>0**, **x_0=a**, в противном случае **x_0=b**.

Итерационный процесс [1] продолжается до тех пор, пока не будет обнаружено, что $|F(x_{n+1} \le \varepsilon)|$.

Например, **требуется уточнить** корни уравнения **cos(2x)+x-5=0** методом касательных с точностью до 0,00001, используя MathCad.

Для решения такой задачи, используя MathCad, необходимо выполнить следующие действия:

1. Запустить MathCad.
2. Ввести в позиции ввода рабочего аргумента выражение, описывающее функцию **f(x)**:
   f(x):=cos(2·x)+x-5.
3. Ввести выражение:

$$f2(x) := \frac{d^2}{dx^2} f(x)$$,

   описывающее производную второго порядка от функции **f(x)**.

4. Вывести ниже значение этой производной:

$$f2(x) \rightarrow -4 \cdot \cos(2 \cdot x)$$

5. Ввести выражение:

$$f1(x) := \frac{d}{dx} f(x)$$,

   описывающее производную первого порядка от функции f(x)).

6. Вывести ниже значение этой производной:

$$f1(x) \rightarrow -2 \cdot \sin(2 \cdot x) + 1$$.

7. Вести граничные значения отрезка изоляции: **a:=5** и **b:=6**.
8. Ввести значение данной погрешности: **e:=0,00001**.
9. Описать функцию **casat(f,a,b,e)** с помощью программы, используя панель *«Программирования»*, для этого выполнить следующие действия:
   - Добавить строку программы.
   - В первом темном прямоугольнике задать условие: **if f(a)·f(b)>0** , вернуться в темный прямоугольник перед условием и в нем добавить строку программы.
   - В первом темном прямоугольнике ввести присваивание переменных **x1** и **a** , а в следующем - **c** и **a** (для присваивания использовать кнопку "Локальное присвоение" на панели "Программирование": ←).

- Встать в нижний темный прямоугольник и добавить строку программы, ввести **otherwise** и в темном прямоугольнике, стоящем перед **otherwise** добавить строку программы.
- В первом темном прямоугольнике присвоить **x1** значение **b**, а в следующем - **c** и **b**.
- В следующем темном прямоугольнике добавить строку программы и ввести **while |f(x1)|>e**.
- В следующем темном прямоугольнике добавить строку программы и в двух полученных темных прямоугольниках последовательно ввести следующие выражения:

$x2 \leftarrow x1 - \frac{f(x1)}{f1(x1)}$ и **x1** присвоить **x2**.

- В последнем темном прямоугольнике ввести **x1**.

10. В поле ввода вывести значение функции **casat(f,a,b,e)=5,32976**.

В итоге получаем следующее:

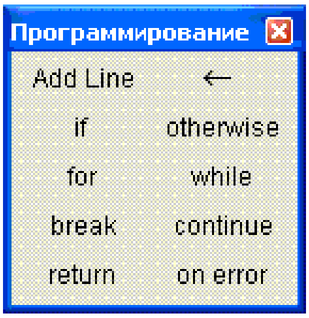
$$f(x) := \cos(2\cdot x) + x - 5$$

$$f1(x) := \frac{d}{dx}f(x) \qquad f2(x) := \frac{d^2}{dx^2}f(x)$$

$$f1(x) \rightarrow -2\cdot\sin(2\cdot x) + 1 \qquad f2(x) \rightarrow -4\cdot\cos(2\cdot x)$$

$$a := 5 \quad b := 6 \qquad e := 0.00001$$

```
casat(f,a,b,e) := | if  f(a)·f2(a) > 0
                  |    | x1 ← a
                  |    | c ← a
                  | otherwise
                  |    | x1 ← b
                  |    | c ← b
                  | while  |f(x1)| > e
                  |    | x2 ← x1 − f(x1)/f1(x1)
                  |    | x1 ← x2
                  | x1
```



$$casat(f,a,b,e) = 5.32976$$

Ответ: Корень уравнения cos(2x)+x-5=0 равен 5,32976.

Практическая работа 3

Тема: Методы решения систем уравнений

1. Метод Гаусса

Под названием **«метод Гаусса»** фигурирует группа методов, объединенных идеей последовательного исключения неизвестных. Будем считать **матрицу системы** (8) **невырожденной** [**7**]:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n. \end{cases} \qquad 8)$$

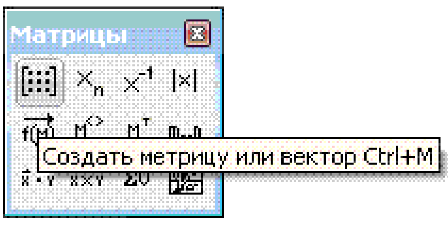
В методе Гаусса матрица системы линейных алгебраических уравнений с помощью элементарных алгебраических операций преобразуется в верхнюю (нижнюю) **треугольную матрицу**, получающуюся в результате **прямого хода**. В **обратном ходе** определяются неизвестные [**6**].

1. На практике в **<u>MathCad</u>** данный способ реализуется следующим образом**.** Решить систему уравнений:

$$\begin{cases} 3{,}499x_1 + 3{,}512x_2 + 3{,}602x_3 = 37{,}791 \\ -7{,}117x_1 + 3{,}602x_2 + 3{,}811x_3 = 3{,}520 \\ 3{,}748x_1 + 3{,}901x_2 - 5{,}958x_3 = 3{,}850 \end{cases}$$

Для того чтобы решить данную систему уравнений в MathCad, нужно выполнить следующие действия:

1. Ввести в поле ввода матрицу системы, для чего в поле ввода ввести **A:=**, затем на панели инструментов выбрать вкладку *«векторные и матричные операции»*, на панели *«Матрицы»* выбрать кнопку *«Создать матрицу или вектор»*:



,

задать необходимое число строк и столбцов для формирования матрицы (по 3), в каждый темный квадрат ввести соответствующее значение из системы:

$$A := \begin{pmatrix} 3.499 & 3.512 & 3.602 \\ -7.117 & 3.602 & 3.811 \\ 3.748 & 3.901 & -5.958 \end{pmatrix}$$

2. Ввести в поле ввода вектор – столбец свободных членов:

$$b := \begin{pmatrix} 37.791 \\ 3.520 \\ 3.850 \end{pmatrix}$$

3. Сформировать расширенную матрицу системы, для этого воспользоваться функцией *augment(A,b)* – она добавляет к столбцам матрицы системы уравнений справа вектор – столбец свободных членов. Таким образом, в поле ввода ввести **Rm:=**, затем выбрать меню *«Вставить»* - *«Функция»* - *augment*, в первых двух темных квадратах задать значения **A** и **b**.
4. Вывести расширенную матрицу системы:

$$Rm = \begin{pmatrix} 3.499 & 3.512 & 3.602 & 37.791 \\ -7.117 & 3.602 & 3.811 & 3.52 \\ 3.748 & 3.901 & -5.958 & 3.85 \end{pmatrix}$$

5. Привести расширенную матрицу системы к *ступенчатому виду*, для чего воспользоваться встроенной функцией **rref(A)**, которая приводит матрицу к ступенчатому виду с единичным базисным минором. То есть в поле ввода задать **Sf:=**, выбрать из списка функций функцию **rref**, в темном квадрате задать значение **Rm**.
6. Вывести расширенную матрицу системы в ступенчатом виде:

$$Sf = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 3.333 \\ 0 & 1 & 0 & 3.561 \\ 0 & 0 & 1 & 3.782 \end{pmatrix}$$

7. Сформировать вектор – столбец решения системы уравнений при помощи функции **submatrix(A, ir, jr, ic, jc)**, которая выделяет блок матрицы **A** с элементами, расположенными в строках с ir по jr и в столбцах с ic по jc, ir меньше или равно jr, ic меньше или равно jc. Для

этого в поле ввода задать **x:=**, выбрать функцию submatrix, в темных квадратах задать соответственно значения: **0, 2, 3, 3**.

8. Вывести вектор – столбец решения системы уравнений:

$$x = \begin{pmatrix} 3.333 \\ 3.561 \\ 3.782 \end{pmatrix}$$

Таким образом, получаем следующее:

$$A := \begin{pmatrix} 3.499 & 3.512 & 3.602 \\ -7.117 & 3.602 & 3.811 \\ 3.748 & 3.901 & -5.958 \end{pmatrix} \qquad b := \begin{pmatrix} 37.791 \\ 3.520 \\ 3.850 \end{pmatrix}$$

$$Rm := \mathrm{augment}(A, b)$$

$$Rm = \begin{pmatrix} 3.499 & 3.512 & 3.602 & 37.791 \\ -7.117 & 3.602 & 3.811 & 3.52 \\ 3.748 & 3.901 & -5.958 & 3.85 \end{pmatrix}$$

$$Sf := \mathrm{rref}(Rm)$$

$$Sf = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 3.333 \\ 0 & 1 & 0 & 3.561 \\ 0 & 0 & 1 & 3.782 \end{pmatrix}$$

$$x := \mathrm{submatrix}(Sf, 0, 2, 3, 3)$$

$$x = \begin{pmatrix} 3.333 \\ 3.561 \\ 3.782 \end{pmatrix}$$

Ответ: x_1=3.333, x_2 =3.561, x_3 =3.782.

