МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

К ВЫПОЛНЕНИЮ ТИПОВОГО РАСЧЕТА ПО ТЕМЕ:

«ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ»

Для студентов 1 курса специальности 30.05.03 Медицинская кибернетика

Содержание

1. [Первообразная функция и неопределённый интеграл. Таблица основных интегралов](#p01)

2. [Непосредственное интегрирование](#p02)

3. [Метод подстановки](#p03)

4. [Интегрирование функций, содержащих квадратный трёхчлен](#p04)

5. [Интегрирование по частям](#p05)

6. [Интегрирование рациональных дробей](#p06)

7. [Интегрирование тригонометрических выражений](#p07)

8. [Интегрирование некоторых иррациональных выражений](#p08)

[Рекомендуемая литература](#L)

1. **[Первообразная функция и неопределенный интеграл. Таблица основных интегралов](" \l "aaa)**

Функцию  назовём первообразной функции  на некотором множестве , если для  выполняется условие Equation.3 . Например, функция  имеет первообразные: D Equation.3  , где  - произвольная константа, так как .

Всякая непрерывная на множестве  функция  имеет на этом множестве бесконечное множество первообразных , где  -произвольная постоянная: .

Совокупность  всех первообразных заданной функции  обозначается  и называется неопределённым интегралом:

, (1)

где - подынтегральная функция,  - подынтегральное выражение,  - переменная интегрирования.

Процесс отыскания всех первообразных функции  называют интегрированием. Операции дифференцирования и интегрирования - это обратные друг другу действия:

.

Поэтому правильность результата интегрирования проверяем его дифференцированием, приводящим к подынтегральной функции. Например, , поскольку .

Неопределённый интеграл обладает следующими свойствами:

*Свойство 1.* .

*Свойство 2.* .

*Свойство 3.* .

*Свойство 4.* , где  - постоянный множитель.

*Свойство 5.* .

*Свойство 6.* Если , то , где  - непрерывно дифференцируемая функция.

Таблица основных интегралов

1. 

2. 

3. , где 

4. .

5. , где 

6. 

7.

8. .

9. .

10. 

11. 

12. .

13. 

14. 

15. 

16. 

17. 

18..

19. 

2. **[Непосредственное интегрирование](" \l "aaa)**

Под непосредственным интегрированием понимают интегрирование с помощью тождественных преобразований подынтегральной функции, свойств неопределённого интеграла и таблицы основных интегралов. В дальнейшем при ссылке на табличную формулу *n* будем писать, что использовали формулу Т.*n*.

Примеры с решениями

Найти неопределённые интегралы:

*Пример 1.* .

Решение. Преобразуем подынтегральную функцию: 



Воспользовавшись свойствами неопределённого интеграла и формулой Т.3 при , получим:





Результат можно проверить, взяв производную от полученной функции:



*Пример 2.* .

Решение. На основании формулы  получим: . Тогда:

.

Применим формулы Т.3 и Т.4 при . Тогда 



*Пример 3*. .

Решение. Используя формулы , , , , преобразуем функцию: 



.

Получаем:



.

*Пример 4.* .

Решение. Поскольку , то   Таким образом, заданный интеграл равен 

Применяя свойство 5 и формулу Т.5 при , находим, что 



*Пример 5.* .

Решение. Прибавляя и вычитая в числителе число 9, произведём затем почленное деление числителя на знаменатель и перейдём к сумме интегралов:



Применяя формулы Т.2 и Т.12 при , получим, что

.

Свойство 6 позволяет значительно расширить таблицу интегралов с помощью подведения функции под знак дифференциала: . Рассмотрим примеры, при решении которых используется указанный приём.

*Пример 6.* .

Решение. Так как  то  можно подвести под знак дифференциала и получить табличный интеграл вида Т.7:

 тогда .

*Пример 7.* 

Решение. Так как , то



*Пример 8.* .

Решение. Найдём 

.

Используя формулу Т.4, находим:



*Пример 9.* .

