

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ  
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ  
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ  
«СЕВЕРО-КАВКАЗСКАЯ ГОСУДАРСТВЕННАЯ  
АКАДЕМИЯ»

«УТВЕРЖДАЮ»

Проректор по учебной работе

« 31 » марта 2021 г.

Г.Ю. Нагорная



**РАБОЧАЯ ПРОГРАММА ДИСЦИПЛИНЫ**

Элементы топологии

Уровень образовательной программы \_\_\_\_\_ бакалавриат \_\_\_\_\_

Направление подготовки \_\_\_\_\_ 01.03.04 Прикладная математика \_\_\_\_\_

Направленность (профиль) \_\_\_\_\_ общий \_\_\_\_\_


Форма обучения \_\_\_\_\_ очная \_\_\_\_\_

Срок освоения ОП \_\_\_\_\_ 4 года \_\_\_\_\_

Институт \_\_\_\_\_ Прикладной математики и информационных технологий \_\_\_\_\_

Кафедра разработчик РПД \_\_\_\_\_ Математика \_\_\_\_\_


Выпускающая кафедра \_\_\_\_\_ Математика \_\_\_\_\_

Начальник  
учебно-методического управления \_\_\_\_\_ 

Семенова Л.У.

Директор института ПМ и ИТ \_\_\_\_\_ 

Тебурев Д.Б.

Заведующий выпускающей кафедрой \_\_\_\_\_ 

Кочкаров А.М.

г. Черкесск, 2021 г.

## СОДЕРЖАНИЕ

<b>1. Цели освоения дисциплины.....</b>	<b>3</b>
<b>2. Место дисциплины в структуре образовательной программы.....</b>	<b>4</b>
<b>3. Планируемые результаты обучения по дисциплине.....</b>	<b>5</b>
<b>4. Структура и содержание дисциплины.....</b>	<b>6</b>
4.1. Объем дисциплины и виды учебной работы.....	6
4.2. Содержание дисциплины.....	7
4.2.1. Разделы (темы) дисциплины, виды учебной деятельности и формы контроля.....	7
4.2.2. Лекционный курс .....	7
4.2.3. Практические занятия .....	10
4.3. Самостоятельная работа обучающегося.....	12
<b>5. Перечень учебно-методического обеспечения для самостоятельной работы обучающихся по дисциплине .....</b>	<b>14</b>
5.1. Методические указания для подготовки обучающихся к лекционным занятиям.....	14
5.2. Методические указания для подготовки обучающихся к практическим занятиям.....	15
5.3. Методические указания по самостоятельной работе обучающихся .....	15
5.3.1 Методические указания по написанию реферата.....	16
5.3.2 Методические указания по подготовке к коллоквиуму.....	18
5.3.3 Методические указания по подготовке к тестированию.....	18
<b>6. Образовательные технологии.....</b>	<b>19</b>
<b>7. Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины.....</b>	<b>22</b>
7.1. Перечень основной и дополнительной учебной литературы.....	22
7.2.Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети «Интернет».....	22
7.3. Информационные технологии, лицензионное программное обеспечение.....	23
<b>8. Материально-техническое обеспечение дисциплины .....</b>	<b>24</b>
8.1.Требования к аудиториям (помещениям, местам) для проведения занятий.....	24
8.2. Требования к оборудованию рабочих мест преподавателя и обучающихся....	24
8.3. Требования к специализированному оборудованию.....	24
<b>9.Особенности реализации дисциплины для инвалидов и лиц с ограниченными возможностями здоровья.....</b>	<b>25</b>
<b>Приложение 1. Фонд оценочных средств .....</b>	<b>26</b>

## 1. ЦЕЛИ ОСВОЕНИЯ ДИСЦИПЛИНЫ

**Целью освоения дисциплины** «Элементы топологии» является формирование у будущих специалистов теоретической и практической основы, для повышения уровня их математической культуры.

### **Задачи дисциплины:**

- Ознакомить обучающихся с начальными понятиями общей топологии;
- Развить у учащихся логическое мышление, математическую интуицию, повысить уровень их математической культуры;
- Развить у обучающихся навыки самостоятельной работы с литературой по математике и ее приложениям.
- Обеспечить формирование представлений об основных видах топологических пространств, привить общую топологическую культуру;
- Определить топологическое пространство;
- Изучить важнейшие топологические свойства пространств и множеств;
- Рассмотреть классификацию связных компактных двумерных многообразий.

## **2. МЕСТО ДИСЦИПЛИНЫ В СТРУКТУРЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЙ ПРОГРАММЫ**

2.1. Дисциплина «Элементы топологии» относится к части, формируемой участниками образовательных отношений Блока 1. Дисциплины (модули), имеет тесную связь с другими дисциплинами.

2.2. В таблице приведены предшествующие и последующие дисциплины, направленные на формирование компетенций дисциплины в соответствии с матрицей компетенций ОП.

### **Предшествующие и последующие дисциплины, направленные на формирование компетенций**

№ п/п	Предшествующие дисциплины	Последующие дисциплины
1.	Теория графов и комбинаторика Математическая логика	Научно – исследовательская работа

### 3. ПЛАНИРУЕМЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ ОБУЧЕНИЯ ПО ДИСЦИПЛИНЕ:

Планируемые результаты освоения образовательной программы (ОП) – компетенции обучающихся определяются требованиями стандарта по направлению подготовки 01.03.04 Прикладная математика и формируются в соответствии с матрицей компетенций ОП

№ п/п	Номер/индекс компетенции	Наименование компетенции (или ее части)	Индикаторы достижения компетенций:
1	2	3	4
1.	УК-1	Способен осуществлять поиск, критический анализ и синтез информации, применять системный подход для решения поставленных задач	УК – 1.1. Осуществляет отбор, интерпретацию и оценку значимых данных в области изучения для вынесения суждений о направлениях развития; УК – 1.2. Обосновывает пути решения определенной проблемы на основе обобщения предоставленной информации; УК – 1.3. Осуществляет поиск информации для решения поставленной задачи по различным типам запросов.

#### 4. СТРУКТУРА И СОДЕРЖАНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ

##### 4.1. ОБЪЕМ ДИСЦИПЛИНЫ И ВИДЫ УЧЕБНОЙ РАБОТЫ

###### Очная форма обучения

Вид учебной работы		Всего часов	Семестр
			№7
			Часов
1		2	3
<b>Аудиторная контактная работа (всего)</b>		<b>76,5</b>	<b>76,5</b>
В том числе:			
Лекции (Л)		28	28
Практические занятия (ПЗ), В том числе практическая подготовка		44 -	44 -
<b>Контактная внеаудиторная работа, в том числе:</b>		<b>2</b>	<b>2</b>
Групповые и индивидуальные консультации		2	2
<b>Самостоятельная работа обучающегося (СРО) (всего)</b>		<b>106</b>	<b>106</b>
В том числе:			
Подготовка к лекционным занятиям		18	18
Подготовка к практическим занятиям		18	18
Подготовка к коллоквиуму		22	22
Реферат		22	22
Подготовка к тестированию		26	26
Промежуточная аттестация	Экзамен (Э) <b>в том числе:</b>	<b>Э(36)</b>	<b>Э(36)</b>
	Прием экз., час.	0,5	0,5
	Консультация, час.	2	2
	СРО, час.	33,5	33,5
<b>ИТОГО:</b> <b>Общая трудоемкость</b>	<b>часов</b>	216	216
	<b>зач. ед.</b>	6	6

## 4.2. СОДЕРЖАНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ

### 4.2.1. Разделы (темы) дисциплины, виды учебной деятельности и формы контроля

#### Очная форма обучения

№ п/п	Наименование раздела (темы) дисциплины	Виды учебной деятельности, включая самостоятельную работу обучающихся (в часах)				Формы текущей и промежуточной аттестации
		Л	ПЗ	СРО	всего	
1	2	3	4	5	6	7
<b>Семестр 7</b>						
1.	Раздел 1. Основные понятия общей топологии	12	18	46	76	Коллоквиум, контрольные вопросы, реферат.
2.	Раздел 2. Кривые и поверхности в $R^d$ .	10	18	40	68	Коллоквиум, контрольные вопросы, реферат.
3.	Раздел 3. Элементы тензорного анализа	6	8	20	34	Коллоквиум, контрольные вопросы, реферат, тестирование.
4.	Контактная внеаудиторная работа				2	Индивидуальные и групповые консультации
5.	Промежуточная аттестация				36	Экзамен
<b>ИТОГО:</b>		<b>28</b>	<b>44</b>	<b>106</b>	<b>216</b>	

### 4.2.2. Лекционный курс

№ п/п	Наименование раздела дисциплины	Наименование темы лекции	Содержание лекции	Всего часов
				ОФО
1	2	3	4	5
<b>Семестр 7</b>				
1.	Раздел 1. Основные понятия общей топологии	Тема 1.1 Понятие топологического пространства.	Определение топологии, топологического пространства. Открытые и замкнутые множества.	2
		Тема 1.2 Сравнение топологий.	Сравнение топологий. Слабые, сильные	2
		Тема 1.3 Отделимость. Метрика.	Окрестность множества, точки. Метрическое пространство.	2

		Тема 1.4 Непрерывное отображение топологических пространств.	Два определения непрерывного отображения. Теорема об эквивалентности определений непрерывного отображения.	2
		Тема 1.5 Свойства непрерывных отображений.	Свойства непрерывных отображений. Сужение. Гомеоморфизм и его примеры	2
		Тема 1.6 Связные пространства. Понятие компактности. Свойства компактных пространств.	Определения и примеры связных пространств, свойства. Связная компонента, линейная связность. Понятие компактности, свойства компактных пространств, критерий компактности подмножеств в $\mathbb{R}^n$ .	2
2.	Раздел 2. Кривые и поверхности в $\mathbb{R}^d$ .	Тема 2.1 Кривые в $n$ -мерном пространстве. Кривизна кривой.	Определение параметризованной кривой, касательного вектора, длины дуги, вектора кривизны.	2
		Тема 2.2 Кривые в 3-мерном пространстве. Гладкие поверхности.	Сопровождающий трехгранник Френе. Базис Френе. Гладкие $k$ -мерные поверхности в $\mathbb{R}^d$ .	2
		Тема 2.3 Риманова метрика.	Скалярное произведение на линейном пространстве. Примеры Римановых метрик	2
		Тема 2.4 Основы римановой геометрии. Расстояние на римановом многообразии. Уравнения Эйлера-Лагранжа.	Длина кривой и угол между кривыми. Задача о локсодромии. Площадь поверхности. Геодезические линии. Вывод уравнений Эйлера-Лагранжа.	2



		<p>Тема 2.5 Геодезические на римановом многообразии. Кривизна кривой на 2-мерной поверхности. Вторая квадратичная форма. Теоремы Эйлера и Гаусса</p>	<p>Вывод классических уравнений геодезических линий на римановом многообразии. Ориентация поверхности. Нормальная и геодезическая кривизна. Гауссова и средняя кривизна. Теорема Эйлера о нормальной кривизне поверхности. Деривационные формулы. Теорема Гаусса.</p>	2
3.	Раздел 3. Элементы тензорного анализа	<p>Тема 3.1 Криволинейные системы координат. Тензорные поля. Операции над тензорными полями.</p>	<p>Криволинейная система координат. Формулы преобразования компонент касательного вектора, градиента гладкой функции и римановой метрики. Определение тензорного поля. Симметрические и кососимметрические тензоры Аффинная связность.</p>	2
		<p>Тема 3.2 Риманова связность. Параллельный перенос.</p>	<p>Определение аффинной связности и ковариантной производной. Закон преобразования коэффициентов связности при переходе в другую систему координат. Определение параллельного переноса. Теорема о существовании и единственности параллельного векторного поля. Риманова связность.</p>	2
		<p>Тема 3.3 Тензор кривизны Римана. Теоремы Гаусса.</p>	<p>Тензор кривизны Римана. Формула для тензора кривизны. Выражение тензора кривизны через компоненты римановой</p>	2

			метрики. Тензор Риччи. Скалярная кривизна. Теорема Гаусса-Бонне.	
<b>ИТОГО часов в 7 семестре:</b>				<b>28</b>
<b>ВСЕГО часов:</b>				<b>28</b>

#### 4.2.3. Практические занятия

№ п/п	Наименование раздела дисциплины	Наименование практического занятия	Содержание практического занятия	Всего часов
				ОФО
1	2	3	4	5
<b>Семестр 7</b>				
1.	Раздел 1. Основные понятия общей топологии	Решение задач по теме топологические пространства.	Тривиальная топология, топология конечных дополнений.	2
		Решение задач по теме сравнение топологий	Слабые, сильные, грубые, тонкие топологии	2
		Решение задач по теме отделимость, метрика.	Хаусдорфово пространство, естественная метрика, Евклидова метрика	2
		Решение задач по теме непрерывное отображение топологических пространств.	Анализ определения непрерывной функции вещественного переменного.	2
		Решение задач по теме непрерывные отображения.	Аффинное невырожденное преобразование пространства $\mathbb{R}^n$ . Примеры.	2
		Решение задач по теме свойства непрерывных отображений.	Свойства непрерывных отображений.	2
		Решение задач по теме свойства непрерывных отображений.	Сужение. Гомеоморфизм и его примеры	2
		Решение задач по теме связные пространства.	Примеры связных пространств, свойства. Связная компонента, линейная связность.	2
		Решение задач по теме компактность. Свойства компактных пространств.	Свойства компактных пространств, критерий компактности подмножеств в $\mathbb{R}^n$ .	2
2.	Раздел 2. Кривые и поверхности в $\mathbb{R}^d$ .	Решение задач по теме кривые в n-мерном пространстве. Кривизна	Параметризованная кривая, касательный вектор, длина дуги,	2