2. Матричный метод

Систему **вида (12)** можно представить в виде "**Ax=b**, где $\mathbf{b=(b_1,b_2,b_3,...,b_n)^T}$ - вектор свободных членов и $\mathbf{x=(x_1,x_2,x_3,...,x_n)^T}$ - вектор неизвестных с вещественными координатами, а $\mathbf{A=(a_{ij})^n_{i,j=1}}$ - вещественная n ×n - матрица коэффициентов данной системы"[**3**].

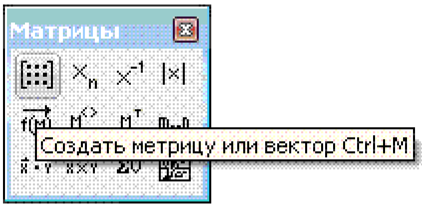
"Тогда, умножая обе части этого векторного уравнения слева на обратную матрицу A^{-1} , получаем **x=A^{-1}b (13)**"[5].

На практике данный способ реализуется следующим образом: Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 3{,}499x_1 + 3{,}512x_2 + 3{,}602x_3 = 37{,}791 \\ -7{,}117x_1 + 3{,}602x_2 + 3{,}811x_3 = 3{,}520 \\ 3{,}748x_1 + 3{,}901x_2 - 5{,}958x_3 = 3{,}850 \end{cases}$$

Для того чтобы решить данную систему уравнений в MathCad нужно выполнить следующие действия:

1. Ввести в поле ввода матрицу системы, для чего в поле ввода ввести **A:=**, затем на панели инструментов выбрать вкладку *«векторные и матричные операции»*, на панели *«Матрицы»* выбрать кнопку *«Создать матрицу или вектор»*:



,

задать необходимое число строк и столбцов для формирования матрицы (по 3), в каждый темный квадрат ввести соответствующее значение из системы:

$$A := \begin{pmatrix} 3.499 & 3.512 & 3.602 \\ -7.117 & 3.602 & 3.811 \\ 3.748 & 3.901 & -5.958 \end{pmatrix}$$

2. Ввести в поле ввода вектор – столбец свободных членов:

$$b := \begin{pmatrix} 37.791 \\ 3.520 \\ 3.850 \end{pmatrix}$$

3. Ниже ввести выражение $x:=A^{-1}\cdot b$ и под ним вывести значение **x=**.

Таким образом, получили решение системы:

$$x = \begin{pmatrix} 3.333 \\ 3.561 \\ 3.782 \end{pmatrix}$$

Следовательно, **x1=3.333, x2=3.561, x3=3.782.**

Точность решения данной системы можно проверить следующим образом: в поле ввода под всеми расчетами ввести **A·x-b** , затем ввести знак равенства:

$$A \cdot x - b = \begin{pmatrix} 0 \\ 2.22 \times 10^{-15} \\ -3.553 \times 10^{-15} \end{pmatrix}$$

Таким образом, получаем следующее:

$$A := \begin{pmatrix} 3.499 & 3.512 & 3.602 \\ -7.117 & 3.602 & 3.811 \\ 3.748 & 3.901 & -5.958 \end{pmatrix} \quad b := \begin{pmatrix} 37.791 \\ 3.520 \\ 3.850 \end{pmatrix}$$

$$x := A^{-1} \cdot b$$

$$x = \begin{pmatrix} 3.333 \\ 3.561 \\ 3.782 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot x - b = \begin{pmatrix} 0 \\ 2.22 \times 10^{-15} \\ -3.553 \times 10^{-15} \end{pmatrix}$$

Ответ: x_1=3.333, x_2 =3.561, x_3 =3.782.

3. Метод Крамера

В общем виде **формулы Крамера** выглядят $x_i = \dfrac{\det A_i}{\det A} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$,
где **det** $\mathbf{A_i}$ - это определитель i-го порядка (i=1,2,...,n) матрицы А, а **det А** - определитель матрицы А.

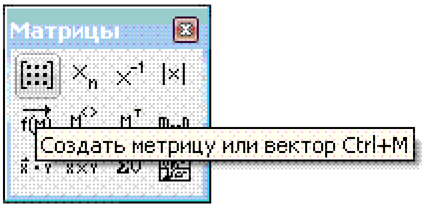
Примечание: определитель i-го порядка отличается от определителя матрицы тем, что при составлении определителя используется столбец свободных членов.

На практике данный способ реализуется следующим образом:
Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 3{,}499x_1 + 3{,}512x_2 + 3{,}602x_3 = 37{,}791 \\ -7{,}117x_1 + 3{,}602x_2 + 3{,}811x_3 = 3{,}520 \\ 3{,}748x_1 + 3{,}901x_2 - 5{,}958x_3 = 3{,}850 \end{cases}$$

Для того чтобы решить данную систему уравнений в MathCad, **нужно выполнить следующие действия:**

1. Ввести в поле ввода матрицу системы, для чего в поле ввода ввести **A:=**, затем на панели инструментов выбрать вкладку *«векторные и матричные операции»*, на панели *«Матрицы»* выбрать кнопку *«Создать матрицу или вектор»*:



,

задать необходимое число строк и столбцов для формирования матрицы (по 3), в каждый темный квадрат ввести соответствующее значение из системы:

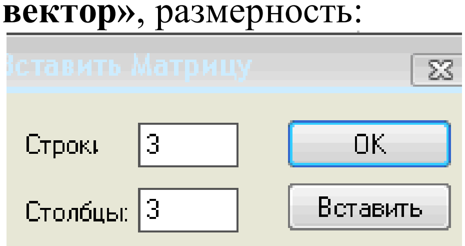
$$A := \begin{pmatrix} 3.499 & 3.512 & 3.602 \\ -7.117 & 3.602 & 3.811 \\ 3.748 & 3.901 & -5.958 \end{pmatrix}$$

2. Ввести в поле ввода вектор – столбец свободных членов:

$$b := \begin{pmatrix} 37.791 \\ 3.520 \\ 3.850 \end{pmatrix}$$

3. На панели инструментов выбрать кнопку **«Векторные и матричные операции»**, в окне **«Матрицы»** выбрать **«Вычисление определителя»**, в черном прямоугольнике набрать А, за определителем нажать знак равенства: **|A|=-374.497** .

4. Вычислить **определители матриц**, полученных заменой соответствующего столбца исходной матрицы столбцом свободных членов:
В поле ввода ввести **D1:=** (условно обозначает определитель первого порядка), в окне **«Матрицы»** выбрать **«Вычисление определителя»**, затем **«Создать матрицу или вектор»**, размерность:



Заполнить матрицу следующим образом:

$$D1 := \left| \begin{pmatrix} 37.791 & 3.512 & \ldots \\ 3.520 & 3.602 & \ldots \\ 3.850 & 3.901 & \ldots \end{pmatrix} \right| \quad D3 := \left| \begin{pmatrix} 3.499 & 3.512 & 37.791 \\ -7.117 & 3.602 & 3.520 \\ 3.748 & 3.901 & 3.850 \end{pmatrix} \right|$$

, D3=-1.416 × 10^3.

Ниже вывести значение определителя матрицы: **D1=-1.248 × 10^3**.
Подобным образом вычислить определитель второго и третьего порядка:

$$D2 := \left| \begin{pmatrix} 3.499 & 37.791 & 3.602 \\ -7.117 & 3.520 & 3.811 \\ 3.748 & 3.850 & -5.958 \end{pmatrix} \right|$$

, D2=-1.334 × 10^3,

- Ниже ввести следующие выражения, вычисляющие **x1, x2, x3**:

$$x1 := \frac{D1}{|A|}, \quad x2 := \frac{D2}{|A|}, \quad x3 := \frac{D3}{|A|},$$

затем вывести соответствующие значения: **x1=3.333 , x2=3.561 , x3=3.782**
Таким образом, получаем следующее:

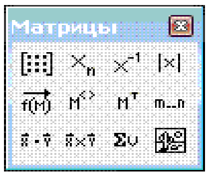
$$A := \begin{pmatrix} 3.499 & 3.512 & 3.602 \\ -7.117 & 3.602 & 3.811 \\ 3.748 & 3.901 & -5.958 \end{pmatrix} \qquad b := \begin{pmatrix} 37.791 \\ 3.520 \\ 3.850 \end{pmatrix}$$

$$|A| = -374.497$$

$$D1 := \left| \begin{pmatrix} 37.791 & 3.512 & 3.602 \\ 3.520 & 3.602 & 3.811 \\ 3.850 & 3.901 & -5.958 \end{pmatrix} \right| \qquad D2 := \left| \begin{pmatrix} 3.499 & 37.791 & 3.602 \\ -7.117 & 3.520 & 3.811 \\ 3.748 & 3.850 & -5.958 \end{pmatrix} \right|$$

$$D1 = -1.248 \times 10^3 \qquad D2 = -1.334 \times 10^3$$

$$D3 := \left| \begin{pmatrix} 3.499 & 3.512 & 37.791 \\ -7.117 & 3.602 & 3.520 \\ 3.748 & 3.901 & 3.850 \end{pmatrix} \right|$$



$$D3 = -1.416 \times 10^3$$

$$x1 := \frac{D1}{|A|} \qquad x2 := \frac{D2}{|A|} \qquad x3 := \frac{D3}{|A|}$$

$$x1 = 3.333 \qquad x2 = 3.561 \qquad x3 = 3.782$$

Ответ: x1=3.333 , x2=3.561 , x3=3.782 .