Решение. Так как   то интеграл преобразуется к виду:



.

*Пример 10.* .

Решение. В числителе вычтем и прибавим 4 и затем произведём почленное деление:



*Пример 11.* .

Решение. 



*Пример 12.* 

Здесь применена формула  при .

*Пример 13.* 

 

*Пример 14.* 



*Пример 15*.  .

*Пример 16*. 

 

*Пример 17*.  .

*Пример 18*.  .

*Пример 19*.  .

*Пример 20*.  

*Пример 21*.  

*Пример 22*.  

*Пример 23*.  

*Пример 24*. 



*Пример 25*.  

*Пример 26*.  

3. **[Метод подстановки](" \l "aaa)**

Замена переменной в неопределенном интеграле производится с помощью подстановок двух видов:

1) , где  - новая переменная,  - монотонная непрерывно дифференцируемая функция. Тогда  и переход к новой переменной выглядит так:

 (2)

2) , где  - новая переменная,  - монотонная непрерывно дифференцируемая функция. В этом случае формула замены переменной имеет вид:

 (3)

*Замечания*

1. Назначение любого метода интегрирования, в том числе и подстановки, в том, чтобы заданный интеграл либо свести к табличному, либо упростить. Поэтому интегралы в правых частях (2) и (3) должны быть значительно проще интегралов, стоящих в левых частях.

2. При любом способе замены переменной в неопределённом интеграле после завершения интегрирования нужно обязательно вернуться к заданной в условии переменной интегрирования.

3. Общее правило по выбору подстановки сформулировать не представляется возможным.

4. Подведение под знак интеграла в рассмотренных выше примерах и означало применение метода подстановки в наиболее его простом виде.

Примеры с решениями

*Пример 27.* .

Решение. Положим 

Тогда 

 

*Замечание.* Рассмотренный интеграл, на наш взгляд, проще найти с помощью подведения под знак дифференциала, что, в сущности, и означает устную подстановку в простейших случаях:



*Пример 28.* .

Решение. Пусть  тогда  Переходя в заданном неопределённом интеграле к новой переменной, получим:



Иначе:



*Пример 29.* .

Решение. Введём подстановку, которая позволит избавиться от радикала. Положим  и найдём  Тогда:

 

Возвращаясь к заданной переменной, получим:



*Пример 30.* .

Решение. Пусть  Тогда    Преобразуем подынтегральное выражение к новой переменной :



В числителе вычтем и прибавим 1, а затем произведём почленное деление:



Возвращаясь к переменной , получаем:

  


*Пример 31.* .

Решение. Положим и перейдём в подынтегральном выражении к новой переменной:  Получаем: 

*Пример 32.* .

Решение. Пусть  Тогда    ,





4. **[Интегрирование функций, содержащих квадратный трехчлен](" \l "aaa)**

I. Интеграл  находится следующим образом:

множитель  выносится за знак интеграла;

из квадратного трёхчлена, стоящего в знаменателе, выделяется полный квадрат;

выражение, стоящее под знаком квадрата, либо подводится под знак дифференциала (непосредственное интегрирование), либо обозначается новой переменной (метод подстановки).

В результате всех этих действий получается интеграл вида Т.12 или Т.14.

II. Интеграл  берётся аналогично предыдущему, но за знак интеграла выносится множитель . Получается интеграл типа Т.13 или Т.15.

III. С интегралами  и  сначала поступаем так же, как и с предыдущими, но после перехода к новой переменной представляем их в виде суммы интегралов либо типов Т.7, Т.12, Т.14, либо Т.4, Т.13, Т.15 соответственно.

Примеры с решениями

*Пример 33.* .

Решение. Выделим полный квадрат: 

 Тогда:



*Пример 34.* 

.

*Пример 35.* .

Решение. Преобразуем  и выделим в знаменателе полный квадрат: . Введём подстановку   Тогда:





*Пример 36.* .

Решение. Преобразуем  Выделим полный квадрат и после подведения под знак дифференциала получим интеграл вида Т.13: 



*Пример 37.* .