		кривой.	вектор кривизны.	
		Решение задач по теме кривые в 3-мерном пространстве. Гладкие поверхности.	Сопровождающий трехгранник Френе. Базис Френе. Гладкие $k$ -мерные поверхности в $\mathbb{R}^d$ .	2
		Решение задач по теме Риманова метрика.	Скалярное произведение на линейном пространстве.	2
		Решение задач по теме основы римановой геометрии.	Длина кривой и угол между кривыми. Задача о локсодромии. Площадь поверхности.	2
		Решение задач по теме расстояние на римановом многообразии. Уравнения Эйлера-Лагранжа.	Геодезические линии. Простейшая задача вариационного исчисления. Уравнения Эйлера-Лагранжа.	2
		Решение задач по теме геодезические на римановом многообразии.	Вывод классических уравнений геодезических линий на римановом многообразии.	2
		Кривизна кривой на 2-мерной поверхности. Вторая квадратичная форма.	Ориентация поверхности. Нормальная и геодезическая кривизна.	2
		Решение задач по теме теоремы Эйлера и Гаусса	Гауссова и средняя кривизна, классификация точек поверхности, форма поверхности и знак гауссовой кривизны.	2
		Решение задач по теме теоремы Эйлера и Гаусса	Деривационные формулы. Теорема Гаусса.	2
3.	Раздел 3. Элементы тензорного анализа	Решение задач по теме криволинейные системы координат. Тензорные поля. Операции над тензорными полями.	Формулы преобразования компонент касательного вектора, градиента гладкой функции и римановой метрики. Симметрические и кососимметрические тензоры Аффинная связность.	2
		Решение задач по теме Риманова связность. Параллельный перенос.	Закон преобразования коэффициентов связности при переходе в другую систему координат. Риманова	2

			связность.	
		Решение задач по теме тензор кривизны Римана. Теоремы Гаусса.	Тензор кривизны Римана. Формула для тензора кривизны.	2
		Решение задач по теме тензор кривизны Римана. Теоремы Гаусса.	Выражение тензора кривизны через компоненты римановой метрики. Тензор Риччи. Скалярная кривизна.	2
<b>ИТОГО часов в 7 семестре:</b>				<b>44</b>
<b>ВСЕГО часов:</b>				<b>44</b>

### 4.3. САМОСТОЯТЕЛЬНАЯ РАБОТА ОБУЧАЮЩЕГОСЯ

#### Очная форма обучения

№ п/п	Наименование раздела (темы) дисциплины	№ п/п	Виды СРО	Всего часов
1	2	3	4	5
1.	Раздел 1. Основные понятия общей топологии	1.1.	Проработка лекций, профессиональной литературы, периодических изданий. Подготовка к практическим занятиям.	4
		1.2.	Составление опорного конспекта лекций. Подготовка к практическим занятиям.	4
		1.3.	Проработка лекций - включает чтение конспекта лекций, профессиональной литературы, периодических изданий. Подготовка к практическим занятиям.	4
		1.4.	Проработка лекций - включает чтение конспекта лекций, профессиональной литературы, периодических изданий. Подготовка к практическим занятиям.	6
		1.5.	Проработка лекций - включает чтение конспекта лекций, профессиональной литературы, периодических изданий. Подготовка к практическим занятиям.	6
		1.6.	Проработка лекций - включает чтение конспекта лекций, профессиональной литературы, периодических изданий. Подготовка к практическим занятиям.	6
		1.7.	Проработка лекций - включает чтение конспекта лекций, профессиональной литературы, периодических изданий. Подготовка к практическим занятиям.	6
		1.8.	Проработка лекций - включает чтение конспекта лекций, профессиональной литературы, периодических изданий для написания реферата по разделу. Изучение дополнительной литературы по разделу. Подготовка к практическим занятиям. Подготовка к коллоквиуму по всем темам раздела. Подготовка к тестированию.	10

2.	Раздел 2. Кривые и поверхности в $R^d$ .	2.1.	Проработка лекций - включает чтение конспекта лекций, профессиональной литературы, периодических изданий. Подготовка к практическим занятиям.	4
		2.2.	Проработка лекций - включает чтение конспекта лекций, профессиональной литературы, периодических изданий. Подготовка к практическим занятиям.	4
		2.3.	Проработка лекций - включает чтение конспекта лекций, профессиональной литературы, периодических изданий для написания реферата по разделу. Подготовка к практическим занятиям.	4
		2.4	Проработка лекций - включает чтение конспекта лекций, профессиональной литературы, периодических изданий. Подготовка к практическим занятиям.	6
		2.5	Проработка лекций - включает чтение конспекта лекций, профессиональной литературы, периодических изданий. Подготовка к практическим занятиям.	6
		2.6	Проработка лекций - включает чтение конспекта лекций, профессиональной литературы, периодических изданий. Подготовка к практическим занятиям.	8
		2.7	Проработка лекций - включает чтение конспекта лекций, профессиональной литературы, периодических изданий для написания реферата по разделу. Изучение дополнительной литературы по разделу. Подготовка к практическим занятиям. Подготовка к коллоквиуму по всем темам раздела. Подготовка к тестированию.	8
3.	Раздел 3. Элементы тензорного анализа	3.1	Проработка лекций - включает чтение конспекта лекций, профессиональной литературы, периодических изданий. Подготовка к практическим занятиям.	4
		3.2	Проработка лекций - включает чтение конспекта лекций, профессиональной литературы, периодических изданий. Подготовка к практическим занятиям.	6
		3.3	Проработка лекций - включает чтение конспекта лекций, профессиональной литературы, периодических изданий для написания реферата по разделу. Изучение дополнительной литературы по разделу. Подготовка к практическим занятиям. Подготовка к коллоквиуму по всем темам раздела. Подготовка к итоговому тестированию.	10
<b>ИТОГО часов в 7 семестре:</b>				<b>106</b>
<b>ВСЕГО часов</b>				<b>106</b>

## **5. ПЕРЕЧЕНЬ УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОГО ОБЕСПЕЧЕНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ ОБУЧАЮЩИХСЯ ПО ДИСЦИПЛИНЕ**

### **5.1. Методические указания для подготовки обучающихся к лекционным занятиям**

В процессе подготовки к лекционным занятиям обучающемуся необходимо перед каждой лекцией просматривать рабочую программу дисциплины, методические разработки по дисциплине, что позволит рационально использовать время на конспектирование лекции, ее основных вопросов, рекомендуемой литературы. Следует отметить непонятные термины и положения, подготовить вопросы лектору с целью уточнения правильности понимания. Необходимо приходить на лекцию подготовленным, что будет способствовать повышению эффективности лекционных занятий.

Основным средством работы на лекционном занятии является конспектирование. Конспектирование – процесс мысленной переработки и письменной фиксации информации, в виде краткого изложения основного содержания, смысла какого-либо текста.

В ходе лекции необходимо зафиксировать в конспекте основные положения темы лекции, категории, формулировки, узловые моменты, выводы, на которые обращается особое внимание. По существу конспект должен представлять собой обзор, содержащий основные мысли текста без подробностей и второстепенных деталей.

Для дополнения прослушанного и зафиксированного на лекции материала необходимо оставить в рабочих конспектах поля, на которых впоследствии при подготовке к практическим занятиям можно делать пометки из рекомендованной по дисциплине литературы, дополняющие материал прослушанной лекции, а также подчеркивающие особую важность тех или иных теоретических положений.

Проработка лекций - включает чтение конспекта лекций, профессиональной литературы, периодических изданий, изучение дополнительной литературы по разделу, подготовку к практическим занятиям.

Основными формами обучения элементам топологии являются лекции и практические занятия, консультации, а также самостоятельная работа.

Лекции составляют основу теоретического обучения и дают систематизированные основы научных знаний по дисциплине, раскрывают состояние и перспективы развития соответствующей области науки, концентрируют внимание обучающихся на наиболее сложных и узловых вопросах, стимулируют их активную познавательную деятельность и способствуют формированию творческого мышления.

Ведущим методом в лекции выступает устное изложение учебного материала, сопровождающееся демонстрацией видеofilмов, схем, плакатов, показом моделей, приборов, макетов, использование мультимедиа аппаратуры.

Лекция является исходной формой всего учебного процесса, играет направляющую и организующую роль в самостоятельном изучении предмета. Важнейшая роль лекции заключается в личном воздействии лектора на аудиторию.

Основная дидактическая цель лекции — обеспечение ориентировочной основы для дальнейшего усвоения учебного материала. Построение лекций по дисциплине «Элементы топологии» осуществляется на основе принципов научности (предполагает воспитание диалектического подхода к изучаемым предметам и явлениям, диалектического мышления, формирование правильных представлений, научных понятий и умения точно выразить их в определениях и терминах, принятых в науке)

## **5.2. Методические указания для подготовки обучающихся к практическим занятиям**

При подготовке к практическим занятиям рекомендуется использовать конспект лекции, учебную и научную литературу.

Непосредственную подготовку обучающегося к практическому занятию необходимо начинать с изучения рекомендованной учебной и научной литературы. Надо помнить, что на лекции обычно рассматривается не весь материал, а только его часть. Остальная его часть восполняется в процессе самостоятельной работы. В связи с этим работа с рекомендованной литературой обязательна. Особое внимание при этом необходимо обратить на содержание основных положений и выводов, объяснение явлений и фактов, уяснение практического приложения рассматриваемых теоретических вопросов. В процессе этой работы обучающийся должен стремиться понять и запомнить основные положения рассматриваемого материала, примеры, поясняющие его, а также разобраться в иллюстративном материале.

Активное участие в работе на практических занятиях предполагает выступления на них, дополнение ответов однокурсников, коллективное обсуждение спорных вопросов и проблем, что способствует формированию у обучающихся навыков формулирования, аргументации и отстаивания выработанного решения, умения его защитить в дискуссии и представить дополнительные аргументы в его пользу. Активная работа на практическом занятии способствует также формированию у обучающегося навыков публичного выступления, умения ясно, последовательно, логично и аргументировано излагать свои мысли.

В процессе подготовки и проведения практических занятий обучающиеся закрепляют полученные ранее теоретические знания, приобретают навыки их практического применения, опыт рациональной организации учебной работы, готовятся к сдаче экзамена.

В начале семестра обучающиеся получают сводную информацию о формах проведения занятий и формах контроля знаний. Тогда же обучающимся предоставляется список тем лекционных и практических заданий, а также тематика рефератов. Каждое практическое занятие по соответствующей тематике теоретического курса состоит из вопросов для подготовки, на основе которых проводится устный опрос каждого обучающегося. Также после изучения каждого раздела обучающиеся для закрепления проеденного материала сдают коллоквиумы и делают реферативные работы по дополнительным материалам курса.

## **5.3 Методические указания по самостоятельной работе обучающихся**

Самостоятельная работа обучающегося предполагает различные формы индивидуальной учебной деятельности: конспектирование научной литературы, сбор и анализ практического материала в СМИ, проектирование, выполнение тематических и творческих заданий и пр. Выбор форм и видов самостоятельной работы определяется индивидуально-личностным подходом к обучению совместно преподавателем и обучающимся. Формы текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации обучающихся.

Содержание внеаудиторной самостоятельной работы обучающихся по дисциплине «Элементы топологии» включает в себя различные виды деятельности:

- чтение текста (учебника, первоисточника, дополнительной литературы);
- составление плана текста;
- конспектирование текста;
- работа со словарями и справочниками;
- исследовательская работа;
- работа с электронными информационными ресурсами;

- выполнение тестовых заданий;
- ответы на контрольные вопросы;
- аннотирование, реферирование, рецензирование текста;
- составление глоссария, кроссворда или библиографии по конкретной теме;
- решение задач и упражнений.

### 5.3.1 Методические указания по написанию реферата

Реферат является формой самостоятельной учебной работы направленной на детальное знакомство с какой-либо темой в рамках данной дисциплины. Основная задача работы над рефератом по предмету — углубленное изучение определенной проблемы изучаемого курса, получение более полной информации по какому-либо его разделу.

При подготовке реферата необходимо использовать достаточное для раскрытия темы и анализа литературы количество источников, непосредственно относящихся к изучаемой теме. В качестве источников могут выступать публикации в виде книг и статей.

Тема реферата либо задаётся непосредственно преподавателем, либо выбирается студентом из рекомендуемого перечня тем самостоятельно и согласовывается перед написанием с преподавателем. Сам реферат — письменная работа объёмом 10–20 печатных страниц (без приложений). Реферат должен содержать основные фактические сведения и выводы по рассматриваемому вопросу.

Реферат выполняется в следующей последовательности:

- титульный лист;
- содержание работы;
- введение;
- разделы работы в соответствии с содержанием;
- заключение (выводы);
- список использованных источников;
- приложения.

1. Титульный лист оформляется на отдельном листе. На нём помещается:

- наименование образовательной организации (заглавными буквами, размер шрифта 12 пт., выравнивание по центру);
- наименование работы – РЕФЕРАТ. Заглавными буквами, жирным шрифтом, в центральной части титульного листа. Размер шрифта – стандартный, принятый в работе – 12-14 пт.;
- тема работы – располагается под названием дисциплины. Сначала указывается слово Тема, а затем через двоеточие в кавычках приводится название темы;
- фамилия, имя и группа студента, фамилия, имя, отчество преподавателя – размещаются в правой нижней трети титульного листа;
- внизу титульного листа по центру указывается город, а под ним год написания реферата.

2. Содержание работы включает наименование всех разделов, подразделов с указанием страниц, указывающих начало подразделов в реферате.

3. Во введении даётся обоснование выбора темы, её актуальность, значение. Введение может также содержать обзор источников или экспериментальных данных, уточнение исходных понятий и терминов, сведения о методах исследования. Во введении обязательно формулируются цель и задачи реферата. Объём введения – 1-2 страницы.