Практическая работа 4

Тема: Численное интегрирование

1. Формула трапеций

"В общем виде формула трапеций на отрезке $[x_0;x_n]$ выглядит следующим образом (17):

$$\int_{x_0}^{x_n} f(x)\,dx \approx h\cdot\left(\frac{y_0+y_n}{2}+y_1+y_2+\ldots+y_{n-1}\right) \qquad (17)$$

В данной формуле $\mathbf{x_0=a}$, $\mathbf{x_n=b}$, так как любой интеграл в общем виде выглядит **(**18**)**:

$$\int_a^b f(x)dx \qquad (18)$$

h можно вычислить по следующей формуле:

$$\mathbf{h=(b-a)/n}\ . \qquad (19)$$

$\mathbf{y_0, y_1, \ldots, y_n}$ - это значения соответствующей функции f(x) в точках $\mathbf{x_0, x_1, \ldots, x_n}$ $\mathbf{(x_i=x_{i-1}+h)}$" [3].

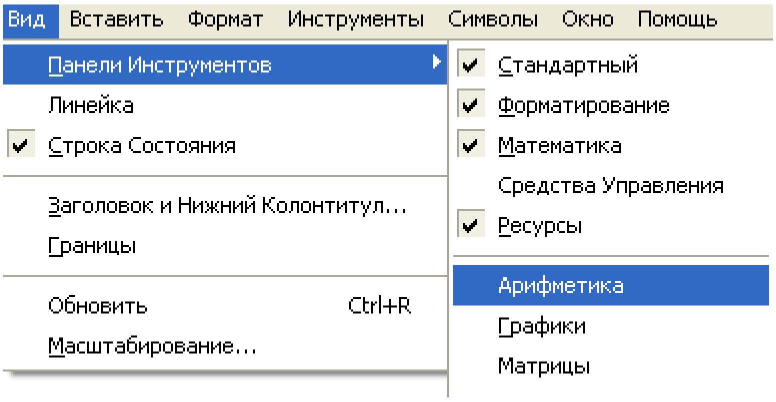
На практике данный способ реализуется следующим образом:

Вычислить интеграл $\int_0^{3,2} \sqrt{(x^4 - x^3 + 8)}\,dx$ **по формуле трапеций при n=10**

Для того, чтобы вычислить интеграл по формуле трапеций в MathCad, необходимо выполнить следующие действия:

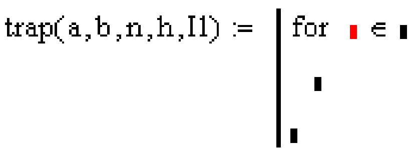
1. Ввести в поле ввода в одной строчке через какое-либо расстояние следующие выражения: a:=0, b:=3.2, n:=10.
2. В следующей строчке ввести формулу с клавиатуры h:=(b-a)/n (*обратить внимание на то, что в поле ввода данное выражение сразу преобразуется к стандартному виду*).
3. Рядом вывести значение данного выражения, для этого набрать с клавиатуры: h=.

4. Ниже ввести формулу для вычисления подинтегральной функции, для этого с клавиатуры набрать f(x):=, затем открыть панель инструментов "Арифметика", либо воспользовавшись значком, либо следующим способом:



После этого, на панели инструментов "Арифметика" выбрать "Квадратный корень": , затем в появившемся темном квадрате ввести выражение с клавиатуры x^4-x^3+8, перемещение курсора осуществляется стрелками на клавиатуре (*обратить внимание на то, что в поле ввода данное выражение сразу преобразуется к стандартному виду*).

5. Ниже ввести выражение I1:=(f(a)+f(b))/2.
6. Ниже ввести выражение trap(a,b,n,h,I1):=.
7. Затем выбрать панель инструментов "Программирование" (либо: "Вид"-"Панели инструментов"-"Программирование", либо: значок).
8. На панели инструментов "Программирование" добавить строку программы: Add Line, затем поставить курсор в первый темный прямоугольник и на панели инструментов "Программирование" выбрать "for":



9. В полученной строке, после слова for, встать курсором в первый из прямоугольников и набрать i.
10. Затем выбрать панель инструментов "Матрицы" (либо: "Вид"-"Панели инструментов"-"Матрицы", либо: значок).
11. Поставить курсор в следующий темный прямоугольник и на панели инструментов Матрицы нажать: m..n, где набрать в двух появившихся прямоугольниках соответственно: 1 и n-1.
12. Поставить курсор в нижестоящий темный прямоугольник и дважды добавить строку программы.

13. После этого вернуть курсор в первый из появившихся прямоугольников и набрать x1, затем нажать "Локальное присвоение" на панели "Программирование": ← и после этого набрать a+h.
14. Поставить курсор в следующий темный прямоугольник, где набрать I1 присвоить (кнопка "Локальное присвоение") I1+f(x1).
15. Поставить курсор в следующий темный прямоугольник, где набрать a присвоить (кнопка "Локальное присвоение") x1.
16. В следующем темном прямоугольнике добавить строку программы, где в первом из полученных прямоугольников набрать I1 присвоить (кнопка "Локальное присвоение") I1*h (*обратить внимание, что знак умножения в поле ввода автоматически превращается в стандартный*).
17. В последнем темном прямоугольнике набрать I1.
18. Ниже ввести trap(a,b,n,h,I1) и нажать знак =.
19. Для того, чтобы отформатировать ответ, нужно дважды щелкнуть по полученному числу и указать число десятичный мест - 5.

В итоге получаем:

$a := 0 \qquad b := 3.2 \qquad n := 10$

$h := \dfrac{(b-a)}{n} \qquad h = 0.32$

$$f(x) := \sqrt{x^4 - x^3 + 8}$$

$$I1 := \frac{(f(a) + f(b))}{2}$$

```
trap(a,b,n,h,I1) := | for i ∈ 1..n − 1
                    |     | x1 ← a + h
                    |     | I1 ← I1 + f(x1)
                    |     | a ← x1
                    | I1 ← I1·h
                    | I1
```

trap(a,b,n,h,I1) = 13.47971

Ответ: значение заданного интеграла равно 13,47971.

2. Формула Симпсона (парабола)

В общем виде формула парабол на отрезке $[x_0;x_n]$ выглядит следующим образом (20):

$$\int_{x_0}^{x_n} f(x)\,dx \approx \frac{2\cdot h}{3}\left[\frac{y_0-y_n}{2}+(2\cdot y_1+y_2)+(2\cdot y_3+y_4)+\dots+(2\cdot y_{n-1}+y_n)\right] \qquad (20)$$

В данной формуле $\mathbf{x_0=a}$, $\mathbf{x_n=b}$, так как любой интеграл в общем виде выглядит как (18), h можно вычислить по формуле (19).

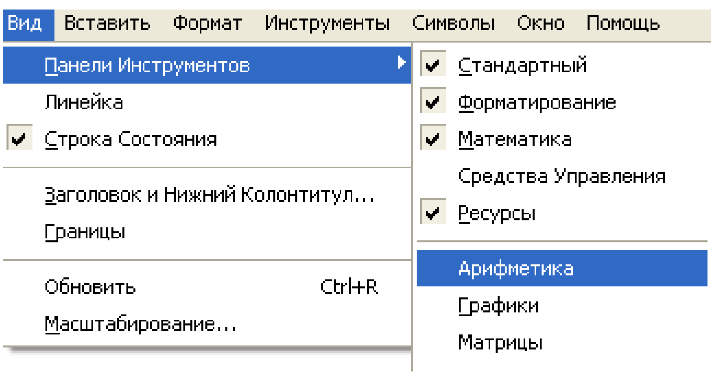
$\mathbf{y_0, y_1, \dots, y_n}$ - это значения соответствующей функции f(x) в точках $\mathbf{x_0, x_1, \dots, x_n}$ $\mathbf{(x_i=x_{i-1}+h)}$ [3].