Решение. Так как  то  Если , то 



Применяя формулы Т.4 и Т.15, находим:



5. **[Интегрирование по частям](" \l "aaa)**

Формула интегрирования по частям имеет вид:

, (4)

где  - непрерывно дифференцируемые функции. Чтобы формулу (4) применить, нужно:

подынтегральное выражение представить в виде произведения функции  на дифференциал  другой функции ;

найти дифференциал  функции : ;

найти функцию , проинтегрировав её дифференциал ;

все полученные выражения подставить в (4).

*Замечания*

Метод интегрирования по частям целесообразно применять в том случае, когда интеграл в правой части (4) получается либо табличным, либо проще исходного, либо подобен исходному. В последнем случае будем иметь уравнение относительно заданного интеграла. В связи со сказанным в качестве  выбирается такая функция, которая при дифференцировании «упрощается», а в качестве - это та часть подынтегрального выражения, интегрирование которой не представляет затруднений.

2) В случае необходимости метод интегрирования по частям может быть применён неоднократно.

*Рекомендации*

1) При нахождении интегралов вида   полагают , где  - многочлен, а за  выбирают выражения  соответственно.

При отыскании интегралов вида    выбирают , а остальное в подынтегральном выражении полагают равным .

Примеры с решениями

*Пример 38.* .

Решение. Положим . Найдём   и применим формулу (4):



*Пример 39.* .

Решение. Если  то   Тогда в силу (4) :



*Пример 40.* .

Решение. При  находим ,  

.

*Пример 41.* .

Решение. Пусть  Тогда  . Тогда:







*Пример 42.* .

Решение. 

Имеем:



6. **[Интегрирование рациональных дробей](" \l "aaa)**

Рациональной дробью называется отношение двух многочленов:

 (5)

где  - многочлены степени  и  соответственно. Если , то дробь (5) называют правильной рациональной дробью; при  -неправильной. Всякую неправильную рациональную дробь с помощью деления числителя на знаменатель можно представить в виде суммы многочлена и правильной рациональной дроби. Поскольку многочлен интегрируется легко (табличные интегралы), то фактически интегрирование рациональных дробей сводится к умению интегрировать правильные рациональные дроби.

Простейшими рациональными дробями называют дроби вида:

где -действительные числа;

натуральные числа; 

Чтобы проинтегрировать правильную рациональную дробь, нужно:

1) знаменатель дроби разложить на множители вида  гдедействительные числа;  натуральные числа,  и 

2) правильную рациональную дробь представить в виде суммы простейших дробей. При этом множителю знаменателя вида:

а) соответствует одна дробь 

б) ставится в соответствие сумма «*k*» простейших дробей: 

в) соответствует одна дробь 

г) соответствует сумма s простейших дробей: 

3) найти неизвестные числа  по методу неопределённых коэффициентов, суть которого будет рассмотрена на конкретных примерах;

4) проинтегрировать простейшие рациональные дроби.

Примеры с решениями

*Пример 43.* .

Решение. Подынтегральная функция является правильной рациональной дробью. Разложим знаменатель на множители:   так как  при  . В соответствии с изложенной выше теорией представим подынтегральную функцию в виде суммы простейших дробей:

 (6)

Приведём обе части равенства (6) к общему знаменателю и приравняем числители:

. (7)

Равенство (7) является тождественным. Чтобы найти *A, B, C*, можно поступить любым из трёх способов:

*I способ.* В равенстве (7) дать  три произвольных значения (по количеству неизвестных *A, B, C*). Рекомендуется прежде всего использовать корни знаменателя 

*II способ.* В (7) раскрыть скобки, привести подобные члены и приравнять слева и справа коэффициенты при одинаковых степенях *x*.

*III способ.* Скомбинировать предыдущие два способа.

При применении любого из трёх способов получим систему линейных уравнений, решением которой и будут значения искомых коэффициентов. Для нахождения *A, B, C* применим I способ. Для этого в (7) последовательно дадим значения 



Значения коэффициентов подставим в (6):



Тогда





*Пример 44.* .