4. Основная часть может содержать несколько разделов (пунктов, глав, параграфов), предполагает осмысленное и логичное изложение главных положений и идей, содержащихся в изученной литературе (источниках). В тексте обязательны ссылки на первоисточники.

5. Все разделы реферата должны быть логически связаны между собой и содержать последовательный переход от одного раздела к другому.



6. В заключении делаются выводы работы, в краткой и сжатой форме излагаются полученные результаты, могут намечаться и дальнейшие перспективы развития темы.

7. Список использованных источников является составной частью работы. В списке указывается не только та литература, на которую имеются ссылки в письменной работе, но и та, которая была изучена в ходе выполнения реферата. Если были использованы материалы Интернет, то указываются ссылки на просмотренные сайты.

8. Приложение может включать графики, таблицы, расчёты, фотографии, образцы и др.

Оформление работы:

1. Текст реферата должен быть отпечатан на одной стороне листа на бумаге формате А4, шрифт TimesNewRoman, размер шрифта 12-14 пт., междустрочный интервал – 1,0-1,5, поля страницы: верхнее 2 см; нижнее – 2 см, левое – 3 см, правое – 1,5 см. Абзац начинается с красной строки (отступ 1,25 см). Текст должен быть выровнен по ширине.

2. Заголовки разделов следует размещать симметрично тексту. Переносы слов в заголовках не допускаются. Разделы начинаются с новой страницы. Расстояние между заголовками и текстом должно быть не более 1 см. Подчеркивать заголовки не допускается. Точка в конце заголовка не ставится.

3. Страницы работы нумеруются арабскими цифрами (1, 2, 3...) по центру снизу. Титульный лист включают в общую нумерацию, но номер на этом листе не ставится.

4. Приложения оформляют как продолжение работы на последующих листах. Каждое приложение начинается с нового листа. В правом верхнем углу пишется слово Приложение. При наличии более одного приложения, они нумеруются арабскими цифрами.

5. Используемые формулы и нормативные материалы должны иметь ссылки на источник, откуда они заимствованы.

Оформление текста.

В тексте реферата не допускается:

- применять обороты разговорной речи, должны применяться научно-технические термины, обозначение и определения, установленные соответствующими стандартами;
- сокращать слова за исключением общепринятых сокращённых обозначений,
- сокращать обозначения единиц физических величин, если они употребляются без цифр, за исключением единиц физических величин в головках и боковинах таблиц и в расшифровках буквенных обозначений, входящих в формулы и рисунки.

В тексте документа, за исключением формул, таблиц и рисунков не допускается:

- применять математический знак минус (-) перед отрицательными значениями величин (следует писать слово «минус»);
- применять без числовых значений математические знаки, например > (больше), < (меньше), = (равно), а также знаки № (номер), % (процент).

Оформление иллюстраций

Допускается нумеровать иллюстрации в пределах раздела (главы). В этом случае номер иллюстрации состоит из номера раздела и порядкового номера иллюстрации, разделённых точкой.

Иллюстрации, при необходимости, могут иметь наименование и пояснительные данные (подрисовочный текст). Слово рисунок и наименование помещают после пояснительных данных и располагают следующим образом: «Рисунок 1. Окно Windows»

Рисунки, схемы, диаграммы должны быть расположены так, чтобы их было удобно рассматривать.

Таблицы должны иметь нумерацию: Таблица 1, Таблица 2.

Если числовые значения величин в графах таблицы выражены различных единицах физической величины, их обозначения указывают в подзаголовке каждой графы.

Оформление списка использованных источников

Использованные источники располагаются в следующем порядке:

- официальные материалы (резолуции-рекомендации международных организаций и конференций, официальные доклады, официальные отчеты и др.);
- монографии, учебники, учебные пособия (в алфавитном порядке);
- иностранная литература;
- интернет-ресурсы.

### **5.3.2 Методические указания по подготовке к коллоквиуму**

Подготовка к коллоквиуму начинается с консультации преподавателя, на которой он разъясняет развернутую тематику проблемы, рекомендует литературу для изучения и объясняет процедуру проведения коллоквиума.

Подготовка включает в себя изучение конспекта лекций, рекомендованной литературы и (по указанию преподавателя) конспектирование важнейших источников.

Коллоквиум проводится в форме индивидуальной беседы преподавателя с каждым обучающимся или беседы в небольших группах (3-5 человек). Обычно преподаватель задает несколько кратких конкретных вопросов, позволяющих выяснить степень добросовестности работы с литературой, контролирует конспект. Далее более подробно обсуждается какая-либо сторона проблемы, что позволяет оценить уровень понимания. Обучающимся дается возможность высказать свое мнение, точку зрения, критику по определенным вопросам. При высказывании требуется аргументированность и обоснованность собственных оценок.

### **5.3.3 Методические указания по подготовке к тестированию**

Тесты – это вопросы или задания, предусматривающие конкретный, краткий, четкий ответ на имеющиеся эталоны ответов.

При самостоятельной подготовке к тестированию студенту необходимо:

а) готовясь к тестированию, проработайте информационный материал по дисциплине. Проконсультируйтесь с преподавателем по вопросу выбора учебной литературы;

б) четко выясните все условия тестирования заранее. Вы должны знать, сколько тестов Вам будет предложено, сколько времени отводится на тестирование, какова система оценки результатов и т.д.

в) приступая к работе с тестами, внимательно и до конца прочтите вопрос и предлагаемые варианты ответов. Выберите правильные (их может быть несколько). На отдельном листке ответов выпишите цифру вопроса и буквы, соответствующие правильным ответам;

г) в процессе решения желательно применять несколько подходов в решении задания. Это позволяет максимально гибко оперировать методами решения, находя каждый раз оптимальный вариант.

д) если Вы встретили чрезвычайно трудный для Вас вопрос, не тратьте много времени на него. Переходите к другим тестам. Вернитесь к трудному вопросу в конце.

е) обязательно оставьте время для проверки ответов, чтобы избежать механических ошибок.

### **Промежуточная аттестация**

По итогам 7 семестра проводится экзамен. При подготовке к сдаче экзамена рекомендуется пользоваться материалами практических занятий и материалами, изученными в ходе текущей самостоятельной работы.

Экзамен проводится в устной форме, включает подготовку и ответы обучающегося на теоретические вопросы. По итогам экзамена выставляется оценка.

## 6. ОБРАЗОВАТЕЛЬНЫЕ ТЕХНОЛОГИИ

№ п/п	№ семестра	Виды учебной работы	Образовательные технологии	Всего часов
1	2	3	4	5
1.	7	Лекция 1.1 Понятие топологического пространства.	Обзорная лекция. Презентация.	2
2.	7	Лекция 1.2 Сравнение топологий.	Лекция-презентация, диалоговая технология	2
3.	7	Лекция 1.3 Отделимость. Метрика.	Лекция-презентация.	2
4.	7	Лекция 1.4 Непрерывное отображение топологических пространств.	Лекция-презентация.	2
5.	7	Лекция 1.5 Свойства непрерывных отображений.	Лекция-презентация.	2
6.	7	Лекция 1.6 Связные пространства. Понятие компактности. Свойства компактных пространств.	Лекция-презентация.	2
7.	7	Лекция 2.1 Кривые в n-мерном пространстве. Кривизна кривой.	Лекция-презентация.	2
8.	7	Лекция 2.2 Кривые в 3-мерном пространстве. Гладкие поверхности.	Лекция-презентация.	2
9.	7	Лекция 2.3 Риманова метрика.	Лекция-презентация.	2
10.	7	Лекция 2.4 Основы римановой геометрии. Расстояние на римановом многообразии. Уравнения Эйлера-Лагранжа.	Лекция-презентация.	2
11.	7	Лекция 2.5 Геодезические на римановом многообразии. Кривизна кривой на 2-мерной поверхности. Вторая квадратичная форма. Теоремы Эйлера и Гаусса	Лекция-презентация.	2
12.	7	Лекция 3.1 Криволинейные системы координат. Тензорные поля. Операции над тензорными полями.	Лекция-презентация.	2
13.	7	Лекция 3.2 Риманова связность. Параллельный перенос.	Лекция-презентация.	2
14.	7	Лекция 3.3 Тензор кривизны Римана. Теоремы Гаусса.	Лекция-презентация.	2
15.	7	Практическое занятие: «Решение задач по теме топологические пространства»	Поисковые задачи. Командная работа. Проблемные задачи.	2
16.	7	Практическое занятие: «Решение задач по теме сравнение топологий»	Поисковые задачи. Командная работа, диалоговая технология.	2
17.	7	Практическое занятие: «Решение	Проблемные задачи.	2

		задач по теме «отделимость, метрика»	Командная работа.	
18.	7	Практическое занятие: «Решение задач по теме «непрерывное отображение топологических пространств»	Командная работа. Проблемные задачи.	2
19.	7	Практическое занятие: «Решение задач по теме «непрерывные отображения»	Командная работа. Проблемные задачи.	2
20.	7	Практическое занятие: «Решение задач по теме «свойства непрерывных отображений»	Командная работа. Проблемные задачи.	4
21.	7	Практическое занятие: «Решение задач по теме «связные пространства»	Командная работа. Проблемные задачи.	2
22.	7	Практическое занятие: «Решение задач по теме «компактность. Свойства компактных пространств»	Поисковые задачи. Командная работа. Проблемные задачи.	2
23.	7	Практическое занятие: «Решение задач по теме «кривые в $n$ -мерном пространстве. Кривизна кривой»	Поисковые задачи. Командная работа. Проблемные задачи.	2
24.	7	Практическое занятие: «Решение задач по теме «кривые в 3-мерном пространстве. Гладкие поверхности»	Поисковые задачи. Командная работа. Проблемные задачи.	2
25.	7	Практическое занятие: «Решение задач по теме «Риманова метрика»	Поисковые задачи. Командная работа. Проблемные задачи.	2
26.	7	Практическое занятие: «Решение задач по теме «основы римановой геометрии»	Поисковые задачи.	2
27.	7	Практическое занятие: «Решение задач по теме «расстояние на римановом многообразии. Уравнения Эйлера-Лагранжа»	Поисковые задачи. Командная работа. Проблемные задачи.	2
28.	7	Практическое занятие: «Решение задач по теме «геодезические на римановом многообразии»	Командная работа. Проблемные задачи.	2
29.	7	Практическое занятие: «Кривизна кривой на 2-мерной поверхности. Вторая квадратичная форма»	Командная работа. Проблемные задачи.	2
30.	7	Практическое занятие: «Решение задач по теме «теоремы Эйлера и Гаусса»	Поисковые задачи. Командная работа. Проблемные задачи.	4
31.	7	Практическое занятие: «Решение задач по теме «криволинейные системы координат. Тензорные поля. Операции над тензорными полями»	Поисковые задачи. Командная работа. Проблемные задачи.	2
32.	7	Практическое занятие: «Решение задач по теме «Риманова	Поисковые задачи. Командная работа. Проблемные задачи.	2

		связность. Параллельный перенос»		
33.	7	Практическое занятие: «Решение задач по теме тензор кривизны Римана. Теоремы Гаусса»	Поисковые задачи. Командная работа. Проблемные задачи.	4

## **7. УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОЕ И ИНФОРМАЦИОННОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ**

### **7.1. Перечень основной и дополнительной учебной литературы**

#### **Список основной литературы**

1. Примаков, Д. А. Геометрия и топология [Электронный ресурс] : учебное пособие / Д. А. Примаков, Р. Я. Хамидуллин. — Электрон. текстовые данные. — М. : Московский финансово-промышленный университет «Синергия», 2011. — 272 с. — 978-5-902597-13-1. — Режим доступа: <http://www.iprbookshop.ru/17013.html>
2. Асташова, И. В. Геометрия и топология : учебное пособие / И. В. Асташова, В. А. Никишкин. — Москва : Евразийский открытый институт, 2011. — 94 с. — ISBN 978-5-374-00489-2. — Текст : электронный // Цифровой образовательный ресурс IPR SMART : [сайт]. — URL: <https://www.iprbookshop.ru/10645.html>
3. Элементы топологии и дифференциальной геометрии : учебное пособие / составители А. В. Ушаков. — Москва : Московский городской педагогический университет, 2010. — 144 с. — Текст : электронный // Цифровой образовательный ресурс IPR SMART : [сайт]. — URL: <https://www.iprbookshop.ru/26669.html>
4. Игнаточкина, Л. А. Топология для бакалавров математики : учебное пособие / Л. А. Игнаточкина. — Москва : Прометей, 2016. — 88 с. — ISBN 978-5-9907453-1-5. — Текст : электронный // Цифровой образовательный ресурс IPR SMART : [сайт]. — URL: <https://www.iprbookshop.ru/58207.html>

#### **Список дополнительной литературы**

1. Хорькова Н.Г. Элементы дифференциальной геометрии и топологии. Поверхности в пространстве: курс лекций / Хорькова Н.Г.. — Москва : Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана, 2018. — 100 с. — ISBN 978-5-7038-4886-9. Текст : электронный // Цифровой образовательный ресурс IPR SMART : [сайт]. — URL: <https://www.iprbookshop.ru/115394.html>
2. Александрян Р.А. Общая топология [Текст]: учеб. пособие для вузов/ Александрян Р.А., Мирзаханян Э.А.- М.: Высш. школа, 1979.- 336 с.
3. Введение в топологии [Текст]: учеб. пособие для вузов/ Борисович Ю.Г., Близняков Н.М., Ихраилевич Я.И., Фоменко Т.Н.- М.: Высш. школа, 1980.- 295 с.
4. Келли Дж. Л. Общая топология [Текст]: монография.- М.: Наука, 1968.- 383 с.