На практике данный способ реализуется следующим образом:

Вычислить интеграл $\int_0^{3,2} \sqrt{(x^4 - x^3 + 8)}\,dx$ по формуле парабол при n=10

Для того, чтобы вычислить интеграл по формуле Симпсона в MathCad, необходимо выполнить следующие действия:

1. Ввести в поле ввода в одной строчке через какое-либо расстояние следующие выражения: a:=0, b:=3.2, n:=10.
2. В следующей строчке ввести формулу с клавиатуры h:=(b-a)/n (*обратить внимание на то, что в поле ввода данное выражение сразу преобразуется к стандартному виду*).
3. Рядом вывести значение данного выражения, для этого набрать с клавиатуры: h=.
4. Ниже ввести формулу для вычисления подинтегральной функции, для этого с клавиатуры набрать f(x):=, затем открыть панель инструментов "Арифметика", либо воспользовавшись значком, либо следующим способом:



После этого, на панели инструментов "Арифметика" выбрать "Квадратный корень": , затем в появившемся темном квадрате ввести выражение с клавиатуры x^4-x^3+8, перемещение курсора осуществляется стрелками на клавиатуре (*обратить внимание на то, что в поле ввода данное выражение сразу преобразуется к стандартному виду*).

5. Ниже ввести выражение s1:=(f(a)-f(b))/2.
6. Ниже ввести выражение simps(a,b,n,h,s1):=.
7. Затем выбрать панель инструментов "Программирование" (либо: "Вид"-"Панели инструментов"-"Программирование", либо: значок).
8. На панели инструментов "Программирование" добавить две строки программы: Add Line, затем поставить курсор в первый темный прямоугольник и ввести s2 присвоить 0 (присвоение осуществлять кнопкой "Локальное присвоение" на панели "Программирование": ←), а в следующем темном прямоугольнике ввести s3 присвоить 0.
9. Затем поставить курсор в следующий темный прямоугольник и добавить еще одну строку программы, после этого вернуть курсор в этот же прямоугольник и на панели инструментов "Программирование" выбрать "for":
10. В полученной строке, после слова for, встать курсором в первый из прямоугольников и набрать i.
11. Затем выбрать панель инструментов "Матрицы" (либо: "Вид"-"Панели инструментов"-"Матрицы", либо: значок).
12. Поставить курсор в следующий темный прямоугольник и на панели инструментов "Матрицы" нажать: m..n, где набрать в двух появившихся прямоугольниках соответственно: 1 и n.
13. Поставить курсор в нижестоящий темный прямоугольник и дважды добавить строку программы.
14. После этого вернуть курсор в первый из появившихся прямоугольников и нажать на панели "Программирование" кнопку if, в темном прямоугольнике перед if набрать с клавиатуры s2 присвоить s2+f(a+i*h), а в прямоугольнике после if вставить функцию mod ("Вставить"-"Функция"-"mod"), где в появившихся темных квадратах набрать соответственно i, 2, а после первых скобок на панели инструментов "Булево" ("Вид"-"Панели инструментов"-"Булево") нажать ≠, а затем после этого набрать 0.
15. Поставить курсор в следующий темный прямоугольник и нажать на панели "Программтрование" otherwise, затем набрать в появившемся прямоугольнике с клавиатуры s3 присвоить s3+f(a+i*h).
16. Поставить курсор в следующий темный прямоугольник, где набрать a присвоить (кнопка "Локальное присвоение") x1.
17. В следующем темном прямоугольнике добавить строку программы, где в первом из полученных прямоугольников набрать с клавиатуры I1 присвоить 2*h*(s1+2*s2+s3)/3.
18. В последнем темном прямоугольнике набрать I1.
19. Ниже ввести simps(a,b,n,h,s1) и нажать знак =.

20. Для того, чтобы отформатировать ответ, нужно дважды щелкнуть по полученному числу и указать число десятичный мест - 5.

В итоге получаем:

$a := 0 \qquad b := 3.2 \qquad n := 10$

$h := \dfrac{(b - a)}{n} \qquad h = 0.32$

$f(x) := \sqrt{x^4 - x^3 + 8}$

$s1 := \dfrac{(f(a) - f(b))}{2}$

```
simps(a,b,n,h,s1) := | s2 ← 0
                     | s3 ← 0
                     | for  i ∈ 1..n
                     |     | s2 ← s2 + f(a + i·h)  if  (mod(i,2) ≠ 0)
                     |     | s3 ← s3 + f(a + i·h)  otherwise
                     | I1 ← 2·h·(s1 + 2·s2 + s3)/3
                     | I1
```

simps(a,b,n,h,s1) = 13.43192

Ответ: значение заданного интеграла равно 13,43192.

3. Формулы прямоугольников

Существует несколько видов формул прямоугольников:

1. **"Формула левых прямоугольников.**

В общем виде *формула левых прямоугольников* на отрезке $[x_0;x_n]$ выглядит следующим образом (21):

$$\int_{x_0}^{x_n} f(x)\,dx \approx h(y_0 + y_1 + \ldots + y_{n-1}) \qquad (21)$$

В данной формуле $x_0=a$, $x_n=b$, так как любой интеграл в общем виде выглядит, см. **(**18**).**

h можно вычислить по формуле (19**).**

$y_0, y_1, ..., y_{n-1}$ - это значения соответствующей функции f(x) в точках $x_0, x_1, ..., x_{n-1}$ ($x_i=x_{i-1}+h$).

2. **Формула правых прямоугольников.**

В общем виде *формула правых прямоугольников* на отрезке $[x_0;x_n]$ выглядит следующим образом (22):

$$\int_{x_0}^{x_n} f(x)dx \approx h(y_1+y_2+...+y_n) \qquad (22)$$

В данной формуле $x_0=a$, $x_n=b$ (см. формулу для левых прямоугольников).

h можно вычислить по той же формуле, что и в формуле для левых прямоугольников.

$y_1, y_2, ..., y_n$ - это значения соответствующей функции f(x) в точках $x_1, x_2, ..., x_n$ ($x_i=x_{i-1}+h$).

3. **Формула средних прямоугольников.**

В общем виде *формула средних прямоугольников* на отрезке $[x_0;x_n]$ выглядит следующим образом (23):

$$\int_a^b f(x)dx \approx h\sum_{i=0}^{n-1} f(x_i+\frac{h}{2}) \qquad (23)$$

где $x_i=x_{i-1}+h$.

В данной формуле, как и в предыдущих, требуется h умножать сумму значений функции f(x), но уже не просто подставляя соответствующие значения $x_0, x_1, ..., x_{n-1}$ в функцию f(x), а прибавляя к каждому из этих значений **h/2** ($x_0+h/2$, $x_1+h/2$,..., $x_{n-1}+h/2$), а затем только подставляя их в заданную функцию. h можно вычислить по той же формуле, что и в формуле для левых прямоугольников **[**6**].**

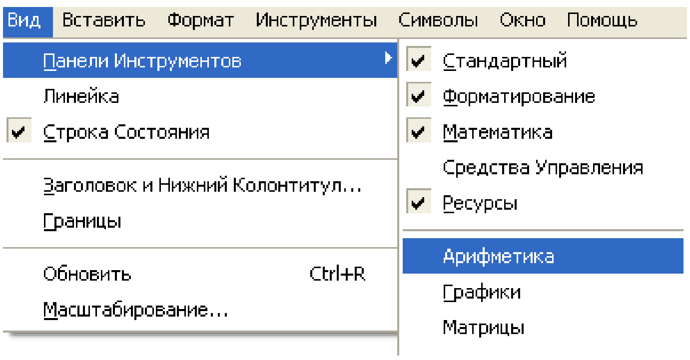
На практике данные способы реализуются следующим образом:

а) Вычислить интеграл $\int_0^{3,2} \sqrt{(x^4 - x^3 + 8)}\, dx$

по формуле левых прямоугольников при n=10

Для того, чтобы вычислить интеграл по формуле левых прямоугольников в MathCad, необходимо выполнить следующие действия:

1. Ввести в поле ввода в одной строчке через какое-либо расстояние следующие выражения: a:=0, b:=3.2, n:=10.
2. В следующей строчке ввести формулу с клавиатуры h:=(b-a)/n (*обратить внимание на то, что в поле ввода данное выражение сразу преобразуется к стандартному виду*).
3. Рядом вывести значение данного выражения, для этого набрать с клавиатуры: h=.
4. Ниже ввести формулу для вычисления подинтегральной функции, для этого с клавиатуры набрать f(x):=, затем открыть панель инструментов "Арифметика", либо воспользовавшись значком, либо следующим способом:



После этого, на панели инструментов "Арифметика" выбрать "Квадратный корень": , затем в появившемся темном квадрате ввести выражение с клавиатуры x^4-x^3+8, перемещение курсора осуществляется стрелками на клавиатуре (*обратить внимание на то, что в поле ввода данное выражение сразу преобразуется к стандартному виду*).