Решение. Подынтегральная функция представляет собой правильную дробь. Применим метод неопределённых коэффициентов.

.

Приравниваем числители исходной и полученной дробей





При  имеем: , откуда ; при , получаем: , откуда  Приравняв коэффициенты при  в обеих частях последнего тождества, получаем  откуда  Значит,



Следовательно,





*Пример 45.* .

Решение. Представим подынтегральную дробь в виде суммы простейших дробей:





Для нахождения  и  составим систему уравнений, приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях *х* в числителях исходной и последней дробей:

 Решая эту систему, найдем  Значит,



Таким образом:



*Пример 46.* .

Решение. Рациональная дробь  является правильной, её знаменатель на множители разложен. Представим эту дробь в виде суммы простейших дробей:



. (8)

Раскроем скобки и приведём подобные:



 (9)

Применим III (комбинированный) способ для нахождения *A, B, C, D*. Сначала в (8) положим  и  (корни знаменателя), а затем в (9)приравняем (по выбору) коэффициенты при каких-либо двух равных степенях , чтобы получить четыре уравнения (по числу неизвестных).



Следовательно, 

Таким образом, искомый интеграл равен:









*Пример 47.* .

Решение. Разложим на множители знаменатель  Тогда



 (10)

 (11)

В тождестве (10) придадим  значения 0 и (-1), а в (11) приравняем коэффициенты слева и справа при  и :



Получим: 

, (12)

где

 (13)

Нахождение интегралов вида (13) рассмотрено в разделе 4. Выделим полный квадрат:



Полагая , находим:





Применяя формулы Т.7 и Т.12, получаем, что:

 Так как  то

 (14)

Выражение (14) подставим в (12) и окончательно установим, что заданный интеграл равен:



7. **[Интегрирование тригонометрических выражений](" \l "aaa)**

1) *Интегралы вида*   Такие интегралы находятся с помощью тригонометрических формул:







2) *Интеграл вида* . Рассмотрим следующие случаи:

а) и - нечётное целое положительное число. В этом случае поступают так: от нечётной степени отделяют первую степень  или , оставшуюся чётную степень функции выражают через ко-функцию с помощью тождества  и применяют подстановку  при нечётном или  при  нечётном. В результате получается интеграл от степенной функции. Подстановку можно заменить подведением отделенной степени под знак дифференциала;

б)  и - чётные целые неотрицательные числа (одно из них может быть нулём). В этом случае выручают формулы понижения степени: .

3) *Универсальная тригонометрическая подстановка.* Интеграл вида  где - знак рациональной функции, находится с помощью подстановки  Тогда    В результате перехода к новой переменной *t* получим интеграл от рациональной функции новой переменной *t*.

*Замечание.* Если окажется, что  то более целесообразна подстановка    

Примеры с решениями

*Пример 48.* .

Решение. Преобразуем подынтегральную функцию следующим образом:

 Тогда



Так как  то



*Замечание.* Рассмотренный интеграл можно было найти с помощью универсальной подстановки, но это более громоздкий путь, так как придётся находить значения шести коэффициентов.

*Пример 49.* .

Решение. Применим универсальную тригонометрическую подстановку:    Тогда



Так как подынтегральная функция является неправильной рациональной дробью, то преобразуем её:

 Тогда:



Применяя табличные интегралы  получаем:



*Пример 50.* .

Решение. Применим формулы   Тогда





Найдём каждый из последних интегралов:









Таким образом, 

*Пример 51.* .

Решение. Преобразуем произведение тригонометрических функций в сумму:

 Так как  то





*Пример 52.* .

Решение.



*Замечание.* Можно было вывести подстановку 

8. **[Интегрирование некоторых иррациональных выражений](" \l "aaa)**

Интегралы вида  где ,  - целые числа,  находятся с помощью подстановки , где - наименьшее общее кратное чисел *,..,*. В результате получается интеграл от рациональной функции.