### **7.2. Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети «Интернет»**

1. Единое окно доступа к образовательным ресурсам. URL: <http://window.edu.ru>
2. Научная электронная библиотека.-URL:<http://elibrary.ru>
3. Научная электронная библиотека «КиберЛенинка». URL: <https://cyberleninka.ru/>
4. Национальная электронная библиотека». URL: <https://rusneb.ru/>
5. Электронно-библиотечная система IPRbooks URL: [http:// www.iprbooks.ru/](http://www.iprbooks.ru/) ООО «Ай Пи Эр Медиа»

### 7.3. Информационные технологии, лицензионное программное обеспечение

Лицензионное программное обеспечение	Реквизиты лицензий/ договоров
Microsoft Azure Dev Tools for Teaching 1. Windows 7, 8, 8.1, 10	Идентификатор подписчика: 1203743421
MS Office 2003, 2007, 2010, 2013	Сведения об Open Office: 63143487, 63321452, 64026734, 6416302, 64344172, 64394739, 64468661, 64489816, 64537893, 64563149, 64990070, 65615073 Лицензия бессрочная
Антивирус Dr.Web Desktop Security Suite	Лицензионный сертификат Серийный № 8DVG-V96F-H8S7-NRBC Срок действия: с 20.10.2022 до 22.10.2023
Цифровой образовательный ресурс IPRsmart	Лицензионный договор № 9368/22П от 01.07.2022 г. Срок действия: с 01.07.2022 до 01.07.2023

**Бесплатное ПО:** Sumatra PDF, 7-Zip.

## **8. МАТЕРИАЛЬНО-ТЕХНИЧЕСКОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ**

### **8.1. Требования к аудиториям (помещениям, местам) для проведения занятий**

#### **Учебная аудитория для проведения занятий лекционного типа:**

Специализированная мебель: Кафедра напольная - 1шт., стул преподавательский мягкий - 1шт., парты - 18шт., стулья мягкие -32шт., доска меловая - 1шт.

Набор демонстрационного оборудования и учебно-наглядных пособий, обеспечивающих тематические иллюстрации: Интерактивная система– 1шт.; Системный блок- 1шт., Проектор- 1шт.

#### **Учебная аудитория для проведения занятий семинарского типа, курсового проектирования (выполнения курсовых работ), групповых и индивидуальных консультаций, текущего контроля и промежуточной аттестации:**

Специализированная мебель: Кафедра настольная - 1шт., парты - 31шт., стулья - 54шт., доска меловая - 1шт. Технические средства обучения, служащие для предоставления учебной информации большой аудитории: Проектор Benq – 1 шт. Экран рулонный настенный – 1 шт. Ноутбук– 1 шт.

#### **Помещение для самостоятельной работы:**

Библиотечно-издательский центр.

Специализированная мебель: Рабочие столы на 1 место – 21 шт. Стулья – 55 шт. Набор демонстрационного оборудования и учебно-наглядных пособий, обеспечивающих тематические иллюстрации: экран настенный – 1 шт. Проектор – 1шт. Ноутбук – 1шт.

Информационно-библиографический отдел.

Специализированная мебель: Рабочие столы на 1 место - 6 шт. Стулья - 6 шт. Компьютерная техника с возможностью подключения к сети «Интернет» и обеспечением доступа в электронную информационно-образовательную среду ФГБОУ ВО «СевКавГА»: Персональный компьютер – 1шт. Сканер – 1 шт. МФУ – 1 шт.

Отдел обслуживания электронными изданиями.

Специализированная мебель: Рабочие столы на 1 место – 24 шт. Стулья – 24 шт. Набор демонстрационного оборудования и учебно-наглядных пособий, обеспечивающих тематические иллюстрации: Интерактивная система - 1 шт. Монитор – 21 шт. Сетевой терминал -18 шт. Персональный компьютер -3 шт. МФУ – 2 шт. Принтер –1шт.

#### **Помещение для хранения и профилактического обслуживания учебного оборудования:**

Специализированная мебель: Шкаф – 1 шт., стул -2шт., кресло компьютерное – 2 шт., стол угловой компьютерный – 2 шт., тумбочки с ключом – 2 шт. Учебное пособие (персональный компьютер в комплекте) – 2 шт.

### **8.2. Требования к оборудованию рабочих мест преподавателя и обучающихся**

Рабочее место преподавателя, оснащенное компьютером с доступом в Интернет.

Рабочие места обучающихся, оснащенные компьютерами с доступом в Интернет, предназначенные для работы в электронной образовательной среде, *и т.п.*

### **8.3. Требования к специализированному оборудованию**

Нет.



## **9. ОСОБЕННОСТИ РЕАЛИЗАЦИИ ДИСЦИПЛИНЫ ДЛЯ ИНВАЛИДОВ И ЛИЦ С ОГРАНИЧЕННЫМИ ВОЗМОЖНОСТЯМИ ЗДОРОВЬЯ**

Для обеспечения образования инвалидов и обучающихся с ограниченными возможностями здоровья разрабатывается (в случае необходимости) адаптированная образовательная программа, индивидуальный учебный план с учетом особенностей их психофизического развития и состояния здоровья, в частности применяется индивидуальный подход к освоению дисциплины, индивидуальные задания: рефераты, письменные работы и, наоборот, только устные ответы и диалоги, индивидуальные консультации, использование диктофона и других записывающих средств для воспроизведения лекционного и семинарского материала.

В целях обеспечения обучающихся инвалидов и лиц с ограниченными возможностями здоровья комплектуется фонд основной учебной литературой, адаптированной к ограничению электронных образовательных ресурсов, доступ к которым организован в БИЦ Академии. В библиотеке проводятся индивидуальные консультации для данной категории пользователей, оказывается помощь в регистрации и использовании сетевых и локальных электронных образовательных ресурсов, предоставляются места в читальном зале.

**ФОНД ОЦЕНОЧНЫХ СРЕДСТВ**  
**ПО ДИСЦИПЛИНЕ**     **«Элементы топологии»**

## 1. ПАСПОРТ ФОНДА ОЦЕНОЧНЫХ СРЕДСТВ ПО ДИСЦИПЛИНЕ

### Элементы топологии

#### Компетенции, формируемые в процессе изучения дисциплины

Индекс	Формулировка компетенции
УК-1	Способен осуществлять поиск, критический анализ и синтез информации, применять системный подход для решения поставленных задач.

#### 2. Этапы формирования компетенции в процессе освоения дисциплины

Основными этапами формирования указанной компетенции при изучении обучающимися дисциплины являются последовательное изучение содержательно связанных между собой разделов (тем) учебных занятий. Изучение каждого раздела (темы) предполагает овладение обучающимися необходимыми компетенциями. Результат аттестации обучающихся на различных этапах формирования компетенций показывает уровень освоения компетенций.

Этапность формирования компетенции прямо связана с местом дисциплины в образовательной программе.

Разделы (темы) дисциплины	Формируемые компетенции (коды)
	УК -1
Раздел 1. Основные понятия общей топологии	
Тема 1.1 Понятие топологического пространства.	+
Тема 1.2 Сравнение топологий.	+
Тема 1.3 Отделимость. Метрика.	+
Тема 1.4 Непрерывное отображение топологических пространств.	+
Тема 1.5 Свойства непрерывных отображений.	+
Тема 1.6 Связные пространства. Понятие компактности. Свойства компактных пространств.	+
Раздел 2. Кривые и поверхности в $R^d$ .	
Тема 2.1 Кривые в n-мерном пространстве. Кривизна кривой.	+
Тема 2.2 Кривые в 3-мерном пространстве. Гладкие поверхности.	+
Тема 2.3 Риманова метрика.	+
Тема 2.4 Основы римановой геометрии. Расстояние на римановом многообразии. Уравнения Эйлера-Лагранжа.	+
Тема 2.5 Геодезические на римановом многообразии. Кривизна кривой на 2-мерной поверхности. Вторая квадратичная форма. Теоремы Эйлера и Гаусса	+
Раздел 3. Элементы тензорного анализа	+
Тема 3.1 Криволинейные системы координат. Тензорные поля. Операции над тензорными полями.	+
Тема 3.2 Риманова связность. Параллельный перенос.	+
Тема 3.3 Тензор кривизны Римана. Теоремы Гаусса.	+

### 3. Показатели, критерии и средства оценивания компетенций, формируемых в процессе изучения дисциплины

#### УК-1 Способен осуществлять поиск, критический анализ и синтез информации, применять системный подход для решения поставленных задач.

Индикаторы достижения компетенций	Критерии оценивания результатов обучения				Средства оценивания результатов обучения	
	неудовлетв	удовлетв	хорошо	отлично	Текущий контроль	Промежуточная аттестация
УК – 1.1. Знает принципы сбора, отбора и обобщения информации, методики системного подхода для решения профессиональных задач;	Допускает существенные ошибки в сборе и обобщении информации, не имеет методики, системного подхода для решения профессиональных задач	Демонстрирует частичные знания в сборе и обобщении информации, частично владеет методикой, системным подходом для решения профессиональных задач	Демонстрирует знание в сборе и обобщении информации, владеет методикой, системным подходом для решения профессиональных задач	Раскрывает полное знание методов в сборе и обобщении информации, владеет методикой, системным подходом для решения профессиональных задач	Коллоквиум, контрольные вопросы, тестирование. Реферат.	Экзамен.
УК – 1.2. Умеет анализировать и систематизировать разнородные данные, оценивать эффективность процедур анализа проблем и принятия решений в профессиональной деятельности;	Не умеет и не готов систематизировать разнородные данные, не способен оценивать эффективность процедур анализа проблем и принятия решений в профессиональной деятельности.	Частично анализирует, систематизирует разнородные данные, на низком уровне способен оценивать эффективность процедур анализа проблем и принятия решений в профессиональной деятельности.	Владеет навыками анализа, систематизирует разнородные данные, способен оценивать эффективность процедур анализа проблем и принятия решений в профессиональной деятельности.	Готов и умеет анализировать и систематизировать разнородные данные, оценивать эффективность процедур анализа проблем и принятия решений в профессиональной деятельности.	Коллоквиум, контрольные вопросы, тестирование.	Экзамен.

<p>УК – 1.3. Владеет навыками научного поиска и практической работы с информационными источниками, методами принятия решений.</p>	<p>Не владеет навыками научного поиска и практической работы с информационными источниками, методами принятия решений.</p>	<p>Владеет отдельными навыками научного поиска и практической работы с информационными источниками, методами принятия решений.</p>	<p>Владеет навыками научного поиска и практической работы с информационными источниками, методами принятия решений.</p>	<p>Демонстрирует владение навыками научного поиска и практической работы с информационными источниками, методами принятия решений.</p>	<p>Коллоквиум, контрольные вопросы, тестирование.</p>	<p>Экзамен.</p>
---	--	--	---	--	---	-----------------

#### 4. Комплект контрольно-оценочных средств по дисциплине «Элементы топологии»

##### Вопросы для устного опроса

по дисциплине Элементы топологии

##### Вопросы к разделу 1.

1. Понятие топологического пространства.
2. Метрическая топология.
3. Определение и простые примеры топологий.
4. Сравнение топологий. Отделимость топологий.
5. Метрика.
6. Топология в метрических пространствах.
7. Непрерывное отображение топологических пространств.
8. Два определения непрерывного отображения.
9. Примеры непрерывных отображений.
10. Задачи о непрерывных отображениях.
11. Свойства непрерывных отображений.
12. Гомеоморфизм.
13. Примеры гомеоморфных пространств.
14. Связность и компактность.
15. Определение и примеры связных пространств.
16. Свойства связных пространств.
17. Связная компонента.
18. Линейная связность.
19. Понятие компактности.
20. Свойства компактных пространств.
21. Критерий компактности подмножеств в  $\mathbb{R}^n$ , ( $n < \infty$ ).
22. Компактность метрических пространств.

##### Вопросы к разделу 2.

1. Кривые и поверхности в  $\mathbb{R}^d$ .
2. Кривые в  $n$ -мерном пространстве.
3. Кривизна кривой.
4. Кривые в 3-мерном пространстве.
5. Гладкие поверхности.
6. Сопровождающий трехгранник Френе.
7. Гладкие  $k$ -мерные поверхности в  $\mathbb{R}^d$ .
8. Риманова метрика.
9. Скалярное произведение на линейном пространстве.
10. Примеры римановых метрик.
11. Основы римановой геометрии.
12. Длина кривой и угол между кривыми.
13. Задача о локсодромии.
14. Площадь поверхности.

15. Расстояние на римановом многообразии.
16. Уравнения Эйлера-Лагранжа.
17. Геодезические.
18. Простейшая задача вариационного исчисления.
19. Геодезические, теория кривизны поверхностей и элементы тензорного анализа.
20. Геодезические на римановом многообразии.
21. Кривизна кривой на 2-мерной поверхности.
22. Вторая квадратичная форма.
23. Ориентация поверхности.
24. Вторая квадратичная форма.
25. Нормальная и геодезическая кривизны.
26. Линии на поверхности.
27. Теоремы Эйлера и Гаусса.
28. Гауссова и средняя кривизны. Теорема Эйлера.
29. Деривационные формулы. Теорема Гаусса.

### **Вопросы к разделу 3.**

1. Элементы тензорного анализа.
2. Криволинейные системы координат.
3. Тензорные поля.
4. Системы координат.
5. Тензорные поля.
6. Операции над тензорными полями.
7. Алгебраические операции над тензорными полями.
8. Ковариантное дифференцирование.
9. Риманова связность.
10. Параллельный перенос.
11. Риманова связность.
12. Параллельный перенос.
13. Тензор кривизны Римана.
14. Теоремы Гаусса.
15. Теорема Гаусса.
16. Теорема Гаусса–Бонне.