5. Ниже ввести выражение I1:=f(a).
6. Ниже ввести выражение pr_l(a,b,n,h,I1):=.
7. Затем выбрать панель инструментов "Программирование" (либо: Вид/Панели инструментов/Программирование, либо: значок).
8. На панели инструментов "Программирование" добавить строку программы: Add Line, затем поставить курсор в первый темный прямоугольник и на панели инструментов "Программирование" выбрать "for".
9. В полученной строке, после слова for, встать курсором в первый из прямоугольников и набрать i.
10. Затем выбрать панель инструментов "Матрицы" (либо: "Вид"-"Панели инструментов"-"Матрицы", либо: значок).

11. Поставить курсор в следующий темный прямоугольник и на панели инструментов "Матрицы" нажать: m..n, где набрать в двух появившихся прямоугольниках соответственно: 1 и n-1.
12. Поставить курсор в нижестоящий темный прямоугольник и дважды добавить строку программы.
13. После этого вернуть курсор в первый из появившихся прямоугольников и набрать x1, затем нажать "Локальное присвоение" на панели "Программирование": ← и после этого набрать a+h.
14. Поставить курсор в следующий темный прямоугольник, где набрать I1 присвоить (кнопка "Локальное присвоение") I1+f(x1).
15. Поставить курсор в следующий темный прямоугольник, где набрать a присвоить (кнопка "Локальное присвоение") x1.
16. В следующем темном прямоугольнике добавить строку программы, где в первом из полученных прямоугольников набрать I1 присвоить (кнопка "Локальное присвоение") I1*h (*обратить внимание, что знак умножения в поле ввода автоматически превращается в стандартный*).
17. В последнем темном прямоугольнике набрать I1.
18. Ниже ввести pr_l(a,b,n,h,I1) и нажать знак =.

19. Для того, чтобы отформатировать ответ, нужно дважды щелкнуть по полученному числу и указать число десятичный мест - 6.

В итоге получаем:

$$a := 0 \qquad b := 3.2 \qquad n := 10$$

$$h := \frac{(b-a)}{n} \qquad h = 0.32$$

$$f(x) := \sqrt{x^4 - x^3 + 8}$$

$$I1 := f(a)$$

```
pr_l(a,b,n,h,I1) := | for i ∈ 1..n − 1
                    |    | x1 ← a + h
                    |    | I1 ← I1 + f(x1)
                    |    | a ← x1
                    | I1 ← I1·h
                    | I1
```

$$pr\_l(a,b,n,h,I1) = 12.500377$$

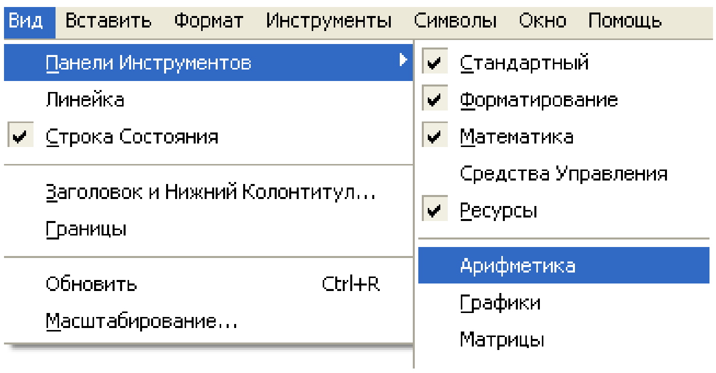
Ответ: значение заданного интеграла равно 12,500377.

b) Вычислить интеграл $\int\limits_{0}^{3,2} \sqrt{(x^4 - x^3 + 8)}\,dx$

по формуле правых прямоугольников при n=10

Для того, чтобы вычислить интеграл по формуле правых прямоугольников в MathCad, необходимо выполнить следующие действия:

1. Ввести в поле ввода в одной строчке через какое-либо расстояние следующие выражения: a:=0, b:=3.2, n:=10.
2. В следующей строчке ввести формулу с клавиатуры h:=(b-a)/n (*обратить внимание на то, что в поле ввода данное выражение сразу преобразуется к стандартному виду*).
3. Рядом вывести значение данного выражения, для этого набрать с клавиатуры: h=.
4. Ниже ввести формулу для вычисления подинтегральной функции, для этого с клавиатуры набрать f(x):=, затем открыть панель инструментов "Арифметика", либо воспользовавшись значком, либо следующим способом:



После этого, на панели инструментов "Арифметика" выбрать "Квадратный корень": , затем в появившемся темном квадрате ввести выражение с клавиатуры x^4-x^3+8, перемещение курсора осуществляется стрелками на клавиатуре (*обратить внимание на то, что в поле ввода данное выражение сразу преобразуется к стандартному виду*).

5. Ниже ввести выражение I1:=0.
6. Ниже ввести выражение pr_p(a,b,n,h,I1):=.
7. Затем выбрать панель инструментов "Программирование" (либо: Вид/Панели инструментов/Программирование, либо: значок).
8. На панели инструментов "Программирование" добавить строку программы: Add Line, затем поставить курсор в первый темный

прямоугольник и на панели инструментов "Программирование" выбрать "for".

9. В полученной строке, после слова for, встать курсором в первый из прямоугольников и набрать i.
10. Затем выбрать панель инструментов "Матрицы" (либо: Вид/Панели инструментов/Матрицы, либо: значок ).
11. Поставить курсор в следующий темный прямоугольник и на панели инструментов "Матрицы" нажать: , где набрать в двух появившихся прямоугольниках соответственно: 1 и n.
12. Поставить курсор в нижестоящий темный прямоугольник и дважды добавить строку программы.
13. После этого вернуть курсор в первый из появившихся прямоугольников и набрать x1, затем нажать "Локальное присвоение" на панели "Программирование": ← и после этого набрать a+h.
14. Поставить курсор в следующий темный прямоугольник, где набрать I1 присвоить (кнопка "Локальное присвоение") I1+f(x1).
15. Поставить курсор в следующий темный прямоугольник, где набрать a присвоить (кнопка "Локальное присвоение") x1.
16. В следующем темном прямоугольнике добавить строку программы, где в первом из полученных прямоугольников набрать I1 присвоить (кнопка "Локальное присвоение") I1*h (*обратить внимание, что знак умножения в поле ввода автоматически превращается в стандартный*).
17. В последнем темном прямоугольнике набрать I1.
18. Ниже ввести pr_p(a,b,n,h,I1) и нажать знак =.
19. Для того, чтобы отформатировать ответ, нужно дважды щелкнуть по полученному числу и указать число десятичный мест - 5.

В итоге получаем:

$a := 0 \qquad b := 3.2 \qquad n := 10$

$h := \frac{(b-a)}{n} \qquad h = 0.32$

$f(x) := \sqrt{x^4 - x^3 + 8}$

$I1 := 0$

$$pr\_p(a,b,n,h,I1) := \left| \begin{array}{l} \text{for } i \in 1..n \\ \quad \left| \begin{array}{l} x1 \leftarrow a + h \\ I1 \leftarrow I1 + f(x1) \\ a \leftarrow x1 \end{array} \right. \\ I1 \leftarrow I1 \cdot h \\ I1 \end{array} \right.$$

$pr\_p(a,b,n,h,I1) = 14.45905$

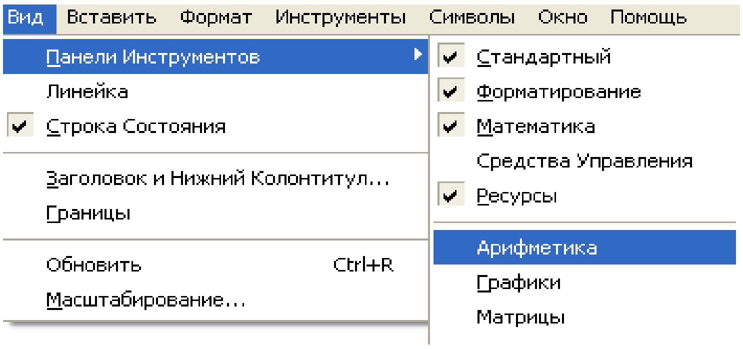
Ответ: значение заданного интеграла равно 14,45905.