Интеграл  приводится к интегралу от рациональной функции (рационализируется) с помощью подстановки , где *S*=НОК(*n1,n2,..,nk*).

Примеры с решениями

*Пример 53.* .

Решение. Введём подстановку  Тогда







*Пример 54.* 

Решение. Пусть  Тогда .

Находим: 





*Пример 55.* .

Решение. Пусть  Тогда 



Подынтегральная функция является неправильной рациональной дробью. Выделим целую часть, разделив числитель на знаменатель по правилу деления многочленов.











.

Таким образом,  и







*Пример 56.* .

Решение. Введём замену  Тогда  Перейдём к новой переменной и найдём: .

Выполним деление числителя на знаменатель:

 



.

Получаем, что  и



*Пример 57.* .

Решение. Используем подстановку: ,

 Тогда



Так как  то  и   




*Пример 58.* .

Решение. Положим  и найдём    Тогда







*Пример 59.* .

Решение. Пусть  Тогда   

Получим:







*Пример 60.* .

Решение. Введём подстановку    Тогда заданный интеграл

.

Дробь  является неправильной. Произведём деление:





.

Таким образом, 





**IV. ИНТЕГРАЛЫ**

# Теоретические вопросы

1. Понятие первообразной функции. Теоремы о первообразных.

2. Неопределенный интеграл, его свойства.

3. Таблица неопределенных интегралов.

4. Замена переменной и интегрирование по частям в неопределенном интеграле.

5. Разложение дробной рациональной функции на простейшие дроби.

6. Интегрирование простейших дробей. Интегрирование рациональных функций.

7 Интегрирование выражений, содержащих тригонометрические функции.

8. Интегрирование иррациональных выражений.

9. Понятие определенного интеграла, его геометрический смысл.

10. Основные свойства определенного интеграла.

11. Теорема о среднем.

12. Производная определенного интеграла по верхнему пределу. Формула Ньютона – Лейбница.

13. Замена переменной и интегрирование по частям в определенном интеграле.

14. Интегрирование биномиальных дифференциалов.

15. Вычисление площадей плоских фигур.

16. Определение и вычисление длины кривой, дифференциал длины дуги кривой.

# Теоретические упражнения

1. Считая, что функция  равна 1 при , доказать, что она интегрируема на отрезке .

2. Какой из. интегралов больше:

 или ?

3. Пусть  – непрерывная функция, а функции  и  дифференцируемые. Доказать, что



4. Найти 

5. Найти точки экстремума функции



6. Пусть  – непрерывная периодическая функция с периодом . Доказать, что



7. Доказать, что если  – четная функция, то



8. Доказать, что для нечетной функции  справедливы равенства

 и 

Чему равен интеграл 

9. При каком условии, связывающем коэффициенты , ,  интеграл  является рациональной функцией?

10. При каких целых значениях  интеграл  выражается элементарными функциями.

# Расчетные задания

**Задача 1.** Вычислить неопределенные интегралы.

1.1.  1.2. 

1.3.  1.4. 

1.5.  1.6. 

1.7.  1.8. 

1.9.  1.10. 

1.11. 1.12. 

1.13.  1.14. 

1.15.  1.16. 

1.17.  1.18.

1.19.  1.20. 

1.21.  1.22. 

1.23.  1.24. 

1.25.  1.26. 

1.27.  1.28. 

1.29.  1.30. 

1.31. 

**Задача 2.** Вычислить определенные интегралы.

2.1.  2.2. 

2.3.  2.4. 

2.5.  2.6. 

2.7.  2.8. 

2.9.  2.10. 

2.11.  2.12. 

2.13.  2.14. 

2.15.  2.16. 

2.17.  2.18. 

2.19.  2.20. 

2.21.  2.22. 

2.23.  2.24. 

2.25.  2.26. 

2.27.  2.28. 

2.29.  2.30. 

2.31. 

**Задача 3**. Найти неопределенные интегралы.

3.1.  3.2. 

3.3.  3.4. 