## Вопросы к экзамену

по дисциплине Элементы топологии

1. Понятие топологического пространства.
2. Метрическая топология.
3. Сравнение топологий.
4. Отделимость.
5. Метрика.
6. Непрерывное отображение топологических пространств.
7. Два определения непрерывного отображения.
8. Свойства непрерывных отображений.
9. Гомеоморфизм.
10. Связность и компактность.
11. Свойства связных пространств.
12. Связная компонента.
13. Линейная связность.
14. Понятие компактности.
15. Свойства компактных пространств.
16. Критерий компактности подмножеств в  $\mathbb{R}^n$ , ( $n < \infty$ ).
17. Компактность метрических пространств.
18. Кривые и поверхности в  $\mathbb{R}^d$ . Кривые в  $n$ -мерном пространстве.
19. Кривизна кривой. Кривые в 3-мерном пространстве.
20. Гладкие поверхности.
21. Сопровождающий трехгранник Френе.
22. Гладкие  $k$ - мерные поверхности в  $\mathbb{R}^d$ .
23. Риманова метрика.
24. Скалярное произведение на линейном пространстве.
25. Примеры римановых метрик.
26. Основы римановой геометрии.
27. Длина кривой и угол между кривыми.
28. Задача о локсодромии.
29. Площадь поверхности.
30. Расстояние на римановом многообразии.
31. Уравнения Эйлера-Лагранжа.
32. Геодезические на римановом многообразии.
33. Кривизна кривой на 2-мерной поверхности.
34. Вторая квадратичная форма.
35. Ориентация поверхности.
36. Нормальная и геодезическая кривизны.
37. Линии на поверхности.
38. Теоремы Эйлера и Гаусса.
39. Криволинейные системы координат.
40. Тензорные поля.
41. Операции над тензорными полями.
42. Алгебраические операции над тензорными полями.
43. Ковариантное дифференцирование.
44. Риманова связность.
45. Параллельный перенос.
46. Тензор кривизны Римана.
47. Теорема Гаусса.
48. Теорема Гаусса-Бонне.



**СЕВЕРО-КАВКАЗСКАЯ ГОСУДАРСТВЕННАЯ АКАДЕМИЯ**

Кафедра «Математика»

20\_\_-20\_\_ учебный год

Экзаменационный билет № 1

По дисциплине Элементы топологии

Для обучающихся 2-курса – направления подготовки 01.03.04 Прикладная математика

1. Понятие топологического пространства.
2. Примеры римановых метрик.
3. Найти все топологии на множестве, состоящем из двух точек. Указать те из них, которые отличны от дискретной и антидискретной.

Зав.кафедрой

А.М. Кочкаров

## Вопросы для коллоквиума

по дисциплине «Элементы топологии»

### **Раздел 1. Основные понятия общей топологии**

1. Понятие топологического пространства.
2. Сравнение топологий.
3. Отделимость. Метрика.
4. Непрерывное отображение топологических пространств.
5. Непрерывные отображения.
6. Свойства непрерывных отображений.
7. Связные пространства.
8. Понятие компактности. Свойства компактных пространств.

### **Раздел 2. Кривые и поверхности в $\mathbf{R}^d$ .**

1. Кривые в  $n$ -мерном пространстве. Кривизна кривой.
2. Кривые в 3-мерном пространстве. Гладкие поверхности.
3. Риманова метрика.
4. Основы римановой геометрии.
5. Расстояние на римановом многообразии. Уравнения Эйлера-Лагранжа.
6. Геодезические на римановом многообразии. Кривизна кривой на 2-мерной поверхности. Вторая квадратичная форма.
7. Теоремы Эйлера и Гаусса

### **Раздел 3. Элементы тензорного анализа**

1. Криволинейные системы координат. Тензорные поля. Операции над тензорными полями.
2. Риманова связность. Параллельный перенос.
3. Тензор кривизны Римана. Теоремы Гаусса.

**Комплект тестовых вопросов и заданий**  
по дисциплине «Элементы топологии»

**Вопрос 1.**

Говорят, что на множестве  $X$  определена топологическая структура (топология), если на множестве  $P(X)$  всех его подмножеств задано унарное отношение  $T$ , удовлетворяющее следующей аксиоме:

Ответы:

1.  $X, \emptyset$  принадлежат  $T$ .
2. Объединение любого конечного либо бесконечного семейства подмножеств из  $T$  принадлежит  $T$ .
3. Пересечение любого конечного семейства подмножеств из  $T$  принадлежит  $T$ .
4. Удовлетворяет всем аксиомам.

**Вопрос 2.**

Множество  $X$  с заданной в нем топологией  $\tau$ , т.е. пара  $(X, \tau)$  называется - \_\_\_\_\_.  
Продолжите определение.

**Вопрос 3.**

Если дополнение  $X \setminus \tau$  открыто в  $\tau$ , на топологии  $\tau$  то подмножество  $F \subset X$  называется - \_\_\_\_\_.  
Продолжите определение.

**Вопрос 4.**

Пусть в произвольном множестве  $X$  заданы две топологии  $\tau_1$  и  $\tau_2$ , и тем самым определены два топологических пространства  $(X, \tau_1)$  и  $(X, \tau_2)$ .

Говорят, что топология  $\tau_1$  \_\_\_\_\_ (грубее) топологии  $\tau_2$  (и пишут  $\tau_1 < \tau_2$ ), если  $\tau_1 \subset \tau_2$ , т.е. если из того, что  $U \in \tau_1$  следует, что  $U \in \tau_2$ .  
Допишите определение.

**Вопрос 5.**

Существуют ли несравнимые топологии.

Ответы:

1. да.
2. нет.
3. да если каждая из них содержит лишь часть множеств, принадлежащих другой.
4. нет если каждая из них содержит лишь часть множеств, принадлежащих другой

**Вопрос 6.**

Пусть  $A$  - подмножество топологического пространства  $X = (X, \tau)$ . Всякое подмножество  $U \in \tau$ , содержащее  $A$  называется:

Ответы:

1. Окрестностью множества  $A$ .
2. Окрестностью точки  $A$ .
3. Отображением множества  $A$ .
4. Несвязанным множеством  $A$ .

**Вопрос 7.**

Пусть  $x$  - точка топологического пространства  $(X, \tau)$ . Всякое подмножество  $U \in \tau$ , содержащее  $x$  называется - \_\_\_\_\_  
Продолжите определение.

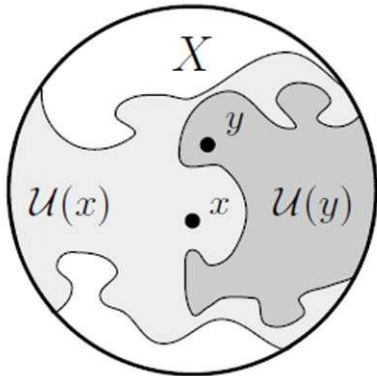
**Вопрос 8.**

Топологическое пространство  $X$  называется \_\_\_\_\_, если для любых двух различных точек из  $X$  найдется окрестность одной из них, не содержащая другую. Допишите определение.

**Вопрос 9.**

Топологическое пространство  $X$  называется \_\_\_\_\_, если любые две различные точки из  $X$  обладают непересекающимися окрестностями, т.е. если  $\forall x \neq y \in X \exists U(x) \in \tau, U(y) \in \tau : U(x) \cap U(y) = \emptyset$ . Допишите определение.

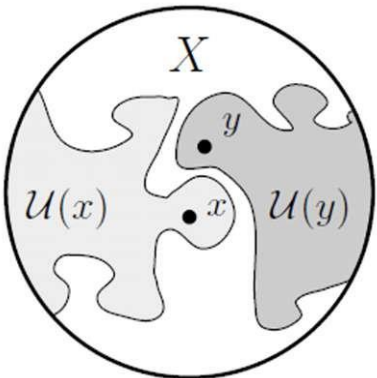
**Вопрос 10.**



Точка  $x \notin U(y)$

пространство  $x$  \_\_\_\_\_ пространство  $x$ .  
Допишите определение.

**Вопрос 11.**



Здесь  $U(x) \cap U(y) = \emptyset$ .

пространство  $x$  \_\_\_\_\_ пространство  $x$ .  
Допишите определение.

**Вопрос 12.**

Пусть  $X$  - непустое множество. Метрикой (функцией расстояния) на множестве  $X$  называется неотрицательная вещественная функция  $\rho : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ , которая  $\forall x, y, z \in X$  удовлетворяет следующей аксиоме:

Ответы:

1.  $\rho(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$ ;
2.  $\rho(x, y) = \rho(y, x)$  (симметричность);
3.  $\rho(x, y) \leq \rho(x, z) + \rho(y, z)$  (неравенство треугольника);
4. Всем перечисленным.

**Вопрос 13.**

Множество  $B_r(x_0) = \{x \in X : \rho(x_0, x) < r\}$  радиуса  $r$  с центром в точке  $x_0$  называется

Ответы:

1. Открытым шаром
2. Открытым треугольником
3. Закрытым шаром
4. Закрытым треугольником

**Вопрос 14.**

Множество  $\overline{B}_r(x_0) = \{x \in X : \rho(x_0, x) \leq r\}$  радиуса  $r$  с центром в точке  $x_0$  называется

Ответы:

1. Закрытым шаром
2. Открытым треугольником
3. Открытым шаром
4. Закрытым треугольником

**Вопрос 15.**

Если для любого  $\varepsilon > 0$  существует такое  $\delta > 0$ , что для всех  $x$ , таких, что  $|x - x_0| < \delta$ , выполняется  $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ .

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in \mathbb{R} (|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon)$$

Функция  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  называется \_\_\_\_\_ в точке  $x_0 \in \mathbb{R}$ ,

Допишите определение.

**Вопрос 16.**

Пусть  $(X, \rho_X)$  и  $(Y, \rho_Y)$  - метрические пространства. Отображение  $f: X \rightarrow Y$  называется \_\_\_\_\_ в точке  $x_0 \in X$ , если для любого шара  $B_\varepsilon(f(x_0)) \subset Y$  с центром в точке  $f(x_0)$  найдется шар  $B_\delta(x_0)$ ,  $\delta > 0$ , с центром в точке  $x_0 \in X$ , такой, что образ  $f(B_\delta(x_0)) \subset B_\varepsilon(f(x_0))$ .

Допишите определение.

**Вопрос 17.**

Какой из простых примеров, является примером непрерывного отображения:

Ответы:

1. Для любого топологического пространства  $X = (X, \tau_X)$  тождественное отображение  $Id: X \rightarrow X$ , определяемое формулой  $Id(x) = x$ , является непрерывным.
2. Для любых двух топологических пространств  $X = (X, \tau_X)$  и  $Y = (Y, \tau_Y)$  постоянное отображение  $p: X \rightarrow Y$ , определяемое формулой  $p(x) = y_0$ , где  $y_0$  - фиксированная точка в  $Y$ , является непрерывным.
3. Вложение  $i: Y \rightarrow X, i(x) = x$ , подпространства  $Y$  с индуцированной топологией также непрерывно.
4. Все перечисленные.

**Вопрос 18.**

Отображение  $f: X \rightarrow Y$  топологического пространства  $X$  на топологическое пространство  $Y$  называется гомеоморфизмом, если оно взаимно однозначно и взаимно непрерывно, т.е. если

Ответы:

1.  $f: X \rightarrow Y$  — биекция;
2.  $f$  — непрерывно;
3.  $f^{-1}: X \rightarrow Y$  — непрерывно;
4. Все перечисленное.

**Вопрос 19.**

Отображение  $f : X \rightarrow Y$  топологического пространства  $X$  на топологическое пространство  $Y$  называется гомеоморфизмом, если оно взаимно однозначно и взаимно непрерывно, т.е. если

1.  $f : X \rightarrow Y$  — биекция;
2.  $f$  — непрерывно;
3.  $f^{-1} : X \rightarrow Y$  — непрерывно.

Пространства  $X$  и  $Y$  при этом называются гомеоморфными?

Ответы:

1. да.
2. нет.
3. только  $X$  гомеоморфно.
4. только  $Y$  гомеоморфно.

### Вопрос 20.

Какие из перечисленных примеров, являются примерами гомеоморфных пространств:

Ответы:

1. Отрезок  $[0,1]$  и интервал  $(0,1)$  в дискретной топологии гомеоморфны. Для доказательства достаточно построить взаимно однозначное соответствие между точками интервала и отрезка.

2. Интервал  $(-1,1)$  и числовая ось  $\mathbb{R}$  гомеоморфны. Действительно, функция  $y = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi x}{2}\right) : (-1,1) \rightarrow \mathbb{R}$ , взаимно однозначно отображающая интервал  $(-1,1)$  на всю числовую ось, непрерывна вместе с обратной функцией

$$x = \left(\frac{2}{\pi}\right) \operatorname{arctg} y$$

3. Аффинное невырожденное преобразование пространства  $\mathbb{R}^n$  является гомеоморфизмом. Действительно, всякое такое отображение  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  задается в виде  $y = Ax + b$ , где  $A = (a_{ij})$  — невырожденная матрица ( $\det(a_{ij}) \neq 0$ ). В курсе математического анализа доказывается, что линейное отображение  $y = Ax + b : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  является непрерывным, а из курса линейной алгебры известно, что это отображение допускает обратное  $x = A^{-1} - A^{-1}b$ , которое также линейно и потому непрерывно. Следовательно,  $f$  — гомеоморфизм.

4. Все перечисленные.

### Вопрос 21.

Пример: Аффинное невырожденное преобразование пространства  $\mathbb{R}^n$  является гомеоморфизмом. Действительно, всякое такое отображение  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  задается в виде  $y = Ax + b$ , где  $A = (a_{ij})$  — невырожденная матрица ( $\det(a_{ij}) \neq 0$ ).

В курсе математического анализа доказывается, что линейное отображение  $y = Ax + b : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  является непрерывным, а из курса линейной алгебры известно, что это отображение допускает обратное  $x = A^{-1} - A^{-1}b$ , которое также линейно и потому непрерывно.