с) Вычислить интеграл $\int_{0}^{3,2} \sqrt{(x^4 - x^3 + 8)}\,dx$

по формуле средних прямоугольников при n=10

Для того, чтобы вычислить интеграл по формуле средних прямоугольников в MathCad, необходимо выполнить следующие действия:

1. Ввести в поле ввода в одной строчке через какое-либо расстояние следующие выражения: a:=0, b:=3.2, n:=10.
2. В следующей строчке ввести формулу с клавиатуры h:=(b-a)/n (*обратить внимание на то, что в поле ввода данное выражение сразу преобразуется к стандартному виду*).
3. Рядом вывести значение данного выражения, для этого набрать с клавиатуры: h=.
4. Ниже ввести формулу для вычисления подинтегральной функции, для этого с клавиатуры набрать f(x):=, затем открыть панель инструментов "Арифметика", либо воспользовавшись значком , либо следующим способом:



После этого, на панели инструментов "Арифметика" выбрать "Квадратный корень": , затем в появившемся темном квадрате ввести выражение с клавиатуры x^4-x^3+8, перемещение курсора осуществляется стрелками на клавиатуре (*обратить внимание на то, что в поле ввода данное выражение сразу преобразуется к стандартному виду*).

5. Ниже ввести выражение I1:=f(a+h/2) (*обратить внимание на то, что в поле ввода данное выражение сразу преобразуется к стандартному виду*).
6. Ниже ввести выражение pr_s(a,b,n,h,I1):=.
7. Затем выбрать панель инструментов "Программирование" (либо: Вид/Панели инструментов/Программирование, либо: значок).
8. На панели инструментов "Программирование" добавить строку программы: Add Line, затем поставить курсор в первый темный прямоугольник и на панели инструментов "Программирование" выбрать "for".
9. В полученной строке, после слова for, встать курсором в первый из прямоугольников и набрать i.
10. Затем выбрать панель инструментов "Матрицы" (либо: Вид/Панели инструментов/Матрицы, либо: значок).
11. Поставить курсор в следующий темный прямоугольник и на панели инструментов "Матрицы" нажать: m..n, где набрать в двух появившихся прямоугольниках соответственно: 1 и n-1.
12. Поставить курсор в нижестоящий темный прямоугольник и дважды добавить строку программы.
13. После этого вернуть курсор в первый из появившихся прямоугольников и набрать x1, затем нажать "Локальное присвоение" на панели "Программирование": ← и после этого набрать a+h.
14. Поставить курсор в следующий темный прямоугольник, где набрать I1 присвоить (кнопка "Локальное присвоение") I1+f(x1+h/2).
15. Поставить курсор в следующий темный прямоугольник, где набрать a присвоить (кнопка "Локальное присвоение") x1.
16. В следующем темном прямоугольнике добавить строку программы, где в первом из полученных прямоугольников набрать I1 присвоить (кнопка "Локальное присвоение") I1*h (*обратить внимание, что знак*

умножения в поле ввода автоматически превращается в стандартный).

17. В последнем темном прямоугольнике набрать I1.
18. Ниже ввести pr_s(a,b,n,h,I1) и нажать знак =.
19. Для того, чтобы отформатировать ответ, нужно дважды щелкнуть по полученному числу и указать число десятичный мест - 5. **В итоге получаем** Ответ: значение заданного интеграла равно 13,40797.

$$a := 0 \qquad b := 3.2 \qquad n := 10$$

$$h := \frac{(b-a)}{n} \qquad h = 0.32$$

$$f(x) := \sqrt{x^4 - x^3 + 8}$$

$$I1 := f\left(a + \frac{h}{2}\right)$$

$$pr\_s(a,b,n,h,I1) := \left|\begin{array}{l} \text{for } i \in 1..n-1 \\ \quad \left|\begin{array}{l} x1 \leftarrow a + h \\ I1 \leftarrow I1 + f\left(x1 + \frac{h}{2}\right) \\ a \leftarrow x1 \end{array}\right. \\ I1 \leftarrow I1 \cdot h \\ I1 \end{array}\right.$$

$$pr\_s(a,b,n,h,I1) = 13.40797$$

1. Метод Монте-Карло

Основная идея метода Монте-Карло заключается в многократном повторении случайных испытаний. Характерной особенностью метода Монте-Карло является использование случайных чисел (числовых значений некоторой случайной величины). Такие числа можно получать с помощью датчиков случайных чисел. Например, в языке программирования Turbo Pascal имеется стандартная функция *random* , значениями которой являются случайные числа, равномерно распределенные на отрезке **[0; 1]**. Сказанное означает, что если разбить указанный отрезок на некоторое число равных интервалов и вычислить значение функции random большое число раз, то в каждый интервал попадет приблизительно одинаковое количество случайных чисел. В языке программирования basin подобным датчиком является функция rnd. В табличном процессоре MS Excel функция **СЛЧИС** возвращает равномерно распределенное случайное число большее или равное 0 и меньшее 1 (изменяется при пересчете) [**7**].

Рассмотрим интеграл: $\int_a^b f(x)dx$

Для того чтобы его вычислить, необходимо воспользоваться формулой : $I = \frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)$, где (i=1, 2, …, n) – случайные числа, лежащие в интервале **[a;b]**.

Для получения таких чисел на основе последовательности случайных чисел x_i , равномерно распределенных в интервале [0;1], достаточно выполнить преобразование $x_i=a+(b-a)x_i$.

На практике данный способ реализуется следующим образом:

Вычислить интеграл $\int_0^{3,2} \sqrt{(x^4 - x^3 + 8)}\,dx$ **по формуле трапеций при n=10**

Для того, чтобы вычислить интеграл методом Монте-Карло в MathCad, необходимо выполнить следующие действия:

1. Ввести в поле ввода в одной строчке через какое-либо расстояние следующие выражения: a:=0, b:=3.2, n:=10.
2. В следующей строчке ввести A:=, затем "Вставить - Функция" и выбрать функцию runif и вместо точек указать значения: 10, 0, 3.2 (данная функия возвращает вектор из m случайных значений, имеющих универсальное распределение на интервале **[a;b]**).
3. Строчкой ниже ввести в поле ввода A=.
4. В свободном месте, в поле ввода ввести выражение I1:=, на панели инструментов "Арифметика" выбрать "Квадратный корень", поставить скобки, в них написать А, на панели инструментов "Матрицы" нажать "Нижний индекес" и в нижнем квадрате ввести 0,за скобками выбрать на панели инструментов "Арифметика" "Возведение в степень" и в появившемся квадрате ввести 4, поставить минус $(A_0)^3$ и прибавить 8.
5. Рядом ввести I1=.
6. Ниже, в столбик вычислить значения I1, I3, I4,...,I9, в каждом случае вводя нижним индексом А значение 1,2,3,...,9.
7. Затем, ввести Summa:=I1+I2+I3+I4+I5+I6+I7+I8+I9.
8. Строчкой ниже ввести Summa=.
9. Затем, ввести фомулу: $I := \frac{b-a}{n} \cdot Summa$
10. Рядом ввести I=.

В итоге получаем:

$a := 0 \quad b := 3.2 \quad n := 10$

$A := \mathrm{runif}(10, 0, 3.2)$

$A =$

	0
0	3.163
1	0.381
2	0.029
3	1.701
4	1.926
5	0.532
6	1.443
7	0.183
8	2.507
9	1.664

$$I1 := \sqrt{(A_0)^4 - (A_0)^3 + 8} \qquad I1 = 8.745$$

$$I2 := \sqrt{(A_1)^4 - (A_1)^3 + 8} \qquad I2 = 2.822$$

$$I3 := \sqrt{(A_3)^4 - (A_3)^3 + 8} \qquad I3 = 3.384$$

$$I4 := \sqrt{(A_4)^4 - (A_4)^3 + 8} \qquad I4 = 3.822$$

$$I5 := \sqrt{(A_5)^4 - (A_5)^3 + 8} \qquad I5 = 2.816$$

$$I6 := \sqrt{(A_6)^4 - (A_6)^3 + 8} \qquad I6 = 3.054$$

$$I7 := \sqrt{(A_7)^4 - (A_7)^3 + 8} \qquad I7 = 2.828$$

$$I8 := \sqrt{(A_8)^4 - (A_8)^3 + 8} \qquad I8 = 5.633$$

$$I9 := \sqrt{(A_9)^4 - (A_9)^3 + 8} \qquad I9 = 3.325$$

$$Summa := I1 + I2 + I3 + I4 + I5 + I6 + I7 + I8 + I9$$

$$Summa = 36.429$$

$$I := \frac{b - a}{n} \cdot Summa \qquad I = 11.657$$

Ответ: значение заданного интеграла равно 11,657

Практическая работа 5

<u>Метод наилучших приближений</u>

1. Метод наименьших квадратов

Пусть в результате эксперимента были получены некоторые значения, представленные в виде таблицы.

x_i	y_i
x_0	y_0
x_1	y_1
.	.
.	.
.	.
x_n	y_n

Расстояние между аргументами произвольное.