3.5.  3.6. 

3.7.  3.8. 

3.9.  3.10. 

3.11.  3.12. 

3.13.  3.14. 

3.15.  3.16. 

3.17.  3.18. 

3.19.  3.20. 

3.21.  3.22. 

3.23.  3.24. 

3.25.  3.26. 

3.27.  3.28. 

3.29.  3.30. 

3.31. 

**Задача 4**. Вычислить определенные интегралы.

4.1.  4.2. 

4.3.  4.4. 

4.5.  4.6. 

4.7.  4.8. 

4.9.  4.10. 

4.11.  4.12. 

4.13.  4.14. 

4.15.  4.16. 

4.17.  4.18. 

4.19.  4.20. 

4.21.  4.22. 

4.23.  4.24. 

4.25.  4.26. 

4.27.  4.28. 

4.29.  4.30. 

4.31. 

**Задача 5**. Найти неопределенные интегралы.

5.1.  5.2. 

5.3.  5.4. 

5.5.  5.6. 

5.7.  5.8. 

5.9.  5.10. 

5.11.  5.12. 

5.13.  5.14. 

5.15.  5.16. 

5.17.  5.18. 

5.19.  5.20. 

5.21.  5.22. 

5.23.  5.24. 

5.25.  5.26. 

5.27.  5.28. 

5.29.  5.30. 

5.31. 

**Задача 6**. Найти неопределенные интегралы.

6.1.  6.2. 

6.3.  6.4. 

6.5.  6.6. 

6.7.  6.8. 

6.9.  6.10. 

6.11.  6.12. 

6.13.  6.14. 

6.15.  6.16. 

6.17.  6.18. 

6.19.  6.20. 

6.21.  6.22. 

6.23.  6.24. 

6.25.  6.26. 

6.27.  6.28. 

6.29.  6.30. 

6.31. 

**Задача 7**. Найти неопределенные интегралы.

7.1.  7.2. 

7.3.  7.4. 

7.5.  7.6. 

7.7.  7.8. 

7.9.  7.10. 

7.11.  7.12. 

7.13.  7.14. 

7.15.  7.16. 

7.17.  7.18. 

7.19.  7.20. 

7.21.  7.22. 

7.23.  7.24. 

7.25.  7.26. 

7.28.  7.29. 

7.30.  7.30. 

7.31. 

**Задача 8**. Вычислить определенные интегралы.

8.1.  8.2. 

8.3.  8.4. 

8.5.  8.6. 

8.7.  8.8. 

8.9.  8.10. 

8.11.  8.12. 

8.13.  8.14. 

8.15.  8.16. 

8.17.  8.18. 

8.19.  8.20. 

8.21.  8.22. 

8.23.  8.24. 

8.25.  8.26. 

8.27.  8.28. 

8.29.  8.30. 

8.31. 

**Задача 9**. Вычислить определенные интегралы.

9.1.  9.2. 

9.3.  9.4. 

9.5.  9.6. 

9.7.  9.8. 

9.9.  9.10. 

9.11.  9.12. 

9.13.  9.14. 

9.15.  9.16. 

9.17.  9.18. 

9.19.  9.20. 

9.21.  9.22. 

9.23.  9.24. 

9.25.  9.26. 

9.27.  9.28. 

9.29.  9.30. 

9.31. 

**Задача 10**. Вычислить определенные интегралы.

10.1.  10.2. 

10.3.  10.4. 

10.5.  10.6. 

10.7.  10.8. 

10.9.  10.10. 

10.11.  10.12. 

10.13.  10.14. 

10.15.  10.16. 

10.17.  10.18. 

10.19.  10.20. 

10.21.  10.22. 

10.23.  10.24. 

10.25.  10.26. 

10.27.  10.28. 

10.29.  10.30. 

10.31. 

**Задача 11**. Вычислить определенные интегралы.

11.1.  11.2. 

11.3.  11.4. 

11.5.  11.6. 

11.7.  11.8. 

11.9.  11.10. 

11.11.  11.12. 