Следовательно,  $f$  — гомеоморфизм.

Следует ли из этого примера, что фигуры на плоскости или в  $n$ - мерном пространстве, которые можно перевести друг в друга невырожденным линейным преобразованием (с помощью параллельного переноса, поворота вокруг точки, оси или плоскости, отражения, сжатия и т.д.), гомеоморфны.

Ответы:

1. Только окружность гомеоморфна эллипсу.
2. Только сфера гомеоморфна эллипсоиду.
3. Да.
4. Нет.

**Вопрос 22.**

Определение: Топологическое пространство  $X$  называется несвязным, если оно представимо в виде объединения двух непустых открытых непересекающихся подмножеств. Если  $X$  нельзя разложить в объединение непустых открытых непересекающихся подмножеств, то  $X$  называется связным.

По определению  $X$  несвязно, если  $X = \Phi_1 \cup \Phi_2$ , где  $\Phi_1$  и  $\Phi_2$  непусты, открыты и  $\Phi_1 \cap \Phi_2 = \emptyset$ . Так как  $\Phi_2 = X \setminus \Phi_1$ ,  $\Phi_1 = X \setminus \Phi_2$ , то  $\Phi_1$  и  $\Phi_2$  являются также и замкнутыми.

Какому определению оно равносильно?

Ответы:

1. а)  $X$  несвязно  $\Leftrightarrow X$  представимо в виде объединения двух непустых замкнутых непересекающихся подмножеств.
2. б)  $X$  несвязно  $\Leftrightarrow$  в  $X$  имеется собственное подмножество  $Y$  (т.е.  $Y \neq \emptyset, X$ ), которое одновременно замкнуто и открыто.
3. Ни а) ни б) не равносильно.
4. Равносильно и а) и б).

**Вопрос 23.**

Определение: Подмножество  $M$  топологического пространства  $X$  называется связным, если  $M$  — связное пространство в индуцированной топологии.

Какие предположения в данном случае верны?

Ответы:

1. Дискретное топологическое пространство, состоящее более чем из одной точки, несвязно, т.к. в нем любое подмножество открыто и замкнуто.
2. Отрезок  $[a, b]$  числовой прямой связан.
3. Всякие интервалы  $(a, b)$ , полуинтервалы  $[a, b)$  связаны.
4. Проколотый интервал (отрезок, полуинтервал) несвязен.
5. Все предположения в данном случае верны.

**Вопрос 24.**

Теорема. Пусть  $M$  — связное подмножество топологического пространства  $X$  и  $M \subset G_1 \cup G_2$ , где  $G_1, G_2$  открыты и  $G_1 \cap G_2 = \emptyset$ . Тогда  $M$  полностью лежит в одном из множеств  $G_1$  или  $G_2$ .

Какое доказательство, доказывает данную теорему?

Ответы:

1. Доказательство. Предположив противное, мы получили бы, что множества  $\Phi_i = M \cap G_i, i=1,2$ , непусты, открыты в индуцированной топологии подпространства  $M \subset X$  и в объединении дают  $M$ . Это противоречило бы связности  $M$ .
2. Доказательство. Допустим, что  $M = \Phi_1 \cup \Phi_2$ , где  $\Phi_1, \Phi_2$  непусты, открыты и  $\Phi_1 \cap \Phi_2 = \emptyset$ . Т.к. все  $M_\alpha \subset \Phi_1 \cup \Phi_2$ , то по теореме (3.1) каждое из  $M_\alpha$  лежит в  $\Phi_1$  либо в  $\Phi_2$ . Но поскольку их пересечение непусто, то все они лежат лишь в одном  $\Phi_i, i = 1,2$ , поэтому другое пусто вопреки предположению.
3. Доказательство. Представим  $M_0$  в виде  $M_0 = \Phi_1 \cup \Phi_2$ ,  $\Phi_i$  — открыты и  $\Phi_1 \cap \Phi_2 = \emptyset$ . Т.к.  $M \subset M_0$  связно, то по теореме (3.1) оно лежит в одном из  $\Phi_i$ , скажем, в  $\Phi_1$ . В силу открытости  $\Phi_2$ , имеем  $\bar{M} \cap \Phi_2 = \emptyset$ , откуда  $M_0 \subseteq \bar{M} \subset \Phi_1$  т.е.  $\Phi_2 = \emptyset$ .
4. Доказательство. Пусть  $f : X \rightarrow Y = f(X)$  — непрерывное отображение. Если  $Y$  — несвязно, то  $Y = \Phi_1 \cup \Phi_2$ , где  $\Phi_1 \cap \Phi_2 = \emptyset$ ,  $\Phi_1, \Phi_2$  — открыты, непусты. Следовательно,  $X = f^{-1}(\Phi_1) \cup f^{-1}(\Phi_2)$ , где  $f^{-1}(\Phi_i)$  — непусты, открыты (в силу непрерывности  $f$ ) и не пересекаются. Полученное противоречие со связностью  $X$  доказывает теорему.

**Вопрос 25.**

Теорема. Пусть  $\{M_\alpha\}$  — семейство связных подмножеств топологического пространства

$X$ , имеющее непустое пересечение:

$$\bigcap_{\alpha} M_{\alpha} \neq \emptyset$$

Тогда

$$M = \bigcup_{\alpha} M_{\alpha}$$

объединение

связно.

Какое доказательство, доказывает данную теорему?

Ответы:

1. Доказательство. Предположив противное, мы получили бы, что множества  $\Phi_1 = M \cap G_i, i=1,2$ , непусты, открыты в индуцированной топологии подпространства  $M \subset X$  и в объединении дают  $M$ . Это противоречило бы связности  $M$ .

2. Доказательство. Допустим, что  $M = \Phi_1 \cup \Phi_2$ , где  $\Phi_1, \Phi_2$  непусты, открыты и  $\Phi_1 \cap \Phi_2 = \emptyset$ . Т.к. все  $M_{\alpha} \subset \Phi_1 \cup \Phi_2$ , то по теореме (3.1) каждое из  $M_{\alpha}$  лежит в  $\Phi_1$  либо в  $\Phi_2$ . Но поскольку их пересечение непусто, то все они лежат лишь в одном  $\Phi_i, i = 1,2$ , поэтому другое пусто вопреки предположению.

3. Доказательство. Представим  $M_0$  в виде  $M_0 = \Phi_1 \cup \Phi_2, \Phi_i$  — открыты и  $\Phi_1 \cap \Phi_2 = \emptyset$ . Т.к.  $M \subset M_0$  связно, то по теореме (3.1) оно лежит в одном из  $\Phi_i$ , скажем, в  $\Phi_1$ . В силу открытости  $\Phi_2$ , имеем  $\bar{M} \cap \Phi_2 = \emptyset$ , откуда  $M_0 \subseteq \bar{M} \subset \Phi_1$  т.е.  $\Phi_2 = \emptyset$ .

4. Доказательство. Пусть  $f : X \rightarrow Y = f(X)$  — непрерывное отображение. Если  $Y$  — несвязно, то  $Y = \Phi_1 \cup \Phi_2$ , где  $\Phi_1 \cap \Phi_2 = \emptyset, \Phi_1, \Phi_2$  — открыты, непусты. Следовательно,  $X = f^{-1}(\Phi_1) \cup f^{-1}(\Phi_2)$ , где  $f^{-1}(\Phi_i)$  — непусты, открыты (в силу непрерывности  $f$ ) и не пересекаются. Полученное противоречие со связностью  $X$  доказывает теорему.

### Вопрос 26.

Теорема. Если  $M$  — связное подмножество топологического пространства  $X$ , то связным является любое множество  $M_0$ , лежащее между  $M$  и его замыканием:  $M \subseteq M_0 \subseteq \bar{M}$ . В частности, замыкание связного множества связно.

Какое доказательство, доказывает данную теорему?

Ответы:

1. Доказательство. Предположив противное, мы получили бы, что множества  $\Phi_1 = M \cap G_i, i=1,2$ , непусты, открыты в индуцированной топологии подпространства  $M \subset X$  и в объединении дают  $M$ . Это противоречило бы связности  $M$ .

2. Доказательство. Допустим, что  $M = \Phi_1 \cup \Phi_2$ , где  $\Phi_1, \Phi_2$  непусты, открыты и  $\Phi_1 \cap \Phi_2 = \emptyset$ . Т.к. все  $M_{\alpha} \subset \Phi_1 \cup \Phi_2$ , то по теореме (3.1) каждое из  $M_{\alpha}$  лежит в  $\Phi_1$  либо в  $\Phi_2$ . Но поскольку их пересечение непусто, то все они лежат лишь в одном  $\Phi_i, i = 1,2$ , поэтому другое пусто вопреки предположению.

3. Доказательство. Представим  $M_0$  в виде  $M_0 = \Phi_1 \cup \Phi_2, \Phi_i$  — открыты и  $\Phi_1 \cap \Phi_2 = \emptyset$ . Т.к.  $M \subset M_0$  связно, то по теореме (3.1) оно лежит в одном из  $\Phi_i$ , скажем, в  $\Phi_1$ . В силу открытости  $\Phi_2$ , имеем  $\bar{M} \cap \Phi_2 = \emptyset$ , откуда  $M_0 \subseteq \bar{M} \subset \Phi_1$  т.е.  $\Phi_2 = \emptyset$ .

4. Доказательство. Пусть  $f : X \rightarrow Y = f(X)$  — непрерывное отображение. Если  $Y$  — несвязно, то  $Y = \Phi_1 \cup \Phi_2$ , где  $\Phi_1 \cap \Phi_2 = \emptyset, \Phi_1, \Phi_2$  — открыты, непусты. Следовательно,  $X = f^{-1}(\Phi_1) \cup f^{-1}(\Phi_2)$ , где  $f^{-1}(\Phi_i)$  — непусты, открыты (в силу непрерывности  $f$ ) и не пересекаются. Полученное противоречие со связностью  $X$  доказывает теорему.

### Вопрос 27.

Теорема. Образ при непрерывном отображении связного пространства связан.

Какое доказательство, доказывает данную теорему?



Ответы:

1. Доказательство. Предположив противное, мы получили бы, что множества  $\Phi_1 = M \cap G_i, i=1,2$ , непусты, открыты в индуцированной топологии подпространства  $M \subset X$  и в объединении дают  $M$ . Это противоречило бы связности  $M$ .

2. Доказательство. Допустим, что  $M = \Phi_1 \cup \Phi_2$ , где  $\Phi_1, \Phi_2$  непусты, открыты и  $\Phi_1 \cap \Phi_2 = \emptyset$ . Т.к. все  $M_\alpha \subset \Phi_1 \cup \Phi_2$ , то по теореме (3.1) каждое из  $M_\alpha$  лежит в  $\Phi_1$  либо в  $\Phi_2$ . Но поскольку их пересечение непусто, то все они лежат лишь в одном  $\Phi_i, i = 1,2$ , поэтому другое пусто вопреки предположению.

3. Доказательство. Представим  $M_0$  в виде  $M_0 = \Phi_1 \cup \Phi_2, \Phi_i$  — открыты и  $\Phi_1 \cap \Phi_2 = \emptyset$ . Т.к.  $M \subset M_0$  связно, то по теореме (3.1) оно лежит в одном из  $\Phi_i$ , скажем, в  $\Phi_1$ . В силу открытости  $\Phi_2$ , имеем  $\bar{M} \cap \Phi_2 = \emptyset$ , откуда  $M_0 \subseteq \bar{M} \subset \Phi_1$  т.е.  $\Phi_2 = \emptyset$ .

4. Доказательство. Пусть  $f : X \rightarrow Y = f(X)$  — непрерывное отображение. Если  $Y$  — несвязно, то  $Y = \Phi_1 \cup \Phi_2$ , где  $\Phi_1 \cap \Phi_2 = \emptyset, \Phi_1, \Phi_2$  — открыты, непусты. Следовательно,  $X = f^{-1}(\Phi_1) \cup f^{-1}(\Phi_2)$ , где  $f^{-1}(\Phi_i)$  — непусты, открыты (в силу непрерывности  $f$ ) и не пересекаются. Полученное противоречие со связностью  $X$  доказывает теорему.

### Вопрос 28.

Какую из четырех теорем доказывает приведенное ниже доказательство?

Доказательство: Если  $\{\mathcal{V}_\alpha\}$  — открытое покрытие множества  $F$ , то  $\{\mathcal{V}_\alpha\} = \mathcal{U}_\alpha \cap F$ , где  $\mathcal{U}_\alpha$  открыты в  $X$ . Тогда семейство  $\{\{\mathcal{U}_\alpha\}, X \setminus F\}$  — открытое покрытие пространства  $X$ . В силу компактности  $X$  найдется конечное семейство  $\{\{\mathcal{U}_{\alpha_k}\}_{k=1, \overline{N}}, X \setminus F\}$ , покрывающее  $X$ .

Поэтому семейство  $\{\{\mathcal{V}_{\alpha_k}\}_{k=1, \overline{N}}, X \setminus F\}$  покрывает  $F$ .

Ответы:

1. Теорема. Всякое замкнутое подмножество  $F$  компактного пространства  $X$  компактно.

2. Теорема. Всякое компактное подмножество хаусдорфова пространства замкнуто.

3. Теорема. Пусть  $f : X \rightarrow X'$  — непрерывное отображение компактного топологического пространства  $X$  в топологическое пространство  $X'$ . Тогда образ  $f(X)$  компактен.

4. Теорема. Пусть  $X$  — компактное топологическое пространство и  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  — непрерывная функция. Тогда  $f$  ограничена и достигает на  $X$  верхней и нижней грани.

### Вопрос 29.

Какую из четырех теорем доказывает приведенное ниже доказательство?