Нужно найти функцию g(x), приближенно описывающую функцию f(x).

Функция g(x) может выглядеть в виде линейной, квадратичной, степенной и так далее.

Рассмотрим линейную функцию.

В общем виде она выглядит: $g=ax+b$.

Запишем для данного случая систему:

$$\begin{cases} a\sum_{i=0}^{n} x_i + (n-1)b = \sum_{i=0}^{n} y_i \\ a\sum_{i=0}^{n} x_i^{\,2} + x_i = \sum_{i=0}^{n} x_i y_i \end{cases}$$

$$M_x = \sum_{i=0}^{n} x_i\,;\; M_y = \sum_{i=o}^{n} y_i\,;\; M_{xy} = \sum_{i=o}^{n} x_i y_i\,;\; M_{x2} = \sum_{i=0}^{n} x_i^{\,2}\,;\; M_{x2y} = \sum x2y_i\,.$$

$$D = \begin{vmatrix} M_x & n+1 \\ M_{x2} & Mx \end{vmatrix} = (M_x)^2 - (n+1)\cdot M_{x2}$$ - вычисляем определитель.

$$D1 = \begin{vmatrix} M_y & n+1 \\ M_{xy} & M_x \end{vmatrix} = M_y M_x - (n+1)\cdot M_{xy}$$ - вычисляем определитель 1 порядка.

$$D2 = \begin{vmatrix} M_x & M_y \\ M_{x2} & M_{xy} \end{vmatrix} = M_x M_{xy} - M_{x2} M_y$$ - вычисляем определитель 2 порядка.

$$a = \frac{D1}{D};\; b = \frac{D2}{D}\,.$$

Рассмотрим квадратичную функцию.

В общем виде она выглядит: $g=ax_2+bx+c$

Запишем для данного случая систему [**1**]:

$$\begin{cases} aM_{x2} + bM_x + c(n+1) = M_y \\ aM_{x3} + bM_{x2} + cM_x = M_{xy} \\ aM_{x4} + bM_{x3} + cM_{x2} = M_{x2y} \end{cases}$$

$$D = \begin{vmatrix} M_{x2} & M_x & n+1 \\ M_{x3} & M_{x2} & M_x \\ M_{x4} & M_{x4} & M_{x2} \end{vmatrix}; \quad D1 = \begin{vmatrix} M_y & M_x & n+1 \\ M_{xy} & M_{x2} & M_x \\ M_{x2y} & M_{x3} & M_{x2} \end{vmatrix}; \quad D2 = \begin{vmatrix} M_{x2} & M_y & n+1 \\ M_{x3} & M_{xy} & M_x \\ M_{x4} & M_{x2y} & M_{x2} \end{vmatrix};$$

$$D3 = \begin{vmatrix} M_{x2} & M_x & M_y \\ M_{x3} & M_{x2} & M_{xy} \\ M_{x4} & M_{x3} & M_{x2y} \end{vmatrix}$$

$$a = \frac{D1}{D}; \; b = \frac{D2}{D}; \; c = \frac{D3}{D}.$$

На практике данный способ реализуется следующим образом: Для данных, заданных в таблице установить линейную зависимость: g=ax+b.

x_i	y_i
2,5	21,55
3,1	23,65
5,9	33,45
6,3	34,85
7,8	40,1

с помощью **MathCad**.

1. В поле ввода ввести n=4.
2. Строчкой ниже ввести T:=, на панеле "Матрицы" выбрать кнопку "Создать матрицу или вектор", выбрать количество строк=2, а количество столбцов=5.
3. В каждый квадрат первой строчки матрицы по порядку ввести цифры: 2.5, 3.1, 5.9, 6.3, 7.8.
4. В каждый квадрат второй строчки матрицы по поряду ввести цифры: 21.55, 23.65, 33.45, 34.85, 40.1.
5. В следующей строчке ввести Mx:=, на панели ""Матанализ" выбрать кнопку "Суммирование", в нижнем квадрате ввести i=0, а в верхнем - n, в слудующем квадрате ввести T, на панели "Матрицы" выбрать кнопку "Нижний индекс" и в появившемся квадрате ввести 0,i.
6. Рядом ввести Mx=.

7. В следующей строчке ввести Mx2:=, на панели ""Матанализ" выбрать кнопку "Суммирование", в нижнем квадрате ввести i=0, а в верхнем - n, в слудующем квадрате ввести скобки и в них ввести T, на панели "Матрицы" выбрать кнопку "Нижний индекс" и в появившемся квадрате ввести 0,i, за скобками на панели "Арифметика" выбрать кнопку "Возведение в степень", в появившемся квадрате ввести 2.
8. Рядом ввести Mx2=.
9. В следующей строчке ввести My:=, на панели ""Матанализ" выбрать кнопку "Суммирование", в нижнем квадрате ввести i=0, а в верхнем - n, в слудующем квадрате ввести T, на панели "Матрицы" выбрать кнопку "Нижний индекс" и в появившемся квадрате ввести 1,i.
10. Рядом ввести My=.
11. В следующей строчке ввести Mxy:=, на панели ""Матанализ" выбрать кнопку "Суммирование", в нижнем квадрате ввести i=0, а в верхнем - n, в слудующем квадрате ввести скобки, в них $T_{0,i}$ умножить $T_{1,i}$.
12. Рядом ввести Mxy=.
13. В следующей строчке ввести D:=, на панели "Матрицы" выбрать кнопку "Вычисление определителя", а затем "Создать матрицу или вектор", указать количество строк=2, количество столбцов=2.
14. В первой строке, в появившихся квадратах поочередно ввести: Mx и n+1.
15. В квадратах второй строки ввести Mx2 и Mx. Рядом ввести D=.
16. В следующей строчке ввести D1:=, на панели "Матрицы" выбрать кнопку "Вычисление определителя", а затем "Создать матрицу или вектор", указать количество строк=2, количество столбцов=2.
17. В первой строке, в появившихся квадратах поочередно ввести: My и n+1.
18. В квадратах второй строки ввести Mxy и Mx. Рядом ввести D1=.
19. В следующей строчке ввести D2:=, на панели "Матрицы" выбрать кнопку "Вычисление определителя", а затем "Создать матрицу или вектор", указать количество строк=2, количество столбцов=2.
20. В первой строке, в появившихся квадратах поочередно ввести: Mx и My.
21. В квадратах второй строки ввести Mx2 и Mxy. Рядом ввести D2=.
22. Ниже ввести a=D1, знак деления, D. Рядом ввести a=.
23. Ниже ввести b=D2, знак деления, D. Рядом ввести b=.

В итоге получаем следующее:

$$n := 4$$

$$T := \begin{pmatrix} 2.5 & 3.1 & 5.9 & 6.3 & 7.8 \\ 21.55 & 23.65 & 33.45 & 34.85 & 40.1 \end{pmatrix}$$

$$Mx := \sum_{i=0}^{n} T_{0,i} \qquad Mx = 25.6$$

$$Mx2 := \sum_{i=0}^{n} \left(T_{0,i}\right)^2 \qquad Mx2 = 151.2$$

$$My := \sum_{i=0}^{n} T_{1,i} \qquad My = 153.6$$

$$Mxy := \sum_{i=0}^{n} \left(T_{0,i} \cdot T_{1,i}\right) \qquad Mxy = 856.88$$

$$D := \left|\begin{pmatrix} Mx & n+1 \\ Mx2 & Mx \end{pmatrix}\right| \qquad D = -100.64$$

$$D1 := \left|\begin{pmatrix} My & n+1 \\ Mxy & Mx \end{pmatrix}\right| \qquad D1 = -352.24$$

$$D2 := \left|\begin{pmatrix} Mx & My \\ Mx2 & Mxy \end{pmatrix}\right| \qquad D2 = -1.288 \times 10^3$$

$$a := \frac{D1}{D} \qquad a = 3.5$$

$$b := \frac{D2}{D} \qquad b = 12.8$$

Ответ: g=3,5x+12,8.

Практическая работа 6

Интерполирование функций

1. Интерполяционный многочлен Лагранжа

"Пусть некоторая функция y=f(x) задана таблично:

i	**x_i**	**y_i**
0	x_0	y_0
1	x_1	y_1
.	.	.
.	.	.
.	.	.
n	x_n	y_n

где x_0, x_1,..., x_n - узлы интерполяции. Причем, расстояние между узлами интерполяции произвольное.

В интерполировании находят значение функции в заданной точке x_k, принадлежащей отрезку $[x_0;x_n]$, но x_k не совпадает ни с одним узлом интерполяции (x_k не равно $x_0, x_1,...,x_n$.)

Интерполяционную функцию подбирают из определенного класса функций. Часто такую функцию находят в виде интерполяционного многочлена $F_n(x)$.