11.13.  11.14. 

11.15.  11.16. 

11.17.  11.18. 

11.19.  11.20. 

11.21.  11.22. 

11.23.  11.24. 

11.25.  11.26. 

11.27.  11.28. 

11.29.  11.30. 

11.31. 

**Задача 12**. Вычислить определенные интегралы.

12.1.  12.2. 

12.3.  12.4. 

12.5.  12.6. 

12.7.  12.8. 

12.9.  12.10. 

12.11.  12.12. 

12.13.  12.14. 

12.15.  12.16. 

12.17.  12.18. 

12.19.  12.20. 

12.21.  12.22. 

12.23.  12.24. 

12.25.  12.26. 

12.27.  12.28. 

12.29.  12.30. 

12.31. 

**Задача 13**. Найти неопределенные интегралы.

13.1.  13.2. 

13.3.  13.4. 

13.5.  13.6. 

13.7.  13.8. 

13.9.  13.10. 

13.11.  13.12. 

13.13.  13.14. 

13.15.  13.16. 

13.17.  13.18. 

13.19.  13.20. 

13.21.  13.22. 

13.23.  13.24. 

13.25.  13.26. 

13.27.  13.28. 

13.29.  13.30. 

13.31. 

**Задача 14**. Вычислить площади фигур, ограниченных графиками функций.

14.1.  14.2. 

14.3.  14.4. 

14.5.  14.6. 

14.7.  14.8. 

14.9.  14.10. 

14.11.  14.12. 

14.13.  14.14. 

14.15.  14.16. 

14.17.  14.18. 

14.19.  14.20. 

14.21.  14.22. 

14.23.  14.24. 

14.25.  14.26. 

14.27.  14.28. 

14.29.  14.30. 

14.31. 

**Задача 15**. Вычислить площади фигур, ограниченных линиями, заданными уравнениями.

15.1.  15.2. 

15.3.  15.4. 

15.5.  15.6. 

15.7.  15.8. 

15.9.  15.10. 

15.11.  15.12. 

15.13.  15.14. 

15.15.  15.16. 

15.17.  15.18. 

15.19.  15.20. 

15.21.  15.22. 

15.23.  15.24. 

15.25.  15.26. 

15.27.  15.28. 

15.29.  15.30. 

15.31. 

**Задача 16.** Вычислить длины дуг кривых, заданных уравнениями в прямоугольной системе координат.

16.1. 

16.2. 

16.3. 

16.3. 

16.5. 

16.6. 

16.7. 

16.8. 

16.9. 

16.10. 

16.11. 

16.12. 

16.13. 

16.14. 

16.15. 

16.16. 

16.17. 

16.18. 

16.19. 

16.20. 

16.21. 

16.22. 

16.23. 

16.24. 

16.25. 

16.26. 

16.27. 

16.28. 

16.29. 

16.30. 

16.31. 

**Задача 17**. Вычислить объемы тел, ограниченных поверхностями.

17.1.  17.2. 

17.3. 

17.4. 

17.5. 

17.6. 

17.7. 

17.8. 

17.9. 

17.10. 

17.11. 

17.12. 

17.13. 

17.14. 

17.15. 

17.16. 

17.17. 

17.18. 

17.19. 

17.20. 

17.21. 

17.22. 

17.23. 

17.24. 

17.25. 

17.26. 

17.27. 

17.28. 

17.29. 

17.30. 

17.31. 

[**Рекомендуемая литература**](#aaa)

*Бугров Я.С., Никольский С.М.* Дифференциальное и интегральное исчисление. -М.: Наука, 1980.

*Пискунов Н.С.* Дифференциальное и интегральное исчисление для втузов. Т.1.-М.: Наука, 1975.

*Данко П.Е., Попов А.Г., Кожевникова Т.Я.* Высшая математика в упражнениях и задачах. Ч.1. -М.: Высшая школа, 1980.

*Кузнецов Л.А.* Сборник задач по высшей математике. -М.: Высшая школа, 1983.