Доказательство: Пусть  $\sigma = \{\mathcal{U}_\alpha\}$  — открытое покрытие образа  $f(X)$ . Тогда  $\{f^{-1}\{\mathcal{U}_\alpha\}\}$  — открытое покрытие пространства  $X$ . Извлекая из этого покрытия конечное подпокрытие  $\{f^{-1}\{\mathcal{U}_{\alpha_k}\}\}_{k=1, \overline{N}}$ , мы получим, что  $\{\mathcal{U}_{\alpha_k}\}_{k=1, \overline{N}}$  — конечное подпокрытие покрытия  $\sigma$ .

Ответы:

1. Теорема. Всякое замкнутое подмножество  $F$  компактного пространства  $X$  компактно.

2. Теорема. Всякое компактное подмножество хаусдорфова пространства замкнуто.

3. Теорема. Пусть  $f : X \rightarrow X'$  — непрерывное отображение компактного топологического пространства  $X$  в топологическое пространство  $X'$ . Тогда образ  $f(X)$  компактен.

4. Теорема. Пусть  $X$  — компактное топологическое пространство и  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  — непрерывная функция. Тогда  $f$  ограничена и достигает на  $X$  верхней и нижней грани.

### Вопрос 30.

Доказательство: Пусть  $A$  компактное подмножество в  $\mathbb{R}^n$ , и  $A$  замкнуто. Если  $\{B_1(a)\}_{a \in A}$  — открытое покрытие  $A$  шарами радиуса 1 с центрами в точках  $a \in A$ , то и некоторое конечное семейство  $B_1(a_1), \dots, B_1(a_N)$  покрывает  $A$ . Поэтому  $A$  ограничено.

Доказывает ли предложенное доказательство следующее утверждение: Подмножество  $A \subset \mathbb{R}^n$  компактно тогда и только тогда, когда  $A$  замкнуто и ограничено.

Ответы:

1. да.
2. нет.
3. доказывает только что  $A$  ограничено.
4. доказывает компактность  $A$ .

### Вопрос 31.

Пусть  $D$  — область в  $\mathbb{R}^d$ .

Определение: Параметризованной кривой  $\gamma$  в  $D$  называется гладкое непостоянное отображение  $\bar{x}$  некоторого промежутка  $I \subset \mathbb{R}$  в  $D$ ;

$\gamma: \bar{x} = \bar{x}(t), t \in I$ . Если  $I = [a, b]$ , то  $\bar{x}(a)$  называется началом кривой  $\gamma$ , а  $\bar{x}(b)$  — ее концом.

Параметризованная кривая называется *регулярной*, если:

Ответы:

1.  $\bar{x}'(t) \neq 0, \forall t \in I$ ;
2.  $\bar{x}'(t) = 0, \forall t \in I$ ;
3.  $x'(t) \neq 0, \forall t \in I$ ;
4.  $\bar{x}(t) \neq 0, \forall t \in I$ .

### Вопрос 32.

Определение: Связное множество  $\gamma$  в  $D$  называется гладкой кривой в  $D$ , если у каждой точки  $\bar{p} \in \gamma$  существует такая окрестность  $U_{\bar{p}}$ , что:

Ответы:

1.  $\gamma \cap U_{\bar{p}}$  есть образ некоторой регулярной параметризованной кривой;
2.  $\gamma \cup U_{\bar{p}}$  есть образ некоторой регулярной непараметризованной кривой;
3.  $\gamma \cap U_{\bar{p}}$  есть образ некоторой нерегулярной параметризованной кривой;
4.  $\gamma \cup U_{\bar{p}}$  есть образ некоторой нерегулярной непараметризованной кривой.

### Вопрос 33.

Определение: Касательным вектором или вектором скорости параметризованной кривой  $\gamma: \bar{x} = \bar{x}(t)$ , в точке  $\bar{x}_0 = \bar{x}(t_0)$ , называется вектор:

Ответы:

1.  $\bar{v}(\bar{x}_0) := \frac{d\bar{x}}{dt}(\bar{x}_0) = \bar{x}'(t_0)$ ;
2.  $\bar{v}(\bar{x}_0) := \frac{d\bar{x}}{dt}(\bar{x}_0) = \bar{x}(t_0)$ ;
3.  $\bar{v}(\bar{x}_0) := \frac{d\bar{x}}{dt}(\bar{x}_0) = \bar{x}'(t)$ ;
4.  $\bar{v}(\bar{x}_0) := \frac{d\bar{x}}{dt}(\bar{x}_0) \neq \bar{x}'(t_0)$ .

### Вопрос 34.

Диффеоморфизмом называется гладкий гомеоморфизм, у которого обратное отображение также гладкое.

Определение: Длиной дуги  $l(\gamma)$  гладкой параметризованной кривой  $\gamma$  на отрезке  $[a, b]$  называется

Ответы:

1.  $l(\gamma) := \int_a^b |\bar{v}(t)| dt = \int_a^b \left| \frac{d\bar{x}}{dt}(t) \right| dt$ ;
2.  $l(\gamma) := \int_a^b |\bar{v}(t)| dt \neq \int_a^b \left| \frac{d\bar{x}}{dt}(t) \right| dt$ ;
3.  $l(\gamma) := \int_a^b |\bar{v}(t)| dt = \int_b^a \left| \frac{d\bar{x}}{dt}(t_0) \right| dt$ ;

$$4. l(\gamma) := \int_a^b |\bar{v}(t)| dt \neq \int_b^a \left| \frac{d\bar{x}}{dt}(t_0) \right| dt.$$

### Вопрос 35.

Определение: Будем называть две параметризованные кривые  $\bar{x} = \bar{x}(t)$ ,  $t \in I$  и  $\bar{x}_1 = \bar{x}_1(t)$ ,  $t \in I_1$ , эквивалентными, если существует такой диффеоморфизм  $\varphi : I \rightarrow I_1$ , что:

Ответы:

1.  $\bar{x}(t) = \bar{x}_1(\varphi(t))$  для всех  $t \in I$ ;
2.  $\bar{x}(t) \neq \bar{x}_1(\varphi(t))$  для всех  $t \in I$ ;
3.  $\bar{x}(t) = \bar{x}_0(\varphi_0(t))$  для всех  $t \in I$ ;
4.  $\bar{x}(t) \neq \bar{x}_0(\varphi_0(t))$  для всех  $t \in I$ .

### Вопрос 36.

Определение: Говорят, что кривая  $\gamma: \bar{x} = \bar{x}(s)$  параметризована натуральным параметром, если:

Ответы:

1.  $|\bar{x}'(s)| \equiv 1$ ;
2.  $|\bar{x}'(s)| = 1$ ;
3.  $|\bar{x}'(s)| \neq 1$ ;
4.  $|\bar{x}'(s)| \neq 1$ .

### Вопрос 37.

Определение: Пусть кривая  $\gamma: \bar{x} = \bar{x}(s)$  параметризована натуральным параметром. Вектором кривизны  $\bar{k}(s)$  кривой  $\gamma$  в точке  $\bar{x}(s)$  называется вектор:

Ответы:

1.  $\bar{k}(s) \neq \frac{d^2 \bar{x}(s)}{dx^2}$ ;
2.  $\bar{k}(s) := \frac{d^2 \bar{x}(s^2)}{dx^2}$ ;
3.  $\bar{k}(s) := \frac{d^2 \bar{x}(s)}{dx^2}$ ;
4.  $\bar{k}(s^2) := \frac{d^2 \bar{x}(s)}{dx^2}$ ;

### Вопрос 38.

Базисом Френе параметризованной кривой  $\bar{r} = \bar{r}(t)$  называется тройка  $\{\bar{\tau}, \bar{v}, \bar{\beta}\}$ , где  $\bar{\tau}$  - единичный касательный вектор кривой,  $\bar{v}$  - единичный вектор главной нормали,  $\bar{\beta} = \bar{\tau} \times \bar{v}$  - единичный вектор бинормали. Плоскость  $L[\bar{v}, \bar{\beta}]$  называется

Ответы:

1. нормальной плоскостью,
2. спрямляющей плоскостью,
3. соприкасающейся плоскостью,
4. набором из спрямляющей и соприкасающейся плоскостей.

### Вопрос 39.

Базисом Френе параметризованной кривой  $\bar{r} = \bar{r}(t)$  называется тройка  $\{\bar{\tau}, \bar{v}, \bar{\beta}\}$ , где  $\bar{\tau}$  - единичный касательный вектор кривой,  $\bar{v}$  - единичный вектор главной нормали,  $\bar{\beta} = \bar{\tau} \times \bar{v}$  - единичный вектор бинормали. Плоскость  $L[\bar{\tau}, \bar{\beta}]$  называется

Ответы:

1. нормальной плоскостью,
2. спрямляющей плоскостью,
3. соприкасающейся плоскостью,
4. набором из спрямляющей и соприкасающейся плоскостей.

**Вопрос 40.**

Базисом Френе параметризованной кривой  $\vec{r} = \vec{r}(t)$  называется тройка  $\{\vec{\tau}, \vec{\nu}, \vec{\beta}\}$ , где  $\vec{\tau}$  - единичный касательный вектор кривой,  $\vec{\nu}$  - единичный вектор главной нормали,  $\vec{\beta} = \vec{\tau} \times \vec{\nu}$  - единичный вектор бинормали. Плоскость  $L[\vec{\tau}, \vec{\nu}]$  называется

Ответы:

1. нормальной плоскостью,
2. спрямляющей плоскостью,
3. соприкасающейся плоскостью,
4. набором из спрямляющей и соприкасающейся плоскостей.

**Вопрос 41.**

Определение: Скалярное произведение на линейном пространстве

$V$  есть билинейная функция  $(x, y) : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$  со свойствами:

- 1)  $\forall x \in V, (x, x) \geq 0$  и  $(x, x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ , (положительная определенность);
- 2)  $\forall x \in V, (x, x) \leq 0$  и  $(x, x) \neq 0 \Leftrightarrow x = 0$ , (отрицательная определенность);
- 3)  $\forall x, y \in V, (x, y) = (y, x)$ , (симметричность);
- 4)  $\forall x, y, z \in V, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, (\alpha x + \beta y, z) = \alpha(x, z) + \beta(y, z)$ , (линейность).

Введите правильные ответы, через запятую:

**Вопрос 42.**

Базисом Френе параметризованной кривой  $\vec{r} = \vec{r}(t)$  называется тройка  $\{\vec{\tau}, \vec{\nu}, \vec{\beta}\}$ , где  $\vec{\tau}$  - единичный касательный вектор кривой,  $\vec{\nu}$  - единичный вектор главной нормали,  $\vec{\beta} = \vec{\tau} \times \vec{\nu}$  - единичный вектор бинормали. Трехгранником Френе называется

Ответы:

1.  $L[\vec{\nu}, \vec{\beta}]$  нормальная плоскость,
2.  $L[\vec{\tau}, \vec{\beta}]$  спрямляющая плоскость,
3.  $L[\vec{\tau}, \vec{\nu}]$  соприкасающаяся плоскость,
4. Набор из нормальной, спрямляющей и соприкасающейся плоскостей.

**Вопрос 43.**

Площадью области  $U$  на поверхности  $\vec{r} = \vec{r}(u, v), \vec{r} = \vec{r}(x, y, z)$  называется величина .....

где  $U$  — область на поверхности, заданная параметрически как область в плоскости  $(u, v)$ .

Выражение  $\sqrt{g} du dv$  называется дифференциалом (элементом) площади на поверхности с римановой метрикой  $(g_{i,j})$ .

Ответы:

1.  $\sigma(i, j) = \iint_U \sqrt{g} du dv$
2.  $\sigma(U) = \iint_j^i \sqrt{g} du dv$
3.  $\sigma(U) = \iint_i^j \sqrt{g} du dv$
4.  $\sigma(U) = \iint_U \sqrt{g} du dv$

**Вопрос 44.**

Площадь параллелограмма, натянутого на векторы  $\vec{e}_1$  и  $\vec{e}_2$  равна .....

Ответы:

1.  $\sqrt{g} := \sqrt{\det(g_{ij})} = \sqrt{g_{11}g_{22} - g_{12}^2}$
2.  $\sqrt{g} := \sqrt{\det(g_{ij})} = \sqrt{g_{12}g_{21} - g_{12}^3}$
3.  $\sqrt{g} := \sqrt{\det(g_{ij})} = \sqrt{g_{11}g_{12} - g_{12}^2}$

$$4. \sqrt{g} := \sqrt{\det(g_{ij})} = \sqrt{g_{12}g_{22} - g_{12}^2}$$

**Вопрос 45.**

Предел сумм  $S(f, U)$  при  $\Delta u \rightarrow 0$ ,  $\Delta v \rightarrow 0$ , если он существует, называется \_\_\_\_\_ от функции  $f(u, v)$  по области и обозначается

$$\iint_U f(u, v) du dv$$

Введите ответ.

**Вопрос 46.**

Векторы репера Френе удовлетворяют следующему дифференциальному уравнению

Ответы:

1.  $\dot{\bar{\tau}} = k\bar{v}$
2.  $\dot{\bar{v}} = -k\bar{\tau} + \kappa\bar{\beta}$
3.  $\dot{\bar{\beta}} = -\kappa\bar{v}$
4. Всем перечисленным.