В качестве интерполяционного многочлена будем рассматривать **интерполяционный многочлен Лагранжа $L_n(x)$.**

Многочлен Лагранжа строят следующим образом **(24)**:

$L_n(x)=l_0(x)+l_1(x)+l_2(x)+...+l_n(x)$, где $l_i(x)$ вычисляется по следующей формуле **(25)**:

$$l_i(x)=y_i\cdot\frac{(x-x_0)\cdot(x-x_1)\cdot...\cdot(x-x_{i-1})\cdot(x-x_{i+1})\cdot...\cdot(x-x_n)}{(x_i-x_0)\cdot(x_i-x_1)\cdot...\cdot(x_i-x_{i-1})\cdot(x_i-x_{i+1})\cdot...\cdot(x_i-x_n)}$$

Следовательно, интерполяционный многочлен Лагранжа для неравно отстающих узлов выглядит (26) [5]:

$$L_n(x)=\sum_{i=0}^{n}y_i\cdot\frac{(x-x_0)\cdot(x-x_1)\cdot...\cdot(x-x_{i-1})\cdot(x-x_{i+1})\cdot...\cdot(x-x_n)}{(x_i-x_0)\cdot(x_i-x_1)\cdot...\cdot(x_i-x_{i-1})\cdot(x_i-x_{i+1})\cdot...\cdot(x_i-x_n)}$$

На практике данный способ реализуется следующим образом: используя формулу Лагранжа, найти приближенное значение функции:

i	x_i	$f(x_i)$
0	-1	-1,35078
1	-0,7	-0,14846
2	1,3	3,50988
3	2,5	16,13892
4	5,6	177,07487

в точке t=2,005 с помощью **MathCad**.

1. Заполнить поле ввода следующим образом:

$$x0 := -1 \qquad y0 := -1.35078 \qquad t := 2.005$$
$$x1 := -0.7 \qquad y1 := -0.14846 \qquad n := 4$$
$$x2 := 1.3 \qquad y2 := 3.50988$$
$$x3 := 2.5 \qquad y3 := 16.13892$$
$$x4 := 5.6 \qquad y4 := 177.07487$$

2. Ниже ввести с клавиатуры l0(t):=y0*, затем нажать "/",где в числителе ввести: (t-x1)*(t-x2)*(t-x3)*(t-x4), а в знаменателе: (x0-x1)*(x0-x2)*(x0-x3)*(x0-x4).
3. Ниже вывести результат данного выражения, для этого набрать lo(t) и нажать =.
4. Так как n=4, то необходимо в поле ввода набрать еще 4 подобных формулы, для этого можно просто скопировать две предыдущие (выделить формулы, правая кнопка мыши, копировать), затем в рабочем поле ниже вставить их 4 раза и откорректировать следующим образом:

$$l0(t) := y0\cdot\frac{(t-x1)\cdot(t-x2)\cdot(t-x3)\cdot(t-x4)}{(x0-x1)\cdot(x0-x2)\cdot(x0-x3)\cdot(x0-x4)}$$

$$l0(t) = -0.288$$

$$l1(t) := y1\cdot\frac{(t-x0)\cdot(t-x2)\cdot(t-x3)\cdot(t-x4)}{(x1-x0)\cdot(x1-x2)\cdot(x1-x3)\cdot(x1-x4)}$$

$$l1(t) = 0.046$$

$$l2(t) := y2\cdot\frac{(t-x0)\cdot(t-x1)\cdot(t-x3)\cdot(t-x4)}{(x2-x0)\cdot(x2-x1)\cdot(x2-x3)\cdot(x2-x4)}$$

$$l2(t) = 2.139$$

$$l3(t) := y3\cdot\frac{(t-x1)\cdot(t-x2)\cdot(t-x0)\cdot(t-x4)}{(x3-x1)\cdot(x3-x2)\cdot(x3-x0)\cdot(x3-x4)}$$

$$l3(t) = 7.98$$

$$l4(t) := y4\cdot\frac{(t-x1)\cdot(t-x2)\cdot(t-x3)\cdot(t-x0)}{(x4-x1)\cdot(x4-x2)\cdot(x4-x3)\cdot(x4-x0)}$$

$$l4(t) = -0.906$$

5. Ниже ввести с клавиатуры L4(t):=l0(t)+l1(t)+l2(t)+l3(t)+l4(t).

6. Затем вывести результат данного выражения, для этого набрать L4(t) и нажать =.

В итоге получаем следующее:

$x0 := -1$ $\quad y0 := -1.35078$ $\quad t := 2.005$

$x1 := -0.7$ $\quad y1 := -0.14846$ $\quad n := 4$

$x2 := 1.3$ $\quad y2 := 3.50988$

$x3 := 2.5$ $\quad y3 := 16.13892$

$x4 := 5.6$ $\quad y4 := 177.07487$

$$l0(t) := y0\cdot\frac{(t-x1)\cdot(t-x2)\cdot(t-x3)\cdot(t-x4)}{(x0-x1)\cdot(x0-x2)\cdot(x0-x3)\cdot(x0-x4)}$$

$l0(t) = -0.288$

$$l1(t) := y1\cdot\frac{(t-x0)\cdot(t-x2)\cdot(t-x3)\cdot(t-x4)}{(x1-x0)\cdot(x1-x2)\cdot(x1-x3)\cdot(x1-x4)}$$

$l1(t) = 0.046$

$$l2(t) := y2\cdot\frac{(t-x0)\cdot(t-x1)\cdot(t-x3)\cdot(t-x4)}{(x2-x0)\cdot(x2-x1)\cdot(x2-x3)\cdot(x2-x4)}$$

$l2(t) = 2.139$

$$l3(t) := y3\cdot\frac{(t-x1)\cdot(t-x2)\cdot(t-x0)\cdot(t-x4)}{(x3-x1)\cdot(x3-x2)\cdot(x3-x0)\cdot(x3-x4)}$$

$l3(t) = 7.98$

$$l4(t) := y4\cdot\frac{(t-x1)\cdot(t-x2)\cdot(t-x3)\cdot(t-x0)}{(x4-x1)\cdot(x4-x2)\cdot(x4-x3)\cdot(x4-x0)}$$

$l4(t) = -0.906$

$$L4(t) := l0(t) + l1(t) + l2(t) + l3(t) + l4(t)$$

$L4(t) = 8.971563$

Ответ: приближенное значение функции в точке t=2,005 равно 8,971563.

Список литературы

1. Зайцева, О.С. Численные методы: Учебное пособие. Часть 1 [Текст] / О.С. Зайцева. – Тобольск: Изд-во ТГПИ им. Д. И. Менделеева, 2011. – 75 с.
2. Каганов, В.И. Компьютерные вычисления в средах Excel и MathCad [Текст] / В.И. Каганов.– М.: Горячая линия – Телеком, 2003. – 328 с.
3. Основы численных методов: Учебник для вузов [Текст] / В.М. Вержбицкий. – М.: Высш. шк., 2012. – 840 с.
4. Пирумов, У.Г. Численные методы: Учеб. пособие для студ. вузов [Текст] / У.Г. Пирумов. – М.: Дрофа, 2003. – 224 с.
5. Турчак, Л.И. Основы численных методов: Учеб. пособие [Текст] / Л.И. Турчак , П.В. Плотников. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005. – 304 с.
6. Формалеев, В.Ф. Численные методы [Текст] / В.Ф. Формалеев, Д.Л. Ревизников. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2006. – 400 с.
7. Численные методы: Учеб. пособие для студ. вузов [Текст] / М.П. Лапчик, М.И. Рагулина, Е.К. Хеннер; под ред. М.П. Лапчика. – М.: Издательский центр «Академия», 2005. – 384 с.
8. Численные методы в примерах и задачах: Учеб. пособие [Текст] / В.И. Киреев, А.В. Пантелеев. – М.: Высш. шк., 2016. – 480 с.
9. Половко, А.М. MathCad для студента. [Текст] / А.М. Половко, И.В. Ганичев. – СПб.: БХВ-Петербург, 2006. – 336 с.

ТЕМИРОВА Лилия Гумаровна

КОМПЬЮТЕРНЫЕ ТЕХНОЛОГИИ МАТЕМАТИЧЕСКИХ ИССЛЕДОВАНИЙ

Учебно-методическое пособие
к выполнению практических работ
для студентов 3 курса специальности
01.03.04 Прикладная математика

Печатается в редакции автора

Корректор Темирлиева Р.М.
Редактор Темирлиева Р.М.

Сдано в набор 13.03 2018 г.
Формат 60х84/16
Бумага офсетная.
Печать офсетная.
Усл. печ. л. 2,7
Заказ № 2890
Тираж 100 экз.

Оригинал-макет подготовлен
в Библиотечно-издательском центре СевКавГГТА
369000, г. Черкесск, ул. Ставропольская, 36