**Вопрос 47.**

Регулярной  $k$ -мерной параметризованной поверхностью в  $\mathbb{R}^d$  называется

Ответы:

1. гладкое отображение  $f$  некоторой области  $D \subset \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$ , имеющее ранг  $k$  в каждой точке из  $D$ .
2. параметризованное отображение  $f$  некоторой области в  $\mathbb{R}^d$
3. множество  $\Pi$  имеющее такую окрестность  $U_{\bar{x}_0}$ , что  $\Pi \cap U_{\bar{x}_0}$
4. образ некоторой регулярной  $k$ -мерной поверхности. Если  $\Pi \cap U_{\bar{x}_0} = \bar{\varphi}(G)$ , где  $G \subset \mathbb{R}^k$

**Вопрос 48.**

Множество  $\Pi$  из  $\mathbb{R}^d$  называется гладкой  $k$ -мерной поверхностью, если

Ответы:

1. каждая точка  $\bar{x}_0$  множества  $\Pi$  имеет такую окрестность  $U_{\bar{x}_0}$ , что  $\Pi \cap U_{\bar{x}_0}$  есть образ некоторой регулярной  $k$ -мерной параметризованной поверхности.
2. имеется отображение  $f$  некоторой области  $D \subset \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$ , имеющее ранг  $k$  в каждой точке из  $D$ .
3. множество  $\Pi$  имеет такую окрестность  $U_{\bar{x}_0}$ , что  $\Pi \cap U_{\bar{x}_0}$
4. имеется образ некоторой регулярной  $k$ -мерной поверхности и  $\Pi \cap U_{\bar{x}_0} = \bar{\varphi}(G)$ , где  $G \subset \mathbb{R}^k$

**Вопрос 49.**

Что из перечисленного является Евклидовой метрикой.

Ответы:

1.  $D = \mathbb{R}^k, ds^2 = (dx^1)^2 + (dx^2)^2 + \dots + (dx^k)^2, g_{ij} = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$

2. Верхняя полуплоскость:  $H = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, y > 0\}$ .

$$ds^2 = \frac{dx^2 + dy^2}{y^2}.$$

3. Единичный круг:  $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x^2 + y^2 < 1\}$ .

$$ds^2 = \frac{dx^2 + dy^2}{(1 - x^2 - y^2)^2}.$$

4. Все перечисленное.

**Вопрос 50.**

Что из перечисленного является верхней полуплоскостью.

Ответы:

1.  $D = \mathbb{R}^k, ds^2 = (dx^1)^2 + (dx^2)^2 + \dots + (dx^k)^2, g_{ij} = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$

2.  $H = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, y > 0\}. ds^2 = \frac{dx^2 + dy^2}{y^2}.$

3.  $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x^2 + y^2 < 1\}. ds^2 = \frac{dx^2 + dy^2}{(1 - x^2 - y^2)^2}.$

4. Все перечисленное.

**Вопрос 51.**

Что из перечисленного является единичным кругом.

Ответы:

1.  $D = \mathbb{R}^k, ds^2 = (dx^1)^2 + (dx^2)^2 + \dots + (dx^k)^2, g_{ij} = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$

2.  $H = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, y > 0\}. ds^2 = \frac{dx^2 + dy^2}{y^2}.$

3.  $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x^2 + y^2 < 1\}. ds^2 = \frac{dx^2 + dy^2}{(1 - x^2 - y^2)^2}.$

4. Все перечисленное.

**Вопрос 52.**

Что из перечисленного является сферической метрикой.

Ответы:

1.  $D = \mathbb{R}^k, ds^2 = (dx^1)^2 + (dx^2)^2 + \dots + (dx^k)^2, g_{ij} = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$

2.  $H = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, y > 0\}. ds^2 = \frac{dx^2 + dy^2}{y^2}.$

3.  $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x^2 + y^2 < 1\}. ds^2 = \frac{dx^2 + dy^2}{(1 - x^2 - y^2)^2}.$

4.  $f := \begin{cases} x = R \cos \varphi \cos \psi, & \varphi - \text{широта}, \varphi \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \\ y = R \cos \varphi \sin \psi, & \psi - \text{долгота}, \psi \in (-\pi, \pi) \\ z = R \sin \varphi \end{cases}$

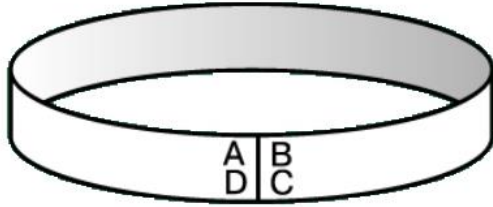
**Вопрос 53.**

Какая из представленных картинок является листом Мёбиуса

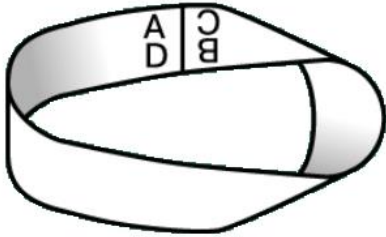
Ответы:



1.



2.



3.

4. Ни одна из представленных картинок.

#### Вопрос 54.

Операция ковариантного дифференцирования  $\nabla$  обладает следующими свойствами:

- 1)  $\nabla(\alpha T + \beta U) = \alpha \nabla T + \beta \nabla U$ , (линейность);
- 2) для любого тензора  $T$  типа  $(p, q)$   $\nabla T$  — тензор типа  $(p, q + 1)$ ;
- 3) для скалярного поля  $f$  (тензора типа  $(0, 0)$ )  $\nabla f = \left\{ \frac{df}{dx^k} \right\} = grad(f)$ ;
- 4) для ковариантной производной справедлива формула Лейбница:  
для любых тензоров  $\{T_j^l\}$  и  $\{U_L^K\}$   $\nabla_S(T_j^l \cdot U_L^K) = (\nabla_S T_j^l) \cdot U_L^K + T_j^l \cdot (\nabla_S U_L^K)$ .

Введите правильные ответы, через запятую:

#### Вопрос 55.

Риманова связность обладает следующими свойствами

- 1) симметричность,  $\Gamma_{jk}^i = \Gamma_{kj}^i$ ;
- 2) метрический тензор ковариантно постоянен, то есть,  $\nabla_k g_{ij} = 0$  для всех  $k, i, j$ ;
- 3) свойства 1) и 2) — характеристические свойства римановой связности, т. е. коэффициенты симметричной аффинной связности, относительно которой метрика ковариантно постоянна и вычисляется по формуле:

$$\Gamma_{jk}^i = \frac{1}{2} g^{is} \left( \frac{\partial g_{sr}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{js}}{\partial x^k} - \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^s} \right).$$

Введите правильные ответы, через запятую:

#### Вопрос 56.

Тензор кривизны Римана типа  $(1, 3)$ :

Ответы:

1.  $R_{ijkl} := g_{is} R_{jkl}^s$ .
2.  $R_{ij} := R_{isj}^s$ .
3.  $R := g^{js} R_{js} = g^{js} R_{jps}^p = g^{js} g^{ip} R_{ijps}$ .
4.  $R_{sij}^k = \frac{\partial \Gamma_{js}^k}{\partial x^i} - \frac{\partial \Gamma_{is}^k}{\partial x^j} + \Gamma_{ip}^k \Gamma_{js}^p - \Gamma_{jp}^k \Gamma_{is}^p$ .

#### Вопрос 57.

Тензор кривизны Римана типа  $(0, 4)$ :

Ответы:

1.  $R_{ijkl} := g_{is} R_{jkl}^s$ .

2.  $R_{ij} := R_{isj}^s$ .
3.  $R := g^{js} R_{js} = g^{js} R_{jps}^p = g^{js} g^{ip} R_{ijps}$ .
4.  $R_{sij}^k = \frac{\partial \Gamma_{js}^k}{\partial x^i} - \frac{\partial \Gamma_{is}^k}{\partial x^j} + \Gamma_{ip}^k \Gamma_{js}^p - \Gamma_{jp}^k \Gamma_{is}^p$ .

### Вопрос 58.

Тензор кривизны Риччи:

Ответы:

1.  $R_{ijkl} := g_{is} R_{jkl}^s$ .
2.  $R_{ij} := R_{isj}^s$ .
3.  $R := g^{js} R_{js} = g^{js} R_{jps}^p = g^{js} g^{ip} R_{ijps}$ .
4.  $R_{sij}^k = \frac{\partial \Gamma_{js}^k}{\partial x^i} - \frac{\partial \Gamma_{is}^k}{\partial x^j} + \Gamma_{ip}^k \Gamma_{js}^p - \Gamma_{jp}^k \Gamma_{is}^p$ .

### Вопрос 59.

Уравнение скалярной кривизны:

Ответы:

1.  $R_{ijkl} := g_{is} R_{jkl}^s$ .
2.  $R_{ij} := R_{isj}^s$ .
3.  $R := g^{js} R_{js} = g^{js} R_{jps}^p = g^{js} g^{ip} R_{ijps}$ .
4.  $R_{sij}^k = \frac{\partial \Gamma_{js}^k}{\partial x^i} - \frac{\partial \Gamma_{is}^k}{\partial x^j} + \Gamma_{ip}^k \Gamma_{js}^p - \Gamma_{jp}^k \Gamma_{is}^p$ .

### Вопрос 60.

Тензор кривизны римановой связности типа (0, 4) обладает следующими свойствами симметрии:

- 1)  $R_{ijkl} = -R_{ijlk}$  (кососимметричность по второй паре индексов)
- 2)  $R_{ijkl} = R_{klij}$  (симметричность по парам индексов)
- 3)  $R_{ijkl} = R_{jilk}$  (кососимметричность по первой паре индексов)

Введите правильные ответы, через запятую:



## Темы рефератов

по дисциплине «Элементы топологии»

1. Индуктивные системы абелевых групп и ассоциированные группы гомологии.
2. Проективные системы абелевых групп.
3. Группы когомологий, ассоциированные с проективной системой.
4. Точная последовательность когомологий пары проективных систем.
5. Резольвенты проективной системы.
6. Тонкие проективные системы на паракомпактных пространствах.
7. Индуктивные семейства проективных систем.
8. Пучки абелевых групп над топологическим пространством.  
Гомотопические группы.
- 9 Абсолютные гомотопические группы топологического пространства.
10. Группы гомотопий стягиваемого пространства.
11. Связь с группами гомологии.
12. Гомотопические группы сферы  $S$ .
13. Коммутативность групп.
14. Относительные гомотопические группы.
15. Теорема Гуревича. Определение многообразия.
16. Дифференцируемые многообразия.
17. Проективная система, определенная дифференцируемой структурой.
18. Векторы, касательные к дифференцируемому многообразию.
19. Расслоенное пространство ковариантных касательных векторов.
20. Определение связности в тройке.
21. Альтернированные тензорные поля.
22. Теорема де Рама.
23. Присоединение симплициального комплекса.
24. Теорема Пуанкаре.
25. Формула Стокса.
26. Главные расслоенные многообразия со слоем.

## **5. Методические материалы, определяющие процедуры оценивания компетенции**

### **5.1 Критерии оценивания вопросов для устного опроса:**

Оценка **«отлично»** выставляется за глубокое знание предусмотренного программой материала, за умение четко, лаконично и логически последовательно отвечать на поставленные вопросы.

Оценка **«хорошо»** – за твердое знание основного (программного) материала, за грамотные, без существенных неточностей ответы на поставленные вопросы.

Оценка **«удовлетворительно»** – за общее знание только основного материала, за ответы, содержащие неточности или слабо аргументированные, с нарушением последовательности изложения материала.

Оценка **«неудовлетворительно»** – за незнание значительной части программного материала, за существенные ошибки в ответах на вопросы, за неумение ориентироваться в материале, за незнание основных понятий дисциплины.

### **5.2 Критерии оценивания экзамена:**

Оценка **«отлично»** выставляется за глубокое знание предусмотренного программой материала, содержащегося в основных и дополнительных рекомендованных литературных источниках, за умение четко, лаконично и логически последовательно отвечать на поставленные вопросы, за умение анализировать изучаемые явления в их взаимосвязи и диалектическом развитии, применять теоретические положения при решении практических задач.

Оценка **«хорошо»** – за твердое знание основного (программного) материала, включая расчеты (при необходимости), за грамотные, без существенных неточностей ответы на поставленные вопросы, за умение применять теоретические положения для решения практических задач.

Оценка **«удовлетворительно»** – за общее знание только основного материала, за ответы, содержащие неточности или слабо аргументированные, с нарушением последовательности изложения материала, за слабое применение теоретических положений при решении практических задач.

Оценка **«неудовлетворительно»** – за незнание значительной части программного материала, за существенные ошибки в ответах на вопросы, за неумение ориентироваться в расчетах, за незнание основных понятий дисциплины.

### **5.3 Критерии оценивания коллоквиума:**

Оценка **«отлично»** выставляется за глубокое знание предусмотренного программой материала, за умение четко, лаконично и логически последовательно отвечать на поставленные вопросы.

Оценка **«хорошо»** – за твердое знание основного (программного) материала, за грамотные, без существенных неточностей ответы на поставленные вопросы.

Оценка **«удовлетворительно»** – за общее знание только основного материала, за ответы, содержащие неточности или слабо аргументированные, с нарушением последовательности изложения материала.

Оценка **«неудовлетворительно»** – за незнание значительной части программного материала, за существенные ошибки в ответах на вопросы, за неумение ориентироваться в материале, за незнание основных понятий дисциплины.

#### **5.4 Критерии оценивания тестирования**

При тестировании все верные ответы берутся за 100%.

90%-100% отлично

75%-90% хорошо

60%-75% удовлетворительно

менее 60% неудовлетворительно

#### **5.5 Критерии оценивания рефератов:**

Оценка **«отлично»** выставляется за глубокое знание предусмотренного программой материала, за умение четко, лаконично и логически последовательно отвечать на поставленные вопросы.

Оценка **«хорошо»** – за твердое знание основного (программного) материала, за грамотные, без существенных неточностей ответы на поставленные вопросы.

Оценка **«удовлетворительно»** – за общее знание только основного материала, за ответы, содержащие неточности или слабо аргументированные, с нарушением последовательности изложения материала.

Оценка **«неудовлетворительно»** – за незнание значительной части программного материала, за существенные ошибки в ответах на вопросы, за неумение ориентироваться в материале, за незнание основных понятий дисциплины.